APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA

JESÚS ADRIÁN ANTONIO PEÑA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE POSGRADOS

MAESTRÍA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2020

APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE NÚMEROS COMPLEJOS DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA.

JESÚS ADRIÁN ANTONIO PEÑA

Trabajo de investigación presentado cómo requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación Matemática.

DIRECTORA

OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO

DR. CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE POSGRADOS

MAESTRÍA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2020

Contenido

Tablas

Figuras

Nota de Aceptación

____
____
____
____

Jurado 1

____
____
____
____

Jurado 2

____
____
____
____

Tunja, Fecha de sustentación: ________________________

Dedicatoria

Este trabajo de grado está dedicado a todas aquellas personas que hicieron parte de este proceso, a mis padres, hermanos, docentes, amigos y especialmente a Dios que me brindó el espacio y la sabiduría para dar por terminado este proceso educativo.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por brindarme la oportunidad de culminar este proceso educativo.

A mis padres Cristóbal Antonio y Nohora Peña, mis hermanos Yeidy, Deiby y Celso.

A la Doctora Omaida Sepúlveda, quien con su apoyo constante, su motivación y su experiencia hizo posible la realización de este trabajo.

A mi compañero y amigo de mil batallas Cristián Garzón.

A los docentes y compañeros, de la maestría en Educación Matemática por compartir sus experiencias y su conocimiento.

.

A nuestra alma mater Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por brindarme la posibilidad de formarme como licenciado y Magister en Educación Matemática.

Resumen

El presente trabajo de investigación surge como resultado de la experiencia respecto a la práctica docente, donde se reconoce, que el concepto de Número Complejo junto con sus operaciones reciben un tratamiento netamente analítico, lo cual genera dificultades en la comprensión de los estudiantes y genera un aprendizaje parcial, al dejar de lado sus representaciones gráficas, hecho que se pueden evidenciar en los trabajos de investigación que sirven de antecedentes al presente estudio. De esta reflexión nace la idea de diseñar diversas actividades que vinculen los dos tipos de representación. De acuerdo a estos argumentos, en el estudio se establece como pregunta de investigación ¿Cómo construir análisis didácticos, que permitan estudiar como comprenden los estudiantes de grado noveno de una institución educativa de carácter privado de la ciudad de Zipaquirá el objeto números complejos? El trabajo se enfoca entonces en el análisis de cómo comprenden los estudiantes el concepto de número complejo a partir de situaciones propuestas. Para su desarrollo, se adopta un enfoque cualitativo y la metodología de la investigación-acción abordando análisis de tipo descriptivos. Como instrumentos de recolección de información se utilizan: la observación y grabaciones en audio y video por medio de la plataforma Zoom Education y las actividades desarrolladas por los estudiantes recopiladas por medio de la plataforma Classroom y formularios de Google. El análisis de resultados del estudio nos permite mostrar que la Teoría de las Situaciones Didácticas junto con el Software GeoGebra aportan herramientas significativas para la enseñanza y aprendizaje de los números complejos, convirtiéndose en una estrategia de enseñanza y aprendizaje potencial para el tránsito entre los registros algebraicos y gráficos.

Palabras clave: Números Complejos, Software educativo, GeoGebra, Teoría de las situaciones didácticas

Abstract

The present research work arises as a result of the experience regarding the teaching practice, where is recognized according to the reflection, that the concept of complex number together with its operations receive a net analytical treatment, which generates difficulties in the students' comprehension and generates a partial learning, when leaving aside their graphic representations, fact that can be evidenced in the research works that serve as background to this study. From this reflection, the idea of designing diverse activities that link the two types of representation is born. According to these arguments, the study establishes as a research question: How to implement didactic analysis, which allows studying how students understand the object of complex numbers? The work is then focused on the analysis of how students understand the concept of complex numbers from proposed situations. For its development, a qualitative approach is adopted and the action-research methodology is approached throughout descriptive analysis. As instruments of information, collection is used: observation and audio and video recordings throughout the Zoom Education platform and activities developed by students collected throughout the Classroom and Google forms platform. The analysis of the results of the study allows us to show that the Theory of Didactic Situations together with the GeoGebra Software provides significant tools for the teaching and learning of complex numbers, becoming a potential teaching and learning strategy for the transit between algebraic and graphical records.

Keywords: Complex Numbers, Educational Software, GeoGebra, Theory of Didactic Situations

Introducción

El presente trabajo desarrolla un estudio centrado en el diseño de una propuesta de aprendizaje para los números complejos, enfatizando en la construcción de los objetos geométricos y presenta el proceso investigativo, el cual permitió dar respuesta la pregunta de investigación ¿Cómo construir análisis didácticos, que permitan estudiar como comprenden los estudiantes de grado noveno de una institución educativa de carácter privado de la ciudad de Zipaquirá el objeto números complejos? El abordaje se presenta desde las dificultades de los estudiantes, las concepciones de los docentes, la reconstrucción del estudio epistemológico del objeto matemático y el análisis conceptual del objeto; por tanto, se propone como objetivo general: Implementar un análisis didáctico que lleve a la comprensión de los números complejos mediante la modelación de un conjunto de situaciones didácticas con el software GeoGebra para los estudiantes de grado noveno.

Se asume como referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), propuestas por Brousseau (2007), dentro de una investigación con enfoque cualitativo, dado que se busca analizar los procesos y acciones de los estudiantes frente a la estrategia de enseñanza, en la cual se modela un conjunto de situaciones didácticas con el software. El diseño metodológico que adopta el trabajo corresponde a la investigación acción, ya que pretende mejorar el aprendizaje y con el análisis de los resultados, se pretende adquirir una (re)significación (Jiménez y Riscanevo, 2017) de la forma de enseñanza, pasando de la concepción tradicional a implementar un software como herramienta para la enseñanza, cambiando el paradigma de la estrategia centrada en la clase teórica y sin aplicación, a que sea el estudiante quien construye su propio concepto.

El proceso investigativo alcanzado se organiza en cinco capítulos: en el primer capítulo, se describe el problema de investigación, partiendo de las dificultades relacionadas con el aprendizaje de los números complejos, sustentado en investigaciones que se muestran posteriormente en los antecedentes; por lo cual, se evidencia la importancia de estudiar la comprensión de los números complejos, esto, como punto de partida para plantear los objetivos a desarrollar en el trabajo de investigación.

En el segundo capítulo, se consulta sobre el aprendizaje de los estudiantes en relación con el objeto matemático números complejos, realizando énfasis en los estudios que se han realizado en el tratamiento de los registros algebraicos y gráficos. Se divide esta sección en dos partes: La primera, hace referencia a los antecedentes nacionales e internacionales respecto a las investigaciones que se han realizado con la TSD y con el objeto; en la segunda, se hace énfasis en el fundamento teórico que se va a tener como referencia para la puesta en marcha de la investigación, en este caso la TSD, junto con los aportes de los Registros de Representación Semiótica (RRS); concluyendo este capítulo con la caracterización de la tecnología en Educación Matemática, haciendo énfasis en los programas computacionales manejados por los profesores, donde se describe la importancia del software GeoGebra, que para este estudio corresponde a uno de los medios de interacción de los estudiantes.

En el tercer capítulo, se describe la metodología utilizada en el desarrollo del trabajo; se describe el enfoque cualitativo del estudio, en el cual se sustenta el trabajo, luego se presenta el diseño de la investigación siguiendo la metodología propuesta por la Investigación-acción, donde se concreta cada una de las fases del estudio; la población objeto de estudio, las técnicas e instrumentos para la recolección y análisis de los datos al tener presente el tiempo de pandemia, y se clausura el capítulo con la descripción de las categorías de análisis de la información.

Posteriormente en el cuarto capítulo, se describe el desarrollo de las fases de la Investigación-acción: en la fase de planificación, se evidencian según los antecedentes de investigación los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números complejos; la actividad diagnóstica realizada a los docentes donde se indaga sobre las concepciones y estrategias para la enseñanza de los números complejos; se realiza un breve recuento de la historia de los números complejos y los aportes más importantes de los matemáticos según la época.

Se continúa con la presentación del análisis curricular donde se analiza la forma de presentar el tema y la importancia que se da a la representación geométrica en los libros de educación secundaria, posteriormente se realiza un análisis de contenido, para evidenciar la importancia del registro geométrico para la interpretación de los números complejos y finalmente, se muestran los resultados obtenidos en cada una de las situaciones planteadas siguiendo la propuesta de la TSD, y realizando un análisis descriptivo de acuerdo a las categorías de análisis donde se hace énfasis a los RRS, específicamente al tratamiento y la conversión que se pueden dar en las situaciones planteadas (Duval, 1993).

Finalmente, se presentan las conclusiones del estudio donde se resalta la importancia del uso del software GeoGebra en la enseñanza de los números complejos, específicamente para su representación, ya que permite un tránsito adecuado entre los registros algebraico y geométrico y viceversa, de esta forma se concluye que el estudiante comprende adecuadamente el objeto de los números complejos, pues en este aspecto Duval (1999) declara que: “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (p.186).

Capítulo 1. Marco Investigativo

En este capítulo se describe el problema de investigación, y se realiza un recuento sobre las dificultades relacionadas con el aprendizaje de los números complejos; se identifica y describe el problema de investigación para mostrar la importancia de estudiar la comprensión de los números complejos, con base en la descripción de las problemáticas encontradas se plantea la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos planteados para el desarrollo del trabajo.

Problema de investigación

El objeto números complejos es de gran importancia para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes [EBCM] (2006), aunque, se está dejando de lado en los contenidos temáticos del grado noveno. Esto se evidencia en los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas, y específicamente en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM) y en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), del ministerio de educación nacional ya que en la actualidad no hacen referencia al tema en forma explícita [EBCM] (2006).

Las representaciones y operaciones con los números complejos, se pueden establecer de manera algebraica y geométrica: en este aspecto, las investigaciones evidencian que los estudiantes presentan dificultades en la construcción del significado geométrico de número complejo (Randolph y Parraguez, 2019). Además, de las dificultades que se evidencian en la búsqueda de estrategias para su enseñanza especialmente las relacionadas con el diseño de situaciones didácticas por los docentes (Brousseau, 1990), a esto, se le suma la apatía y el desinterés que manifiestan los estudiantes en el tema, en algunas instituciones educativas (Cabrera Ortiz, 2020).

Para superar las dificultades descritas, se han utilizado herramientas tecnológicas, pero estas han sido utilizadas en forma lenta, ya que, aunque el docente las utiliza de manera combinada, como las exposiciones, actividades de modelación e interacción con las TIC, para lograr que el estudiante adquiera el aprendizaje, siempre recurre a la clase magistral (Murillo y Ceballos, 2013). En esta dirección, Segura y Chacón (1996; citado en Cuicas, 2007), afirman que: "la enseñanza tradicional no proporciona al alumno o alumna herramientas para indagar, analizar y discernir la información". (p. 4)

Particularmente, algunas de las problemáticas descritas se evidencian en la institución educativa donde labora el autor de la tesis y donde se llevó a cabo el trabajo investigativo, ya que, aunque el tiempo asignado para el tema es el apropiado, los contenidos temáticos que se abordan son mínimos y dan prioridad al abordaje analítico como se evidencia en los libros de referencia, en este caso se analiza el texto de Algebra y trigonometría (Sullivan, 2012); de esta manera en la institución, las estrategias de enseñanza del objeto números complejos resultan ser las tradicionales, dejando de lado las representaciones gráficas y desaprovechando las herramientas tecnológicas con las cuales cuentan los estudiantes (computador, tablet, celular, etc.) especialmente en el tiempo de pandemia.

Sobre lo expuesto, el presente estudio surge de la reflexión pedagógica del autor de la tesis, en relación con la enseñanza de los números complejos en estudiantes de grado noveno, al evidenciar que los estudiantes tienen un tratamiento analítico con el objeto número complejo, dejando de lado las representaciones geométricas que se pueden trabajar y las herramientas tecnológicas con las cuales cuentan los estudiantes, las cuales pueden servir como medio para el aprendizaje.

Sobre lo expuesto se generan planteamientos como ¿Cuáles han sido las dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de los números complejos y específicamente en la solución y planteamiento de problemas que los involucran? ¿Cuáles son las estrategias que se utilizan para la enseñanza y resolución de problemas relacionados con los Números Complejos?, ¿Cuáles han sido los software educativos utilizados en la enseñanza de los números Complejos? ¿Cuáles son las situaciones didácticas más apropiadas para enseñar el concepto Números Complejos a través de un software?

Por lo cual se establece la necesidad de realizar un trabajo de investigación que permita realizar el abordaje de los Números Complejos empleando herramientas que pueden poseer los estudiantes y que ayuden a relacionar de manera adecuada la forma algebraica con la geométrica.

Formulación del problema

Los interrogantes planteados se concretan en la pregunta:

¿Cómo construir análisis didácticos, que permitan estudiar cómo comprenden los estudiantes de grado noveno de una institución educativa de carácter privado de la ciudad de Zipaquirá el objeto números complejos?

Objetivos

Para el desarrollo del trabajo se especifica la ruta a seguir para llegar al logro del objetivo general propuesto.

Objetivo general

Implementar un análisis didáctico que favorezca la comprensión de los Números Complejos mediante la modelación de un conjunto de situaciones didácticas con el software GeoGebra para los estudiantes de grado noveno.

Objetivos específicos

El objetivo general se descompone en los siguientes objetivos específicos los cuales brindan las condiciones necesarias para dar cumplimiento al objetivo general.

OB1. Caracterizar las dificultades de los estudiantes con el objeto de los números complejos.

OB2. Identificar las estrategias que se utilizan para la enseñanza de los números complejos con estudiantes de bachillerato.

OB3. Reconstruir el estudio histórico- epistemológico del objeto números complejos.

OB4. Diseñar un análisis didáctico que parta de los diversos tipos de situaciones didácticas, según la propuesta de Brousseau, usando como medio de interacción el software GeoGebra para la enseñanza de los números complejos.

OB5. Implementar el análisis didáctico que parte de los diversos tipos de situaciones didácticas, según la propuesta de Brousseau usando como medio de interacción el software GeoGebra para la enseñanza de los números complejos.

OB6. Analizar el aporte del análisis didáctico, y la Teoría de las Situaciones didácticas en el aprendizaje de los Números Complejos por los estudiantes de grado noveno.

Justificación

Según los Estándares de Competencia en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional [EBCM] (2006), los números complejos surgen de la necesidad de resolver cierto tipo de ecuaciones algebraicas que no era posible solucionar con los números reales.

> De esta conceptualización emerge un nuevo número llamado "imaginario" que complementa los números reales y lleva a pensar en un sistema unificado de números llamados "complejos". Estos números tienen importancia ya que desarrollan nuevos tipos

> de representaciones y surge una extensión de las operaciones y las relaciones entre estos nuevos números complejos. (MEN, 1998, p. 60).

Los números complejos, son de gran importancia en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes ya que incorpora una gran carga cognitiva, debido a las extensiones continuas de los sistemas numéricos.

Por tanto el presente estudio es pertinente con los objetivos propuestos, ya que permite favorecer el aprendizaje de los números complejos de forma geométrica, utilizando herramientas tecnológicas, especialmente en tiempos de pandemia, enfatizando en la adición y multiplicación en forma geométrica, promoviendo en cada estudiante un aprendizaje significativo en el área de matemáticas, y una mejora significativa en su comprensión, lo cual ayuda a tratar adecuadamente con el paso del tiempo otros contenidos siguientes en el nivel de secundaria y de la universidad.

En concordancia, la necesidad del uso de situaciones didácticas junto con el software educativo busca el mejoramiento del aprendizaje de los números complejos. Esto se puede justificar por múltiples razones, entre ellas se pretende realizar aportes para superar las dificultades que presentan los estudiantes cuando muestran desinterés y poco agrado por la asignatura de matemáticas, junto a la escasa comprensión a la que se llega del concepto de los números complejos, ya que esto no permite la aprehensión de los conocimientos y el avance en contenidos, lo cual se refleja en el bajo desempeño académico (Erazo, 2011).

Por tanto, es significativo realizar este estudio, puesto que, los números complejos son una línea de investigación que frecuentemente se deja de lado al restarle importancia a sus contenidos temáticos en secundaria, tal como se evidencia en los EBCM (2006), ya que no hacen referencia explícita al tema enfocándose más en los tratamientos que se realizan con los números reales.

En este sentido, el capítulo de antecedentes estudia como los estudiantes de bachillerato comprenden los números complejos y se muestran investigaciones que evidencian los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números complejos. Al respecto, Martínez (2006; Citado en Carrasco, 2017) afirma que la multiplicación de los números complejos al ser vinculada con las representaciones algebraica y geométrica, proporciona mejoras en la comprensión del objeto matemático.

Al respecto, Canal (2012), Carrasco (2017), Raldoft y Parraguez (2019) sustentan su trabajo de investigación mencionando la importancia de buscar estrategias para enseñar estas operaciones con herramientas tecnológicas, que permitan realizar un tránsito adecuado entre los registros de representación y mostrar las representaciones de forma geométrica, ya que los textos suelen presentarlos solo en forma algebraica, lo cual implica una mirada deficiente e incompleta, provocando un aprendizaje parcial.

Capítulo 2. Marco teórico

En este apartado, se indaga acerca del aprendizaje de los estudiantes en relación con el objeto matemático número complejo; para esto, se divide la sección en dos partes. La primera hace referencia a los antecedentes nacionales e internacionales respecto a investigaciones que se han realizado empleando la TSD, y diversos marcos teóricos; en la segunda parte, se hace énfasis en el fundamento teórico que se va a tener como referencia para la puesta en marcha de la investigación, la TSD, y los RRS, concluyendo el capítulo con la caracterización del software GeoGebra, que se utiliza como medio de interacción de los estudiantes para la comprensión del objeto matemático, según los planteamientos de la TSD.

Antecedentes de estudio

Estudios relacionados con las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los números complejos

Randolph y Parraguez (2019), muestran una investigación sobre cómo los estudiantes de educación escolar y universitaria comprenden el sistema de los números complejos y sobre cómo es posible alcanzar una comprensión profunda de estos objetos. En el estudio utilizaron el enfoque cognitivo, y la teoría de los modos de pensamiento para el análisis de los datos.

Se realizó un estudio histórico-epistemológico y matemático, donde se caracterizan los tres modos de pensamiento, Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural; para esto, se aplicaron dos cuestionarios de actividades matemáticas a cinco estudiantes; tomando como referencia que las evidencias indican que los estudiantes no tienen construido un significado geométrico concreto de los números complejos.

Los autores presentan cómo principales conclusiones que para alcanzar una comprensión profunda del sistema de números complejos, se requiere conocer y dominar los tres modos de pensar el sistema numérico.

Para el caso de los estudiantes del nivel escolar, se expresa que estos resuelven varias actividades desde los modos de pensar del sistema de los números reales y no desde los modos de pensar del sistema de los números complejos, dando cuenta de un sesgo de los números reales sobre los números complejos.

Este trabajo aporta a la investigación una idea clara sobre cómo aprenden los estudiantes el concepto de los números complejos y los modos de pensamiento, además, brinda referentes teóricos acerca de las investigaciones que se han realizado respecto a la forma de comprender el objeto de los complejos.

Como un segundo referente para esta investigación se presenta el trabajo de Aznar, Moler y Pesa (2009), quienes muestran un análisis semiótico sobre las dificultades que presentan los alumnos al realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico en el conjunto de los números complejos.

A pesar del trabajo previamente realizado para que los estudiantes superaran las dificultades, se evidenciaron graves errores en la solución de las actividades planteadas, además se observó que los porcentajes de resolución erróneas conducen a la idea de que efectuar transformaciones del registro gráfico al algebraico no está suficientemente afianzado.

En la misma línea se encuentra el trabajo de Buhlea y Gómez (2007), donde los autores realizan una caracterización a tres dificultades emergentes en la enseñanza y aprendizaje de los números complejos, identificadas en el análisis histórico epistemológico que daban lugar a conflictos cognitivos. Se toma como marco de referencia el marco teórico de investigación en

Matemática Educativa de Filloy (1999), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL), donde se procede con la realización de un análisis histórico-epistemológico para ver cómo ha evolucionado y cómo han sido tratados en los libros de textos, antiguos y actuales.

Como principales resultados del estudio, los autores evidencian que el modelo permitió diseñar un cuestionario para estudiantes de bachillerato de ambos países (España y Rumania), con el fin de poder establecer si estas dificultades estaban favorecidas por un determinado modelo de enseñanza o eran consecuencia directa de la complejidad propia de los números complejos; se evidenciaron las dificultades y errores que se presentan conceptualmente como consecuencia de la complejidad del objeto, ya que presentaban errores semejantes a los presentados en la emergencia de los números complejos.

Este trabajo aporta al presente estudio de investigación una idea acerca de cómo plantear las actividades para realizar las transformaciones del registro algebraico al gráfico.

En el trabajo de Pardo y Gómez (2005), se presenta un estudio a nivel universitario en el marco teórico de las investigaciones en matemática educativa de Filloy (1999) denominado Modelos Teóricos Locales (MTL), donde a partir de una revisión histórica preliminar identificaron cuatro grandes etapas caracterizadas por cambios en las concepciones de los números complejos. Las etapas que establecieron corresponden a la: Algebraica, Analítica, Geométrica y Formal.

Para encontrar si los obstáculos aún se presentaban, formularon un cuestionario con una tarea por cada una de las etapas, con excepción de la etapa analítica donde se realizaron dos tareas. Como conclusiones ponen de manifiesto que los estudiantes presentan dificultades en inconsistencias al responder a las tareas de los cuestionarios, los cuales permiten aventurar que se confirma la hipótesis de que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no tiene en cuenta las dificultades que se han presentado a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen, incluso unas de ellas agravadas.

Estudios en estrategias para la enseñanza de los números complejos

Se tiene cómo un primer estudio, el trabajo de tesis de maestría realizado por Canal(2012), quien plantea una forma de introducir el concepto a los estudiantes, ya que comúnmente se enseñan a partir de la solución de ecuaciones que tienen raíces que no pertenecen a los números reales.

El autor muestra un estudio sobre las herramientas que utilizan algunos docentes para la explicación de los números complejos como el uso de la historia, menciona sus ventajas e inconvenientes y el uso de las TIC relacionándolo con el software GeoGebra; partiendo de este antecedente, se interesa por realizar tres actividades de acuerdo al estudio histórico de los números complejos y las TIC, que los relacionen, para utilizarlas como un potente método auxiliar.

En este sentido, realiza el análisis para cada una de las operaciones por medio del software GeoGebra mediante animaciones que planeaba crear, mostrando cada uno de los procesos que se potencian. En cada animación muestra la operación en forma algebraica y en forma geométrica, de manera que el estudiante relaciona las operaciones con algunas utilidades de la vida cotidiana en fractales y electricidad.

Como conclusiones generales el autor afirma que el uso del software favorece la interpretación del concepto de números complejos, además de la ayuda que proporcionan las herramientas tecnológicas en la escuela, resaltando que deberían ser utilizadas cotidianamente y no extemporáneamente, asimismo, evidenciando la importancia que tiene enseñar la historia de estos conceptos a los estudiantes.

Este trabajo aporta al presente estudio la forma cómo se aborda el uso del software para la enseñanza de los números complejos desde la interacción con animaciones.

Estudios relacionados con secuencias didácticas para la enseñanza de los números complejos

Carrasco (2017), presenta una secuencia didáctica para la enseñanza de la multiplicación de números complejos a partir del tránsito entre el registro algebraico y geométrico, tomando como referente la Teoría de las Situaciones Didácticas y propone como objetivo que los estudiantes comprendan y analicen la representación geométrica del producto de números complejos. Como principales resultados el autor evidencia el impacto positivo que generó en los estudiantes la secuencia de clase, además de la importancia del tránsito entre el registro gráfico y el geométrico, ya que ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático.

Este trabajo aporta al presente estudio la forma cómo se aborda el uso del software para la enseñanza de los números complejos desde la interacción con animaciones.

Estudios relacionados con el aprendizaje de los números complejos

En esta categoría, Andrades (2017), realiza una propuesta didáctica para el aprendizaje de la multiplicación de los números complejos, tomando como marco teórico los Registros de Representación Semiótica de Duval (TRRS), comprobando que el único registro que logró un tratamiento correcto fue en el algebraico, mientras que la representación en el registro geométrico fue débil, además de evidenciar un déficit en el lenguaje natural para la argumentación. La investigación aporta al presente trabajo, pautas para el uso del software Geométrico y aportes en el abordaje de los RRS.

Estudios en el uso de Software para la enseñanza y aprendizaje de los números complejos

Toto, Fernández y Crespo (2019), presentan una propuesta para utilizar el software GeoGebra como un medio para el trabajo con los números complejos, muestran su evolución o emergencia a lo largo de la historia y el interés de algunos matemáticos por utilizarlos. Se resalta como en secundaria cuando se enseñan números complejos, se le da prioridad a la forma analítica dejando de lado la parte geométrica. En el trabajo se muestran tres formas de representar los números complejos, iniciando con el paso que se sigue de los números reales a partir de las ecuaciones mayores a segundo grado, que no tienen solución en los métodos tradicionalmente enseñados, para ello se utiliza el software GeoGebra.

La segunda interpretación se da a partir de la definición de números complejos y se asocia con vectores y finalmente se muestra su definición trigonométrica, utilizando la forma polar. Como principal resultado, se plantea que gracias a lo propuesto con el software, se logró un equilibrio entre el cálculo algebraico y la representación gráfica de los resultados; los problemas derivados del cálculo de potencias y raíces mediante la representación trigonométrica de los números complejos, han sido mitigados, manteniendo los fundamentos teóricos-conceptuales del tema.

En este sentido, realiza aportes al trabajo de investigación en cuanto a las tres formas en las cuales se pueden representar estos números; se destaca la forma como se utiliza el software y presenta caminos para ser utilizados en el presente estudio.

En cuanto a los trabajos que involucran al software GeoGebra, y la Teoría de las Situaciones Didácticas, se encuentra el trabajo de García (2014), su tesis de maestría planteó su estudio bajo tres dimensiones: la dimensión histórico-epistemológica, en la cual, hace un recuento del desarrollo histórico del objeto matemático, la dimensión cognitiva, donde realiza un recuento de los significados algebraicos junto con teorías constructivistas y la dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Dentro de los resultados que plantea la autora destaca que el uso del software permitió la construcción del concepto de ecuación, desde la fundamentación epistemológica, didáctica y cognitiva del concepto, permitiendo el diseño de una secuencia estructurada con tareas que orientaron al estudiante en la génesis de su propio aprendizaje. En el mismo sentido se reconoce la necesidad de vincular la Teoría de las Situaciones Didácticas, ya que permitió descubrir la importancia de incorporar nuevas estrategias que permitieran generar ambientes de construcción de nuevos conocimientos.

Este trabajo aporta a la presente investigación en el abordaje de la TSD, al relacionarla con el software GeoGebra como instrumento de investigación.

Referentes teóricos y fundamentos teóricos

Para la puesta en marcha del trabajo de investigación, se describe el fundamento teórico que se tomó como referencia, iniciando con la caracterización de las teorías constructivistas y posteriormente la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) propuestas por Brousseau (2007), los Registros de Representación Semiótica (RRS) propuestos por Duval (2004), concluyendo el capítulo con la caracterización del software GeoGebra, que se adopta como medio de interacción de los estudiantes en términos de la TSD.

Teorías constructivistas

Waldegg (1998) plantea que las teorías constructivistas son ante todo teorías epistemológicas, que “nos proveen de una explicación de cómo se produce el conocimiento y de cuáles son las condiciones para que esta producción tenga lugar” (p.16), haciendo énfasis en que existen varias corrientes epistemológicas que reclaman el apelativo de constructivistas y explica cómo han tenido una fuerte influencia en Educación Matemática en todo el mundo. Del estudio se rescata lo que tienen en común para precisar los componentes que conforman los procesos educativos de las matemáticas.

De igual forma, otro referente del presente trabajo, es Piaget con su afirmación: "El alumno construye su propio conocimiento y actúa en un medio fuente de desequilibrios" (Chamorro, 2005, p. 26); esto lo sustenta precisando que las estructuras tendrán su origen en el objeto y el sujeto; de manera particular nos ubicamos en la propuesta de la TSD que guarda estrecha relación ya que Brousseau (2007) concibe el aprendizaje por adaptación estableciendo que:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p. 30)

Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas se originó en Francia en la década de los años setenta y fue propuesta por Brousseau (2007), quién sustenta su teoría en la concepción constructivista de Piaget.

Como lo afirma Figueroa (2013), esta teoría permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase, concebidas por el profesor, con el fin de disponer de un medio para realizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento nuevo.

Conceptos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas

Una *situación* según Brousseau (2007) "es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado" (p. 17). Al respecto, define *situación didáctica,* como:

> El conjunto de interrelaciones establecidas entre profesor, estudiante y un medio didáctico, que determina un conocimiento dado como un recurso del que dispone un estudiante para alcanzar un estado favorable respecto a la intención de hacer que los alumnos adquieran un determinado saber. (p. 16)

Asimismo, Brousseau (2007), establece que una *Situación a-didáctica,* corresponde al entorno que ha diseñado y puede manipular el docente, como una herramienta para el aprendizaje del estudiante, en el cual se enfrenta solo a la resolución de un problema, experimentando situaciones como investigador, sin que el profesor haga intervenciones relacionadas con el conocimiento que se pretende que el alumno adquiera. En el desarrollo de la actividad, el estudiante adopta el compromiso y la responsabilidad de su aprendizaje, buscando alternativas de solución de manera autónoma, donde podrá interactuar, reflexionar, utilizar estrategias que desencadenarán en una serie de acciones que producirán el conocimiento.

