УДК 551.465.531(532) Поступила 9 ноября 2016 г.

ВЕКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ИЗМЕНЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ В ПЕЧОРСКОМ МОРЕ

В.А. РОЖКОВ[2], Н.А. СУХИХ[1,2]

[1] — ГНЦ РФ Арктический и антарктический научно-исследовательский институт, Санкт-Петербург, e-mail: suhih.natalya@mail.ru

[2] — Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: varozhk@gmail.com

Для количественной характеристики годовой и приливной ритмики скорости течений использован метод дисперсионного анализа векторных случайных процессов. Приводятся примеры, характеризующие изменчивость течений во времени, по пространству и по глубине.

Ключевые слова: скорость течений, векторный дисперсионный анализ, однофакторные модели, двухфакторные модели, иерархическая классификация, перекрестная классификация.

ВВЕДЕНИЕ

В статье (Рожков и др., 2016) обсуждаются результаты вероятностного анализа измерений скоростей течений продолжительностью с сентября 2001 по октябрь 2003 г., выполненных синхронно на двух станциях на серии горизонтов в Печорском море.

Массив данных скоростей течений проанализирован в нестационарных приближениях: периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП) в диапазоне сезонной изменчивости (с периодом коррелированности 1 год) и полипериодически коррелированных случайных процессов (ППКСП) в диапазоне приливных явлений (с периодами коррелированности, равными лунным и солнечным суткам и полусуткам с учетом месячных, полумесячных и долгопериодных неравенств). Также приводятся результаты анализа течений в диапазоне синоптической изменчивости в квазистационарном приближении после фильтрации (исключения годовой и суточной цикличности).

В работе (Рожков и др., 2016) поставлена (но не решена) задача сопоставления параметров годовой ритмики на станциях 1 и 2 на серии горизонтов, а также параметров приливной ритмики на станциях и горизонтах. Для решения этой задачи обычно привлекаются методы и модели дисперсионного анализа (ДА). Для скалярных величин, таких, как температура воздуха (T) и атмосферное давление (P), эта задача решена как в классических работах (Джонсон и др., 1980; Шеффе, 1980), так и в работе (Иванов и др., 2006), на примере ДА гидрометеорологических величин (T, P) без обобщения на векторный ДА.

Новизна данной статьи состоит в перенесении понятий ДА со скалярных величин на векторы. Если для скалярных величин эти понятия, рассмотренные в (Иванов и др., 2006), вошли в обобщающую монографию (Рожков и др., 2009), то для векторных величин они публикуются впервые.

В настоящей работе рассматривается обобщение методов ДА скалярных величин на случайные евклидовы векторы $\vec{V}$ (например, скорость течения), векторные случайные процессы $\vec{V}(t)$ и поля $\vec{V}(z,t)$, характеризующие зависимость скорости течений от времени и глубины.

Согласно работе (Рожков, 1996) скалярные поля (*T, P*) — это двумерная (или многомерная) случайная величина (СВ), аффинов вектор, геометрически являющийся точкой в многомерном пространстве.

Евклидовы векторы $\vec{V}$ (Белышев и др., 1983) — векторы в физическом пространстве (есть модуль вектора, направление вектора; сложение векторов происходит по «правилу» параллелограмма, умножение векторов возможно по законам скалярного, векторного и тензорного произведения векторов). Основное отличие методов дисперсионного анализа скалярных случайных величин или случайных функций $\varsigma(\vec{r},t)$ времени *t* и/или пространственных координат $\vec{r}$ состоит в том, что их математическое ожидание m_ζ и дисперсия D_ζ — скалярные величины, а для векторов $\vec{V}$ математическое ожидание m_V — вектор и дисперсия D_V — тензор (Белышев и др., 1983, Иванов и др., 2006).

В ДА термин «фактор» означает качество или свойство классифицируемых данных, применительно к скорости течений $\vec{V}$ такими факторами являются время и горизонт измерения. Каждый фактор имеет несколько различных уровней. Термин «уровень» используется для описания конкретного свойства (здесь сезоны или горизонты), определяющего категорию рассматриваемой классификации.

Термин «классификация» в ДА понимается как мера различия математического ожидания и дисперсии между классами, т.е. значительно уже, чем в других процедурах многомерного статистического анализа (МСА), в которых совместно классификация и дискриминация рассматриваются как мера неоднородности исходных данных с использованием еще и ковариационных функций и спектральных плотностей (Рожков, 1996).

Однофакторные модели ДА представлены параметрическими (с фиксированными уровнями фактора) или случайными моделями (моделями дисперсии). Двухфакторные модели обычно формулируются в виде иерархической и перекрестной классификации. В иерархической классификации уровень первого фактора (основного) связан с множеством уровней второго фактора (подгруппы). В перекрестной классификации каждый уровень одного фактора может сочетаться со всеми уровнями другого фактора.

ВЕКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Примем следующие обозначения:

– $\vec{V}_{ti}$ — измеренные значения, индекс $t = 1... k$ отмечает группу (уровень фактора);

– индекс $i = 1... n$ нумерует последовательность выборочных значений в группе *t*;

– n_t — объем выборки группы *t*, $n = \sum_{t=1}^{k} n_t$ — общий объем выборки по всем группам;

– $\vec{\mu}_t$ — среднее значение $\vec{V}_{ti}$ в *t* группе, $\vec{\mu} = n^{-1}\sum n_t \vec{\mu}_t$ — общее среднее значение;

– $\vec{\gamma}_t = \vec{\mu}_t - \vec{\mu}$ — отклонение среднего значения группы от общего среднего, $\sum_{t=1}^{k} n_t \vec{\gamma}_t = 0$;

– $\vec{\varepsilon}_{ti}$ — случайная величина (остаток от центрирования индивидуального значения вектора $\vec{V}_{ti}$ на общее среднее или среднее по группе);

– $\vec{\nu}_t$ — случайная величина, характеризующая разброс значений по группам; знак «стрелка» над буквой символизирует векторную величину, знак $\{\ \}_{\bullet}, \{\ \}_{\bullet\bullet}$ указывает на операцию осреднения величин по интервалу внутри группы (одна точка) или по всем группам (две точки) в нижнем индексе за скобкой.

Вектор $\vec{V}(t)$ в декартовой системе координат имеет проекции (u, v) на оси координат (u — проекция на параллель в направлении восток, v — проекция на меридиан в направлении север).

Для векторных величин $\vec{V}_{ti}$ основное соотношение ДА

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}\left(\vec{V}_{ti}-\left\{\vec{V}\right\}_{\bullet\bullet}\right)^2=\sum_{t=1}^{k}n_t\left(\left\{\vec{V}\right\}_{\bullet}-\left\{\vec{V}\right\}_{\bullet\bullet}\right)^2+\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}\left(\vec{V}_{ti}-\left\{\vec{V}\right\}_{\bullet}\right)^2 \qquad (1)$$

позволяет полную сумму квадратов (SS) разности векторов $\vec{V}_{ti}$ и $\vec{\mu}$ левой части разделить на две части: сумму квадратов разности векторов $\vec{\gamma}_t=\vec{\mu}_t-\vec{\mu}$ между группами, ($S1$) — первое слагаемое в правой части и сумму квадратов разности векторов $\vec{\nu}_t$ внутри групп ($S2$) — второе слагаемое правой части.

Подчеркнем, что для векторных величин $\vec{V}_{ti}$ операции возведения в квадрат в (1) выполняются в терминах тензорного (а не скалярного и не векторного) умножения векторов, т.е. величины SS, $S1$, $S2$ — тензоры, поэтому все общепринятые понятия ДА случайных величин необходимо дать в терминах инвариантов этих тензоров с использованием представления о том, что математическое ожидание $\vec{V}_{ti}$ есть вектор, а дисперсия — тензор.