La función principal del docente es diseñar la situación a-didáctica para el estudiante, se limitará a animarlo para solucionar la actividad y hacerle consciente de las acciones que puede realizar para construir su aprendizaje (Chavarría, 2006).

En este sentido, Brousseau (2007) al respecto manifiesta que: “Concierne a las situaciones fuera del contexto de enseñanza y con ausencia de indicaciones intencionales” (p.31), por lo cual, las situaciones a-didácticas pueden ofrecer a los estudiantes la oportunidad de analizar los resultados de su trabajo, para rectificarlo o reafirmarlo, considerando también que estas producciones puede modificar el medio.

Otro componente en la TSD es el *medio,* que corresponde a todos aquellos materiales o elementos (objetos, símbolos) que el alumno es capaz de manipular sin cuestionar su naturaleza, así como todas las actividades de ayuda al estudio como los cursos de matemáticas, y los libros, con él, se busca que el sujeto se encuentre con cuestionamientos respecto a las acciones a seguir para la solución de un problema o actividad; “es considerado como un sistema autónomo y antagonista del sujeto”. (Brousseau, 2007, p. 15)

En la TSD Brousseau (2007), establece que el proceso de *Devolución*, corresponde a la fase de aprendizaje donde el docente responsabiliza al estudiante de la construcción del conocimiento, pero no existe una fase de enseñanza, porque no hay intervención explícita del profesor, este no puede intervenir y decir previamente cual es la respuesta exacta que espera del estudiante; sin embargo, existe un rol protagónico del docente en hacer que el estudiante acepte la responsabilidad de hacerse cargo del problema o de los ejercicios propuestos.

Respecto al *Contrato didáctico,* Brousseau (2007) lo relaciona con el comportamiento que el profesor espera del estudiante y el conjunto de comportamientos que el estudiante espera del profesor, cada uno, el maestro y el estudiante, se hacen una idea de lo que cada uno espera del otro, esta idea favorece la posibilidad de intervención de devolución de las situaciones y de la institucionalización.

En esta teoría, los tipos de interacciones con el medio que se establecen corresponden a: *La situación acción*, que corresponde al primer acercamiento del estudiante con la situación: aquí el estudiante trabaja individualmente con el problema, aplica sus conocimientos previos y toma decisiones para resolverlo después de tener una apreciación clara de la situación; estas interacciones iniciales le ayudan a afirmar sus resultados o a corregirlos y mejorarlos hasta lograr el método correcto de resolución. Al respecto Brousseau (2007) menciona: “La sucesión de situaciones de acción constituye el proceso por el cual el alumno va a “aprenderse” un método de resolución de su problema”. (p. 21)

La *situación de formulación***,** se presenta como segunda fase, privilegia la comunicación, ya que favorece el intercambio de ideas, donde los estudiantes pueden compartir con sus compañeros las estrategias utilizadas para la solución del problema y los resultados obtenidos. Brousseau (2007) sostiene que:

> La formulación de un conocimiento correspondería a la capacidad de un sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico), el medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información. (p. 25)

La *Situación de validación,* es la situación donde se comparten conclusiones y enunciados: los estudiantes organizan la información obtenida, construyen teorías y aprenden cómo convencer a los demás en cuanto a que sus descubrimientos son los correctos, o se dejan convencer de los demás, sin ceder a argumentos persuasivos ni a la autoridad, amor propio o intimidación, en este sentido Brousseau (2007) afirma que: "El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración". (p. 23)

Finalmente, *La situación de institucionalización*, corresponde a la última fase, donde se formaliza el conocimiento matemático, a partir de los resultados obtenidos por los estudiantes y la vinculación con el saber cultural. En esta fase el docente ordena, recapitula y sistematiza los resultados de las diferentes fases, se podría afirmar que la institucionalización es el proceso opuesto a la devolución, ya que el docente cumple una función determinante.

Las representaciones en matemáticas

Para Rico (2009), el término de representación en Educación Matemática se emplea de manera sistemática en las investigaciones de los años 80, en las que se tomaba cómo equivalente a una señal externa que mostraba un concepto matemático cómo símbolos en los que el sujeto pensaba las matemáticas, además de las imágenes matemáticas sobre las que se trabajaba el concepto de matemáticas. Sin embargo luego se decantó por el término, entendiéndolo desde entonces cómo:

> Todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. (p. 3)

En este sentido, representar abarca múltiples opciones, consiste en cambiar de aspecto un dato para verlo de una manera diferente; cada concepto matemático viene establecido por diferentes significados y diversas representaciones (Rico, 2009). Desde la perspectiva cognitiva, cada concepto necesita para su comprensión el empleo y combinación de más de un sistema de representación. Para esta investigación se toman como referencia los registros de representación semiótica propuestos por Duval (2017).

Teoría de los registros de representación Semiótica

Duval (2004, citado en Godino, Font y D'Amore, 2007) plantea una línea de indagación sobre las representaciones mentales (representaciones internas) constituidas por imágenes o concepciones que se pueden tener respecto a un objeto y atribuye un papel fundamental a los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales conocido cómo noesis;

por otra parte la producción y aprehensión de representaciones materiales que no es tan espontánea la denomina semiosis.

Los registros son sistemas semióticos que proporcionan medios para crear nuevos conocimientos, considerados como las concepciones que un individuo tiene sobre un objeto llamadas representaciones semióticas, establecidas por la aplicación de diversos signos cómo lenguaje natural, formula algebraica y figuras geométricas o gráficas que permiten exteriorizar las representaciones mentales cómo forma de comunicación (Andrades, 2017). Estas representaciones deben distinguirse del objeto matemático para su comprensión, esto porque un objeto matemático puede tener varias representaciones (Godino et al., 2007).

La teoría de los registros de representación semiótica se usa en esta investigación en el análisis de los elementos algebraicos y geométricos implicados en la adición y multiplicación de números complejos para determinar si las actividades ayudan en la comprensión a través del tratamiento de cada uno y conversión entre ellos.

En este sentido, Duval (2017) menciona que: "la actividad matemática consiste en transformar representaciones semióticas en otras representaciones semióticas para obtener nueva información o conocimiento y resolver problemas" (p.67), y menciona cómo la producción de nuevas representaciones depende del cambio de registro y la sustitución específica del registro seleccionado.

Por tanto, se reconoce como *tratamiento* a los procesos que generan nuevas representaciones a partir de la transformación inicial en el mismo registro mediante una misma operación específica de sustitución y la *conversión* entendida como una transformación de las representaciones de un objeto que hace pasar de un registro a otro. Duval (1999, Citado en Andrades, 2017, p. 25) declara que: "la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión".

En el presente trabajo, al trabajar la adición y multiplicación de los números complejos de forma algebraica, aplicando la propiedad distributiva en el caso de la multiplicación y la propiedad asociativa en el caso de la adición, se realiza un *tratamiento* en el registro algebraico; y al llevar este tratamiento al plano al determinar el resultado como punto en el plano complejo o como vector, se pasa al registro gráfico, entonces se transforma el registro, realizando una *conversión*.

Si se tienen dos números complejos $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, el tratamiento que se realiza en la adición y en la multiplicación cuando el estudiante aplica propiedades y operaciones matemáticas, se muestra a continuación:

Tratamiento en el registro algebraico de la adición de los números complejos

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

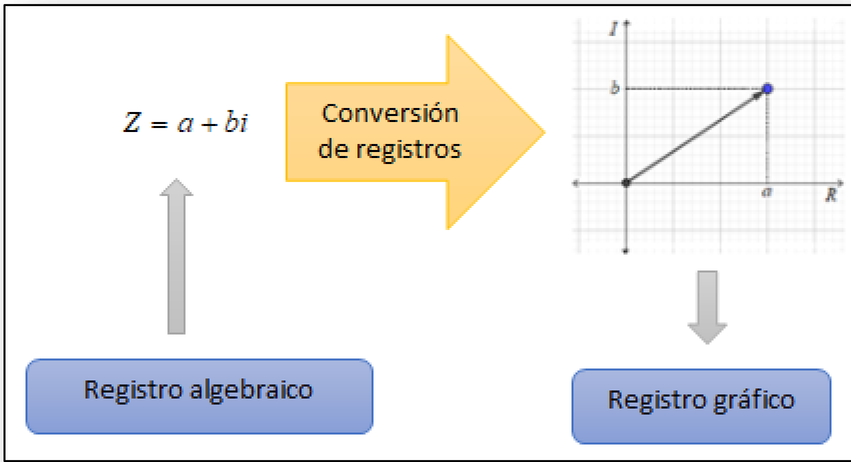
Tratamiento en el registro algebraico de la multiplicación de los números complejos

$$\begin{aligned} Z_1 \times Z_2 &= (a + bi) \times (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Por otro lado, si estos tratamientos son llevados al plano complejo, donde se registra cada factor como un vector con sus respectivos elementos geométricos, entonces se transforma el registro, pasando por una conversión como se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Conversión del registro algebraico al registro gráfico.



Fuente: elaboración propia

Encuadre de los marcos teóricos

La Teoría de las Situaciones Didácticas se toma como el referente teórico para la elaboración y aplicación de las situaciones planteadas de acuerdo a cada uno de los tipos de interacción con el medio; teniendo en cuenta que en el desarrollo del trabajo se realizan cambios de registro y diferentes representaciones, el autor retoma los Registros de Representación Semiótica para realizar el análisis de las situaciones, especialmente al realizar los cambios del registro algebraico al gráfico y viceversa para llegar a establecer que realmente el estudiante comprende los objetos matemáticos de estudio.

Concepciones

En el estudio se aplica un cuestionario a docentes, con el fin de identificar las ideas, conocimientos y creencias respecto cada uno de las preguntas, retomando la definición de Moreno y Azcárate (2003) quienes manifiestan que:

> Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos. (p.3)

Comunicación asertiva

Al identificar las interacciones de cada estudiante en el desarrollo de las situaciones planteadas para el trabajo de investigación, fue necesario enfatizar en la comunicación, en este caso como el proceso de intercambio entre emisor y destinatario dentro de una interacción múltiple (Terroni, 2009), destacando el concepto de Asertividad propuesto por Terroni, (2009) quien afirman que:

> Constituye una habilidad o destreza a la hora de emitir opiniones y en los procesos de influencia grupal. La palabra asertivo proviene del Latín (asertus) y significa afirmar con certeza alguna cosa, y por lo tanto se considera que la persona asertiva es aquella que puede enunciar con certeza sus opiniones y deseos (p. 37)

Uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas

Según Kilpatrick, Gómez y Rico (1998), la educación en matemáticas ha evolucionado hacia un mayor uso de aplicaciones y de tecnología, junto con la investigación individual y grupal, y se ha notado el creciente interés hacia esta nueva metodología, ya que se utilizan cómo herramientas facilitadoras de adquisición del conocimiento en contraposición con la visión transmisora de un conocimiento.

La investigación acerca del proceso de aprendizaje se preocupa cada vez menos por una atención exclusiva acerca de las respuestas correctas o incorrectas y cada vez más hacia los procesos y las estrategias utilizadas para obtener esas respuestas. Aunque se han realizado trabajos con la intención de comprender los esquemas cognitivos generales que se utilizan cuando se trabaja en matemáticas, esto aún no se ha logrado (Kilpatrick et al., 1998).

En este aspecto, Santos (1995) afirma que aprender matemáticas está relacionado con que el educando desarrolle y construya ideas de la Matemática, y ubica a esta disciplina cómo un cuerpo dinámico de conocimientos en constante crecimiento. En esta perspectiva el estudiante, al desarrollar matemáticas se involucra en las actividades propias de la disciplina: "En este proceso, el estudiante recopila información, descubre o crea relaciones, discute sus ideas, plantea conjeturas, y constantemente evalúa y contrasta sus resultados". (Santos, 1995, p. 4)

Las políticas de educación futuristas han centrado sus esfuerzos en presentar las aulas de clase llenas de tecnología, donde el docente ha sido reemplazado por un programa de enseñanza por medios electrónicos; sin embargo, se ha evidenciado que esta imagen es errada y por tanto ahora se han realizados esfuerzos para desarrollar programas computacionales dirigidos por el profesor (Kilpatrick et al., 1998). En base a y los argumentos de las investigaciones que sirvieron como antecedentes del estudio se toma cómo medio de interacción el Software GeoGebra el cual se profundiza a continuación.

GeoGebra

Las formas de enseñanza tienden a cambiar lentamente hacia un mayor uso de la tecnología computacional; las investigaciones en matemáticas se han encaminado a mejorar la enseñanza de las matemáticas con la disponibilidad de tecnología computacional, examinando cómo puede interactuar con creencias y capacidades del profesor además de las restricciones institucionales y sociales (Kilpatrick et al., 1998).

Estas tecnologías digitales han provocado cambios sociales y educativos, por tanto el software GeoGebra surge de la necesidad de vincular los programas de inclusión, poner la tecnología digital dentro del aula, con la integración digital, para hacer que esta tecnología digital sea parte del que hacer docente, atendiendo a una necesidad de los profesores y estudiantes combinando la geometría dinámica con los sistemas de computación algebraica (Rubio, Salinas, Ríos, Córdoba y Abar, 2018).

Esta tecnología es necesaria notablemente, en el presente año 2020, por causas del Covid-19 donde la mayoría de los colegios se vieron obligados a entrar un confinamiento para mitigar los contagios de la población. Tomando como base que en época de pandemia, el modelo de educación cambió a educación virtual, se buscó que los estudiantes aprovecharan al máximo las herramientas tecnológicas con las que cuentan y la conectividad, por tanto, para el desarrollo del trabajo se adoptó este software GeoGebra cómo el medio de interacción junto con el diseño de situaciones apropiadas para tal fin, ya que, se puede decir que ofrece ventajas cómo la facilidad de manejo, se identifica como una herramienta acorde para realizar el tránsito entre el registro algebraico y geométrico en el trabajo con los números complejos, y como razón principalmente se adoptó debido a que el software no requiere licencia para su uso y tiene versión en Español, y en línea.

Capítulo 3. Marco Metodológico

Se define la metodología cómo el área del conocimiento que estudia los métodos, técnicas, estrategias y procedimientos que utiliza el investigador para lograr sus objetivos (Hurtado, 2010). Siguiendo esta concepción, en el presente capítulo se describe en primer lugar el enfoque de investigación en el cual se sustenta el trabajo, luego se presenta el diseño de la investigación enfocado en la Investigación-acción, donde se concretan cada una de las fases del estudio y finalmente, se describe la población objeto de estudio, y las técnicas e instrumentos para la recolección y análisis de la información.

Enfoque de la investigación

El trabajo presenta un enfoque de investigación cualitativo, dado que se centra en la comprensión de fenómenos teniendo en cuenta cómo principal referencia la perspectiva y experiencia de los participantes en la investigación. Este tipo de enfoque se adopta cuando el estudio se concentra en examinar los puntos de vista, interpretaciones y significados que los involucrados le otorgan al fenómeno con un diseño de carácter descriptivo para cumplir el objetivo general (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Con el desarrollo del estudio se propone lograr: El fortalecimiento de los saberes de los estudiantes desde la práctica y la realidad del contexto; Participación activa de los estudiantes en las etapas de desarrollo del proyecto, facilitando la construcción de nuevas ideas de transformación; La búsqueda del aprendizaje, considerando la motivación para aprender, al ser cada uno constructor de su propio conocimiento al interactuar con las herramientas de trabajo.

Por otro lado, adicionalmente se usa la investigación documental, ya que en el desarrollo de la investigación se requiere la búsqueda y análisis profundo de documentos ya existentes en relación con el tema, para tener una perspectiva acerca de los trabajos realizados y acerca de las formas de abordaje que se tuvieron del tema, para poder ampliarla y dar algún aporte adicional según el caso. Entonces se entiende en el trabajo que “la revisión de la literatura consiste en detectar, obtener y consultar la bibliografía y otros materiales de utilidad para los propósitos de la investigación; es decir, para extraer y recopilar información relevante y necesaria para la investigación.” (Cortés y García, 2003, p. 19).

Diseño de investigación

En el diseño de investigación, se establecen las fases en el marco general de la Investigación acción, teniendo como base que su propósito fundamental es comprender y resolver problemáticas específicas de una población relacionadas a un contexto (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). En este sentido, Latorre (2005) muestra diversas definiciones que se han dado a la investigación acción. En el presente trabajo se toma como referencia la definición dada por Elliot (1993): “Un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma” (p. 32).

Es decir, se entiende como la reflexión sobre las acciones humanas y las situaciones sociales vividas por los profesores, que tiene como objetivo ampliar la comprensión de los docentes respecto a los números complejos (diagnóstico). Las acciones van encaminadas a modificar la situación una vez que se logre una comprensión más profunda de los problemas.

Bajo estos argumentos, este tipo de investigación se toma con el fin de mejorar la calidad de la educación, de acuerdo a las situaciones, para mejorar, innovar, y comprender los contextos educativos. Se toma como referencia el ciclo de la investigación- acción en torno a cuatro momentos o fases: planificación, acción, observación y reflexión (Latorre, 2005), como se presenta en la figura *2* y *3*.

Figura 2

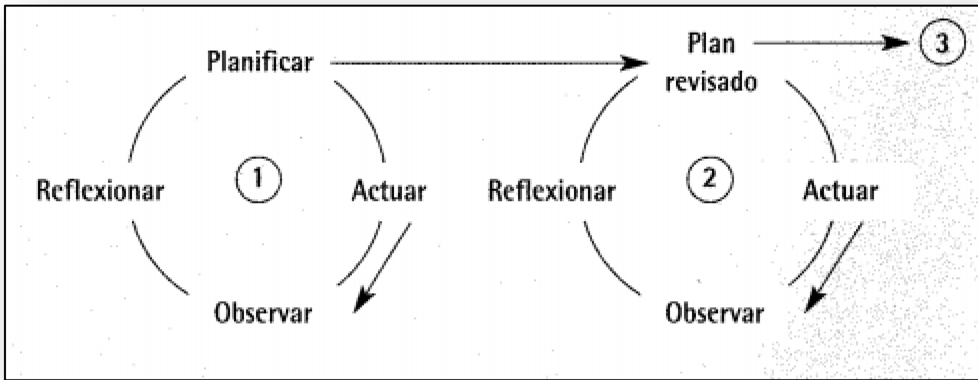
Ciclo de la Investigación Acción

Fuente: Latorre (2005, p. 32)

Latorre (2005) señala que el foco de la investigación será el plan de acción para lograr el cambio o mejora de la práctica o propósito establecido, ya que cómo lo señala Stringer (1999, citado en Hernández et al., 2014) una investigación acción es democrática, participativa, colaborativa y equitativa ya que todos los miembros del grupo pueden intervenir, se respetan los diversos pensamientos y todas las contribuciones son valoradas.

Figura 3

Espiral de ciclos de la investigación acción



Fuente: Latorre (2005, p. 32)

Teniendo en cuenta los argumentos de Latorre (2005), a continuación de muestran las fases de la Investigación acción según su propuesta y la forma como se utilizó en el trabajo.

Fase 1. Planificar

En esta fase se analizan los procesos de construcción de la investigación acción, para esto se realizó un cuestionario dirigido a los docentes para determinar las estrategias de enseñanza del objeto matemático. Luego se realizó el estudio epistemológico e histórico relacionados con los números complejos, de igual forma el análisis curricular el cual comprende el estudio de los contenidos; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, los lineamientos, estándares de competencias matemáticas y derechos básicos de aprendizaje, y el estudio relacionado con la caracterización de los obstáculos que se le presentan a los estudiantes. Todos estos análisis nos conducen al cumplimiento de los objetivos específicos:

OB1. Caracterizar las dificultades de los estudiantes con el objeto de los números complejos.

OB2. Identificar las estrategias que se utilizan para la enseñanza de los números Complejos con estudiantes de bachillerato.

OB3. Reconstruir el estudio histórico- epistemológico del objeto números complejos.

OB4. Diseñar un análisis didáctico que parta de los diversos tipos de situaciones didácticas, según la propuesta de Brousseau usando cómo medio de interacción el software GeoGebra para la enseñanza de los números complejos.

Tabla 1

Planificación de los objetivos 1,2, 3 y 4

Objetivo	Situaciones	Instrumento de recolección de información	Instrumentos de análisis de información	Categorías de análisis
OB1	Descripción de las principales dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los números complejos.	Tabla en el documento de tesis donde se especifica el autor y las dificultades encontradas.	Antecedentes	Dificultades de los estudiantes con los números complejos.
OB2	Diseño e implementación de cuestionario a docentes para identificar las estrategias en la enseñanza de los complejos.	Cuestionario	Rúbrica 1, para el análisis de la información	Estrategias para la enseñanza de los números complejos.
OB3	Revisión documental de la historia de los números complejos.	Libros de historia.	Aspectos relevantes en la historia.	Fases de emergencia de los números complejos.
OB4	Plantear las actividades acorde a las fases de las	Análisis documental.	Principales dificultades y errores que	

Objetivo	Situaciones	Instrumento de recolección de información	Instrumentos de análisis de información	Categorías de análisis
	Situaciones didácticas que permitan utilizar el software GeoGebra de acuerdo a los errores y dificultades que presentan los estudiantes y concepciones de los docentes.		presentan los estudiantes, concepciones de los docentes, historia de los números complejos, análisis conceptual.	

Fuente: Elaboración propia

Fase 2. Actuar

En esta fase se implementa el análisis de la instrucción; se complementan los datos recogidos, las secuencias y se analizan las categorías de análisis, los instrumentos de recogida de datos cómo las entrevistas, encuestas, cuestionarios, y se validan los resultados obtenidos con las categorías de análisis como lo sustenta la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007).

OB5. Implementar el análisis didáctico de situaciones didácticas, según la propuesta de Brousseau usando cómo medio de interacción el software GeoGebra para la enseñanza de los números complejos.

Tabla 2

Planificación de la implementación del análisis didáctico

Situación	Objetivo	Instrumento de recolección de información	Instrumentos de análisis de información	Categorías de análisis
1	OB5	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Plataforma Classrroom	Classroom Rubrica Resultados observados fase de acción y formulación situación 1	Resultados esperados fase de acción (REA1) Resultados esperados fase de formulación

Situación	Objetivo	Instrumento de recolección de información	Instrumentos de análisis de información	Categorías de análisis
				(REF1)
2	OB5	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Plataforma Classrroom	Classroom Rúbrica Resultados observados fase de acción y formulación situación 2.	Resultados esperados fase de validación (REV1) Resultados esperados fase de acción (REA2) Resultados esperados fase de formulación (REF2)
3	OB5	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Documento en Word, Plataforma Classrroom Formularios Google	Classroom Rúbrica Resultados observados fase de acción y formulación situación.	Resultados esperados fase de validación (REV2) Resultados esperados fase de acción (REA3) Resultados esperados fase de formulación (REF3)
4	OB5	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Documento en Word Plataforma Classrroom Formularios Google	Classroom Rúbrica Resultados observados fase de acción y formulación situación 4.	Resultados esperados fase de acción (REA4) Resultados esperados fase de formulación (REF4)

Fuente: elaboración propia

Fase 3. Observar

En esta fase, según la propuesta de la Teoría de las Situaciones Didácticas, los registros de representación semiótica y los aportes del software GeoGebra, se realiza el análisis de los resultados obtenidos y observaciones de los estudiantes respecto a las categorías de análisis, con el fin de determinar el aporte que realiza la implementación del análisis didáctico en el aprendizaje de los números complejos.

Esta confrontación se realiza siguiendo el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) y los Registros de Representación Semiótica de Duval (2017).

Por tanto se da cumplimiento al objetivo específico:

OB6. Analizar el aporte del análisis didáctico y la Teoría de las Situaciones didácticas en el aprendizaje de los Números Complejos por los estudiantes de grado noveno.

Fase 4. Reflexionar

A partir de las categorías de análisis se establecen las conclusiones generales según los objetivos específicos y la pregunta de investigación. En esta parte se formulan las propuestas para la enseñanza de los números complejos según los resultados obtenidos y la reflexión del autor de la tesis para evidenciar el cumplimiento del objetivo general del estudio según las propuestas realizadas en el marco teórico y en el metodológico. En esta fase se da cumplimiento al objetivo:

OG: Implementar un análisis didáctico que lleve a favorecer la comprensión de los números complejos mediante la modelación de un conjunto de situaciones didácticas con el software GeoGebra para los estudiantes de grado noveno.

Categorías de análisis

De acuerdo al objetivo de la investigación y según el marco teórico se establecieron las categorías de análisis en forma concreta para cada situación. A continuación se presenta el esquema general propuesto para el análisis de cada pregunta según la actividad y la fase en la teoría de las situaciones, estas categorías se presentan a partir de los resultados esperados por los estudiantes (Anexo 1).

Tabla 3

Categoría de análisis para la Situación 1

Situación	Categoría de Análisis	Código para resultados esperados	Descripción del código	Objetivo Específico	Situación	Instrumentos de Recolección de Datos
1	Situación acción (SA1)	REA1a REA1b REA1c REA1d REA1e REA1f REA1g REA1h REA1i	Resultados esperados en la fase de acción de la situación 1 de acuerdo a cada ítem	OB4	Situación problema 1	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Documento en Word, Plataforma Classrroom
	Situación de formulación (SF1)	REF1c REF1d	Resultados esperados en la fase de formulación de la situación 1 de acuerdo a cada ítem.			
	Situación de Validación (SV1)	REF1a REF1 REF1e	Resultados esperados en la fase de validación de la situación 1 de acuerdo a cada ítem.			

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4

Categorías de análisis para la situación 2

Situación	Categoría de Análisis	Resultados esperados.	Descripción del código	Objetivo específico	Situación	Instrumento de Recolección de datos
2	Situación acción (SA2)	REA2a REA2b REA2c REA2d REA2e REA2f REA2g	Resultados esperados en la fase de acción de la situación 2 de acuerdo a cada ítem	OB4	Situación problema 2	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Documento en Word Plataforma Classrroom
	Situación de formulación (SF2)	REF2b	Resultados esperados en la fase de formulación de la situación 2 ítem b			
	Situación de Validación (SV2)	REF2a REF2c	Resultados esperados en la fase de validación de la situación 2 ítem a y c			

Fuente: elaboración propia

Tabla 5

Categorías de análisis para la situación 3

Situación	Categoría de Análisis	Resultados esperados	Descripción del código	Objetivo específico	Situación	Instrumento de Recolección de datos
3	Situación acción (SA3)	REA3a REA3b REA3c REA3d REA3e REA3f REA3g	Resultados esperados en la fase de acción de la situación 3 de acuerdo a cada ítem	OB4	Situación problema 3	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Documento en Word (2), Plataforma Classrroom Formularios Google (2)
	Situación de formulación (SF3)	REF3a REF3b REF3c REF3d REA3e REA3f REA3g	Analizar el trabajo realizado en la fase de acción, respecto a los resultados esperados.			
	Situación de Validación (SV3)	REF3h				

Fuente: elaboración propia

Tabla 6

Categorías de análisis para la situación 4

Situación	Categoría de Análisis	Resultados esperados.	Descripción del código	Objetivo específico	Situación	Instrumento de Recolección de datos
4	Situación acción (SA4)	REA4a REA4b REA4c REA4d REA4e REA4f REA4g REA4h REA4i	Analizar el trabajo realizado en la fase de acción, respecto a los resultados esperados	OB4	Situación problema 4	Grabaciones en audio y video. Plataforma Zoom. Documento en Word (2), Plataforma Classrroom Formularios Google (2)
	Situación de formulación (SF4)	REF4b REF4c REF4d REF4e	Analizar el trabajo realizado en la fase de formulación, respecto a los resultados esperados			
	Situación de Validación (SV4)	REF4a				

Fuente: elaboración propia

Las categorías de análisis fueron propuestas para abordar los ítem que se plantearon en cada actividad, observar y describir cada una de las respuestas de los estudiantes teniendo como referente la propuesta de la TSD, los RRS y los aportes del software GeoGebra, con el fin de determinar el aporte que realiza la implementación del análisis didáctico en el aprendizaje de los números complejos.

Población

Los participantes en el desarrollo del presente trabajo fueron los estudiantes del grado noveno de una institución de carácter privado de la ciudad de Zipaquirá.

Zipaquirá es una ciudad Colombiana ubicada en la provincia de Sabana Centro del departamento de Cundinamarca, ubicado a 29 km de Bogotá y a 117 km de Tunja, cuenta con una población de 216409 habitantes, Zipaquirá es el segundo municipio más grande y poblado de la provincia.

Las actividades se realizaron con un total de 40 estudiantes, de los cuales el 40% son hombres y el 60% son mujeres, con edades entre 13 y 15 años; el grado noveno se encontraba distribuido en dos grupos: Noveno A conformado por 21 estudiantes, noveno B por 19 estudiantes.

Para la el estudio se analizan las respuestas de los estudiantes del grado noveno B, ya que durante la implementación de las actividades con los estudiantes del grado noveno A se presentaron fallas en el servicio de energía, lo cual generó que la mitad de los estudiantes no pudieran realizar la primera actividad, además de las constantes fallas en el servicio de internet, lo que impedía la correcta implementación de las actividades.

Técnicas e instrumentos para la generación, recolección y análisis de información

En el proceso de investigación cualitativa se utilizan varios instrumentos para la recolección de datos, en este caso, debido a la pandemia, se utilizaron cómo principales medios de recolección de datos las grabaciones en audio y video de las sesiones de clase por medio de la plataforma Zoom Educatión, además de la plataforma Classroom como medio de recolección del registro documental creado por los estudiantes y cuestionarios de Google. El investigador fue quien mediante diversos métodos o técnicas recolectó la información (Hernández et al., 2014), además de llevar su propio registro del desarrollo de las sesiones, describiendo las prácticas y conductas que tienen los estudiantes al desarrollar las actividades y los episodios en un diario de clase, teniendo en cuenta los hechos sobresalientes.

Validación de los instrumentos

Para el desarrollo de esta actividad los instrumentos fueron sometidos a juicio de dos expertos en el área, quienes brindaron asesoría permanente en la elaboración y puesta en práctica de cada una, la validación se realizó en dos sesiones; en la primera se mostró la idea general de lo que se estaba proponiendo y se realizaron las primeras correcciones, y en la segunda se trabajaron las preguntas relacionadas con la comprensión. Los expertos en el área fueron dos doctores vinculados a la maestría en educación matemática, quienes confirmaron si las situaciones eran adecuadas al contenido de acuerdo al objetivo de estudio y al marco teórico (Anexo 1).

Consideraciones éticas

Teniendo en cuenta que los datos obtenidos en el desarrollo de la investigación son publicados en el trabajo de grado de Maestría en educación matemática, es pertinente adquirir la autorización por parte de las directivas de la institución a través del consentimiento informado (Anexo 3), además de ser adaptado para el caso de los estudiantes debido a que todos son menores de edad (Anexo 4) en el cual se describe de manera clara y precisa el objetivo de la investigación, así como las especificaciones respecto a la publicación de resultados.

Capítulo 4. Resultados y discusión

En el presente capítulo, se describe el proceso realizado para el desarrollo de las fases del estudio, siguiendo la metodología Investigación acción (Latorre, 2005). En la fase de planificación, se identificaron en los antecedentes del estudio, los errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje de los Números Complejos, y se implementó una actividad diagnóstica realizada a los docentes en la cual se indagó sobre sus concepciones y estrategias para las enseñanza de los Números Complejos; se realizó un breve recuento de la historia de los Números Complejos mostrando las etapas en su emergencia y los aportes más importantes de algunos matemáticos en diversas épocas. Se continuó, con el análisis curricular donde se describió la forma de presentar el tema y la importancia que se da a la representación geométrica en tres libros de educación secundaria. Posteriormente, se realizó el análisis de conceptual (Rico, 2004), donde se mostró la importancia del contenido geométrico para la interpretación del concepto de los números complejos y finalmente, se muestran los resultados obtenidos en cada una de las actividades propuestas siguiendo las etapas de TSD, realizando un análisis descriptivos de acuerdo con las categorías de análisis donde se analizaron los registros de representación semiótica específicamente en el tratamiento y conversión que se da en la situación propuesta.

Fase 1. Planificación

En esta fase se realizó el análisis de contenido, conceptual y cognitivo (Rico, 2004). En el primer análisis se reconstruyo el estudio epistemológico e histórico dado en la emergencia de los números complejos; en el segundo, se realizó el análisis conceptual, el cual comprende el estudio de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, los lineamientos, estándares de competencias matemáticas y derechos básicos de aprendizaje y finalmente se mostró la caracterización de los obstáculos que se le presentan a los estudiantes todo estos componentes encaminado al cumplimiento de los objetivos específicos 1 y 2 del estudio.

Caracterización de los errores y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los números complejos

Se realizó un análisis a los antecedentes donde se establecen algunos de los errores y dificultades que presentan los estudiantes respecto al aprendizaje de los Números Complejos. El estudio se enfatizó en identificar errores asociados con las representaciones geométricas de los números complejos, dando cumplimiento al objetivo específico uno (1).

A continuación se muestran los principales errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje de los números complejos según los antecedentes de la investigación.

Tabla 7

Errores y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los complejos

Autor	Dificultades
Canal (2012)	Asocia las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de los números complejos al no relacionar la historia con el uso de las Tics, esto debido a que se relacionan de forma apartada, o, no se realiza una relación, sino que se parte de enseñar a partir de ecuaciones que tienen raíces que no pertenecen a los números reales.
Carrasco (2017)	Asocia los errores presentados en los estudiantes a los textos de los números complejos, ya que los presentan únicamente de forma algebraica dejando de lado las operaciones geométricas, lo cual implica una mirada deficiente e incompleta de la operación en cuestión, provocando un aprendizaje parcial.
Raldoft y Parraguez (2019)	Los estudiantes no tienen construido un significado geométrico concreto de los números complejos, ya que evidencian un sesgo de los números reales sobre los complejos respecto de los modos de pensamiento. Para alcanzar una comprensión profunda del sistema de números complejos, se requiere conocer y dominar los tres modos de pensar el sistema numérico.
Aznar (2009)	Evidencia que no está afianzada la idea de realizar la conversión del registro gráfico al algebraico en las operaciones de los números complejos.

Autor	Dificultades
Bulhea y Gómez (2007)	Evidencian conflictos cognitivos identificados en el estudio histórico epistemológico, esto a través de evidenciar errores similares a los cometidos en el desarrollo de la historia, a pesar del trabajo previo realizado para superarlos.
Carrasco (2017)	Presenta una secuencia didáctica donde se evidencian errores y dificultades en el tránsito del registro algebraico al gráfico en las operaciones con los números complejos.

Fuente: elaboración propia

De acuerdo al estudio de los errores y dificultades que presentan los estudiantes, se evidencia que las principales dificultades se encuentra en la ausencia de relación entre la historia de los Números Complejos y la enseñanza; la necesidad de implementar el uso de las TIC en la enseñanza del tema y principalmente en que se recurre a las representaciones algebraicas dejando de lado las representaciones geométricas, generando un aprendizaje parcial, por lo cual como argumenta Duval(2017): “la actividad matemática consiste en transformar representaciones semióticas en otras representaciones semióticas para obtener nueva información o conocimiento y resolver problemas” (p.67), en este aspecto, fue necesario afianzar el tratamiento entre los registros para el desarrollo de la actividad.

Actividad diagnóstica

Se realizó el cuestionario a los docentes (Anexo 3), con el fin de establecer algunas concepciones para la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos (Moreno y Azcárate, 2003) dando cumplimiento al objetivo específico dos (2).

Análisis de las concepciones de los profesores para la enseñanza de los números complejos

A continuación se muestran las preguntas que se realizaron a los docentes, las respuestas proporcionadas y el análisis realizado a cada una; para facilitar el orden y una mayor comprensión, se ha codificado la respuesta del primer docente P1, la respuesta del segundo docente P2 y así sucesivamente.

Tabla 8

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 1

Pregunta	Respuestas
¿Cómo define los números complejos?	P1. Como un conjunto numérico que resulta de la unión del conjunto de los reales y la unión de números imaginarios (raíces de índice par con cantidad subrdical negativa) **Análisis:** Los números complejos vienen dados por $C=\{a+bi/a,b\in R\}$ en este sentido se evidencia que el profesor no expresa claramente el conjunto de los complejos como $C = R \cup \{i\}$, pero se puede decir que $\{i\}$ es un conjunto aunque unitario. Para el análisis de la representación de los complejos (representación algebraica, gráfica, y en lenguaje natural) se establece que el profesor no identifica el isomorfismo dado entre los complejos y el conjunto R^2 de parejas ordenadas. P2. Conjunto numérico que se forma de una parte real y otra parte imaginaria. **Análisis:** En cuanto a la categoría de las representaciones, el profesor utiliza el registro verbal para definir el conjunto de los números complejos según su definición de conjunto $C=\{a+bi/a,b\in R\}$

Pregunta	Respuestas
	P3. Un conjunto con dos operaciones binarias internas que cumple los axiomas de cuerpo y cuyos elementos se escriben en par ordenado, por lo tanto, tiene forma cartesiana, polar y exponencial. **Análisis:** Según las representaciones, el profesor las utiliza para definir el conjunto de los números complejos y tiene presente el isomorfismo existente como espacio vectorial con el conjunto R^2 y adicionalmente alude a su estructura de cuerpo y la representación de sus elementos en forma algebraica, en los registros de la forma polar y la exponencial según la identidad de Euler $z = e^{i\theta}$. P4. La suma de un número real y un número imaginario **Análisis:** En cuanto a la representación de cada elemento, el profesor los identifica correctamente en la forma $z = a + bi$ en un lenguaje verbal. Faltaría definir el conjunto C pero al igual identifica cada elemento del conjunto.

Conclusión: Respecto a los registros de representación para la definición de los números complejos, los profesores tienen una conceptualización como conjunto y otra como elemento del conjunto y esto lo expresan en un lenguaje natural. No se preguntaba por la estructura del conjunto en si, por tanto cada uno aportó una definición pensando en el conjunto o en sus elementos. Al igual es importante la conceptualización del isomorfismo con R^2 para llegar a establecer diversos registros de representación en el registro algebraico.

Fuente: elaboración propia

Tabla 9

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 2

Pregunta	Respuestas
¿Por qué se deben enseñar los números complejos?	P1. Porque el estudiante no debe tener vacíos en la comprensión de las matemáticas por ejemplo a la hora de resolver raíces cuadradas negativas y aparte de esto debe entender que las matemáticas son amplias y no están limitadas a determinados conjuntos numéricos. **Análisis:** El docente asocia la importancia de enseñar los números complejos con la extensión de los números complejos, es decir radica su importancia en que los estudiantes conozcan todos los conjuntos numéricos y los pueda utilizar en una situación determinada. P2. A mi forma de ver no se deben enseñar debido a la falta de aplicabilidad que tiene. **Análisis:** Esta creencia va a llevar a sus estudiantes a cometer errores en futuros cursos de matemáticas ya que no reconoce la importancia de los números complejos en el desarrollo del pensamiento matemático, ni su importancia para el desarrollo de próximos temas matemáticos P3. Porque sin ellos las matemáticas solo serían aritmética. **Análisis:** El docente tiene una concepción clara del conjunto de los números complejos, ya que reconoce su importancia en la evolución de las matemáticas, reconoce de forma categórica la importancia del tema. P4. Porque hay situaciones de la vida cotidiana en donde intervienen los números complejos y los estudiantes deben estar en capacidad de hacer operaciones con este conjunto de números. **Análisis:** El docente comprende la importancia de los números complejos en el desarrollo de actividades cotidianas, pero no evidencia una concepción respecto a la importancia en el desarrollo de las matemáticas, ni el pensamiento matemático.
Conclusión: No existe un criterio claro por parte de los docentes respecto a la importancia de enseñar el tema, ya que las opiniones son contradictorias, por lo cual se evidencia a partir de las respuestas de los docentes que la enseñanza de los números complejos se ve frustrada por diversos motivos, entre ellos que los docentes no tienen una concepción clara del tema.	

Fuente: elaboración propia

Tabla 10

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 3

Pregunta	Respuestas
Si tuviera limitaciones de tiempo para impartir los temas relacionados con los números complejos, ¿no los enseñaría? Justifique.	P1. Enseñaría lo mas general de este conjunto numérico, pero considero que es importante trabajarlo así sea de manera superficial. **Análisis:** El docente no tiene una concepción clara acerca de la importancia de enseñar los números complejos, desconociendo parcialmente la importancia que tienen en el desarrollo del pensamiento matemático y en importancia para el desarrollo de las siguientes temáticas. P2. No los enseñaría debido a la poca aplicación que tienen, las matemáticas en las instituciones deben de tener el plus de aplicación para poder hablar de la motivación en los estudiantes. **Análisis:** El docente no reconoce la importancia de los números complejos y lo justifica de una manera equivocada, pues el desarrollo e importancia de los números complejos de pueden trabajar con motivación en los estudiantes. P3. Imposible continuar con las demás temáticas después de los números complejos, porque de ahí en adelante, ellos son los protagonistas en la solución de ecuaciones; así que es mejor no avanzar y dar el tema. **Análisis:** El docente reconoce la importancia de enseñar los números complejos, y lo justifica en el protagonismo que adquieren en los contenidos temáticos siguientes. P4. No los enseñaría, considero que se debe diseñar una jerarquía de los temas siendo los más importantes los primeros en enseñarse. **Análisis:** El docente no reconoce la importancia de los números complejos y tiene una posición debatible al afirmar que los números complejos no representan la misma importancia que otros temas, lo cual muestra la poca información que tiene del tema.
Conclusión: Los docentes no coinciden en la importancia de enseñar los números complejos, evidenciando que desconocen la importancia del tema, ya que realizan argumentos contradictorios.	

Fuente: elaboración propia

Tabla 11

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 4

Pregunta	Respuestas
¿Qué estrategias ha utilizado para enseñar los números complejos?	P1. Generalmente enseño este tema de forma tradicional pues no conozco de estrategias para poder ser trabajados. **Análisis:** El docente concibe la enseñanza de forma tradicional cómo la enseñanza de forma algebraica sin reconocer las representaciones geométricas. P2. El concepto con relación y operaciones con las diferentes estrategias de suma y agrupación. **Análisis:** No es clara la respuesta del docente, ya que no especifica a que hace relación el concepto, sin embargo menciona las operaciones con diferentes estrategias de suma, lo cual no es claro ya que no se establece cuales operaciones. P3. La única estrategia es dar la parte analítica y geométrica a la par. **Análisis:** El docente expresa realizar la enseñanza de los números complejos en forma binomial y cartesiana, a la par, sin embargo no explica los procesos. P4. Conceptos previos y aplicaciones. **Análisis:** No es clara la estrategia que emplea el docente, pues no explica a qué se refiere con conceptos previos, ni el proceso para enseñar las aplicaciones, tampoco menciona la forma binomial o cartesiana de los números complejos.

Conclusión: Se evidencia de acuerdo a las respuestas de los docentes que el tratamiento general que se le da al tema resulta ser algebraico, ligado a las clases tradicionales, evidenciando la importancia de mostrar una nueva forma de enseñanza relacionándolo con el registro gráfico. No hay una estrategia de enseñanza de las mencionadas que represente las operaciones de los números complejos de forma geométrica, lo cual refleja la falta de interés de los docentes por mostrar nuevas estrategias de enseñanza.

Fuente: elaboración propia

Tabla 12

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 5

Pregunta	Respuestas
¿Cuál cree que es el método indicado para mejorar la enseñanza de los números complejos?	P1 Depronto incorporando estrategias atractivas y diferentes a las tradicionales cómo la geométrica, pero la verdad no se me ocurre ninguna. **Análisis:** El docente reconoce la importancia de incorporar nuevas estrategias que vinculen herramientas que generen motivación entre las cuales menciona la geométrica. P2. No enseñarlos **Análisis**: El docente no reconoce la importancia de los números complejos, por tal razón no considera relevante buscar estrategias para su enseñanza. P3. La forma gráfica es muy importante. **Análisis**: El docente reconoce la importancia de incorporar en las estrategias de enseñanza las representaciones gráficas de los números complejos dentro de las cuales se encuentra la representación geométrica. P4. Lluvia de ideas, orientación dirigida, representación gráfica y formalización de la temática. **Análisis:** El docente reconoce la importancia recoger las ideas previas del tema, junto con las representaciones geométricas.
Conclusión: No existe una concepción clara acerca de la metodología de enseñanza de los complejos, sin embargo la mayoría de los docentes coinciden en que es necesario incorporar la representación gráfica de los números complejos.	

Fuente: elaboración propia

Tabla 13

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 6

Pregunta	Respuestas
¿Qué herramientas	P1. Ninguna

Pregunta	Respuestas
tecnológicas ha utilizado para enseñar los números complejos?	**Análisis:** El docente no integra las herramientas tecnológicas con la enseñanza de los números complejos. P2. Ninguna **Análisis:** El docente no integra las herramientas tecnológicas con la enseñanza de los números complejos. P3.Ninguna **Análisis:** El docente no integra las herramientas tecnológicas con la enseñanza de los números complejos. P4. Microsoft mathematics, GeoGebra y calculadora Texas instruments. **Análisis:** El docente manifiesta trabajar herramientas tecnológicas para la enseñanza de los números complejos, sin embargo no detalla la forma ni la estrategia de enseñanza ya que puede trabajarlas solo de forma binomial o de forma cartesiana.
Conclusión: Solo un docente manifiesta haber utilizado herramientas tecnológicas para la enseñanza de los números complejos, los demás no refieren trabajo con herramientas tecnológicas, lo cual muestra el trabajo reducido que se realiza al enseñar los números complejos vinculándolo con herramientas computacionales.	

Fuente: elaboración propia

Tabla 14

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 7

Pregunta	Respuestas
¿Enseña los números complejos en forma geométrica? Describa el método	P1. A parte de enseñar sobre la ubicación de los puntos en el plano complejo no utilizo más estrategias geométricas para enseñar este conjunto numérico. **Análisis:** El docente emplea la forma cartesiana, sin enseñar la forma geométrica. P2. No **Análisis:** El docente puede tener una visión del tema solo algebraica, no opta por la definición geométrica por que no domina el tema o por qué no lo considera relevante enseñarlos de esa forma.

Pregunta	Respuestas
	P3. La suma y multiplicación se pueden visualizar de forma gráfica. La suma es análoga a la suma de vectores en el plano. Análisis: El producto se trabaja con transportador y regla. **Análisis:** El docente emplea la forma cartesiana, y menciona la forma geométrica para la suma de números complejos y el producto. P4. Se plantea una pareja ordenada cualquiera, dicha pareja ordenada se escribe en forma binomial, se grafica en el plano complejo y se explica las partes del plano complejo. **Análisis:** El docente emplea la forma cartesiana para la enseñanza de los números complejos, pero no evidencia en la respuesta una manera de enseñarlos de forma geométrica.
Conclusión: Solo un docente manifiesta enseñar las operaciones de forma geométrica, los demás solo enseñan la ubicación de los complejos en el plano cartesiano o no la enseñan, lo cual muestra el poco trabajo que se desarrolla de las representaciones geométricas por parte de los estudiantes.	

Fuente: elaboración propia

Tabla 15

Análisis del cuestionario propuesto a los docentes, pregunta 8

Pregunta	Respuestas
¿Por qué considera que los estudiantes comprenden los números complejos?	P1. Cuando se plantea una operación con números complejos o se pide calcular la norma de alguno de ellos los estudiantes responden correctamente. **Análisis:** El docente reconoce la comprensión de los números complejos cómo dar respuesta correcta a una situación planteada en clase, sin reconocer el aprendizaje de los estudiantes al realizar el cambio en los registros de representación. P2. Por la facilidad de trabajar los temas. **Análisis:** El docente no da una respuesta clara a la pregunta, por lo cual no se puede inferir la respuesta. P3. Porque son algo que vas más allá de la imaginación. **Análisis:** No es clara la respuesta que da el docente al interrogante planteado.

Pregunta	Respuestas
	P4. Por la motivación, la importancia, la aplicación y la destreza en el tema. **Análisis:** El docente relaciona el aprendizaje de los números complejos con la motivación que los estudiantes tienen hacia el tema, además de la destreza que muestra al dar respuesta correcta a una situación planteada en clase, dejando de lado las representaciones que se pueden dar en el tema.
Conclusión: Los docentes coinciden en que comprender los números complejos consiste en resolver ejercicios o actividades de acuerdo a las actividades planteadas, pero no mencionan la importancia de comprenderlos de forma algebraica y geométrica realizando la correspondiente relación entre las representaciones.	

Fuente: elaboración propia

Análisis General del cuestionario

Los docentes no muestran criterios unificados en cada una de las preguntas, ya que cada uno realiza una interpretación diferente del tema, con lo cual se puede interpretar que cada uno tiene una diferente concepción del tema (Azcarate y Murillo, 2003); además no reconocen los números complejos cómo un tema importante y se evidencia la falta de implementación de estrategias de enseñanza centradas en las diferentes representaciones y la falta de implementación de estrategias relacionadas con herramientas tecnológicas.

Los profesores, no muestran estrategias claras para la enseñanza de los números complejos, por el contrario la mayoría de los docentes parecen desconocer los tipos de representaciones (Churchill y Ward, 1992) como estrategia. Solo un docente asocia dos representaciones pero su respuesta es muy general, en cuanto al uso de la tecnología computacional y en general no muestran una estrategia clara que relacione la enseñanza de los números complejos con el uso del software.

Por lo anterior se tienen argumentos para implementar nuevas estrategias de enseñanza que favorezcan la interpretación geométrica, además de realizar la vinculación del tema con algunas herramientas tecnológicas.

Los números complejos en la historia de las matemáticas

Con el fin de determinar las etapas de surgimiento y conocer el desarrollo de los números complejos se realizó la reconstrucción del estudio histórico- epistemológico del objeto números complejos, dando cumplimiento al objetivo específico tres (3).

La evidencia más antigua que se conoce hasta ahora de la solución de una raíz cuadrada de una cantidad negativa corresponde aproximadamente al año 75 d. C, en el Libro Estereometría, escrito por el griego Herón de Alejandría en el siglo I d.C.(Ramírez, 2019), este resultado corresponde a la idea de hallar la altura de una pirámide truncada de base cuadrada.

Luego, se realizó el trabajo en la solución de ecuaciones cúbicas donde no se encontraba una fórmula de solución por el método de radicales como en el caso de la ecuación de segundo grado, sino que se trabajaba con métodos particulares para cada tipo de ecuación cúbica, hasta que según Boyer (1968), en el Renacimiento, Jerónimo Cardano publicó en 1545 el libro del *Ars Magna*, donde basado en los avances de Niccolo Tartaglia, planteó la solución de las ecuaciones algebraicas cúbicas y el descubrimiento del método de solución para la ecuación cuartica de Ludovico Ferrari.

La publicación del libro *Ars Magna,* en 1545 se considera como el año de inicio del periodo moderno en la matemática, esta publicación fue de gran impacto para los algebristas por su contenido, ya que mostraba con detalle los casos posibles para resolver la cúbica, entre ellos la solución de la raíz cuadrada de un número negativo, si bien Cardano ya tenía conocimientos previos sobre esta posible solución, la consideraba tan "*sutil cómo inútil*" (Boyer, 1968, p. 365).

Cardano prestó especial atención a resolver esas actividades consideradas hasta ese momento desconcertantes. Al resolver ecuaciones cúbicas una de las primeras consideraciones significativas de la época fue que las raíces cuadradas de números negativos conducían a un nuevo tipo de número, ya que al notar que siempre que las tres raíces de una ecuación fueran reales y no nulas, el resultado siempre conducía a raíces cuadradas de números negativos (Boyer, 1968).

Los matemáticos de la época buscaban su solución en los reales, sin embargo no se veía como alcanzarla, ni entender el comportamiento del nuevo tipo de números; los que ahora conocemos como imaginarios. Algunos se interesaron en estos resultados contraintuitivos, hasta que Bombelli (1526-1573), en el año 1572, aceptó el uso de $\sqrt{-1}$ cómo un número y estableció reglas para calcular en los números complejos. Estos resultados eran tan difíciles de entender que en 1629, Albert Girard consideró esas soluciones como imposibles (Merino, 2006).

En cuanto a las representaciones, Descartes (1596-1650) en 1637, bautizó los números complejos con el nombre de "*imaginarios"* y publicó su trabajo denominado *La Géométrie* donde describe sus ideas geométricas aplicadas al álgebra, buscando de hallar un significado geométrico a las cantidades imaginarias. Por otro lado en 1685 JohnWallis presentó la primera interpretación geométrica a los números complejos en su libro denominado "Tratado de álgebra histórica y práctica" intentó construir geométricamente los números imaginarios (Ramírez, 2019), aunque años más tarde surgió la idea de realizar una representación geométrica de un número complejo de la forma $a+bi$ en el plano, descubierta por Caspar Wessel, que lo llevó a descubrir la multiplicación de los complejos, aunque este trabajo no tuvo mayor atención y posteriormente Jean Argand (1768-1822), en un trabajo publicado en 1806 como lo menciona Ramírez (2019):

> Da una interpretación de los números imaginarios $a+b\sqrt{-1}$ cómo un punto en el plano y describió las reglas geométricas de la multiplicación y adición de los números imaginarios. Argand también interpretó $\sqrt{-1}$ como una rotación de 180°. (p.7)

Partiendo de los descubrimientos anteriores las representaciones en el plano complejo se denominan representaciones en el plano de Argand; desde ahí, los números complejos dejaron de ser un misterio para los matemáticos de la época y se empezaron a trabajar de forma frecuente (Rivero, 2001).

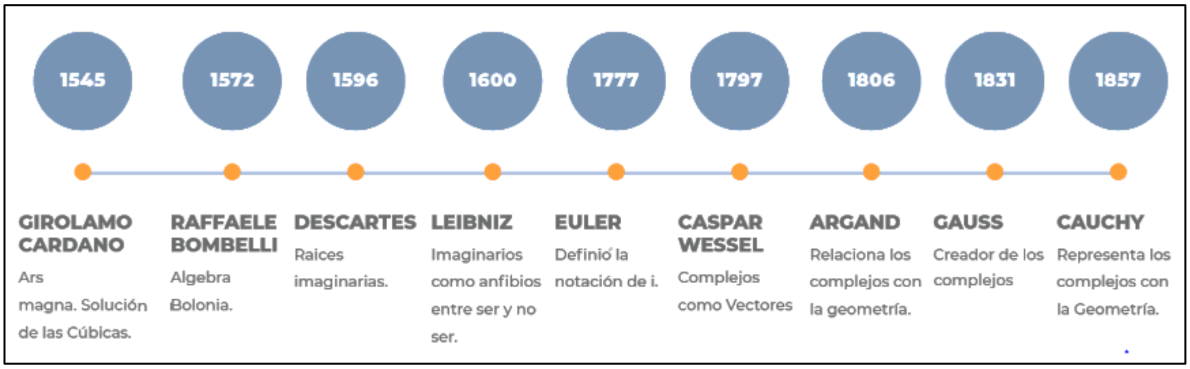
Leibniz en el siglo XVII realizó aportes en notación a los números complejos en una época en la que casi habían sido olvidados, Leibniz factorizó la expresión $x^2 + a^2$ dando una descomposición de un número real positivo en términos de imaginario que sorprendió a sus contemporáneos. No proporcionó las raíces cuadradas de un número complejo en forma compleja (Boyer, 1968), además de asegurar que $\sqrt{-1}$ era una especie de "*anfibio entre el ser y la nada*".

Por otro lado, Gauss (1777- 1855) realizó aportes importantes a los hasta ese momento conocidos cómo números imaginarios. En 1831 los renombró a números complejos (Merino, 2006), en ese mismo año presentó sus ideas geométricas que coincidían con las propuestas por Argand, al parecer estas ideas habían sido desarrolladas desde 1769, pero no fueron publicadas hasta terminar completamente su trabajo. En 1799 presentó su tesis doctoral donde introdujo el teorema fundamental del álgebra.

Finalmente, con los aportes realizados por Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), quien da la definición abstracta de los números complejos basándose en las clases de congruencias de enteros dada por Gauss, se dio inicio al estudio de la funciones de variables complejas (Ramírez, 2019).

Figura 4

Línea de tiempo en la emergencia de los números complejos



Fuente: Adaptado de Andrades (2017)

Análisis de contenido para los números complejos

El análisis de contenido de los números complejos se realizó del libro Variable compleja y aplicaciones de Churchill y Ward (1992), donde se muestra de manera detallada y comprensible cada tema a tratar en el desarrollo del trabajo.

Definición

Iniciamos la definición de los *números complejos* z a partir de la definición cómo pares ordenados de la forma:

$$z = (x, y) \qquad [1]$$

De números reales x e y, con las operaciones de suma y producto. Se suelen identificar los pares $(x, 0)$ con los números reales x. En este orden de ideas, el conjunto de los números complejos tiene el conjunto de los reales como subconjunto.

Los números complejos de la forma $(0, y)$ se llaman *números imaginarios puros*. Los números reales x e y en la expresión [1] se conocen respectivamente cómo *parte real* y *parte imaginaria* de z.

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y \qquad [2]$$

Dos números complejos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se dice *iguales* si tienen iguales las partes reales e imaginarias. Es decir:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ si y solo } x_1 = x_2 \quad e \quad y_1 = y_2 \qquad [3]$$

La suma $z_1 + z_2$ y el producto $z_1 z_2$ de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ se definen por las ecuaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad [4]$$

Al sumar dos o más números complejos se suman respectivamente sus partes reales e imaginarias; la suma de los números complejos cumple las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa e invertiva.

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ y_1 x_2 + x_1 y_2) \qquad [5]$$

Para multiplicar dos números complejos se aplica la propiedad distributiva, se resuelven las potencias de i y se reducen los términos semejantes; la multiplicación en el conjunto de los números complejos cumple las propiedades: clausurativa, conmutativa, asociativa y modulativa.

En particular, $(x,0) + (0, y) = (x, y)$ y $(0,1)(y,0) = (y,0)$ luego

$$(x, y) = (x,0) + (0,1)(y,0) \qquad [6]$$

Las operaciones definidas entre los números complejos son las úsales cuando se restringen a los números reales. El sistema de los números complejos es en consecuencia, una extensión natural de los números reales.

Pensando un número real x o cómo $(x,0)$ y *denotando por* i *el número imaginario puro* $(0,1)$ podemos escribir la ecuación [6] así:

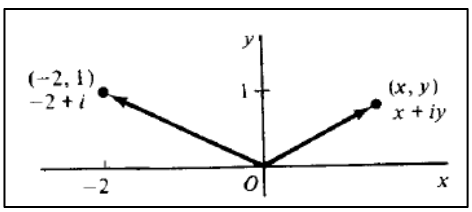
$$(x, y) = x + iy \qquad [7]$$

Interpretación Geométrica

Es natural asociar el número complejo $z = x + iy$ con un punto del plano cuyas coordenadas son x e y. Cada número complejo corresponde a un punto exactamente y recíprocamente. El número z puede pensarse cómo el segmento dirigido, o vector, que va desde el origen hasta el punto (x, y), a menudo suele referirse al número complejo cómo el punto z. Cuando se utiliza a efectos de representar geométricamente los números $z = x + iy$, el plano xy se llama plano complejo o plano z. El eje x se llama eje real, y el eje y se llama eje imaginario. El número $-2 + i$ viene representado por el punto $(-2,1)$ cómo se observa a continuación:

Figura 5

Representación de un Número Complejo en el Plano



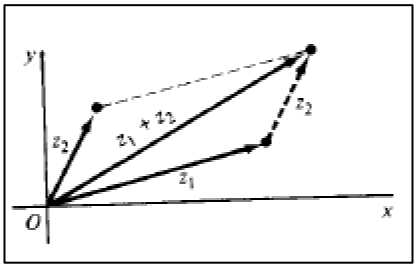
Fuente: Churchill y Ward (1992, p.7)

De acuerdo con la definición de suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1$ y $z_2 = x_2 + y_2$, el número complejo $z_1 + z_2$ corresponde al punto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Corresponde así mismo a un vector con esas coordenadas cómo componentes. Por tanto $z_1 + z_2$ se puede observar vectorialmente así:

Figura 6

Representación Geométrica de la Suma de Números Complejos



Fuente: Churchill y Ward (1992, p. 8)

Aunque el producto de dos números complejos z_1 y z_2 es el mismo número complejo representado por un vector, ese vector está en el mismo plano que los vectores z_1 y z_2. Es evidente que ese producto no es ni el producto escalar ni el producto vectorial que se usa en el análisis vectorial ordinario.