Рассмотрим соотношение (1) на примере данных измерений скорости течений в Печорском море продолжительностью с сентября 2001 по октябрь 2003 г. прибором ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) синхронно на двух станциях (расстояние между которыми 118 км) на серии горизонтов через 1 м.

В принятой системе обозначений левая часть (1) имеет вид

$$SS=\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(\vec{V}_{ti}-\vec{\mu})\otimes(\vec{V}_{ti}-\vec{\mu})=\sum\sum\begin{pmatrix}u_0u_0 & u_0v_0\\ v_0u_0 & v_0v_0\end{pmatrix}_{ti}, \qquad (2)$$

где $u_0=u_{ti}-\bar{u},\quad v_0=v_{ti}-\bar{v},$ — проекции вектора $\vec{\mu}$, u_{ti}, v_{ti} — проекции вектора $\vec{V}_{ti}$;

$$S1=\sum_{t=1}^{k}n_t\vec{\gamma}_t\otimes\vec{\gamma}_t=\sum\begin{pmatrix}(u_0')^2 & (u_0'v_0')\\ (v_0'u_0') & (v_0')^2\end{pmatrix}_t, \qquad (3)$$

где $u'_0=\bar{u}_t-\bar{u},\quad v_0'=\bar{v}_t-\bar{v},\ \bar{u}_t,\bar{v}_t$ — проекции вектора $\vec{\mu}_t$;

$$S2=\sum\sum\vec{\nu}_{ti}\otimes\vec{\nu}_{ti}=\sum\sum\begin{pmatrix}(u_0)^2 & (u_0v_0)\\ (v_0u_0) & (v_0)^2\end{pmatrix}_t. \qquad (4)$$

Рассмотрим годовой ход $\vec{V}(t)$ по среднесуточным значениям и группировкой по месяцам.

В таблице 1 приведены среднемесячные значения скорости течений по месяцам, а также оценки линейного инварианта $\sqrt{I_1}$ на фиксированном горизонте. Из таблицы следует, что среднемесячные значения вектора скорости течений изменяются от месяца к месяцу как по модулю, так и по направлению. Дисперсия $\sqrt{I_1}$ внутримесячных среднесуточных значений также не остается постоянной.

Наибольшее значение $\vec{\mu}_t$ в декабре 2001 г. составило 11 см/с, а наименьшее — 0,6 см/с в январе 2002 г. Дисперсия $\sqrt{I_1}$ была наибольшей 348 см^2/с^2 в январе 2002 г., а наименьшей 61 см^2/с^2 — в июле.

Таким образом, наиболее подходит смешанная модель.

$$\vec{V}_{ti}=\vec{\mu}+\vec{\gamma}_t+\vec{\nu}_t+\vec{\varepsilon}_{ti}. \qquad (5)$$

Таблица 1

Параметры однофакторной модели векторного дисперсионного анализа по среднесуточным значениям $\vec{V}(t)$ и группировкой по месяцам для двух станций в Печорском море (горизонт 2 м, 2001–2002 гг.)

Группы		2001–2002 гг.											
		X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1-я станция Горизонт 2	$\lvert\vec{\mu}_t\rvert$ см/с	3,34	7,19	11,01	1,63	0,59	2,18	6,27	2,13	1,79	4,37	5,68	3,27
	φ, град.	42	58	60	346	310	81	80	287	48	60	48	66
	$\sqrt{I_1}$ (D_t) см/с	8,42	10,61	13,67	18,65	12,19	8,19	7,79	7,89	9,89	8,71	9,67	8,45
2-я станция Горизонт 2	$\lvert\vec{\mu}_t\rvert$ см/с	6,28	14,19	10,98	2,63	2,77	0,79	1,15	2,36	7,13	7,21	4,87	8,59
	φ, град.	25	27	17	248	259	311	61	247	54	24	13	31
	$\sqrt{I_1}$ (D_t) см/с	8,93	13,36	13,28	10,65	9,72	5,57	3,31	10,60	10,01	8,82	7,68	7,85

В таблице 2 приведена эпюра по среднемесячным значениям скорости течений в фиксированный месяц.