El módulo de un número complejo $z = x + iy$ se define cómo el número real $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota $|z|$. Geométricamente $|z|$ representa la distancia entre el punto $(x + y)$ y el origen, o sea, la longitud del vector que representa a z.

Forma Polar

Sean r y θ coordenadas polares del punto (x, y) que corresponden a un número complejo no nulo $z = x + iy$. Cómo:

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = rsen\theta$$

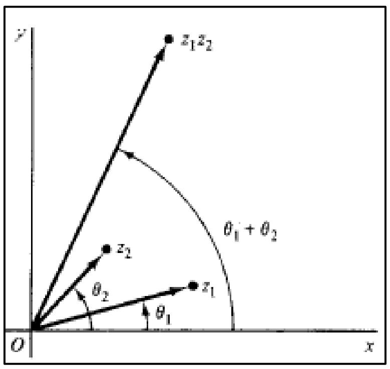
z Puede ser expresado en forma polar como $z = r(\cos\theta + isen\theta)$

El número r es la longitud del vector correspondiente a z; es decir $r = |z|$. El número θ se llama un argumento z, y escribimos $\theta = \arg z$. Así pues, geométricamente, $\arg z$ denota el ángulo que forma z con el eje real positivo.

Al realizar el producto de dos números complejos, una importante identidad sobre los argumentos es $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, por tanto $\theta_1 + \theta_2$ es un valor de $\arg(z_1 z_2)$ y $r_1 r_2$ son un valor del módulo de $z_1 z_2$ cómo se observa en la siguiente figura.

Figura 7

Representación geométrica de la multiplicación de números complejos



Fuente: Churchill y Ward (1992, p.16)

Análisis curricular para los números complejos

El conjunto de los números complejos, presenta gran importancia para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes como lo expresan los EBCM, mencionando la trascendencia del tema, su evolución e importancia en el desarrollo de las matemáticas de forma general; sin embargo, por parte del MEN (1998) no hay un EBCM que haga referencia específica al tema, ni un DBA que lo mencione.

Ahora bien, tomando el texto guía de la institución *Álgebra y Trigonometría* (Sullivan, 2012), el contenido temático es muy reducido y netamente analítico, ya que inicia con la introducción del concepto de unidad imaginaria a partir de la solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$, posteriormente, se muestra la definición de número complejo a partir de la forma $a + bi$ donde a a se conoce como la parte real y b como la parte imaginaria. A partir de ahí, el tratamiento que se da del tema es netamente analítico ya que se explican de manera algebraica las operaciones como la adición, sustracción, multiplicación y división, terminando la unidad con las potencias de la unidad imaginaria y las ecuaciones con los complejos.

Con base en lo anterior, se evidencia cómo los estudiantes no tienen acercamiento a las representaciones geométricas, ya que no se evidencian representaciones de los complejos como pareja ordenada para su posterior representación en el plano.

En el libro *Los Caminos del Saber Matemáticas 9* (Armas et al., 2013), para grado noveno se hace referencia a un apartado histórico corto de los números imaginarios, se muestran las definiciones generales de cada tema y en cuanto a las representaciones sólo se hace énfasis en la gráfica como punto en el plano complejo, conjugado y opuesto; las operaciones se muestran de forma algebraica.

En el libro *Saber(es) ser Matemáticas 9* (Sánchez et al., 2019), inicia con un breve recuento histórico de los números complejos, enfatizando la notación de i de Leonhard Euler para $\sqrt{-1}$. Se inicia con la solución de la ecuación $x^2+1=0$ con el objetivo de definir la unidad imaginaria, posteriormente continúa con las potencias de i y la definición de números complejos, es importante resaltar que el libro menciona las representaciones en forma binomial y en forma cartesiana: en la forma cartesiana enfatiza en representarlo como una pareja ordenada y muestra su representación como un punto en el plano complejo. Sin embargo, las operaciones entre los números complejos son definidas de manera algebraica, dejando solo algunos gráficos como referencia para la solución de las operaciones indicadas. La norma de un número complejo tiene nuevamente componente geométrico ya que la expresa como la distancia del punto que representa al número complejo hasta el origen del plano complejo.

Al realizar el análisis del texto que se tiene como referencia en la institución se evidencia que no existe relación con el registro gráfico, ya que no menciona la representación cartesiana ni las representaciones geométricas; en los libros de referencia para complementar las temáticas, se evidencia la tendencia a la presentación del tema especialmente de manera algebraica, dando un breve acercamiento a la representación cartesiana, solo con la ubicación de puntos en el plano, lo cual implica una mirada sesgada, además de incompleta de las temáticas, provocando un aprendizaje parcial (Carrasco, 2017), en este sentido se hace necesario realizar actividades que brinden la oportunidad de mostrar a los estudiantes los dos tipos de representaciones.

Análisis de instrucción- diseño de situaciones didácticas

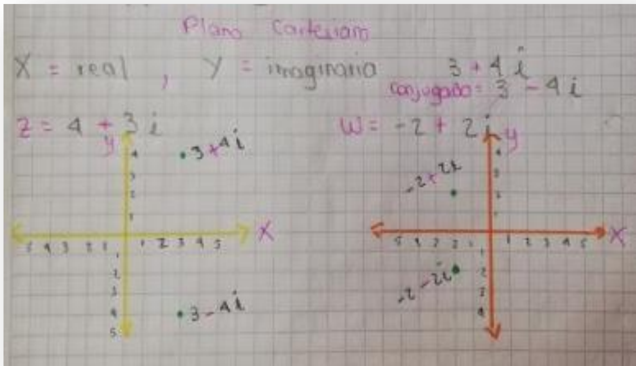
A partir del análisis curricular, la actividad diagnóstica realizada a los docentes y los antecedentes del estudio se diseñaron cuatro actividades centradas especialmente en la representación gráfica y geométrica de la adición y multiplicación de los números complejos. Las dos primeras actividades pretenden llevar al estudiante a la interacción con el software y a la construcción de cada una de las operaciones. La tercera y cuarta actividad buscan que los estudiantes realicen un análisis a partir de cada una de las observaciones de los ítems. Por tanto, se da cumplimiento al objetivo específico 4.

En la primera fase del trabajo realizado por medio de la Plataforma Zoom educatión, se buscó que los estudiantes tuvieran un acercamiento a los números complejos desde la parte analítica, por tal razón se realizó una aproximación al concepto con el fin de que reconocieran el número complejo y sus representaciones en forma binomial y cartesiana.

En forma binomial se buscó que comprendieran las operaciones básicas cómo lo son la suma, la resta, la multiplicación y la división, para más adelante mostrarles el proceso de manera gráfica; en la forma cartesiana se mostró cómo representarlo cómo pareja ordenada y su representación cómo un punto en el plano complejo.

Figura 8

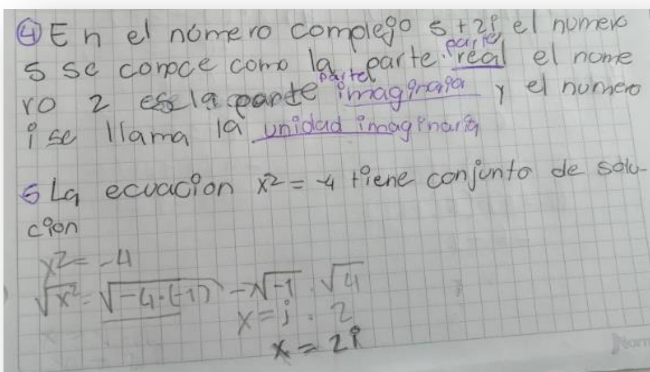
Representación de un número complejo en forma cartesiana estudiante E5



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E5

Figura 9

Concepción del estudiante E2 de los números complejos

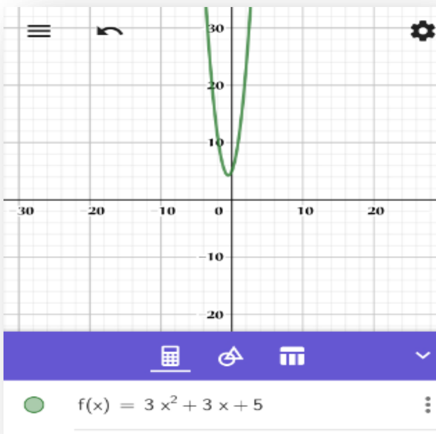


Fuente: trabajo realizado por el estudiante E2

También se realizó la introducción GeoGebra, ya que los estudiantes no habían tenido un trabajo previo con el Software. El trabajo con GeoGebra se realizó en las sesiones de clase donde se representaron las gráficas de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas, enfocadas en que los estudiantes conocieran todas las herramientas con las cuales cuenta el software para evitar inconvenientes con la manipulación del software, algunos estudiantes realizaron la descarga del software al dispositivo que utilizan para el desarrollo de las sesiones de clase y otros por el contrario preferían la versión en línea.

Figura 10

Representación de una función cuadrática en GeoGebra del estudiante E9



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E9

Fase 2. Actuar

Situación 1

Objetivo: Analizar cómo el estudiante realiza la construcción de la adición de números complejos en el software GeoGebra.

Tema: Suma de números complejos en forma geométrica.

Fase de acción

a. Grafique en el plano complejo los siguientes números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$.

b. Halle la suma de los números complejos de manera algebraica y grafique la respuesta en el plano complejo.

c. Halle la distancia entre los puntos iniciales y el origen

d. Halle la distancia entre los puntos iniciales y el punto que graficó cómo la suma de los puntos iniciales.

e. ¿Qué relación existe respecto a la distancia entre los puntos iniciales y el origen, los puntos iniciales y el resultado?

f. Trace un vector del origen a cada uno de los puntos iniciales, luego utilice la herramienta vector equipolente y marque el punto correspondiente al número $A=2+3i$ junto con el vector opuesto, realice el mismo procedimiento con el punto correspondiente al número $B=4+2i$ con el vector opuesto.

g. Ahora ¿Qué relación observa entre estos puntos?

h. ¿Qué sucede si mueve cualquiera de los puntos iniciales?

i. ¿Cómo lo podría explicar?

Tabla 16

Categorías de análisis fase de acción situación 1

Ítem	Tipo de situación	Resultados esperados
a	Acción	REA1a. Se espera que el estudiante para representar el número en el plano complejo use la forma cartesiana (a,b) donde la primera componente sea ubicada en el eje real y la segunda componente en el eje imaginario, y realice la conversión del registro algebraico al geométrico.
b	Acción	REA1b. Se espera que a partir de los conocimientos previos para la suma algebraica de dos números complejos, sume respectivamente sus partes reales e imaginarias (tratamiento) y posteriormente lo grafique (conversión) en el plano complejo cómo en el ítem anterior.
c	Acción	REA1c. Utilizando la herramienta distancia de GeoGebra, se espera que el estudiante halle la distancia del origen a cada punto, esta distancia corresponde a la norma de cada número.
d	Acción	REA1d. Utilizando la herramienta distancia de GeoGebra, se espera que el estudiante halle la distancia de cada

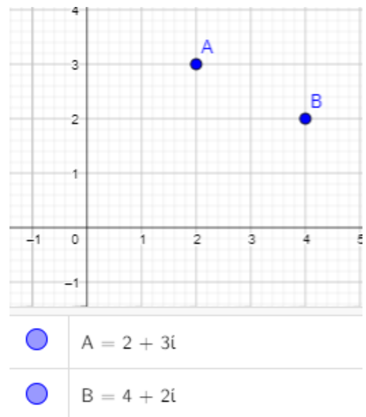
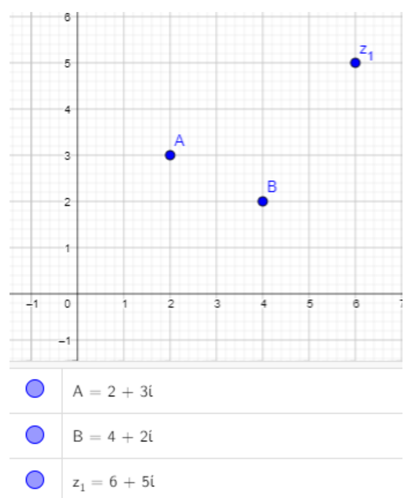
Ítem	Tipo de situación	Resultados esperados
		número complejo y del número que corresponde a la suma.
e	Acción	RE1e. Se espera que el estudiante identifique que las distancias resultan ser iguales dos a dos.
f	Acción	REA1f. Utilizando la herramienta vector y vector equipolente, el estudiante logre construir la representación de cada número complejo en forma vectorial y posteriormente realizar la equipolencia.
g	Acción	REA1g. Se espera que el estudiante corrobore que las distancias resultan ser semejantes dos a dos.
h	Acción	REA1h. Se espera que a medida que mueva cualquiera de los dos puntos iniciales, observe que cambia la gráfica de la suma.
i	Acción	REA1i. Cada vez que mueve cualquier punto inicial de su posición, también cambia el vector suma, esto sucede porque al cambiar las coordenadas de cualquier punto, la suma de los complejos también cambia.

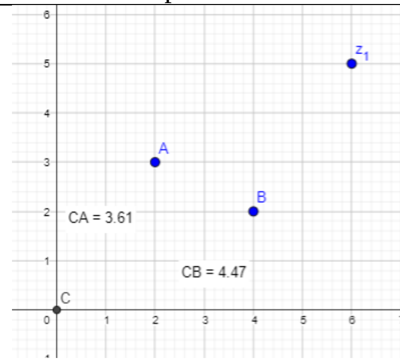
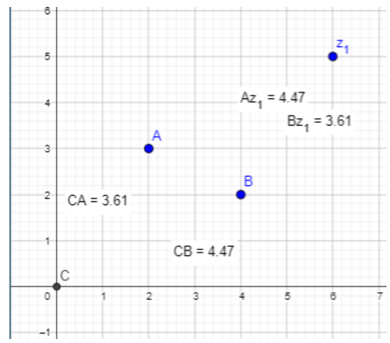
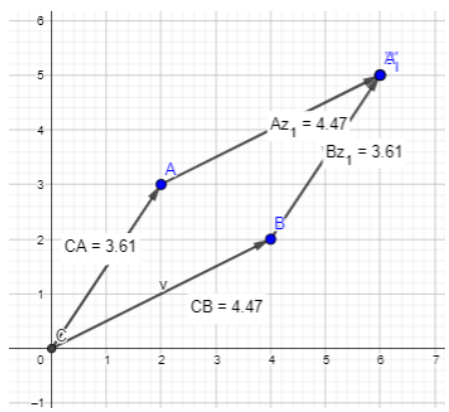
Fuente: elaboración propia

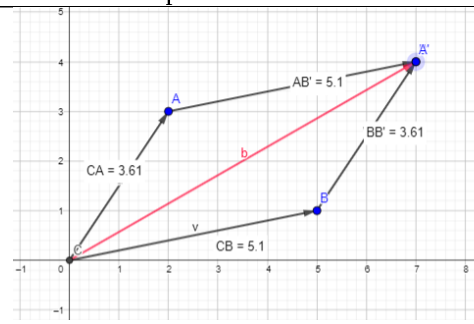
Las actividades planteadas en la fase de acción corresponden al primer acercamiento del estudiante con la situación, con el fin de que apliquen sus conocimientos previos y tomen decisiones para resolverlo, después de tener una apreciación clara de la situación, las interacciones iniciales le ayudarán a afirmar los resultados planteados o replantearlos hasta lograr el método correcto de resolución.

Tabla 17

Solución Propuesta por el investigador a la fase de acción de la actividad 1

Ítem	Solución Propuesta
Grafique en el plano complejo los siguientes números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$.	
Halle la suma de los números complejos de manera algebraica y grafique la respuesta en el plano complejo	Al sumar de forma algebraica los dos números complejos se obtiene $Z_1 = 6 + 5i$ y al graficarlo en el plano se obtiene: 

Ítem	Solución Propuesta
Halle la distancia entre los puntos iniciales y el origen.	
Halle la distancia entre los puntos iniciales y el punto que graficó cómo la suma de los puntos iniciales.	
¿Qué relación existe respecto a la distancia entre los puntos iniciales y el origen, los puntos iniciales y el resultado?	Son iguales dos a dos.
Trace un vector del origen a cada uno de los puntos iniciales, luego utilice la herramienta vector equipolente y marque el punto correspondiente al número $A = 2 + 3i$ junto con el vector opuesto, realice el mismo procedimiento con el punto correspondiente al número $B = 4 + 2i$ con el vector opuesto.	
Ahora ¿Qué relación observa entre estos puntos?	Se ratifica que son iguales dos a dos
¿Qué sucede si mueve cualquiera de los puntos iniciales?	Cambia la posición, pero las distancias siguen siendo iguales.

Ítem	Solución Propuesta
	
¿Cómo lo podría explicar?	El vector resulta ser la suma.

Fuente: elaboración propia

Ejecución

La primera actividad fue realizada el día 28 de septiembre del 2020 en un tiempo de noventa minutos correspondientes a la sesión de clase del día, distribuidos de la siguiente forma: la fase de acción se desarrolló en 40 minutos, la fase de formulación en 30 minutos y la fase de validación se desarrolló en 20 minutos; en esta actividad no se realizó la fase de institucionalización, ya que fue llevada a cabo en la tercera actividad.

En todas las actividades, la fase de acción se realizó con 19 estudiantes, la fase de formulación con cinco grupos, cuatro grupos conformados por cuatro estudiantes y un grupo conformado por tres estudiantes, las actividades fueron compartidas por medio de la plataforma Zoom Education, antes de iniciar las actividades se dieron las indicaciones generales, donde se sugirió que las dudas o inquietudes que se generaran serían resueltas con otra pregunta o con una reflexión.

A continuación se muestran los principales resultados observados en la situación 1 de acuerdo a las categorías de análisis realizadas, donde **RE** representa la categoría de análisis de acuerdo a cada fase y **A,** indica la cantidad de estudiantes que respondieron acertadamente, **B**, la cantidad de estudiantes que tienen una respuesta parcial y **C**, representa el número de estudiantes que respondió de manera incorrecta. El trabajo realizado por los estudiantes, se ordenó de acuerdo a la entrega, de esta forma el trabajo del primer estudiante se denominó **E1**, de igual forma el trabajo del primer grupo se denominó **G1** y así sucesivamente.

Tabla 18

Resultados situación 1, fase de acción

RE	REA1a	REA1b	REA1c	REA1d	REA1e	REA1f	REA1g	REA1h	REA1i
A	19	19	14	16	12	16	11	9	2
B	0	0	5	3	5	3	6	5	12
C	0	0	0	0	2	0	2	5	5

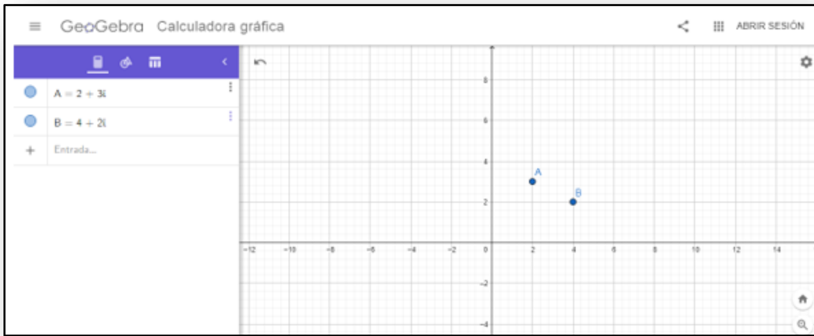
Fuente: elaboración propia

Grafique en el plano complejo los siguientes números $A = 2 + 3i$ *y* $B = 4 + 2i.$

Los estudiantes no presentaron dificultad al representar el número complejo en forma rectangular, se evidenció que todos los estudiantes lograron una correcta interpretación del enunciado y su representación en el software GeoGebra, lo anterior se asume como un correcta relación de los conocimientos previos de la representación de un número complejo en forma cartesiana, y se evidencia con 3 estudiantes que no siguieron la indicación de realizar el proceso en el software y utilizaron el cuaderno. Es importante resaltar que todos los estudiantes no llamaron los puntos A y B, algunos los llamaron Z_1 y Z_2, lo cual se relaciona con que los estudiantes no cambiaron los nombres o no conocían el proceso para cambiar la denominación de cada punto.

Figura 11

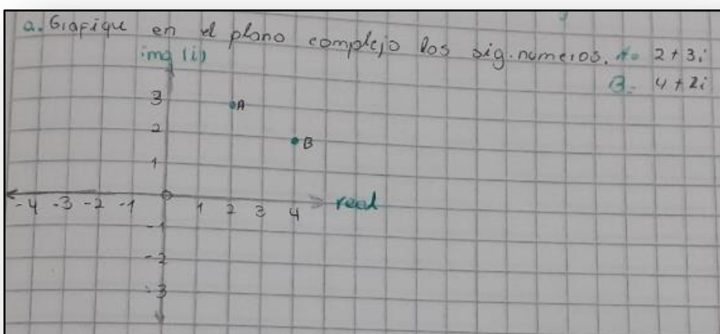
Representación de los números $A = 2 + 3i, B = 4 + 2i$ *en el software*



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E7

Figura 12

Representación de los números $A = 2 + 3i, B = 4 + 2i$ *en el cuaderno.*



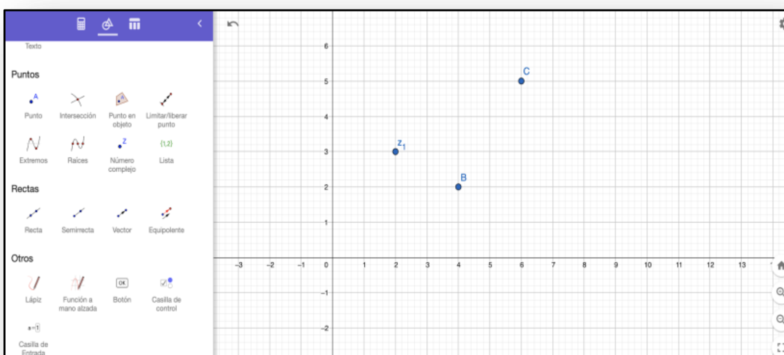
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E3

Halle la suma de los números complejos de manera algebraica y grafique la respuesta en el plano complejo

Todos los estudiantes hallaron correctamente la suma de los números complejos, lo cual evidencia un tratamiento adecuado en el registro algebraico, se asume cómo una correcta relación de los conocimientos previos de la adición de números complejos en forma algebraica y realizaron correctamente la representación en el plano, lo cual evidencia la correcta conversión del registro algebraico al registro geométrico.

Figura 13

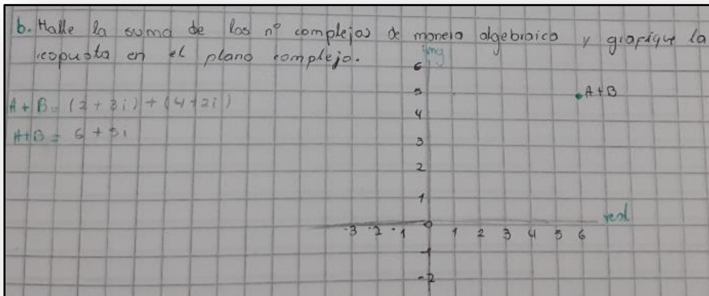
Representación de la suma de los números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$ *en el plano complejo*



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E9

Figura 14

Representación de la suma de los números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$ *en el plano complejo.*



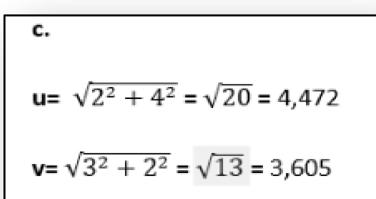
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E3

Halle la distancia entre los puntos iniciales y el origen

En este punto, 14 estudiantes respondieron el ítem de forma adecuada, varios relacionaron la distancia de los puntos iniciales al origen cómo la norma de cada número complejo; 5 estudiantes mostraron dificultad debido a la versión del Software ya que no les permitía calcular las distancias porque el programa no tenía habilitada esta opción, por lo cual la devolución consistió en darles estrategias para la solución cómo lo era la versión en línea de GeoGebra clásico o hallar la distancia por medio de las coordenadas del número complejo y el origen, los 5 estudiantes cambiaron a la versión en línea.

Figura 15

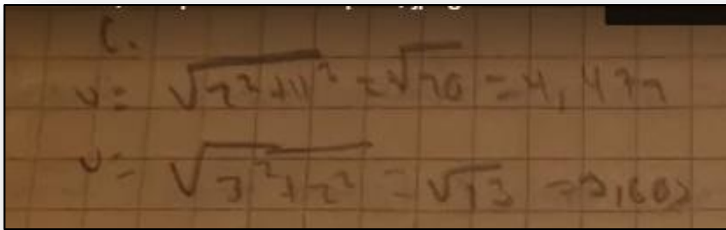
Representación de norma de los números complejos $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E11

Figura 16

Representación de norma de los números complejos $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$



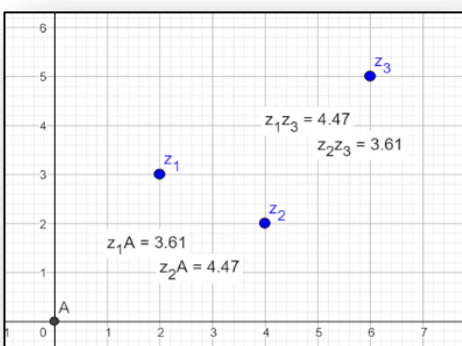
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E15

Halle la distancia entre los puntos iniciales y el punto que graficó cómo la suma de los puntos iniciales

En el desarrollo de este ítem, la mayoría de los estudiantes no presentó dificultad al hallar las distancias, sin embargo 3 estudiantes tuvieron problemas nuevamente al hallar las distancias, por lo cual se sugiere trabajar con la versión en línea de GeoGebra Clásico.

Figura 17

Distancia entre los puntos A, B y el origen, A, B y la suma de los puntos iniciales



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E1

¿Qué relación existe respecto a la distancia entre los puntos iniciales y el origen, los puntos iniciales y el resultado?

En este punto, 12 estudiantes mostraron una interpretación correcta del enunciado, sin embargo se observaron dificultades en las respuestas de los estudiantes al comunicar sus observaciones, 5 estudiantes realizaron una interpretación incompleta de la actividad ya que aunque identificaron la relación en las distancias, lo relacionaron con un tema diferente y 2 estudiantes tuvieron una interpretación errónea de la actividad; lo anterior muestra que los estudiantes están acostumbrados a resolver preguntas cerradas con única respuesta, pero cuando aparece una pregunta que requiere interpretación se hace más difícil el proceso de comunicación de ideas.

En este ítem, los estudiantes preguntaron a qué hacía referencia el resultado, por lo cual se debe replantear la pregunta a:

¿Qué relación existe respecto a la distancia entre los puntos iniciales y el origen, los puntos iniciales y el punto que representa el resultado de la suma de los puntos iniciales?

Figura 18

Relación de la distancia entre los puntos A, B y el origen, los puntos A, B y el resultado de la suma de los puntos iniciales

e. ¿Qué relación existe respecto a la distancia entre los puntos iniciales y el origen, los puntos iniciales y el resultado?Tienen la misma distancia por lo tanto son iguales y correspondiente uno del otro.

Fuente: trabajo realizado por el estudiante E17

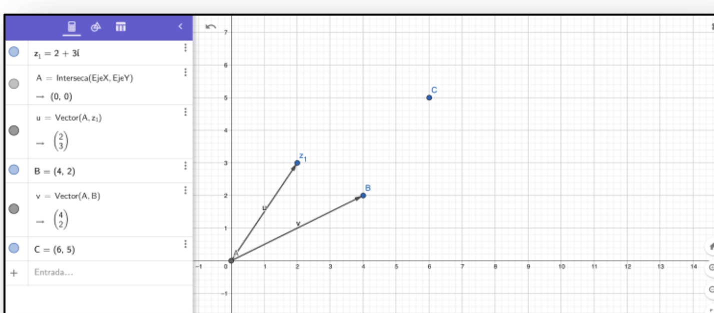
Trace un vector del origen a cada uno de los puntos iniciales, luego utilice la herramienta vector equipolente y marque el punto correspondiente al número $A = 2 + 3i$ **junto con el vector opuesto, realice el mismo procedimiento con el punto correspondiente al número** $B = 4 + 2i$ **con el vector opuesto**

En este punto, los estudiantes tuvieron un desarrollo adecuado del ítem logrando obtener la figura propuesta, sin embargo se presentaron preguntas acerca del proceso de solución, lo cual se interpreta cómo falta de seguridad por parte de los estudiantes al realizar la construcción, esto debido a que en el desarrollo de las sesiones de clase el docente representa la seguridad al confirmar los resultados.

La devolución para estas preguntas consistía en preguntarles acerca del desarrollo del ítem de acuerdo a las indicaciones y la relación que existía entre las construcciones. De forma general se muestra un trabajo adecuado con el software, manejando de manera correcta las herramientas con las cuales cuenta la aplicación; es importante resaltar el manejo adecuado que se le dio a este ítem, ya que el manejo previo del software con las herramientas de vector era mínimo.

Figura 19

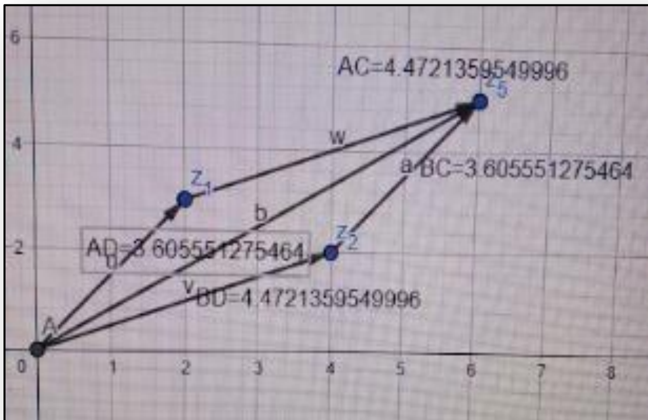
Representación de los números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$ *cómo vector*



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E12

Figura 20

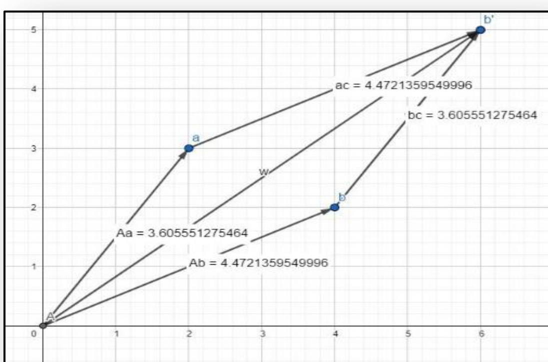
Representación de la suma de los números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$ *en forma geométrica.*



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E10

Figura 21

Representación de la suma de los números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$ *con el método del paralelogramo utilizando la herramienta vector equipolente.*



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E11

¿Qué relación observa entre estos puntos?

Los estudiantes dieron una respuesta satisfactoria ya que evidenciaban la comprensión a la pregunta, sin embargo, al igual que en la pregunta anterior donde se pedía que expresaran sus observaciones se identifica que los estudiantes no son claros en sus comunicaciones escritas, lo cual se relaciona con el desarrollo habitual de las sesiones de clase donde el docente es el encargado de resolver las inquietudes de los estudiantes y no se pide a los estudiantes realizar una interpretación y comunicar los resultados de una observación.

En este ítem 3 estudiantes preguntaron la relación que existía entre los puntos, por lo cual se evidencia la importancia de reformular el enunciado para una correcta interpretación por parte de los estudiantes.

¿Qué relación observa entre el origen, los puntos iniciales y el punto final donde se unen los vectores equipolentes?

Figura 22

Relación entre el origen, los puntos iniciales y el punto final donde se unen los Vectores equipolentes

. Ahora ¿Qué relación observa entre estos puntos?
Los dos vectores llegaron al punto que corresponde a su respuesta (solución de sumar cada par de términos)

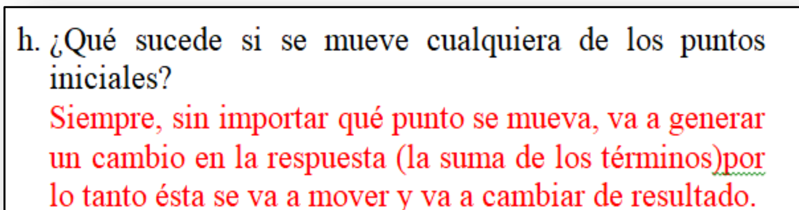
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E17

¿Qué sucede si mueve cualquiera de los puntos iniciales?

En este ítem 9 estudiantes interpretaron de forma correcta la actividad y por medio de sus respuestas evidenciaron que al mover cualquiera de los puntos iniciales, la figura cambiaba de posición, por tanto, si los números iniciales cambiaban, el resultado cambia; sin embargo 5 estudiantes al mover los puntos iniciales, la forma del paralelogramo cambiaba, pero el punto graficado inicialmente no, ya que quedaba en una posición constante y esto generó errores en la respuesta de los estudiantes, por lo cual se hace necesario reformular el enunciado del ítem f, generando un punto de intersección en la punta de los vectores, lo cual ayudará a interpretar mejor el ítem.

Figura 23

Explicación del resultado de mover cualquier punto

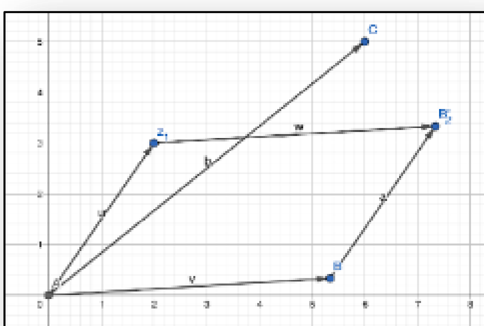


h. ¿Qué sucede si se mueve cualquiera de los puntos iniciales?
Siempre, sin importar qué punto se mueva, va a generar un cambio en la respuesta (la suma de los términos)por lo tanto ésta se va a mover y va a cambiar de resultado.

Fuente: trabajo realizado por el estudiante E17

Figura 24

Movimiento de los puntos iniciales d



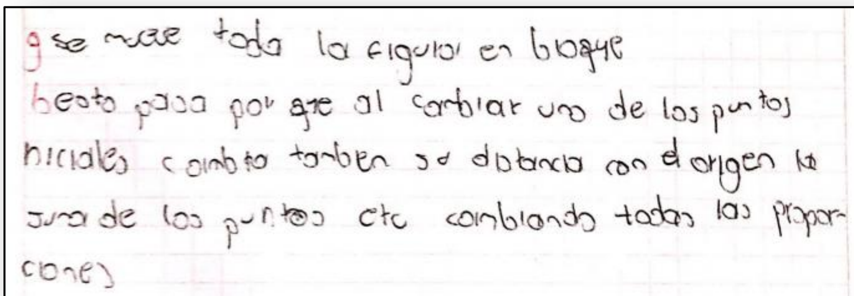
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E6

¿Cómo lo podría explicar?

En este ítem, correspondiente a la generalización, se evidencia que la mayoría de los estudiantes muestra una interpretación correcta del enunciado; sin embargo muestran dificultades al comunicar sus observaciones cómo en los ítems anteriores donde se pedía que comuniquen sus resultados.

Figura 25

Explicación de la actividad realizada por un estudiante



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E14

Actividad fase de Formulación

a. Comparen los resultados obtenidos en la parte individual y busquen una solución general.
b. De acuerdo a los resultados obtenidos entregar una hoja por el grupo donde se desarrollen a detalle los ítems c, d, e, f, g.
c. ¿Pueden anticipar por este medio el resultado de sumar $C = 5 + 7i$ y $D = 6 + 8i$.
d. ¿Utilizando el proceso anterior, puede ubicar la suma de cualquier par de números sin utilizar el proceso algebraico?
e. Elabore una conclusión de la actividad

Tabla 19

Categorías de análisis fase de formulación

Ítem	Tipo de Interacción	Resultados esperados
a.	Validación	REF1a. Los estudiantes deben comparar los resultados y discutir acerca de las respuestas obtenidas en busca de una solución general que dé respuesta a cada ítem, es decir los estudiantes llegan a un acuerdo respecto a cada respuesta, realizando el tratamiento y la conversión pertinente en cada caso.
b.	Validación	REF1b. Los estudiantes deben entregar en grupo una respuesta de los ítems $c, d, e, f, g;$ se eligen estos ítems, porque son en los cuales ellos deben dar una conclusión respecto a los razonamientos.
c.	Formulación	REF1c. Los estudiantes utilizando el proceso con GeoGebra hallarán la suma de $C = 5 + 7i \ y \ D = 6 + 8i$ sin utilizar el proceso analítico, realizando un tratamiento en el registro gráfico.
d.	Formulación	REF1d. Se espera que el estudiante responda afirmativamente en este ítem, es decir, el estudiante aprendió la forma de sumar los números de forma geométrica.
e	Validación	REF1e. La conclusión general que se espera es que todos hayan aprendido a sumar los números complejos con el software GeoGebra.
Finalización		Para finalizar la actividad se realiza la solución del ítem donde los estudiantes presentaron mayor dificultad al desarrollar la actividad, pero sin realizar la fase de institucionalización, ya que se quiere realizar otra actividad que aborda el mismo tema.

Fuente: elaboración propia

Las categorías de análisis presentadas para la fase de formulación corresponden a observar e interpretar los resultados planteados por los estudiantes en forma grupal donde aportan sus ideas y se comunican de forma acertada para encontrar una solución adecuada.

Tabla 20

Resultados Fase de Formulación

	REF1a	REF1	REF1c	REF1d	REF1e
A	5	4	5	5	5
B	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	0

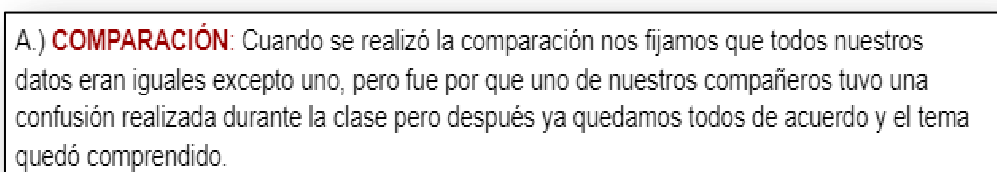
Fuente: elaboración propia

Comparen los resultados obtenidos en la parte individual y busquen una solución general

Se observó en todos los grupos que los estudiantes se apropiaron del tema y de las herramientas de la plataforma Zoom, y compartían sus resultados individuales para compararlos, evidenciando aciertos y desaciertos del tema, cumpliendo con lo establecido en la situación de formulación donde se favorece la comunicación, y el compartir las estrategias utilizadas para la solución del problema y los resultados obtenidos.

Figura 26

Comparación realizada por los estudiantes



A.) COMPARACIÓN: Cuando se realizó la comparación nos fijamos que todos nuestros datos eran iguales excepto uno, pero fue por que uno de nuestros compañeros tuvo una confusión realizada durante la clase pero después ya quedamos todos de acuerdo y el tema quedó comprendido.

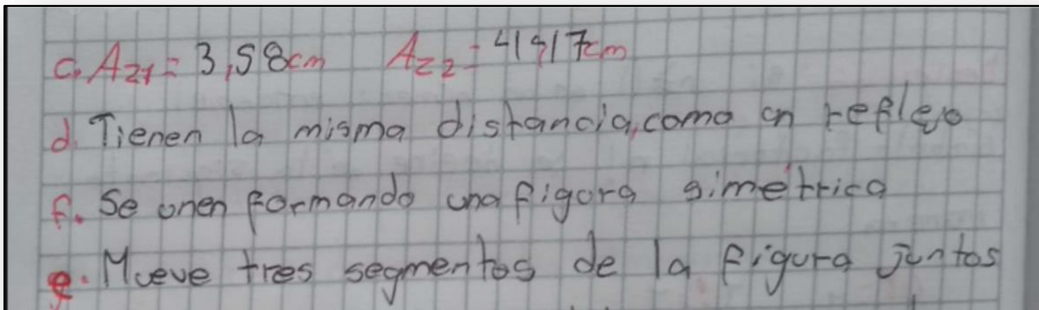
Fuente: trabajo realizado por el grupo **G1**

De acuerdo a los resultados obtenidos entregar una evidencia por el grupo donde se desarrollen a detalle los ítems $c, d, e, f, g.$

En este ítem se logró identificar algunas falencias que evidenciaban los estudiantes en cuanto a términos que no eran adecuados, por tal motivo se hizo necesario intervención por parte del docente para que revisaran los términos utilizados, los estudiantes compartían sus saberes previos y concepciones acerca del desarrollo de la actividad; luego, los estudiantes se apropiaron del tema y dieron las respuestas más adecuadas según su criterio, se evidencia la importancia de la fase de formulación, ya que las respuestas eran más acertadas respecto a lo que se esperaba; lo anterior se supone gracias a que los estudiantes compartieron sus ideas y buscaban la forma más adecuada de comunicarse, lo anterior se asume de acuerdo a Terroni (2009).

Figura 27

Desarrollo de los ítems c, d, e, f.



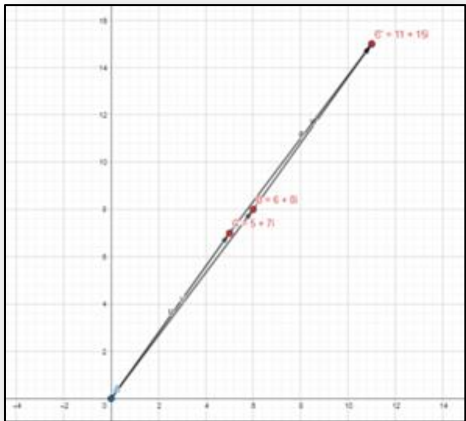
Fuente: trabajo realizado por el grupo G4

¿Pueden anticipar por este medio el resultado de sumar $C = 5 + 7i$ y $D = 6 + 8i$?

Todos los grupos lograron anticipar por medio del software GeoGebra el proceso para sumar los números complejos, sin embargo se debe resaltar que no todos los grupos lo resolvieron en el mismo tiempo, ya que dos grupos lo resolvieron de una manera rápida, los demás lo hacían siguiendo los pasos de la fase de acción; los estudiantes realizaron una correcta conversión del registro algebraico al registro gráfico, evidenciado de acuerdo al planteamiento de Duval (2017) aunque evidenciaban falencias en el manejo del software por que no conocían la ubicación de las herramientas, lo anterior debido a que los estudiantes no estaban familiarizados con el software.

Figura 28

Representación de la suma de $C = 5 + 7i$ *y* $D = 6 + 8i$.



Fuente: trabajo realizado por el grupo G3

¿Utilizando el proceso anterior, puede ubicar la suma de cualquier par de números sin utilizar el proceso algebraico?

Los grupos coinciden en que por medio de este proceso se puede realizar la suma de los números complejos sin necesidad de realizar operaciones algebraicas; un grupo relacionó el proceso con el método del paralelogramo para sumar los números complejos, lo cual evidencia consultas que realizaron en la actividad, ya que no se habían tenido relación previa con ese concepto; los estudiantes reconocen la importancia de trabajar con el software GeoGebra como se muestra a continuación.

Figura 29

Respuesta de un grupo de clase respecto a la importancia de GeoGebra.

Si,ya que con las herramientas que nos ofrece geogebra podemos realizar todas las operaciones sin un proceso intermedio algebraico.

Fuente: trabajo realizado por el grupo G5

Figura 30

Respuesta de un grupo de clase

e. la herramienta geogebra nos facilita el proceso de suma de números complejos que se anticipa gracias a sus variadas herramientas sin hacer uso de algún proceso algebraico

Fuente: trabajo realizado por el grupo G5

Figura 31

Respuesta de un grupo de clase

d) ¿Cómo lo podría explicar? Por el teorema que involucra los trapecios, pues este, gráficamente muestra como las coordenadas de dos puntos iniciales (con n. complejos) se suman y dan otro punto que completa la figura sin necesidad de mucho cálculo.

Fuente: Trabajo realizado por el grupo G2

Fase de Validación

La fase de Validación fue una experiencia enriquecedora para los estudiantes y para el docente, ya que se mostraban diferentes interpretaciones respecto a un mismo enunciado, todos los estudiantes se sentían motivados a participar, y varios aseguraron que la interacción con el software incita a la curiosidad, a explorar nuevas formas de aprender.

La validación se realizó paso a paso dando la oportunidad a cada grupo de que mostrara sus resultados, se discutieron los ítems de la fase grupal, destacando en los ítems a, b y e, donde se enfatizó la interpretación y comunicación que los grupos daban a cada respuesta; se evidenció una estrecha relación entre cada una de las respuestas, por lo cual se puede establecer un análisis de cada grupo y una interpretación correcta de la actividad. Todos los grupos encontraron cómo principal conclusión que gracias al proceso geométrico se puede determinar de manera más sencilla la suma de los números complejos sin utilizar procesos algebraicos.

Teniendo en cuenta algunas respuestas proporcionadas por los estudiantes, que utilizan términos que aún no se habían visto en las sesiones de clase cómo el método del paralelogramo (Figura 31), se puede inferir que consultaron plataformas virtuales o libros para complementar el desarrollo de la actividad.

En esta actividad no se realizó institucionalización por que se tenía prevista otra actividad con el tema, sin embargo, se realizó la solución de ítems en los cuales los estudiantes no estaban seguros de las respuestas, tal es el caso del ítem f de la fase de acción.

Conclusión final de la situación 1

La actividad se desarrolló en completo orden, se evidenció el compromiso de los estudiantes en su primera interacción con el software, varios estudiantes realizaban preguntas relacionadas con el desarrollo de la actividad, por lo cual se hizo una reflexión para que lo resolvieran de manera autónoma, a partir de ahí no se registraron inconvenientes ni preguntas relacionadas con el desarrollo de la actividad; se destaca la interpretación adecuada de los estudiantes respecto a los ítems, sin embargo es de resaltar la importancia de estandarizar el software para la próxima actividad ya que varios tenían la versión GeoGebra Clásico y otros la versión de GeoGebra calculadora gráfica instalada en su dispositivo electrónico, lo cual generaba confusiones por lo cual la recomendación para la próxima actividad fue la versión en línea.

En la fase de formulación, se evidenció el compromiso de los estudiantes, todos mostraban interés en dar una respuesta correcta de cada ítem; la fase grupal es una experiencia enriquecedora para los estudiantes ya que por medio de la interacción pueden discutir sus interpretaciones y buscar una respuesta general que represente todas las interpretaciones, además de corregir interpretaciones erróneas que se hayan realizado en la fase de acción.

En la fase de validación cada grupo mostraba sus argumentos y comparaba con sus compañeros; además tenía la oportunidad de defender sus interpretaciones o cambiarlas de acuerdo a cada enunciado, en esta fase el docente sirvió de moderador para escuchar de forma ordenada todas las ideas.

Situación 2

Objetivo: Analizar la construcción del concepto de multiplicación de números complejos en el software GeoGebra.

Tema: Multiplicación de números complejos en forma geométrica.

Fase de Acción

a. Represente en el plano complejo los números $A=2+3i$ y $B=4+2i$.

b. Ubique un punto sobre el eje real positivo, mida el argumento principal de cada uno y halle el módulo de cada uno.

c. Halle la suma de los argumentos principales de cada vector y el producto de sus módulos.

d. Grafique un número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de $A\ y\ B$ y argumento principal la suma de los argumentos de $A\ y\ B$.

e. Realice la operación producto usando la definición algebraica.

f. Dibuje el número resultante en el ítem anterior en el plano complejo.

g. Compare los procesos realizados y escriba la relación que halló.

Tabla 21

Categorías de análisis fase de acción actividad 2

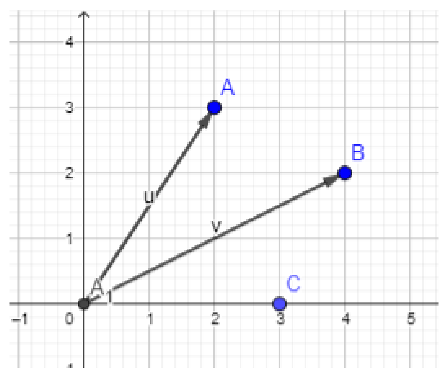
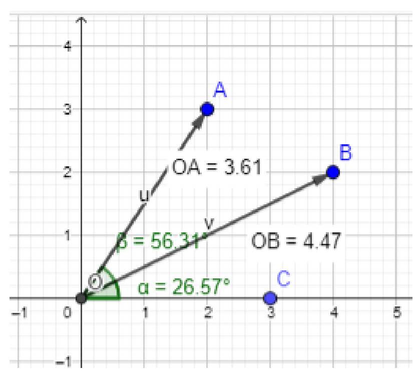
Ítem	Tipo de Interacción	Resultados esperados
a	Acción	REA2a. El estudiante debe representar en el plano complejo los números $A = 2 + 3i$ y $B = 4 + 2i$ sin ninguna dificultad, realizando un adecuado proceso de conversión
b	Acción	REA2b. El estudiante por medio de la herramienta ángulo, medirá el argumento principal de cada vector, Luego la distancia del origen a cada número complejo o el módulo de cada número por medio de la herramienta distancia.
C	Acción	REA2c. Se espera que el estudiante a tanteo y error utilizando la herramienta vector y ángulo dada su amplitud, obtenga la gráfica del vector multiplicación con las características dadas.
d	Acción	REA2d. El estudiante obtiene el producto de los dos vectores de forma algebraica.
e	Acción	REA2e. El estudiante grafica el número complejo que obtuvo cómo resultado al realizar el proceso de manera algebraica.
f	Acción	REA2f. Se espera que el estudiante al graficar el punto en el plano complejo, observe que los resultados obtenidos resultan ser iguales, es decir que el proceso que realizó con el software GeoGebra, es una alternativa para hallar la multiplicación de números complejos.

Ítem	Tipo de Interacción	Resultados esperados
g	Acción	REA2g. Se espera que los estudiantes identifiquen que la multiplicación en forma algebraica de los números complejos tiene igual resultado a la multiplicación en forma geométrica.

Conclusión: Con el desarrollo de la actividad en la fase de acción, se espera que los estudiantes estén más familiarizados con el trabajo en la fase. En este caso se propone que los estudiantes realicen la construcción del proceso para realizar la multiplicación de los números complejos de forma geométrica.

Tabla 22

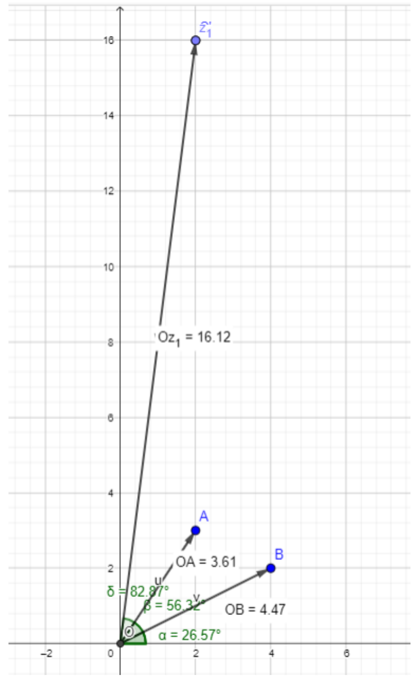
Solución propuesta por el investigador a la actividad 2

Ítem	Solución propuesta
Represente en el plano complejo los números $A=2+3i$ y $B=4+2i$.	
Ubique un punto sobre el eje real positivo y mida el argumento principal de cada uno y halle el módulo de cada uno.	
Halle la suma de los argumentos principales de cada vector y el producto de sus módulos.	$\gamma = \alpha + \beta$ $\rightarrow$ 82.87°

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Solución propuesta</th></tr>
<tr><td>Grafique un número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de A y B y argumento principal la suma de los argumentos de A y B.</td><td>

$d = OB\ OA$

$\rightarrow\ 16.12$

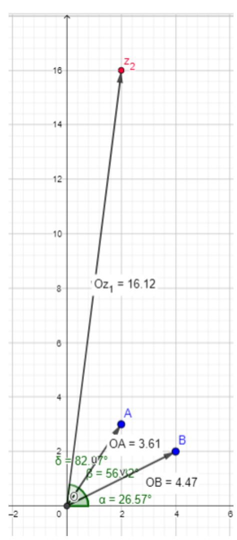


</td></tr>
<tr><td>Realice la operación producto usando la definición algebraica.</td><td>

$z_2 = A\ B$

$\rightarrow\ 2 + 16i$

</td></tr>
<tr><td>Dibuje el número resultante en el ítem anterior, en el plano complejo.</td><td>



</td></tr>
</table>

Ítem	Solución propuesta
Compare los procesos realizados y escriba la relación que halló.	El resultado de la multiplicación de forma algebraica es igual al resultado de la multiplicación geométrica.

Fuente: elaboración propia

Ejecución

La segunda actividad fue realizada el día 01 de Octubre del 2020 en un tiempo de noventa minutos, distribuidos de la siguiente forma: la fase de acción se desarrolló en 40 minutos, la fase de formulación en 30 minutos y la fase de validación se desarrolló en 20 minutos; en esta actividad no se realizó la fase de institucionalización, ya que fue llevada a cabo en la cuarta actividad.

Tabla 23

Resultados fase de acción actividad 2.

RE	REA2a	REA2b	REA2c	REA2d	REA2e	REA2f	REA2g
A	19	14	19	12	19	17	19
B	0	3	0	6	0	2	0
C	0	2	0	1	0	0	0

Fuente: elaboración propia

Represente en el plano complejo los números *A=2+3i y B= 4+2i*

Todos los estudiantes graficaron de manera correcta en el software los números *A=2+3i y B= 4+2i,* lo cual confirma el dominio de la conversión del registro algebraico al registro gráfico de los números complejos evidenciada en la primera actividad, lo anterior se afirma d.

Ubique un punto sobre el eje real positivo y mida el argumento principal de cada uno y halle el módulo de cada uno

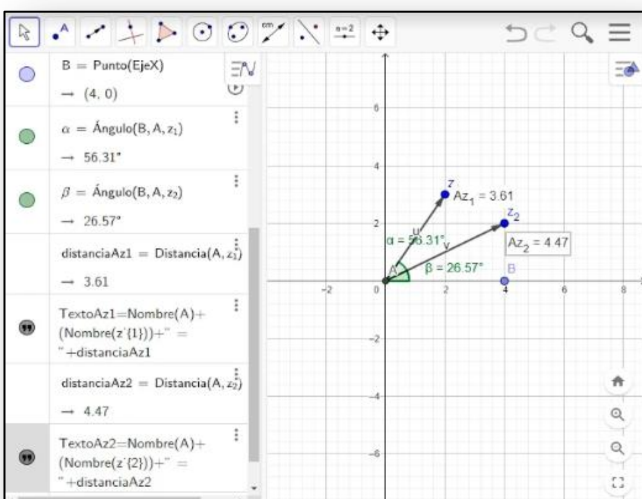
En el desarrollo de este ítem, fue necesario aclarar que el punto se debía ubicar en el eje real positivo, varios estudiantes presentaron inquietud respecto a la norma y argumento, ya que relacionaban los conceptos de forma invertida, es decir relacionaban los argumentos con la norma de los números y los módulos con los argumentos, por lo cual se hizo necesaria la intervención del docente para aclarar invocando los conceptos previos; en este caso bastó con una sola intervención, ya que al encontrarse todos los estudiantes en la sala principal la aclaración fue general.

Se evidencia que aunque los estudiantes tenían el concepto claro acerca de los que es el módulo y el argumento, 14 estudiantes realizaron la actividad de forma correcta, los demás no expresaron de forma clara sus resultados por lo cual fueron tomadas cómo respuestas en proceso.

Se presentó en dos estudiantes que a pesar de la recomendación de trabajar con la versión en línea del software, trabajaron con la versión calculadora gráfica, lo cual fue un inconveniente al hallar los módulos, ya que la herramienta no lo permitía.

Figura 32

Representación de los números A y B y medida del argumento principal y módulo de cada uno.



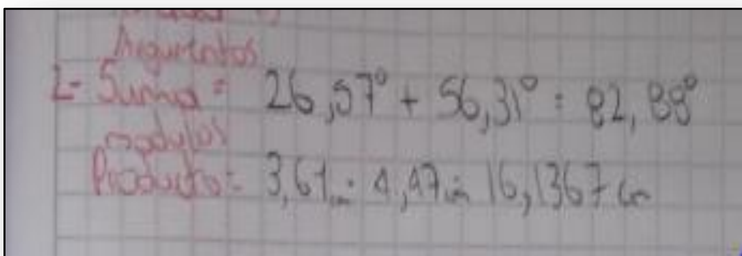
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E12

Halle la suma de los argumentos principales de cada vector y el producto de sus módulos

La interpretación y desarrollo de este ítem fue adecuada, ya que los estudiantes hallaron sin problemas la suma de los argumentos principales y la multiplicación de sus módulos. Se resalta el compromiso de los estudiantes con la actividad ya que ellos presentaron inconvenientes, al sentirse atrasados empezaron a preguntar a los compañeros cómo lo habían resuelto, sin embargo la indicación fue continuar con el trabajo en forma individual; los estudiantes se adelantaron con la versión en línea.

Figura 33

Adición de los argumentos y producto de los módulos de los números complejos A y B



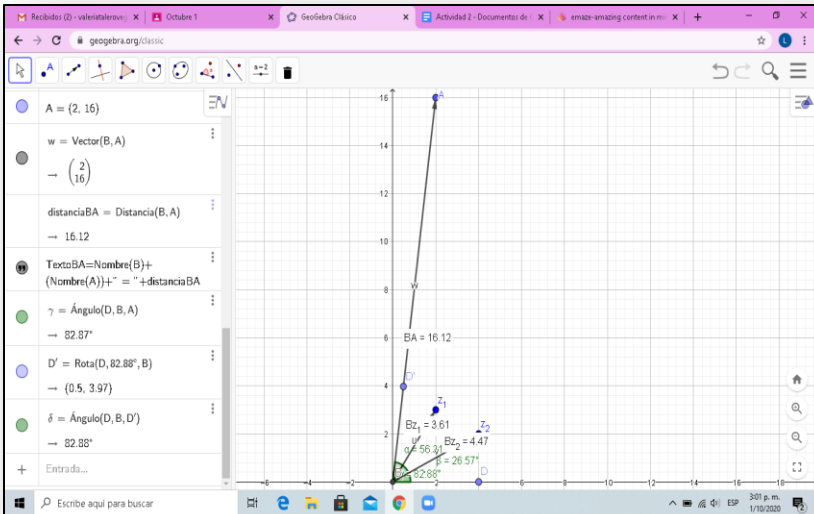
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E14

Grafique un número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de A *y* B **y argumento principal la suma de los argumentos de** A *y* B

El desarrollo de este ítem fue más complicado de lo esperado, ya que los estudiantes no encontraban el comando de GeoGebra que les ayudara a resolver ejercicio de forma precisa, sin embargo utilizaron métodos de ensayo y error, lo cual ayudó a familiarizarse con las herramientas del programa; el tiempo de desarrollo se incrementó en esta fase, sin embargo 12 estudiantes lograron obtener el resultado, 6 no tenían el resultado tan claro, por lo cual se toman cómo respuesta en desarrollo y un estudiante mostró resultados incoherentes.