Таблица 2

Эпюра вертикального распределения $\vec{V}(z)$ для некоторых горизонтов на двух станциях в Печорском море в июле 2002 г.

Группы		2001–2002 гг.					
		2 м	5 м	7 м	10 м	12 м	21/16 м
1-я станция, июль 2002 г.	$\lvert\vec{\mu}_t\rvert$ см/с	4,37	6,77	7,88	8,74	9,79	6,81
	φ, град.	60	57	60	67	65	56
	$\sqrt{I_1}$ (D_t) см/с	8,71	7,37	5,93	5,28	5,84	5,90
2-я станция, июль 2002 г.	$\lvert\vec{\mu}_t\rvert$ см/с	7,21	8,10	6,87	5,42	4,63	3,55
	φ, град.	24	35	38	39	36	22
	$\sqrt{I_1}$ (D_t) см/с	8,82	8,67	7,77	8,13	6,92	6,14

Из таблицы следует, что $\vec{V}(z)$ меняется между горизонтами как по средним значениям, так и по дисперсии. Таким образом, наиболее подходит смешанная модель (5). Количественные характеристики течений существенно зависят от сезона, максимум скорости течений и вид эпюры изменчив.

Описывая изменчивость скорости течений $\vec{V}(\vec{r},t)$ методами ДА, даже на основе примеров 1 и 2 , необходимо детализировать ДА применительно к векторным случайным величинам и функциям.

ОДНОФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДА

Модель ДА, согласно (Джонсон и др.,1981; Рожков, 2002), имеет вид

$$\vec{V}_i = \sum_{j=1}^{s} \vec{\beta}_j x_{ij} + \vec{\varepsilon}_i \,, \tag{6}$$

где x_{ij} — известные постоянные коэффициенты, равные обычно 0 или 1, $\vec{\beta}_j$ — неизвестные постоянные векторы, например $\vec{\mu}, \vec{\mu}_t$. Если x_{ij} не являются такими указателями, а пробегают множество значений, то зависимость $\vec{V}(x_{ij})$ называют регрессионным анализом, если в (6) переменные двух видов — ковариационным анализом.

В таблицах 1 и 2 зависимость $\vec{V}(x)$ — это детерминированная функция вектора $\vec{V}$ от аргумента: годовая ритмика $\vec{V}(t)$, горизонты измерений $\vec{V}(z)$ или пространственные координаты двух станций $\vec{V}(\vec{r})$.

В регрессионной модели

$$\vec{V}_i = \vec{\beta}_0 + \vec{\beta}_1 x_i + \varepsilon_i \tag{7}$$

x_i — детерминированная переменная (время t_i — месяцы или горизонт z_i), $\vec{\varepsilon}_i$ — векторная СВ. Принципиальное отличие (7) от (1) в остатке $\vec{\varepsilon}_i$ (его нет в (1)) и в том, что

$$SS = \sum_i (y_i - \bar{y})^2, \quad S1 = \sum_i \left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2, \quad S2 = \sum_i \left(y_i - \hat{y}\right)^2, \tag{8}$$

где y_i — случайная переменная — проекции (u, v) вектора $\vec{V}_i$;

$$\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x}, \quad \beta_1^* = \left[\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right] / \left[\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right], \tag{9}$$

β_1^* — СВ, не может быть интерпретирована как ковариация, т.к. x_i — заданная величина; $\hat{y}_i = \bar{y} + \beta_1 (x_i - \bar{x})$, значения $\vec{\beta}_0, \vec{\beta}_1$ в (7) вычисляются по формулам (9) через проекции u, v вектора $\vec{V}$.

При анализе годового хода вектора скорости течений под x_i понимается аргумент аппроксимации годового хода вектора скорости течений тригонометрическим полиномом на фиксированном горизонте, а при анализе вертикальной эпюры скорости течений x_i — аргумент аппроксимации вертикальной эпюры $\vec{V}(z)$ кусочно-линейной функцией.