Figura 34

Un número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de A y B y argumento principal la suma de los argumentos de A y B



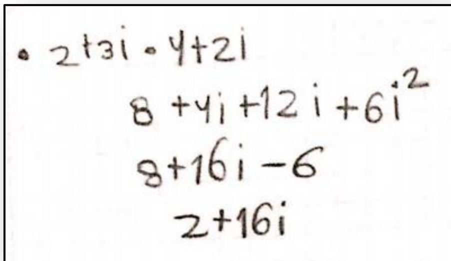
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E16

Realice la operación producto usando la definición algebraica

La mayoría de los estudiantes lograron hallar el producto de los números complejos de forma algebraica, dos de ellos lo realizaron en el software GeoGebra, sin embargo en el desarrollo de la actividad varios estudiantes realizaban preguntas acerca del proceso correcto para realizar la operación, lo cual relaciona el correcto tratamiento del registro algebraico de acuerdo a Duval (2017), asociado con que los estudiantes manejaron de forma adecuada los conocimientos previos respecto al proceso algebraico.

Figura 35

Producto de los números complejos A y B utilizando la definición algebraica.



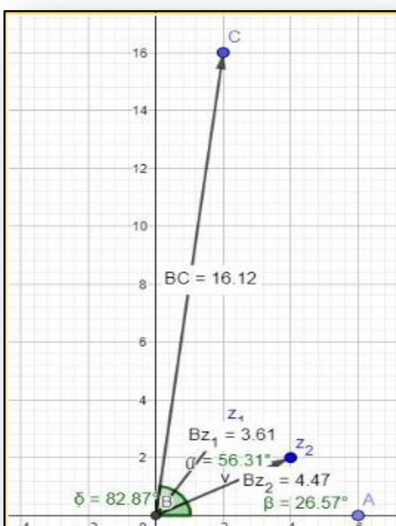
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E6

Dibuje el número resultante en el ítem anterior, en el plano complejo

Los estudiantes realizaron la gráfica del número complejo en el plano sin ninguna dificultad evidenciando el manejo adecuado de las conversiones realizadas entre el registro algebraico y el registro gráfico cómo se había visto previamente.

Figura 36

Grafica del número complejo resultante de la multiplicación de los números A y B



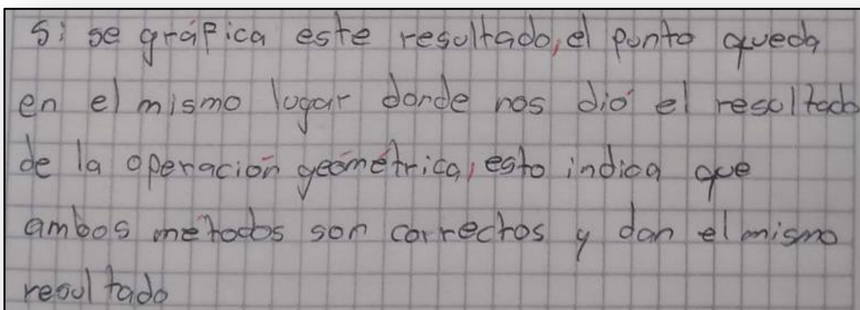
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E3

Compare los procesos realizados y escriba la relación que encontró

La mayoría de los estudiantes (17) lograron concluir la actividad de manera satisfactoria, relacionando las dos formas de representación de la multiplicación de los complejos realizando los procesos de tratamiento y conversión entre los registros; sin embargo a pesar de que los estudiantes realizaran el proceso, se logró evidenciar que existe una gran dificultad al expresar los resultados encontrados, por lo tanto se muestra la falta de comunicación asertiva respecto a sus resultados (Terroni, 2009).

Figura 37

Comparación de los procesos realizados



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E9

Fase de formulación

a. Comparar los resultados obtenidos en la fase individual y obtener una solución general.
b. Realizar el proceso para la multiplicación de números complejos con el software GeoGebra, para los números $A = 3 - 2i$ y $B = 4 + 3i$, después comprobar el resultado por medio del proceso algebraico.
c. En grupo de Trabajo elaborar una conclusión de la actividad.

Tabla 24

Categorías de análisis fase de formulación y validación, actividad 2

Ítem	Tipo de situación	Resultados esperados
a	Validación	REV2a. Los estudiantes comparan sus resultados individuales, reformularán algunas de sus respuestas y aclararán las dudas.
b	Formulación	REF2b. Trabajarán en equipo para obtener la multiplicación de los números de manera gráfica.
c	Formulación	REF2c. En grupo de Trabajo elaborarán una conclusión de la actividad, donde se espera expresen la forma más sencilla de resolver la actividad.

Fuente: elaboración propia

La fase de formulación fue diseñada con el fin de favorecer la comunicación entre los estudiantes de tal forma que se potencie la comunicación verbal y escrita, dando lugar a la interpretación y comunicación de los resultados obtenidos.

Tabla 25

Resultados fase de formulación

	REF2a	REF2b	REF2c
A	5	3	0
B	0	2	5
C	0	0	0

Fuente: elaboración propia

Comparar los resultados obtenidos en la fase individual y obtener una solución general

En esta actividad se observó como los estudiantes por medio de las herramientas de la plataforma Zoom compararon los resultados, debatieron acerca de la forma de elaborar el vector que cumpliera las condiciones previas de argumento y módulo. En el desarrollo de la actividad se notó un mejor manejo de las herramientas de GeoGebra y la etapa de formulación se percibió en la comparación y debate que se generó entre compañeros respecto a la búsqueda de respuestas correctas.

Figura 38

Validación de los resultados obtenidos en la fase de acción

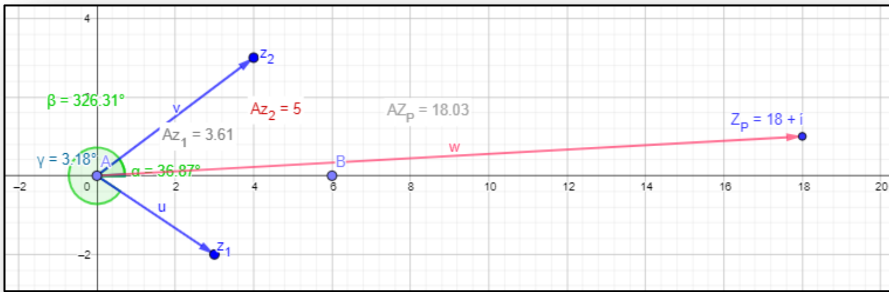
Fuente: trabajo realizado por el grupo G4

Realizar el proceso para la multiplicación de números complejos con el software GeoGebra, para los números $A=3-2i$ y $B=4+3i$, después comprobar el resultado por medio del proceso algebraico

En el desarrollo de este ítem tres grupos lograron el resultado correcto, los demás expresaron falta de tiempo y no estar seguros del proceso que se debía seguir, lo cual indica que no hubo comprensión adecuada de la actividad, sin embargo, la inseguridad respecto al proceso de solución se debe a que los estudiantes están acostumbrados a que el docente corrobore su trabajo, en esta ocasión siguiendo los procesos de devolución, se notó cómo los estudiantes se enfocaban en dar una respuesta acertada superando dificultades cómo la ubicación correcta de los módulos y argumentos por medio de ensayo y error.

Figura 39

Multiplicación de los números $A = 3 - 2i$ *y* $B = 4 + 3i$ *de forma geométrica.*



Fuente: trabajo realizado por el grupo G3

En grupo de trabajo elaborar una conclusión de la actividad

Los estudiantes de acuerdo a sus interacciones en la fase de acción y en la fase de formulación realizan un acercamiento a la relación que existe al realizar el proceso algebraico y el proceso gráfico, sin embargo no es clara la comunicación de las ideas identificadas en la comprensión de la actividad, por tanto las respuestas son consideradas cómo en proceso.

Figura 40

Respuesta acerca de la comprensión de la actividad

> Al hacer la multiplicación por medio de la gráfica y por medio del proceso algebráico, podemos ver qué el resultado coincide en ambos casos, siendo correctos los dos procesos

Fuente: trabajo realizado por el grupo G5

Validación

Los estudiantes mostraron mayor interacción con los compañeros, esto debido a que ellos tenían una interacción previa con la TSD y se habían hecho una idea del proceso que seguía: se notó mayor expresividad y compromiso al comparar y discutir ideas, lo cual muestra la apropiación del tema y el interés que se genera gracias a la interacción con el software, sin embargo, en esta ocasión se presentaron interrogantes acerca de cómo graficar de forma rápida el vector multiplicación ya que por medio del método de ensayo y error el tiempo es mayor al buscar la solución correcta, a lo cual un grupo respondió que se podía elegir la herramienta ángulo dada su amplitud y que esto era más sencillo.

En la validación se centró en escuchar las respuestas de cada uno de los grupos y analizar la interpretación y forma de comunicación de sus resultados; se evidenció que a pesar de que los grupos realizaron una interpretación adecuada respecto a la actividad que se desarrolló en cada ítem, se generan dificultades al comunicar los resultados, ya que en ocasiones son relacionados con temáticas diferentes a las propuestas.

En esta actividad no se realizó la fase de institucionalización, sin embargo se desarrolló el ítem *b* de la actividad grupal, por que los estudiantes tenían inquietudes respecto a cómo graficar de manera rápida el vector resultante que cumpliera las condiciones dadas para tal fin.

Conclusión final de la situación 2

En el desarrollo de esta actividad no se mostraron temerosos a resolverla como sucedió en la primera sesión: la interacción fue más directa con la actividad, poco a poco se fueron acoplando y no se presentaron preguntas como en la primera sesión, aunque el proceso se realizó de forma autónoma, se presentaron errores respecto a los resultados esperados en la fase individual.

En la fase grupal se notó el compromiso, el interés y la curiosidad de los estudiantes para resolver la actividad, los estudiantes interactuaban de forma adecuada como se esperaba, exponiendo sus argumentos, aunque a pesar de esta interacción, las respuestas no fueron correctas en todos los ítems.

La fase de Validación fue muy corta ya que los estudiantes coincidían en la mayoría de las respuestas, sin embargo se presentaron preguntas respecto al desarrollo de la multiplicación de los números $A = 3 - 2i$ y $B = 4 + 3i$ de forma geométrica; algunos estudiantes manifestaron falta de tiempo para culminar la actividad.

Conclusión de las situaciones 1 y 2

Las Situaciones 1 y 2 estaban centradas en la construcción del concepto de adición y multiplicación por medio del software GeoGebra, se observó que los estudiantes coincidían en los ítems que pedían realizar los RRS, como era la ubicación de un punto en el plano o el resultado de las operaciones de suma y multiplicación de forma algebraica, sin embargo se notaron diferencias en las respuestas donde se requería análisis y comunicar los resultados observados, seguramente necesitaban mayor espacio para la interpretación.

Los resultados entregados por los estudiantes no registraban un orden general, ya que de acuerdo a la facilidad con la cual interpretaban un ítem, lo iban desarrollando generando confusiones al analizar los datos.

En las dos actividades se evidenciaron problemas con la manipulación del software ya que algunos estudiantes no contaban con la última versión, es decir, con las herramientas necesarias para un desarrollo adecuado de la actividad o no tenían claro el manejo del software.

Situaciones 3 y 4

De acuerdo con los resultados obtenidos en las situaciones 1 y 2, se hizo necesario estandarizar las versiones de los software para evitar estos problemas y generar formularios de

Google para una mejor organización de la información y análisis adecuado; en cuanto a la interpretación y comunicación de los estudiantes respecto al desarrollo de un ítem, se realizaron actividades en el software GeoGebra donde los estudiantes a través de la manipulación realizaran análisis y potenciaran su trabajo en la comunicación de los resultados.

Como lo expresa Canal (2012), se deben utilizar propuestas que permitan la potenciación de los procesos por medio de la interacción con animaciones y para el caso particular de la investigación permitieran manipulación del software y observación.

El autor realizó en GeoGebra la actividad https://www.geogebra.org/classic/eybfxpmw correspondiente a la adición y https://www.geogebra.org/classic/dufb5nkq para la multiplicación de los números complejos, pero, al desarrollarlas se evidenció que no permitían un manejo eficaz y ligero, por lo fue necesario buscar alternativas para su implementación; en este caso las actividades creadas por Palomo (2020) para la adición y Flores (2020) para la multiplicación.

Situación 3

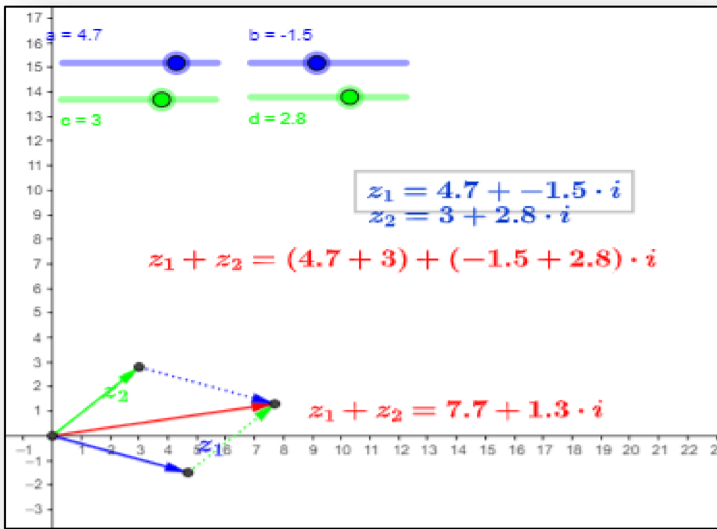
Tema: Adición gráfica de números complejos.

Objetivo: Analizar como el estudiante de manera gráfica comprende la adición de los números complejos.

Por medio de la plataforma Classroom fue compartido con los estudiantes el enlace https://www.geogebra.org/classic/eybfxpmw, que muestra la actividad creada por el investigador en GeoGebra Online, y https://www.geogebra.org/m/PPy7829e que muestra la actividad creada Palomo (2020) y compartida en la base de datos de GeoGebra Online para el desarrollo de la actividad.

Figura 41

Representación de la actividad 2



Fuente: Palomo (2020)

Fase de acción

A partir de las interacciones con el software responde:

a. Que puedes observar al mover los deslizadores a, b, c, d.

b. Sitúa el deslizador en $a = 0$, mueve los deslizadores b, c, d. ¿Qué sucede cuando se mueven los deslizadores b, c, d?

c. Sitúa los deslizadores en $a = 0, b = 0$ y mueve el deslizador del deslizador c y d, ¿qué sucede con el vector resultante Z_3? ¿Qué sucede cuando se suma un número complejo con 0?

d. Si se mantienen los vectores $a, b, c = 0$ que sucede con el vector Z_2 y Z_3 cuando se mueve el deslizador d.

e. Fija los deslizadores $a=1, b=1, c=2, d=2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

f. Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=1, d=2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

g. Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=2, d=1$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

Tabla 26

Categorías de análisis para la fase de acción situación 3

Ítem	Tipo de situación	Resultados esperados
a	Acción	Se espera que el estudiante observe que al mover los deslizadores, la figura cambia la forma.
b	Acción	Al hacer $a=0$, se espera que el estudiante comprenda que el número complejo queda cómo imaginario puro, es decir un número de la forma $Z_1 = 0 + bi$; y al mover los deslizadores b, c, d se espera que comprenda lo que sucede al sumar un complejo de la forma $Z_2 = c + di$ con un imaginario puro.
c	Acción	Al hacer los deslizadores $a=0$ y $b=0$, el primer número complejo se convierte en cero, y al mover los deslizadores c y d el estudiante comprenderá que los resultados son iguales, por tanto al sumar un número complejo con cero, el resultado es el mismo número complejo.
d	Acción	Al hacer los deslizadores $a, b, c = 0$, se espera que el estudiante interprete que está sumando un imaginario puro con cero, por tanto el resultado se ubica en el eje imaginario, y el resultado del vector, Z_2 resulta ser igual al resultado del vector Z_3 y corresponde a la ubicación de la parte imaginaria.
e	Acción	Se espera que al ubicar los deslizadores en $a=1, b=1, c=2, d=2$, el estudiante identifique la ubicación de los números complejos cómo $Z_1 = 1 + 1i$, $Z_2 = 2 + 2i$ e identifique el número complejo $Z_3 = 3 + 3i$, por lo cual el resultado corresponde a la suma de la parte real de cada número y la parte imaginaria de cada número.

Ítem	Tipo de situación	Resultados esperados
f	Acción	De acuerdo a la fijación de los deslizadores, se espera que los estudiantes relacionen la suma de los números complejos e identifiquen el vector Z_3 cómo la suma de $Z_1 + Z_2$.
g	Acción	De acuerdo a la fijación de los deslizadores, se espera que los estudiantes relacionen la suma de los números complejos e identifiquen el vector Z_3 cómo la suma de $Z_1 + Z_2$.

Fuente: elaboración propia

Con el desarrollo de la actividad en la fase de acción, se espera que los estudiantes interactúen y sea un espacio más propicio para la interpretación y comunicación de los resultados.

Tabla 27

Solución propuesta para la situación 3

Ítem	Solución propuesta
¿Qué puedes observar al mover los deslizadores a, b, c, d?	Al cambiar de posición los deslizadores a y c, cambia respectivamente la representación de la parte real de los números Z_1 y Z_2, al cambiar de posición los deslizadores b y d cambia de posición la parte imaginaria de los números complejos Z_1 y Z_2 respectivamente; es decir al mover los deslizadores, cambia la posición de la figura.
Sitúa el deslizador en $a = 0$, mueve los deslizadores b, c, d. ¿Qué sucede cuando se mueven los deslizadores b, c, d?	Al mover el deslizador a $a = 0$, el número complejo Z_1 se convierte en imaginario puro, por tal razón al mover los deslizadores b,c,d se suma el número complejo de la forma $Z_1 = 0 + bi$ con $Z_2 = c + di$
Sitúa los deslizadores en $a = 0, b = 0$ y mueve el deslizador del deslizador $c\ y\ d$, ¿qué sucede con el vector resultante Z_3? ¿Qué sucede cuando se suma un número complejo con 0?	Cuando se suma un número complejo con cero, el resultado es el mismo número complejo.
Si se mantienen los vectores $a, b, c = 0$ ¿qué sucede con el	Los vectores Z_2 y Z_3 resultan iguales ya que corresponden a la parte imaginaria del número complejo Z_2 sumado con cero.

Ítem	Solución propuesta
vector Z_2 y Z_3 cuando se mueve el deslizador d ?	
Fija los deslizadores $a=1, b=1, c=2, d=2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?	Los números complejos resultan ser: $Z_1 = 1+1i$ $Z_2 = 2+2i$ $Z_3 = 3+3i$
Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=1, d=2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?	Los números complejos resultan ser $Z_1 = 1+2i$ $Z_2 = 1+2i$ $Z_3 = 2+4i$
Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=2, d=1$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?	Los números complejos resultan ser $Z_1 = 1+2i$ $Z_2 = 2+i$ $Z_3 = 3+3i$

Fuente: elaboración propia

Resultados situación 3

La tercera situación fue realizada el día 13 de octubre del 2020 con una duración de noventa minutos distribuidos de la siguiente forma, la fase de acción se desarrolló en 30 minutos, la fase de formulación en 20 minutos, la fase de validación en 20 minutos y la fase de institucionalización en 20 minutos.

Tabla 28

Resultados fase de acción actividad 3

	REA3a	REA3b	REA3c	REA3d	REA3e	REA3f	REA3g
A	19	6	19	3	16	19	19
B	0	12	0	12	3	0	0
C	0	1	0	4	0	0	0

Fuente: elaboración propia

¿Qué puedes observar al mover los deslizadores a, b, c, d **?**

La mayoría de los estudiantes quiso dar una respuesta experta a la actividad, sin embargo todos coincidieron en que las mover los deslizadores, las figuras cambian de posición cómo se tenía previsto en los resultados esperados

Figura 42

Interpretación de los estudiantes de la primera pregunta

que dependiendo de cual punto movamos aumenta el valor de la parte real o la imaginaria

Que si esos puntos se mueven, lo que sucede es que la gráfica va cambiando.

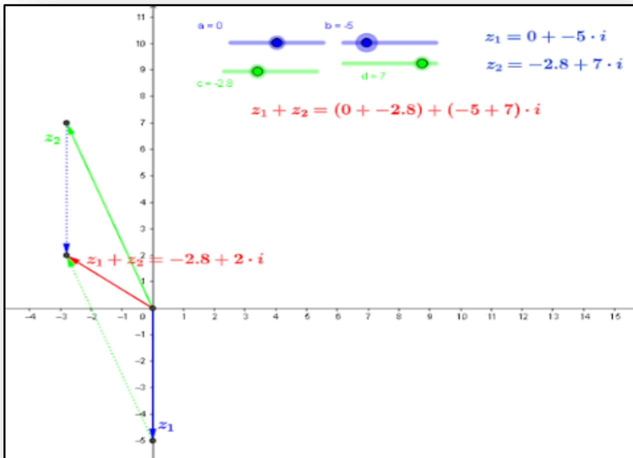
Fuente: trabajo realizado por los estudiantes E5 y E7

Sitúa el deslizador en $a = 0$**, mueve los deslizadores** b, c, d. **¿Qué sucede cuando se mueven los deslizadores** b, c, d **?**

En este ítem se pudo notar que los estudiantes tuvieron una interpretación diferente al interrogante; solo 6 asumieron una respuesta similar a la esperada, los demás asumen sumar un número pero no se especifica que número, en este caso las respuestas coinciden parcialmente con los resultados esperados, por tanto las respuestas son consideradas en construcción por que no se interpretó cómo la suma de un número imaginario puro con un complejo, un estudiante no registró respuesta.

Figura 43

Interpretación de los estudiantes de la primera pregunta



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E11

Figura 44

Respuesta de un estudiante al ítem b

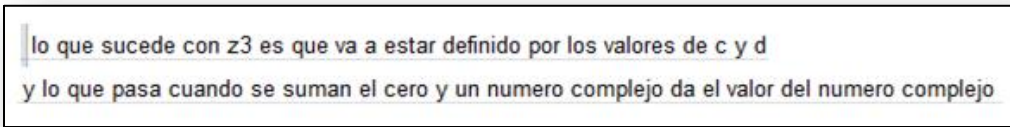
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E4

Sitúa los deslizadores en $a = 0, b = 0$ **y mueve el deslizador del deslizador** c y d **, ¿qué sucede con el vector resultante** Z_3 **? ¿Qué sucede cuando se suma un número complejo con** 0 **?**

Los estudiantes realizaron una interpretación similar del ítem a pesar de expresarlo por medio de ideas diferentes, logrando identificar de forma correcta que al sumar un número complejo con 0, el resultado es el mismo número complejo, coincidiendo con la respuesta esperada, lo cual muestra comprensión de la propiedad del neutro aditivo.

Figura 45

Interpretación la suma de un número complejo con cero.


lo que sucede con z3 es que va a estar definido por los valores de c y d
y lo que pasa cuando se suman el cero y un numero complejo da el valor del numero complejo

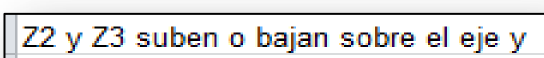
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E8

Si se mantienen los vectores $a, b, c = 0$ que sucede con el vector Z_2 y Z_3 cuando se mueve el deslizador d

La mayoría de los estudiantes (12) da una interpretación parcial al ítem, ya que no relacionaron completamente el cambio en los valores del eje imaginario como la suma de cero con un imaginario puro que da como resultado un imaginario puro, sino se enfocaron más en las observaciones del software, tres dieron una respuesta similar a la esperada, resaltando que los vectores Z_2 y Z_3 resultan iguales y cuatro respondieron de manera errónea.

Figura 46

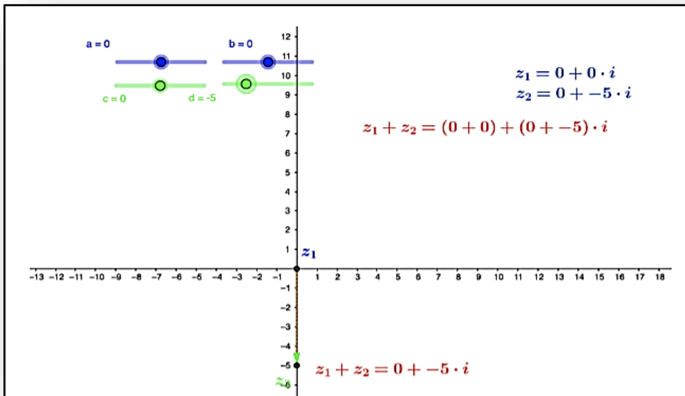
Respuesta de los estudiantes al ítem d de la actividad 2


Z2 y Z3 suben o bajan sobre el eje y

Fuente: trabajo realizado por el estudiante E18

Figura 47

Ilustración de los deslizadores a, b, c=0



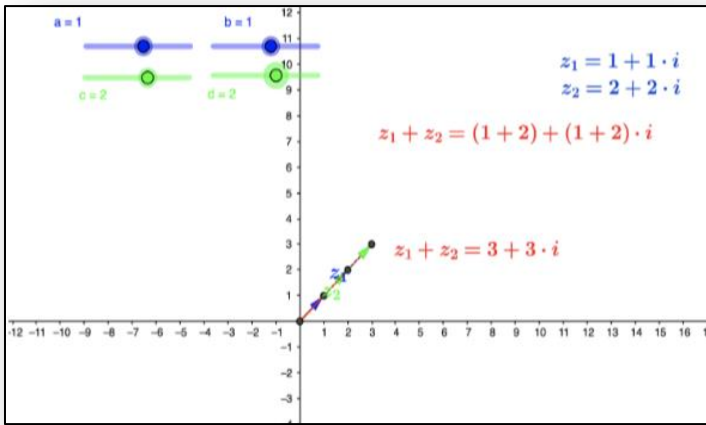
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E13

Fija los deslizadores $a = 1, b = 1, c = 2, d = 2$**, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos** Z_1**,** Z_2 **y** Z_3**?**

La mayoría de los estudiantes (16) relacionó de forma correcta los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3, mostrando la relación que existe entre sus partes reales e imaginarias, esto nos indica que gracias a la gráfica donde se muestra a la vez el proceso gráfico y algebraico, el estudiante tiene mayor facilidad de realizar la comparación y conversión, mientras tres tuvieron respuestas parciales, ya que no expresaban de forma clara los resultados.

Figura 48

Ilustración de los deslizadores $a=1, b=1, c=2, d=2$,



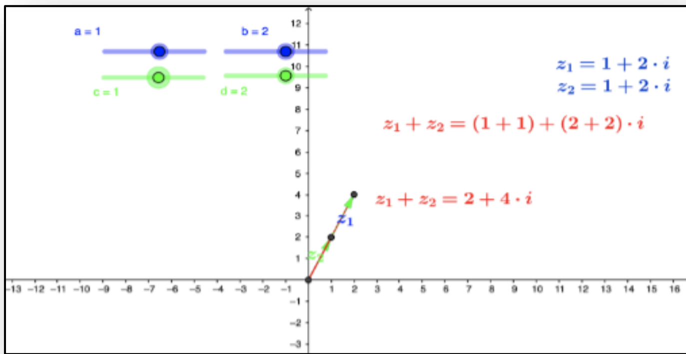
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E7

Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=1, d=2$**, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos** Z_1, Z_2 **y** Z_3**? Y Fija los deslizadores** $a=1, b=2, c=2, d=1$**, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos** Z_1, Z_2 **y** Z_3**?**

Se realizó un solo análisis para el ítem f y g, ya que se observó que todos los estudiantes interpretaron de forma correcta los valores de Z_1, Z_2 y Z_3 con la representación algebraica, lo anterior asociado a que en las actividades previas el estudiante de acuerdo a su proceso de familiarización con la actividad iban comprendiendo la relación que existe entre las representaciones gráficas y algebraicas, además de las representaciones conjuntas que se realizan en el software realizando un correcto proceso de tratamiento y conversión como lo menciona Duval (2017).

Figura 49

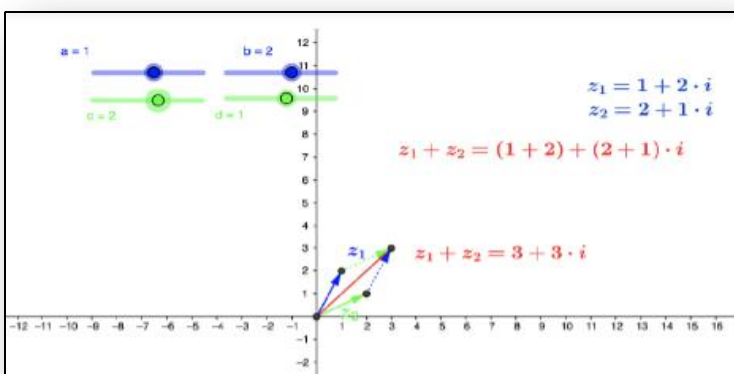
Ilustración de los deslizadores $a = 1, b = 2, c = 1, d = 2$



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E13

Figura 50

Ilustración de los deslizadores $a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E15

Fase de formulación

En esta etapa del trabajo, se propusieron los mismos ítems de la fase de acción con el fin de que los estudiantes discutieran y compararan sus resultados particularmente, para finalmente enviar el más acorde a la interpretación y comunicación de la fase de interacción del grupo a cada ítem y buscar una conclusión general.

a. ¿Que pueden observar al mover los deslizadores a, b, c, d ?

b. Sitúen el deslizador en $a = 0$, muevan los deslizadores b, c, d . ¿Qué sucede cuando se mueven los deslizadores b, c, d ?

c. Sitúen los deslizadores en $a = 0$, $b = 0$ y muevan el deslizador del deslizador c, d , ¿qué sucede con el vector resultante Z_3? ¿Qué sucede cuando se suma un número complejo con 0?

d. Si se mantienen los deslizadores $a, b, c = 0$ ¿qué sucede con el vector Z_2 y Z_3 cuando se mueve el deslizador d ?

e. Fija los deslizadores $a = 1, b = 1, c = 2, d = 2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

f. Fija los deslizadores $a = 1, b = 2, c = 1, d = 2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

g. Fija los deslizadores $a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

h. Elaborar una conclusión de la actividad realizada en GeoGebra.

Tabla 29

Resultados fase de formulación situación 3

RE	REF4a	REF4b	REF4c	REF4d	REF4efg	REF4h
A	5	0	4	5	5	2
B	0	5	1	0	0	2
C	0	0	0	0	0	1

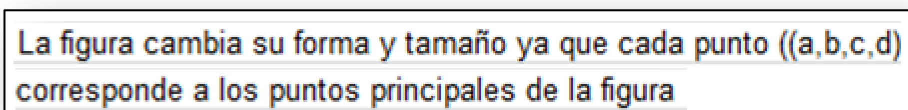
Fuente: elaboración propia

¿Qué puedes observar al mover los deslizadores a, b, c, d **?**

Todos los grupos identificaron que al mover los deslizadores, la figura cambia su posición, sin embargo, un grupo realizó la interpretación de acuerdo a los puntos del plano.

Figura 51

Interpretación del ítem a observación al mover a, b, c, d


La figura cambia su forma y tamaño ya que cada punto ((a,b,c,d)
corresponde a los puntos principales de la figura

Fuente: trabajo realizado por el grupo G3

Sitúa el deslizador en $a = 0$**, mueve los deslizadores** b, c, d. **¿Qué sucede cuando se mueven los deslizadores** b, c, d **?**

Los estudiantes reconocen que al hacer $a = 0$ el valor de b solo cambia sobre el eje imaginario, pero no reconocen acertadamente que Z_1 se hace un número imaginario puro.

Figura 52

Interpretación de ubicar el deslizador en a=0, y mover los deslizadores b, c, d.

B= z1 se mueve arriba o abajo sobre el eje "y" y z3 hacia abajo y arriba con la misma amplitud
C= z2 se mueve a izquierda o derecha simétricamente, z3 sobre el eje "X" y z1 no se mueve
D= z2 y z3 hacia arriba o abajo pero z3 se mantiene en el eje x, z1 no se mueve

Fuente: trabajo realizado por el grupo G5

Sitúa los deslizadores en $a = 0, b = 0$ **y mueve los deslizadores** $c\ y\ d$ **, ¿qué sucede con el vector resultante** Z_3 **? ¿Qué sucede cuando se suma un número complejo con** 0 **?**

Todos los grupos coinciden en que al sumar un número complejo con cero, el resultado es el mismo número. Los estudiantes tuvieron una respuesta acertada a la pregunta, ya que era muy cerrada, además se daba una indicación clara al estudiante sobre lo que se quería preguntar, lo cual lleva a concluir que cuando se especifica la pregunta a los estudiantes probablemente responda correctamente.

Figura 53

interpretación de ubicar el deslizador en a, b =0, y mover los deslizadores c y d.

z3 vale lo mismo que z2, esto es porque cuando un numero complejo le sumamos 0 sigue siendo el mismo.

Fuente: trabajo realizado por el grupo G2

Si se mantienen los deslizadores $a, b, c = 0$ **que sucede con el vector** Z_2 **y** Z_3 **cuando se mueve el deslizador** d **.**

Los grupos tuvieron un mayor acercamiento a los resultados esperados, ya que asocian los valores $a, b, c = 0$ con el número $Z_1 = 0$ y Z_2 es asociado con la parte imaginaria, por lo cual los estudiantes observan que al sumar los números Z_2 y Z_3 se obtiene el mismo resultado, ya que se está sumando Z_1 con Z_2 y Z_3 resulta ser el resultado de esa suma.

Figura 54

Interpretación de ubicar el deslizador en a, b, c=0, y mover el deslizador d.

se suman con 0
que z2 y z3 valen lo mismo y solo contienen la parte imaginaria la cual cambia cada ve que se mueve (d).
z2 se desplaza en el eje y ya que su valor en x es 0.

Fuente: trabajo realizado por los grupos G2, G3 y G5

Para los ítems e, f, g se realizó un solo análisis ya que los resultados obtenidos por los grupos resultan ser similares, es decir se realiza un proceso adecuado de tratamiento y conversión, de acuerdo a Duval (2017) al mencionar que se reconoce como *tratamiento* a los procesos que generan nuevas representaciones a partir de las transformación inicial en el mismo registro mediante una misma operación específica de sustitución y la *conversión* entendida como una transformación de las representaciones de un objeto que hace pasar de un registro a otro; lo cual se evidencia en el desarrollo correcto de las preguntas; otra interpretación que se puede dar es el tránsito que se ha dado en el transcurrir de las actividades de las conversiones en los registros.

Figura 55

Resultado de los números representados en el ítem e.

$z1=1+1i$
$z2=2+2i$
$z3=3+3i$

Fuente: trabajo realizado por el grupo G5

Elaborar una conclusión de la actividad realizada en GeoGebra

Dentro de los resultados relevantes se encuentra un grupo que definió la suma de los números complejos con el método del paralelogramo, lo cual muestra el interés por un óptimo desempeño, y a la vez muestra las ayudas extra clase que utilizaron los estudiantes para obtener las respuestas adecuadas. Las herramientas tecnológicas y las fases de la actividad despiertan en los estudiantes curiosidad por obtener óptimos resultados.

Figura 56

Conclusión de la actividad realizada en GeoGebra

EL MÉTODO DE PARALELOGRAMO

Nos facilita calcular de forma gráfica y efectiva la suma de pares de números complejos creando la figura de un paralelogramo sin necesidad de realizar operaciones algebraicas.

Este método nos ayuda a realizar la suma de cualquier par de números complejos o número complejo, sin necesidad de la forma algebraica sino gráfica logrando un mejor entendimiento , formando un paralelogramo.

Fuente: trabajo realizado por el grupo G4

Fase de validación

Los estudiantes expusieron sus resultados de la actividad de formulación, cada uno expresó sus impresiones respecto al desarrollo de cada pregunta, cómo principales resultados se evidencia que en la fase de formulación los estudiantes compararon los resultados y buscaron estrategias para resolver la actividad realizando tránsitos correctos entre el registro algebraico y el geométrico (Duval, 2017), sin embargo algunos dentro de sus intervenciones realizaron comentarios cómo el estudiante E5 quien mencionó: "No entendí bien el C, ¿alguien me puede ayudar?", por lo cual el docente invitó a los demás estudiantes a ayudarlo a resolver su inquietud; finalmente esta pregunta se resolvió en la fase de institucionalización; el estudiante 12 comentó "yo también lo hice así", lo cual muestra el interés que generó la actividad en los estudiantes.

Fase de institucionalización

La fase de institucionalización fue desarrollada de acuerdo a cada ítem de la actividad, donde el investigador cada vez que desarrollaba un ítem de acuerdo a los resultados esperados para la actividad, mostraba el contenido geométrico implícito en la suma de los números complejos, destacando la suma de números reales e imaginarios puros con cero y enfatizando en que los deslizadores de la actividad correspondían a la parte real e imaginaria de los números complejos, de ahí que al mover los deslizadores, los números en el plano tomaban diferentes representaciones.

Conclusión de la situación 3

En el desarrollo de la actividad se notó mayor compromiso respecto al desarrollo individual, disminuyó la cantidad de preguntas, los estudiantes asumieron la actividad. El proceso de devolución se vió representado significativamente, se observó el trabajo de los estudiantes detenidamente, donde en la mayor parte de la fase los estudiantes permanecieron en silencio analizando lo que sucedía al mover los deslizadores. En la fase de formulación los estudiantes compartían sus impresiones respecto al desarrollo de cada actividad, varios estudiantes replantearon sus respuestas al escuchar los compañeros, sin embargo se siguieron encontrando dificultades al querer comunicar ideas, se identificó que en las preguntas en las cuales la opción de respuesta era más reducida por ejemplo al preguntar lo que sucedía si se sumaba con cero, la mayoría de los estudiantes acertaban, pero en preguntas donde la respuesta no era tan clara, los estudiantes tenían respuestas incompletas.

La fase de validación fue una etapa muy productiva, ya que los estudiantes al tener una experiencia previa con las situaciones, esperaban su turno para opinar y para dar su aporte cuando una respuesta era errónea o inconclusa.

La fase de institucionalización se desarrolló enfatizando en resolver todos los ítems de la situación, especialmente aquellos donde se generaron inquietudes, mostrando el contenido geométrico implícito en la suma de los números complejos, destacando la suma entre números reales e imaginarios puros con cero.

Situación 4

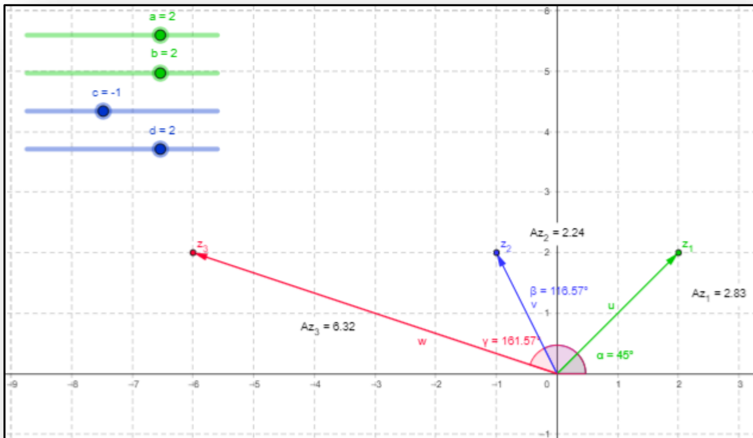
Tema: Multiplicación gráfica de números complejos.

Objetivo: Analizar cómo el estudiante interpreta el producto de los números complejos en forma gráfica.

Por medio de la plataforma Classroom fue compartido con los estudiantes el enlace https://www.geogebra.org/classic/dufb5nkq, que muestra la actividad creada por el investigador y https://www.geogebra.org/m/rrq9m8Cm creada por Flores (2020) para el desarrollo de la situación 4.

Figura 57

Representación de la actividad planteada para la multiplicación geométrica



Fuente: Flores (2020)

A partir de la interacción con el software responde:

a. ¿Qué puede observar al mover los deslizadores $a,b,c,d.$?

b. Sitúa los deslizadores en $a=0,b=0,d=0$ y mueve el deslizador c, ¿qué sucede con el vector resultante Z_3 cuando se multiplica por un número real?

c. Si se mantienen los vectores $a,b,c=0$ ¿qué sucede con el vector Z_2 cuando se mueve el deslizador d ?

d. Fija los deslizadores $a=2,b=1,c=-1,d=3$. Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1,Z_2,Z_3?

e. ¿Cuánto miden los argumentos de Z_1,Z_2,Z_3?

f. Escribe la relación que hallas entre los argumentos

g. ¿Cuánto miden los módulos de Z_1,Z_2,Z_3?

h. Escribe la relación que observas entre los módulos de los números complejos.

Tabla 30

Categorías de análisis fase de acción situación 4

Ítem	Tipo de situación	Resultados esperados
A	Acción	Se espera que el estudiante observe que al mover los deslizadores, la figura cambia la forma.
b	Acción	Al situar los deslizadores en $a=0, b=0, d=0$ y mover el deslizador c, sin importar la dirección, el resultado del vector Z_3 siempre estará en el origen, es decir al multiplicar un número real por cero, el resultado es cero.
c	Acción	Se espera que el estudiante observe que corresponde al número imaginario puro, es decir sin importar el valor que tenga el deslizador, siempre está sobre el eje imaginario.
d	Acción	Los Números complejos son: $Z_1 = 2+1i$ $Z_2 = 1+3i$ $Z_3 = -1+7i$
e	Acción	Se espera que el estudiante comprenda que los argumentos en los números complejos corresponden a los ángulos y así pueda dar la siguiente respuesta: $Arg(Z_1) = 26{,}57°$ $Arg(Z_2) = 71{,}57°$ $Arg(Z_3) = 96{,}13°$
f	Acción	$Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = Arg(Z_3)$
g	Acción	Se espera que el estudiante identifique los módulos de los números complejos cómo norma, es decir la distancia desde el punto que representa al número complejo hasta el origen del plano complejo. $\|Z_1\| = 2{,}24$ $\|Z_2\| = 3{,}16$ $\|Z_3\| = 7{,}07$
h	Acción	$\|Z_1\| \times \|Z_2\| = \|Z_3\|$

Fuente: elaboración propia

La fase de acción fue creada con el fin de potencializar la interpretación y comunicación de los resultados obtenidos en la actividad de multiplicación de números complejos en forma geométrica.

Tabla 31

Solución Propuesta para la situación 3

Ítem	Solución propuesta
¿Qué puedes observar al mover los deslizadores $a,b,c,d.$?	Al mover los deslizadores, la figura cambia la forma.
Sitúa los deslizadores en $a=0,b=0,d=0$ y mueve el deslizador del deslizador c, ¿qué sucede con el vector resultante Z_3 cuando se multiplica por un número real?	Al situar los deslizadores en $a=0,b=0,d=0$ y mover el deslizador c, sin importar la dirección, el resultado del vector Z_3 siempre estará en el origen, es decir al multiplicar un número real por cero, el resultado es cero.
Si se mantienen los vectores $a,b,c=0$ ¿qué sucede con el vector Z_2 cuando se mueve el deslizador d?	Corresponde a un imaginario puro, es decir sin importar el valor que tenga el deslizador, siempre está sobre el eje imaginario.
Fija los deslizadores $a=2,b=1,c=-1,d=3$. Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1,Z_2,Z_3?	Los Números complejos son: $Z_1=2+1i$ $Z_2=1+3i$ $Z_3=-1+7i$
¿Cuánto miden los argumentos de Z_1,Z_2,Z_3?	Los argumentos en los números complejos corresponden a los ángulos y así : $Arg(Z_1)$ = 26,57° $Arg(Z_2)$ =71,57° $Arg(Z_3)$ =96,13°
Escribe la relación que hallas entre los argumentos	$Arg(Z_1)$ + $Arg(Z_2)$ = $Arg(Z_3)$
¿Cuánto miden los módulos de Z_1,Z_2,Z_3?	Los módulos de los números complejos representan la norma, es decir la distancia desde el punto que representa al número complejo hasta el origen del plano complejo. $\lvert Z_1\rvert$ = 2,24 $\lvert Z_2\rvert$ = 3,16 $\lvert Z_3\rvert$ = 7,07

Ítem	Solución propuesta
Escribe la relación que observas entre los módulos de los números complejos.	$\lvert Z_1 \rvert \times \lvert Z_2 \rvert = \lvert Z_3 \rvert$

Fuente: elaboración propia

Ejecución

La última actividad fue realizada el día 15 de octubre del 2020 con una duración de noventaicinco minutos distribuidos de la siguiente forma, la fase de acción se desarrolló en 35 minutos, la fase de formulación en 20 minutos, la fase de validación en 20 minutos y la fase de institucionalización en 20 minutos

Tabla 32

Resultados fase de acción actividad 4

RE	REA4a	REA4b	REA4c	REA4d	REA4e	REA4f	REA4g	REA4h
A	19	19	2	19	15	14	19	5
B	0	0	15	0	4	5	0	12
C	0	0	2	0	0	0	0	2

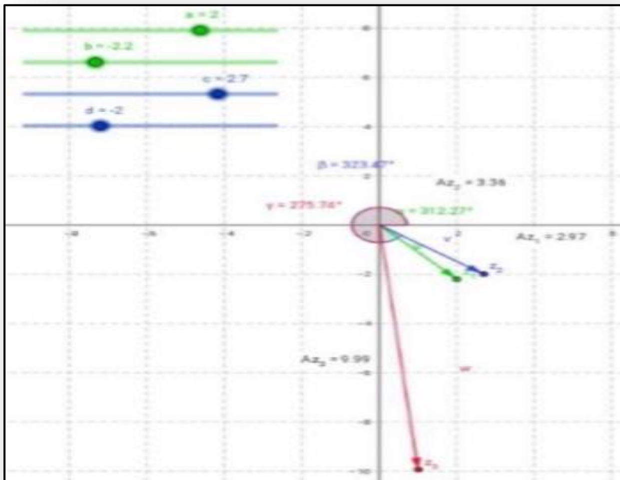
Fuente: elaboración propia

¿Qué puedes observar al mover los deslizadores a, b, c, d ?

Los estudiantes identificaron que al mover cada uno de los deslizadores, los ángulos y el módulo de la figura cambiaban de posición, sin perder su punto de origen; identifican los parámetros a y b cómo las coordenadas del primer vector, c y d cómo las coordenadas del segundo vector, al mover los parámetros a y b se mueven los vectores Z_1 y Z_3 al mover c y d se mueven Z_2 y Z_3

Figura 58

Ilustración al mover los deslizadores a, b, c, d.



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E15

Figura 59

Interpretación de mover los deslizadores a, b, c, d.

a y c estan con el eje X y b y d estan con el eje Imaginario

el ángulo y la dirección de los vectores varían

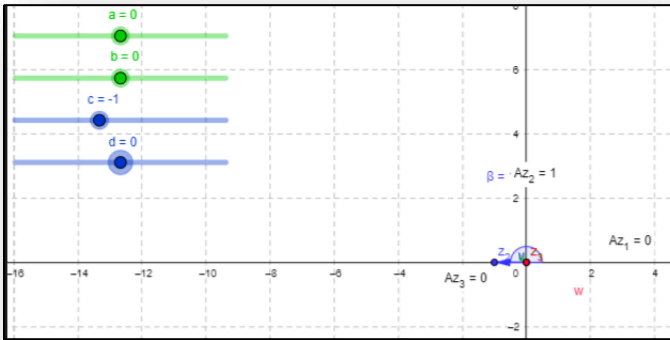
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E14

Sitúa el deslizador en $a = 0, b = 0, d = 0$ **, mueve el deslizador** c **¿Qué sucede con el vector resultante** z_3 **cuando se multiplica por un número real?**

Los estudiantes relacionaron de forma correcta el propósito de la actividad que era mostrar que al hacer al hacer $a = 0, b = 0, d = 0$, se obtenía la multiplicación de un número real con cero para lo cual se obtenía cero cómo resultado.

Figura 60

Resultado de situar $a = 0, b = 0, d = 0$ *y mover el deslizador d*



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E12

Figura 61

Interpretación de situar los deslizadores en $a = 0, b = 0, d = 0$ *y mover el deslizador c*

z3 vale 0 debido a que al multiplicar cualquier numero imaginario por 0 va a dar 0

La multiplicación va a dar como resultado el número real, y como su coordenada es 0, 0x0=0

C solo se movería en el eje real y lo que pasa con z3 es que da 0

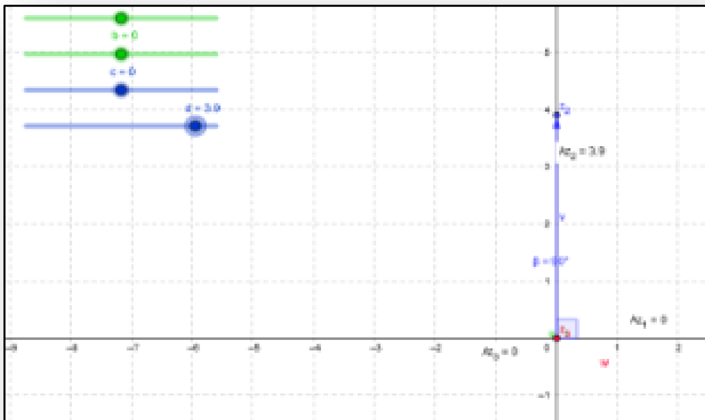
Fuente: trabajo realizado por los estudiantes E2, E7 y E17

Sitúa el deslizador en $a = 0, b = 0, c = 0$ **¿Qué sucede con el vector resultante** Z_3 **cuando se mueve el deslizador** d **?**

Los estudiantes observaron de forma adecuada que el número complejo Z_2 se desplazaba en forma vertical por el eje *y*, pero sus respuestas no evidencian identificar la multiplicación de un imaginario puro con cero, por lo cual se puede inferir que a pesar de que los estudiantes tenían presente que cada deslizador correspondía a una parte de los números complejos, no los refieren en las respuestas por qué no lo reconocen en la figura.

Figura 62

Resultado de situar $a=0, b=0, c=0$ *y mover el deslizador d*



Fuente: Trabajo realizado por el estudiante E9

Figura 63

Interpretación de situar los deslizadores en $a=0, b=0, c=0$ *y mover el deslizador d*

se pega al eje y haciendo al eje y imaginario

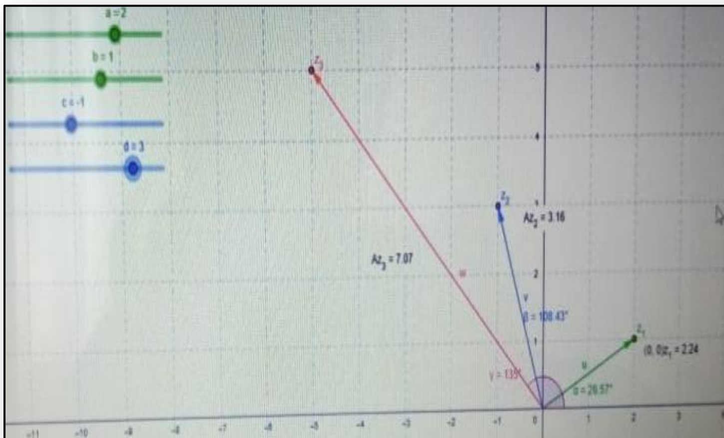
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E1

Fija los deslizadores $a=2, b=1, c=-1, d=3$**. Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos** Z_1, Z_2 **y** Z_3**?**

Los estudiantes identifican de forma correcta la ubicación de los números complejos en el plano cartesiano, por lo cual los estudiantes realizan la relación entre las representaciones gráficas y las representaciones algebraicas correctamente realizando el proceso de conversión como lo plantea Duval (2017).

Figura 64

Resultado de situar $a = 2, b = 1, c = -1, d = 3$



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E7

¿Cuánto miden los argumentos de Z_1, Z_2 y Z_3?

Los estudiantes identifican de forma adecuada el argumento en el plano complejo y lo representan, lo cual indica que identifican el término argumento y lo relacionan con el ángulo que representa el vector con el eje real positivo en el plano complejo.

Figura 65

Interpretación de los argumentos de $Z_1, Z_2 y Z_3$

Z1= 26,57 gradosZ2= 108.43 gradosZ3= 135 grados

Fuente: trabajo realizado por el estudiante E8

Escriba la relación que halla entre los argumentos

La mayoría de los estudiantes relaciona adecuadamente la correspondencia que existe entre los argumentos de los números complejos, lo cual indica el dominio que han adquirido en la interpretación y observación en el plano complejo e identifican los argumentos cómo actor fundamental en la multiplicación, aunque aún se evidencian fallas en la comunicación de los resultados y en la interpretación de los estudiantes que no reconocieron la relación existente, lo cual de acuerdo a Terroni, (2009) constituye una falta de comunicación asertiva.

Figura 66

Interpretación de la relación entre los argumentos de $Z_1, Z_2 y\, Z_3$

que la suma de z1 y z2 da igual a z3
Al sumar los grados de los vectores de Z1 y Z2, obtenemos el ángulo de Z3.

Fuente: trabajo realizado por el estudiante E4

¿Cuánto miden los módulos de Z_1, Z_2 **y** Z_3 **?**

Los estudiantes reconocen correctamente la longitud del vector cómo el módulo del número complejo, lo cual indica la capacidad de reconocer y comunicar sus observaciones de forma escrita.

Figura 67

Interpretación de los módulos de $Z_1, Z_2 y\, Z_3$

los módulos de z1, z2, z3 son : Az1= 2.24   Az2 = 3.16   Az3= 7.07

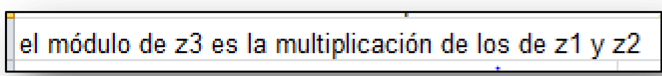
Fuente: trabajo realizado por el estudiante E6

Escriba la relación que observa entre los módulos de los números complejos

Cinco estudiantes lograron interpretar el módulo de Z_3 cómo la multiplicación de los módulos de $Z_1 \times Z_2$ dando muestra del proceso que se desarrolló en el trabajo con las guías, ya que fue desarrollando la observación.

Figura 68

Interpretación de la relación entre los módulos de $Z_1, Z_2 y\, Z_3$



Fuente: trabajo realizado por el estudiante E6

Fase de formulación

En esta etapa del trabajo, se propusieron los mismos ítems de la fase de acción con el fin de que los estudiantes discutieran y compararan sus resultados particularmente, para finalmente enviar el más acorde a la interpretación y comunicación de la fase de interacción del grupo a cada ítem y buscar una conclusión general.

Tabla 33

Resultados obtenidos fase de formulación

RE	REA4a	REA4b	REA4c	REA4d	REA4e	REA4f	REA4g	REA4h
A	5	2	5	5	5	2	5	1
B	0	3	0	0	0	2	0	4
C	0	0	0	0	0	1	0	0

Fuente: elaboración propia

¿Qué puedes observar al mover los deslizadores a, b, c, d **?**

La fase de formulación permitió que los estudiantes compararan sus resultados y reafirmaran los resultados obtenidos en la fase de acción donde los estudiantes concluyen que al mover los deslizadores, la figura cambia de posición.

Figura 69

Algunas respuestas al mover los deslizadores a, b, c, d

La gráfica cambia de direccion dependiendo a donde se muevan.
La figura cambia de posicion de arriba y abajo y de derecha a izquierda

Fuente: trabajo realizado por los grupos G1 y G4

Sitúa el deslizador en $a = 0, b = 0, d = 0$ **, mueve el deslizador** c **¿Qué sucede con el vector resultante** z_3 **cuando se multiplica por un número real?**

Se evidenció que todos los grupos relacionaron que al multiplicar un número real por cero, el resultado es cero, evidenciando apropiación de los contenidos temáticos y la relación que realizan con el conjunto de los números reales además de realizar adecuadamente el tratamiento en el registro algebraico.

Figura 70

Algunas respuestas al situar $a = 0, b = 0, d = 0$ *y mover el deslizador* c

C solo se movería en el eje real y lo que pasa con z3 es que da 0

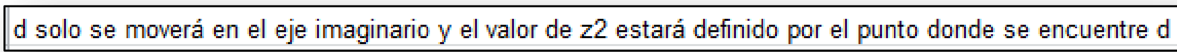
Fuente: trabajo realizado por el grupo G2

Sitúa el deslizador en $a = 0, b = 0, c = 0$ **¿Qué sucede con el vector resultante** z_2 **cuando se mueve el deslizador** d **?**

Dos grupos evidenciaron una correcta interpretación de ítem, sin embargo no lo expresaron de forma adecuada ya que sus respuestas no tenían relación con el conjunto de los números complejos, por ejemplo, los estudiantes observaron de forma adecuada que el número complejo Z_2 se desplazaba en forma vertical por el eje y, pero sus respuestas no evidencian identificar la multiplicación de un número complejo con cero, lo cual indica que no identifican el número cómo imaginario puro.

Figura 71

Algunas respuestas al situar $a=0, b=0, c=0$


d solo se moverá en el eje imaginario y el valor de z2 estará definido por el punto donde se encuentre d

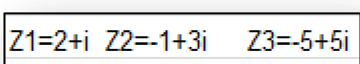
Fuente: trabajo realizado por el grupo G3

Fija los deslizadores $a=2, b=1, c=-1, d=3$**. Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos** Z_1**,** Z_2 **y** Z_3**?**

Todos los grupos relacionaron de forma correcta la relación que existe entre los puntos representados en el plano y la representación algebraica de los números complejos, lo cual muestra que reconocen identifican y comunican acertadamente (Terroni, 2009) la relación que se conserva entre la representación geométrica y la algebraica evidenciando la comprensión que se realiza entre los registros a través del proceso de conversión.

FigGura 72

Algunas respuestas al fijar $a=2, b=1, c=-1, d=3$


Z1=2+i Z2=-1+3i Z3=-5+5i

Fuente: trabajo realizado por el grupo G3

¿Cuánto miden los argumentos de Z_1, Z_2 y Z_3?

Todos los grupos relacionaron de forma correcta la medida de los argumentos de los números complejos, en este caso, se logró gracias al proceso de formulación donde a pesar de que algunos estudiantes manifestaron tener inquietudes, en esta fase compartieron sus preguntas a los compañeros y de manera conjunta se lograron obtener la respuesta adecuada, esto a su vez evidencia que los estudiantes comunican de forma asertiva las observaciones e interpretaciones que obtuvieron en el desarrollo del ítem.