Поэтому (7) в общем случае будет иметь вид

$$\vec{V}_i = \varphi(x) + \vec{\varepsilon}_i, \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ — детерминированная функция (тренд временного ряда), а $S1$ (3) и $S2$ (4) интерпретируются в (8) как отклонение регрессии от среднего и отклонение вектора скорости относительно регрессии.

Рассмотрим векторный ДА регрессионной модели. В таблице 3 приведены значения инвариантов I_1, I_2 тензоров SS, $S1$, $S2$, вычисленные по среднесуточным значениям скорости течений для фиксированного момента времени (июль 2002 г.), для двух станций.

Из таблицы видно, что

– скорость течения изменяется по вертикали, т.к. I_1, I_2 зависят от z;

– пространственные различия вертикальной структуры $\vec{V}(z)$ между станциями незначительны;

– основной вклад в SS (изменчивость течений) вносит не $S1$ (изменение средних значений), а $S2$ (изменение дисперсии);

– кусочно-линейная аппроксимация $\vec{V}(z)$ позволяет выявить различия между станциями.

Отметим, что зависимость $\vec{V}(z)$ видна уже из таблицы 2 (если построить графики изменения средних значений и инварианты СКО вектора скорости течений

Таблица 3

Инварианты I_1, I_2 тензоров SS, $S1$, $S2$, вычисленные по среднесуточным значениям скорости течений в июле 2002 г.

Группы		2001–2002 гг.					
		2 м	5 м	7 м	10 м	12 м	21/16 м
1-я станция, июль 2002 г.	SS I_1	2653,05	1679,19	1054,52	877,48	1144,40	1095,21
	$S1$ I_1	376,84	48,94	1,23	41,48	122,66	50,93
	$S2$ I_1	2276,20	1630,24	1053,30	836,00	1021,75	1044,28
	SS I_2	1173346,13	555994,09	215582,90	100240,70	146657,47	60515,89
	$S1$ I_2	292506,71	22369,42	942,39	14712,07	21750,42	24327,99
	$S2$ I_2	880839,42	533624,67	214640,51	85528,63	124907,05	36187,90
2-я станция, июль 2002 г.	SS I_1	2589,83	2667,03	1995,58	2019,77	1440,25	1173,42
	$S1$ I_1	257,2	410,6	185,45	37,35	2,53	43,04
	$S2$ I_1	2332,63	2256,42	1810,14	1982,42	1437,72	1130,37
	SS I_2	1559524,6	1101659,1	492803,55	531421,92	261910,5	156124,36
	$S1$ I_2	346101,31	278867,14	107646,97	32342,42	2438,22	32416,22
	$S2$ I_2	1213423,3	822791,96	385156,58	499079,5	259472,28	123708,14

по глубине), но это будет лишь качественное описание. Применение векторного дисперсионного анализа регрессионной модели направлено как на количественное (критериальное) описание, так и на геометрическое его представление, поскольку через инварианты I_1, I_2 определяются центр и оси эллипса, их направление (Белышев и др., 1983). Более того, исходя из (7) и (10), возможна предварительная запись вероятностной модели $\vec{V}(z)$.

ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Параметры иерархической классификации представлены в таблице 4.

В таблице 4 приведено распределение скорости течений $\vec{V}(t,z)$ по сезонам и горизонтам.

Отметим, что для вектора скорости течений $\vec{V}(t,z)$ оба аргумента (фактора) аддитивны, поэтому иерархическая модель необходима лишь как форма представления результатов совместного анализа $\vec{V}(t,z)$ по t и z. Будем считать основным фактором изменчивость течений по времени, а второстепенным — изменчивость течений по вертикали. В частности, из приведенных средних значений скорости течений и дисперсии можно увидеть, что эпюра $\vec{V}(z)$ меняется по сезонам.