Figura 73

Algunas respuestas de los estudiantes a la medida de los argumentos $Z_1, Z_2 y Z_3$

los argumentos son:z1 = 26,57ºz2 = 108,43ºz3 = 135 º

Fuente: trabajo realizado por el grupo G2

Escribe la relación que hay entre los argumentos

Dos grupos hallaron la relación existente entre los argumentos de los números complejos, ya que los identificaron el argumento de Z_3 cómo la suma de los argumentos de Z_1 y Z_2, esto se logró gracias al proceso de formulación y el compromiso que prestaron los estudiantes al desarrollo de la actividad, por otro lado dos grupos mostraron su propuesta en desarrollo, realizaron su mejor esfuerzo por comunicar acertadamente (Terroni, 2009), es decir realizaron unos cálculos y argumentaron pero no de forma adecuada y finalmente un grupo no encontró la relación.

Figura 74

Algunas respuestas de los estudiantes a la relación entre los argumentos de $Z_1, Z_2 \, y \, Z_3$.

el argumento mas valido que podría uno obtener al realizar la actividad
es como se evidencia que z3 es el resultado equivalente al sumar z1 y z2

La suma de argumentos z1 y z2 da z3

Fuente: trabajo realizado por los grupos G3 y G4

¿Cuánto miden los módulos de Z_1, Z_2 y Z_3?

Todos los grupos encontraron de forma correcta la medida de los módulos de los números complejos, en este caso esto también se logró gracias al proceso de formulación ya que aunque algunos estudiantes manifestaron tener inquietudes, en esta fase los estudiantes expresaron sus inquietudes y de forma conjunta se obtuvo la respuesta adecuada, interpretando y comunicando de forma acertada los resultados obtenidos.

Figura 75

Respuestas de los estudiantes a la medida de los módulos de $Z_1, Z_2 \, y \, Z_3$.

z1: 2.24 / z2: 3.16 / z3: 7.07
Z1= 2.24Z2= 3.16Z3= 7.07
z1=2.24z2=3.16z3=7.07

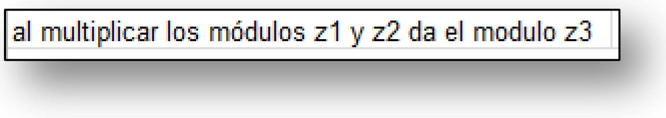
Fuente: trabajo realizado por los grupos G2, G3 y G5

Escribe la relación que observas entre los módulos de los números complejos

A pesar de identificar de forma adecuada los módulos de los números complejos, solo un grupo respondió acertadamente la relación que existe, lo que indica que no se logró de forma adecuada el desarrollo del ítem, aunque los otros grupos mostraron haber trabajado para hallar la relación de forma adecuada, manifestaron falta de tiempo.

Figura 76

Respuestas de un grupo la relación de las medidas de $Z_1, Z_2 y\, Z_3$



Fuente: trabajo realizado por el grupo G3

Fase de validación

La fase de validación se realizó con todos los ítems de la actividad de formulación, donde cada grupo mostraba sus conclusiones, se presentaron dudas respecto a la relación que existe entre los argumentos, ya que varios estudiantes tenían duda respecto a la respuesta dada, sin embargo la mayoría de preguntas se encontraban en la relación con los módulos, e inquietudes como “ profe, yo no entendí la relación de los módulos” o “profe, la pregunta de los módulos estaba muy difícil” sirvieron cómo punto de partida para que los demás expresarán sus ideas respecto a la solución de la actividad.

La fase se desarrolló de la forma prevista, en el tiempo adecuado y privilegiando la interacción de los estudiantes donde fueran ellos quienes comunicarán sus ideas y argumentarán las razones por las cuales las consideraban adecuadas.

Fase de Institucionalización

La fase de institucionalización consistió en revisar cada pregunta de la actividad y confirmar las interpretaciones correctas y corregir las interpretaciones erróneas que se generaron, en este caso se realizó énfasis en los argumentos y los módulos, junto con las propiedades que cumple cada uno en la multiplicación de los números complejos de forma geométrica.

Se enfatizó en aclarar la relación que existe entre las operaciones de forma geométrica y las operaciones realizadas en forma algebraica, mostrando a los estudiantes dos formas diferentes de realizar la operación de forma adecuada; en el desarrollo de la explicación se escucharon expresiones cómo "Es más fácil la multiplicación geométrica, solo es encontrar los ángulos y sumarlos, los módulos y multiplicarlos", lo cual indica que se comprendió el tema.

Conclusión final de la situación 4

En la fase de acción se presentaron 3 preguntas acerca del argumento y el ángulo, los estudiantes demostraron tener inseguridad al responder, ya que se acostumbra a resolver preguntas con respuesta donde la interpretación sea mínima; en la actividad grupal, los estudiantes comparaban sus respuestas del formulario individual, además de discutir para llegar a una respuesta general y realizar nuevamente las interacciones con el software, se evidenció que a pesar de las actividades previas, donde se manipularon los argumentos y los módulos de un número complejo aún no se dominan de forma adecuada.

Los estudiantes en la fase de formulación estaban divididos en salas particulares, en la actividad 2, un grupo no realizó el trabajo de forma participativa, es decir una sola persona estaba resolviendo el formulario, los demás solo estaban esperando que lo enviarán, en este caso se realizó la devolución, se motivó a los estudiantes a que interpretaran y discutieran sus ideas, llenaran el formulario y enviaran sus respuestas de forma conjunta; por tal motivo el investigador tenía que observar periódicamente el comportamiento de cada grupo.

El tiempo de respuesta disminuyó en varios estudiantes, debido a que cada vez tenían más confianza en la interacción con el software; para responder a los interrogantes, varios grupos utilizaban como estrategia dividirse el trabajo para terminar más rápido la actividad, por lo cual se hizo necesaria la intervención del docente para que resolvieran la actividad de forma organizada de tal manera que todos los integrantes participarán en el desarrollo de cada pregunta.

Fase 3. Observar

En esta fase se realiza el análisis de los resultados obtenidos en la fase 2 de la metodología, dando cumplimiento al objetivo específico 6.

En el desarrollo de las actividades se observó que en el primer encuentro de los estudiantes con esta nueva forma de trabajo se presentaron algunas dificultades, ya que los estudiantes siempre querían preguntar si lo que estaban haciendo estaba bien, sin embargo se resalta la importancia del software GeoGebra como medio de interacción, ya que permitió vincular los estudiantes con las actividades, brindándoles motivación y mejorando así su proceso de aprendizaje, lo cual se evidenció a través del transcurso de las actividades y la observación al trabajo realizado por un estudiante.

Al inicio los estudiantes analizaban las actividades vinculando conocimientos previos y buscando estrategias para su desarrollo, pero, a medida que tenían mayor interacción con el software, se evidenció una mayor asertividad en la conversión del registro algebraico al registro gráfico, además de realizar un tratamiento adecuado en cada registro; de acuerdo a como lo menciona Duval: (1999, Citado en Andrades, 2017) “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (p. 25). Esto se puede resaltar gracias al aporte que realiza el programa destacando la facilidad de manejo y variedad de herramientas con las cuales cuenta para la realizar figuras geométricas, lo cual lo convierte en una herramienta potencializadora del aprendizaje de los números complejos al vincular sus formas de representación.

En base a lo anterior, el uso del software permite un tránsito entre el registro algebraico al registro geométrico y de igual manera del registro geométrico al registro algebraico, de esta manera el estudiante comprende el concepto de los números complejos según Duval (1999) “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión”. (p.186)

La fase de formulación se desarrolló de acuerdo al planteamiento de Duval (2007), ya que se privilegió la comunicación, se favoreció el intercambio de ideas, donde los estudiantes compartieron con sus compañeros las estrategias utilizadas para la solución del problema y los resultados obtenidos, también se presentaba al organizarse para enviar las actividades, de acuerdo a quien tuviera mejor redacción, mejor ortografía, incluso mejor señal de internet.

Con la TSD los participantes tienen mayor interacción en clase, es decir participan más, se sienten motivados al desarrollo de la actividad, consultan los apuntes del cuaderno, se evidencia la interacción y el uso del software como medio, esto ayuda a que los estudiantes estén motivados y prestos a resolver cualquier actividad.

Se reconoció la importancia de la TSD en el aprendizaje de los números complejos ya que aunque al inicio los estudiantes tenían dudas respecto al desarrollo de las actividades, en cada fase se generaron espacios para que el estudiante indagara acerca de su solución, principalmente en la fase de acción, que se reconoce como la fase de interacción inicial donde el estudiante interactúa de forma individual con la actividad, aplica sus conocimientos previos y genera estrategias para su solución. Posteriormente, en la fase de formulación comparte sus ideas y escucha las de sus compañeros; luego, en la fase de validación puede comparar y debatir sobre la solución adecuada, finalmente en la fase de institucionalización el docente está presto a resolver todas las inquietudes y a enseñar formalmente el tema.

Con base en lo anterior, la TSD junto con el Software GeoGebra aportan herramientas significativas para la enseñanza de los números complejos, convirtiéndose en una estrategia de enseñanza viable para el tránsito entre los registros algebraicos y gráficos tal como se evidencia en el desarrollo de este trabajo al combinarlo con los RRS, dando aportes significativos a la corrección de los errores y la superación de las dificultades que se presentan al enseñar los números complejos solo de forma algebraica.

Conclusiones

En este capítulo se da respuesta a la pregunta de investigación y se describe en qué medida se da cumplimiento a cada objetivo de investigación; las conclusiones se presentan de acuerdo a los resultados obtenidos según las fases del marco metodológico, las categorías de análisis y al marco teórico tomado como referencia para el desarrollo de la investigación.

El objetivo específico uno, se centró en la búsqueda y análisis de información que permitiera caracterizar los principales errores y dificultades que presentan los estudiantes al aprender el concepto de los números complejos. El logro de este objetivo específico se obtiene como resultado de la búsqueda de información relacionada con los antecedentes.

Para identificar las dificultades, se revisaron tesis de doctorado, maestría y artículos científicos para lograr comprender las fuentes documentales, lo que permitió caracterizar los principales errores y las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con los números complejos; se resaltan dificultades al no relacionar la historia del objeto con el uso de las TIC; se evidencia un sesgo de los números reales sobre los complejos respecto de los modos de pensamiento; los estudiantes no tienen construido un significado geométrico de los números complejos y no está afianzada la idea de realizar la conversión del registro gráfico al algebraico en las operaciones de los números complejos.

En esa misma dirección, se evidencian dificultades identificadas en el estudio histórico epistemológico, se enseñan a partir de ecuaciones que tienen raíces que no pertenecen a los números reales y se asocian errores relacionados con los textos de los números complejos ya que se presentan únicamente de forma algebraica dejando de lado las operaciones geométricas.

El objetivo específico dos, se centró en el análisis de un cuestionario realizado a cuatro docentes de matemáticas con el fin de identificar la concepción sobre los números complejos y las estrategias que utiliza para la enseñanza del objeto matemático. El logro del objetivo específico 2 se obtiene como resultado de analizar cada pregunta respecto a la respuesta de cada docente, donde se evidenció que los docentes no tienen una conceptualización completa de las representaciones de los números complejos, no existe un criterio claro en los docentes respecto a la importancia de enseñar los números complejos, no consideran importante el tema, pero todos enfatizan en la importancia de enseñarlo de forma gráfica y geométrica, ya que el tratamiento general que se le da al tema resulta ser algebraico, ligado a las clases tradicionales.

En cuanto a las estrategias de enseñanza se evidencia que no existe una concepción clara, sin embargo la mayoría de los docentes coinciden en que es necesario incorporar la representación gráfica; solo un docente manifiesta haber utilizado herramientas tecnológicas para la enseñanza de los números complejos, lo cual muestra el trabajo reducido que se realiza al enseñar los números complejos vinculándolo con herramientas computacionales.

Los docentes no refieren experiencia al enseñar las operaciones de los números complejos en forma geométrica, los demás solo explican la forma cartesiana, lo cual muestra el poco trabajo que se desarrolla de las representaciones geométricas por parte de los estudiantes.

Los docentes no muestran criterios unificados en cada una de las preguntas, ya que cada uno realiza una interpretación diferente del tema, lo cual se puede interpretar como falta de conceptualización; no reconocen los números complejos como un tema importante y evidencian la falta de implementación de estrategias de enseñanza centradas en las diferentes representaciones y la falta de implementación de estrategias relacionadas con herramientas tecnológicas.

El objetivo específico 3 se centró en realizar una descripción del estudio histórico-epistemológico del objeto números complejos, con el fin de determinar las etapas de surgimiento y conocer el desarrollo de los números complejos mostrando las fases en las que se desarrolló el conjunto de los números complejos. Este objetivo se cumplió, pues se realiza el recuento desde 1545 en el año considerado el inicio del periodo moderno con la publicación del Ars Magna de Gerónimo Cardano quien planteó la solución de las cúbicas hasta Gauss (1777-1855) quien finalmente les dió el nombre de números complejos.

En el marco metodológico de la investigación se desarrollaron las cuatro actividades propuestas para el trabajo (Anexo 1), las dos primeras enfocadas principalmente en la construcción de la adición y la multiplicación de los números complejos, utilizando como medio el software GeoGebra y de acuerdo a las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas y los Registros de representación Semiótica; la elección de las actividades se tomó a partir de los resultados obtenidos en los objetivos 1 y 2 donde se evidenciaba que los estudiantes no tienen afianzado el significado geométrico ni la idea de realizar la conversión del registro gráfico al algebraico en las operaciones de los números complejos, sumado a ello los profesores consideran necesario una nueva estrategia de enseñanza que integre representaciones gráficas.

Las situaciones 3 y 4 se diseñaron tomando como referencia los resultados obtenidos en las situaciones 1 y 2, donde se observó una argumentación mínima, por tal razón se enfocaron principalmente en la interacción con el software y la observación e interpretación de situaciones planteadas, siguiendo las fases de la Teoría de las situaciones didácticas y con el fin de vincular los registros de representación semiótica.

En el desarrollo de las actividades se evidenció que el utilizar el Software como medio de interacción permitió una mayor interacción del estudiante con la actividad mejorando así su proceso de aprendizaje, lo cual se evidenció a través de los aportes realizados y las evidencias que dan cuenta de la interiorización de los los conceptos.

El uso del software para la enseñanza de los números complejos de forma geométrica permite un tránsito adecuado entre el registro algebraico al registro geométrico y de igual manera del registro geométrico al registro algebraico, de esta manera el estudiante comprende adecuadamente el concepto de los números complejos según Duval (1999, p. 186): “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión”.

Se reconoce la importancia de la TSD en el aprendizaje de los números complejos en su registro geométrico, ya que en cada una de las fases se propone una situación diferente para que el estudiante interiorice y pueda aprender un método de resolución de situaciones, se reconoce como una teoría muy completa ya que se privilegia el trabajo individual, conocido como el primer acercamiento con la actividad o fase de acción; la comunicación, donde se favorece el intercambio de ideas y estrategias correspondientes a la fase de formulación, se propician espacios para organizar la información, construir teorías y argumentar, correspondientes a la fase de validación y finalmente la formalización del conocimiento.

Referencias

Andrades Fernandez, C. G. (2017). *Propuesta didáctica para la multiplicación de números complejos*. Pontificia Universidad Catolica de Valparaiso.

Armas Costa, R. J., Ramirez Rincón, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Cely, V., Chappe, A., Morales, D., & Salazar, F. (2013). *Los Caminos del Saber Matemáticas 9* (1st ed.). Santillana.

Aznar, M., Moler, E., & Pesa, M. (2009). Conversiones de representaciones de números complejos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico. *Universidad Nacional de Mar Del Plata, Universidad Nacional de Tucumán; Argentina, 1*.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las Matemáticas? (primera parte). *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *8*(3), 259–267.

Brousseau, Guy. (2007). *Iniciación a la teoría de las situaciones didácticas* (Libros del Zorzal).

Boyer, Carl B. (1968). *Historia de la matemática*. Alianza editorial.

Buhlea, C., & Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio comparativo España-Rumanía. *Indivisa: Boletín de Estudios e Investigación*, *9*, 15–22.

Cabrera Ortiz, janina C. C. (2020). Universidad estatal de milagro (unemi) [Universidad estatal de Milagro]. In *Recursos Tecnologicos Para El Aprendizaje*. http://repositorio.unemi.edu.ec/bitstream/123456789/222/3/Causas que inciden en el desinterés de los estudiantes de séptimo año de Educación General Básica de la Unidad Educativa Experimental FAE No 3 TAURA%2C de la Parroquia Virgen de Fátima%2C Cantón Ya

Canal Martinez, I. (2012). *La enseñanza de los números complejos en bachillerato*. Universidad de Cantabria.

Carrasco, M. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la multiplicación de números complejos a partir del tránsito entre el registro algebraico y geométrico*.

Chamorro, M. . del C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (Pearson Educació (ed.)).

Chavarria, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *1*(2), 10.

Churchill, R. V, & Ward, J. (1992). *Variable compleja y aplicaciones* (Mc Graww-Hill).

Cortés, G., & García, S. (2003). Investigación Documental. *Guía de Autoaprendizaje*.

Cuicas Avila, M. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Actualidades Educativas*, *7*(2), 1–34.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic*

Representations. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Erazo Santander, O. (2011). El rendimiento académico, un fenómeno de múltiples relaciones y complejidades. *Revista Vanguardia Psicológica Clínica Teórica y Práctica*, *2*(2), 144–173.

Figueroa Vera, R. E. (2013). Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables : una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas. In *Pontificia Universidad Católica del Perú*. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4736%0Ahttp://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/4736/figueroa_vera_rocio_resolucion_didacticas.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Flores, M. (2020). *Geogebra, multiplicación de complejos*. Geogebra.

Godino, J. D., Font, V., & D'Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. *27*, 2–7. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. del pilar. (2014). *Metodología de la investigación* (S. A. D. C. . Mc Graw-Hill / Interamericana Editores (ed.); 6th ed.).

Hurtado de Barrera, J. (2010). *Metodología de la investigación* (Quiroz). https://dariososafoula.files.wordpress.com/2017/01/hurtado-de-barrera-metodologicc81a-de-la-investigaciocc81n-guicc81a-para-la-comprensiocc81n-holicc81stica-de-la-ciencia.pdf

Jiménez Espinosa, A., & Riscanevo Espitia, L. (2017). La experiencia y el aprendizaje del profesor de matemáticas desde la perspectiva de la práctica social. *Praxis & Saber*, *8*(18), 203–232.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). *Educación Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia*.

Latorre, A. (2005). *La investigación-acción Conocer y cambiar la práctica educativa*. https://www.uv.mx/rmipe/files/2019/07/La-investigacion-accion-conocer-y-cambiar-la-practica-educativa.pdf

Merino, O. (2006). A Short History of Complex Numbers. *University of Rhode Island*.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *21*(2), 265–280.

Murillo, A., & Ceballos, L. (2013). Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas mediados por fracciones. *Educación Científica y Tecnológica*, *0124 2253*, 253–257.

Palomo, I. (2020). *Geogebra, suma y resta de complejos*. Geogebra. https://www.geogebra.org/m/PPy7829e

Pardo Salcedo, T., & Gómez Alfonso, B. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario Tomás. *Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática, SEIEM.*, *0*(0), 251–260.

Ramirez, C. (2019). *Paskín matemático* (Vol. 1, Issue 2).

Randolph, V. N., & Parraguez, M. C. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria*, *12*(6), 57–82.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *IV Simposio de La Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática*, *4*(1), 219–311.

Rico, L. (2004). Análisis conceptual e investigación en. *REVISTA EMA*, *9*(1), 3–19.

Rivero Mendoza, F. (2001). *Introducción a los Números Complejos*. 104.

Rubio-Pizzorno, S., Salinas, C. L., Ríos, J. L., Córdoba-Gómez, F., & Abar, C. (2018). Matemática Educativa en la Era Digital: visibilización y articulación de la Comunidad Geogebra Latinoamérica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1917–1923.

Sanchez, C., Sabogal, Y., Buitrago, L., Fuentes, J., Patiño, O., Rocio, A., & Ramírez, M. (2019). *Saber(es) ser hacer, matemáticas 9*. Santillana.

Santos, M. (1995). ¿Qué Significa el Aprender Matemáticas? Una Experiencia con Estudiantes de Cálculo. *Educación Matemática*, *7*(1), 46–62.

Sullivan, M. (2012). *Álgebra y trigonometría* (susana Bravo (ed.); 9th ed.).

Terroni, N. N. (2009). La comunicación y la asertividad del discurso durante las interacciones grupales presenciales y por computadora. *Psico-USF*, *14*(1), 35–46. https://doi.org/10.1590/s1413-82712009000100005

Toto, M., Lopez Fernandez, R., & Crespo Borges, T. (2019). Empleo del software GeoGebra como medio auxiliar heuristico para el tratamiento de los números complejos y sus operaciones. *Revista Conrado*, *15*(67), 189–193. http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista EMA*, *4*(1), 16–31.

Anexo 1. Situaciones

Situación 1

Objetivo: Analizar como el estudiante realiza la construcción de la adición de números complejos en el software GeoGebra.

Tema: Suma de números complejos en forma geométrica.

Fase de acción

a. Grafique en el plano complejo los siguientes números $A = 2 + 3i$, $B = 4 + 2i$.
b. Halle la suma de los números complejos de manera algebraica y grafique la respuesta en el plano complejo.
c. Halle la distancia entre los puntos iniciales y el origen
d. Halle la distancia entre los puntos iniciales y el punto que graficó como la suma de los puntos iniciales.
e. ¿Qué relación existe respecto a la distancia entre los puntos iniciales y el origen, los puntos iniciales y el resultado?
f. Trace un vector del origen a cada uno de los puntos iniciales, luego utilice la herramienta vector equipolente y marque el punto correspondiente al número $A = 2 + 3i$ junto con el vector opuesto, realice el mismo procedimiento con el punto correspondiente al número $B = 4 + 2i$ con el vector opuesto.
g. Ahora ¿Qué relación observa entre estos puntos?
h. ¿Qué sucede si mueve cualquiera de los puntos iniciales?
i. ¿Cómo lo podría explicar?

Fase de formulación

a. Comparen los resultados obtenidos en la parte individual y busquen una solución general.
b. De acuerdo a los resultados obtenidos entregar una hoja por el grupo donde se desarrollen a detalle los ítems c, d, e, f, g.
c. ¿Pueden anticipar por este medio el resultado de sumar $C = 5 + 7i$ y $D = 6 + 8i$.
d. ¿Utilizando el proceso anterior, puede ubicar la suma de cualquier par de números sin utilizar el proceso algebraico?

Situación 2

Objetivo: Analizar la construcción del concepto de multiplicación de números complejos en el software GeoGebra.

Tema: Multiplicación de números complejos en forma geométrica.

Fase de Acción

a. Represente en el plano complejo los números $A = 2 + 3i$ y $B = 4 + 2i$.

b. Ubique un punto sobre el eje real positivo y mida el argumento principal de cada uno y halle el módulo de cada uno.

c. Halle la suma de los argumentos principales de cada vector y el producto de sus módulos.

d. Grafique un número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de $A\ y\ B$ y argumento principal la suma de los argumentos de $A\ y\ B$.

e. Realice la operación producto usando la definición algebraica.

f. Dibuje el número resultante en el ítem anterior, en el plano complejo.

g. Compare los procesos realizados y escriba la relación que halló.

Fase de formulación

a. Comparar los resultados obtenidos en la fase individual y obtener una solución general.

b. Realizar el proceso para la multiplicación de números complejos con el software GeoGebra, para los números $A = 3 - 2i$ y $B = 4 + 3i$, después comprobar el resultado por medio del proceso algebraico.

c. En grupo de Trabajo elaborar una conclusión de la actividad.

Situación 3

Tema: Adición gráfica de números complejos.

Objetivo: Analizar Como el estudiante de manera gráfica comprende la adición de los números complejos.

Por medio de la plataforma Classroom fue compartido con los estudiantes el enlace https://www.geogebra.org/classic/eybfxpmw, que muestra la actividad creada por el investigador en GeoGebra Online, y https://www.geogebra.org/m/PPy7829e que muestra la activiad Online creada por Inmaculada Palomo y compartida en la base de datos de GeoGebra Online para el desarrollo de la actividad.

Fase de acción

a. A partir de las interacciones con el software responde:
b. Que puedes observar al mover los deslizadores $a, b, c, d.$.
c. Sitúa el deslizador en $a = 0$, mueve los deslizadores b, c, d. ¿Qué sucede cuando se mueven los deslizadores b, c, d?
d. Sitúa los deslizadores en $a = 0, b = 0$ y mueve el deslizador del deslizador $c\ y\ d$, ¿qué sucede con el vector resultante Z_3? ¿Qué sucede cuando se suma un número complejo con 0?
e. Si se mantienen los vectores $a, b, c = 0$ que sucede con el vector Z_2 y Z_3 cuando se mueve el deslizador d.
f. Fija los deslizadores $a = 1, b = 1, c = 2, d = 2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

g. Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=1, d=2$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

h. Fija los deslizadores $a=1, b=2, c=2, d=1$, Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2 y Z_3?

Formulación

Las etapas de formulación corresponde a las mimas aplicadas en la fase de acción.

Situación 4

Tema: Multiplicación gráfica de números complejos.

Objetivo: Analizar como el estudiante de manera realízala el producto de los números complejos en forma gráfica.

Por medio de la plataforma Classroom fue compartido con los estudiantes el enlace https://www.geogebra.org/classic/dufb5nkq, que muestra la actividad creada por el investigador y https://www.geogebra.org/m/rrq9m8Cm creada por Macarena Flores González y depositada en la base de datos de GeoGebra.

a. ¿Qué puedes observar al mover los deslizadores $a, b, c, d.$?
b. Sitúa los deslizadores en $a = 0, b = 0, d = 0$ y mueve el deslizador del deslizador c, ¿qué sucede con el vector resultante Z_3 cuando se multiplica por un número real?
c. Si se mantienen los vectores $a, b, c = 0$ ¿qué sucede con el vector Z_2 cuando se mueve el deslizador d?
d. Fija los deslizadores $a = 2, b = 1, c = -1, d = 3$. Según la gráfica ¿cuáles son los números complejos Z_1, Z_2, Z_3?
e. ¿Cuánto miden los argumentos de Z_1, Z_2, Z_3?
f. Escribe la relación que hallas entre los argumentos
g. ¿Cuánto miden los módulos de Z_1, Z_2, Z_3?
h. Escribe la relación que observas entre los módulos de los números complejos.

Anexo 2 Entrevista a docentes.

Objetivo: indagar sobre las concepciones que tienen los docentes acerca de los números complejos.

1. ¿Cómo define los números complejos?
2. ¿Por qué se deben enseñar los números complejos?
3. Si tuviera limitaciones de tiempo para impartir los temas relacionados con los números complejos, ¿no los enseñaría? Justifique.
4. ¿Qué estrategias ha utilizado para enseñar los números complejos?
5. ¿Cuál cree que es el método indicado para mejorar la enseñanza de los números complejos?
6. ¿Qué herramientas tecnológicas ha utilizado para enseñar los números complejos?
7. Enseña los números complejos en forma geométrica?, Describa el método,
8. ¿Porque considera que los estudiantes comprenden los números complejos?

Anexo 3: Permiso colegio

Zipaquirá, Octubre del 2020.

Profesor(a):

EDISON JAVIER PÉREZ

Rector(a)

Cordial saludo.

Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación intitulado **"*APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA*"** cuyo objetivo principal es: investigación es identificar el aporte de las situaciones didácticas en el aprendizaje que desarrollan los estudiantes realizar la interacción entre el software GeoGebra y la representación geométrica de los números complejos. Este proyecto será desarrollado por el profesor JESÚS ADRIÁN ANTONIO PEÑA y se desarrollará en el grado NOVENO (9°) de esta institución.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,

……………………………………

Jesús Adrián Antonio Peña

Estudiante de Maestría en Educación Matemática UPTC

Anexo 4: Permiso padres de familia o acudientes

Estimado padre/ madre de familia o acudiente

Soy estudiante del Programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y estoy llevando a cabo mi investigación titulada: "*APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA"*, el objetivo de la investigación es identificar el aporte de las situaciones didácticas en el aprendizaje que desarrollan los estudiantes realizar la interacción entre el software GeoGebra y la representación geométrica de los números complejos. Por tanto me dirijo respetuosamente para solicitar su autorización para que su hijo participe en este proceso.

Se desarrollarán una serie de actividades que constan de cuatro (4) sesiones de clase por la plataforma Zoom de una duración máxima de 90 minutos cada sesión (puede ser de menos tiempo) donde el estudiante desarrollará actividades de fortalecimiento de pensamiento espacial y será grabado para luego analizar el tipo de análisis realizado. El proceso será estrictamente confidencial y ni su nombre ni el de su hijo (a) se verá afectado de ninguna manera; es decir su identidad será preservada confidencialmente. Por otro lado, la participación o no participación en el desarrollo de esta investigación no afectara de ninguna manera la nota del estudiante.

La participación es voluntaria. Usted y su hijo (a) tienen derecho de retirar el consentimiento para desistir en cualquier momento. El estudio no conlleva ningún riesgo. No recibirá ninguna compensación por participar. Si tiene alguna pregunta sobre esta investigación, se puede comunicar con el investigador al tel. 318 420 xx xx o al correo tareasytrabajosxxx@gmail.com.

Si desea que su hijo participe, favor llenar la autorización y devolverla.

Preguntas o dudas sobre los derechos de su hijo(a) pueden ser resueltas en cualquier momento.

Cordialmente,

Jesús Adrián Antonio Peña
Docente de Matemáticas

AUTORIZACIÓN

He leído el procedimiento descrito arriba. El investigador me ha explicado el estudio y ha contestado mis preguntas. Voluntariamente doy mi consentimiento para que mi hijo(a)

____, participe en este estudio.

____

Firma Padre/Madre /Acudiente

CC. ____

Fecha