Рассмотрим перекрестную классификацию в терминах векторного дисперсионного анализа. В таблице 5 приведено распределение скорости течений по сезонам и

Таблица 4

Распределение скорости течений $\vec{V}(t,z)$ по сезонам и горизонтам в терминах иерархической модели векторного дисперсионного анализа на некоторых горизонтах для двух станций в Печорском море в 2001–2002 гг.

Группы	Станция 1				Станция 2			
$\lvert\gamma_{ti}\rvert$ (см/с)/ γ_{ti} (°)	X	I	IV	VII	X	I	IV	VII
2 м	4,1/247	3,8/240	3,4/218	7,1/240	1,6/240	5,0/214	5,9/201	3,2/217
10 м	4,0/244	4,0/242	4,2/240	3,3/232	4,1/204	2,9/211	3,0/219	3,6/207
21/16 м	3,8/233	3,6/242	4,4/259	4,8/247	4,8/206	2,7/203	1,2/255	5,4/218
$I_1(D_t)$ (см²/с²)	X	I	IV	VII	X	I	IV	VII
2 м	70,9	347,7	60,7	75,9	79,8	113,3	10,9	77,8
10 м	96,0	326,3	100,7	27,9	75,8	105,6	19,6	66,1
21/16 м	92,1	272,5	90,7	34,8	78,3	85,3	31,6	37,7

горизонтам в терминах перекрестной модели векторного дисперсионного анализа на некоторых горизонтах для двух станций в Печорском море в 2001–2002 гг. Каждая из клеток этой таблицы содержит модуль и направление среднего вектора, а также СКО вектора течений.

Таблица 5

Распределение скорости течений $\vec{V}(t,z)$ по сезонам и горизонтам в терминах перекрестной модели векторного дисперсионного анализа на некоторых горизонтах для двух станций в Печорском море в 2001–2002 гг.

Группы	Станция 1				Станция 2			
$\lvert\mu_{it}\rvert$ (см/с)/μ_{it} (°)	X	I	IV	VII	X	I	IV	VII
2 м	3,3/42	1,6/346	6,3/80	4,4/60	6,3/25	2,6/248	1,2/61	7,2/24
10 м	3,7/57	1,3/7	5,6/76	8,7/67	2,7/70	1,5/222	2,4/35	5,4/39
21/16 м	3,5/61	1,8/356	4,9/55	6,8/56	1,8/73	1,4/225	4,5/22	3,6/22
$\sqrt{I_1}$ (ρ_{it}), см²/с²	X	I	IV	VII	X	I	IV	VII
2 м	8,4	18,7	7,8	8,7	8,9	10,7	3,3	8,8
10 м	9,8	18,1	10,0	5,3	8,7	10,3	4,4	8,1
21/16 м	9,6	16,5	9,5	5,9	8,9	9,2	5,6	6,1

Перекрестная классификация предпочтительна, т.к. она ориентирована на совместный анализ средних и дисперсий каждой из клеток матрицы $\vec{V}(t,z)$. Более того, для евклидовых векторов скорости течения $\vec{V}(t,z)$ в отличие от аффинных векторов (температура воздуха и атмосферное давление) отпадает необходимость введения «результативного признака», т.к. для определения моделей ДА необходимы только оценки $\vec{m}_{\vec{V}}, D_{\vec{V}}$.

ПРИЛИВНАЯ РИТМИКА

В работе (Рожков и др., 2016) показано, что в Печорском море приливные течения вносят существенный вклад в дисперсию D_V скорости течений, «гармонические постоянные» приливных течений являются случайными величинами (не константами) и для них допустимо описание через математическое ожидание $\vec{m}_{\vec{V}}(t)$ и дисперсию $D_{\vec{V}}(t)$; полусуточные гармоники превышают суточные, гармоника M_2 преобладает над остальными, «гармонические постоянные» приливных течений меняются по вертикали (между горизонтами) и по горизонтали (между станциями).

Обычно в практических задачах ограничиваются четырьмя суточными (K_1, P_1, O_1, Q_1), четырьмя полусуточными (M_2, S_2, N_2, K_2) и четырьмя мелководными волнами (MS_4, M_4, S_4, M_6).

В детерминистическом представлении главная лунная составляющая (M_2) имеет период 12 ч 25 мин, главная солнечная (P_1) — период 24 ч. Их модуляция обусловлена совместным влиянием Луны и Солнца. Средний период фазового полумесячного неравенства равен 14,77 суток; время, протекающее между двумя полнолуниями или новолуниями (синодический месяц) равно 29,53 суток.

Поскольку модуляция колебаний описывается произведением тригонометрических функций, которое можно представить через сумму этих функций (зависящих от суммы и разности аргументов), то необходимо ввести в гармонический анализ такие слагаемые, как главная лунная (O_1), главная солнечная (S_2), лунно-солнечная деклинационная (K_1), лунная большая эллиптическая (Q_1), лунная большая эллиптическая (N_2), лунно-солнечная деклинационная (K_2). Периоды полусуточных гармоник (M_2, S_2, N_2, K_2) принадлежат интервалу 11,97–12,66 ч, а суточных гармоник (K_1, P_1, O_1, Q_1) — интервалу 23,93–26,87 ч, поэтому на графиках оценок спектральной плотности $S^*_{\vec{V}}(\omega)$ в квазистационарном приближении они представлены в виде довольно узких пиков (рис. 1 в работе (Рожков и др., 2016)).

При детерминистическом подходе А.И. Дуванин классифицирует приливные явления по показателю характера приливов $\kappa = \left(H_{K_1} + H_{O_1}\right) / H_{M_2}$ через отношение амплитуд основных гармонических составляющих. Для полусуточных приливов $0 < \kappa < 0{,}5$; для смешанных приливов: неправильные полусуточные $0{,}5 < \kappa < 2{,}0$; неправильные суточные $2{,}0 < \kappa < 4{,}0$; для суточных приливов $\kappa > 4{,}0$. Для приливных течений вместо H используется V из приливного эллипса. За образ классифицирующей переменной берется образ суточной ритмики приливных течений в виде векторной диаграммы средних (за фиксированный месяц) значений вектора скорости течений в фиксированный час.

А.А. Дмитриева для классификации использует максимальную скорость течения $\vec{V}_{\max}(t)$, характеризуемую модулем этого вектора, направлением γ и фазой τ. Эти величины заимствованы из работы А. Ведемейера и использованы в работе (Рожков, 1996).

В работе (Рожков и др., 2016) замены этой детерминистической классификации приливных течений на статистическую не предложено, поскольку обобщения ДА со скалярных величин СВ на векторные СВ не было сделано. После изложенных выше результатов в этой статье, которую следует считать продолжением статьи (Рожков и др., 2016), статистическая классификация приливных течений полностью укладывается в определение (1) для векторных СВ. Для приливных течений переменную $\vec{V}_{ti}$ в (1) необходимо интерпретировать как вектор скорости течений соответствующей гармоники, под группой понимать индекс гармоники, параметры гармоники («гармонические постоянные») — СВ с известными оценками математических ожиданий и дисперсий. Для скорости приливных течений лучше всего начать с модели векторного ДА с векторным базисом:

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \sum_k b_k(t)\vec{\psi}_k(\vec{r},t)\,, \tag{11}$$

где $\vec{\psi}_k(\vec{r},t)$ — векторные естественные ортогональные функции (ВЕОФ).

ВЕОФ являются собственными функциями ковариационного тензора величин *SS* (2), *S*1 (3), *S*2 (4). Обратим внимание на отличие модели (7) от (11): скалярный базис и векторные коэффициенты в (7); векторный базис и скалярные коэффициенты в (11); зависимость скорости течений (11) от двух аргументов.

ВЫВОДЫ

Скорости течений в Печорском море, как показали данные продолжительных измерений, присуща изменчивость по времени, пространству и по глубине. Статистический анализ этих данных выявил наличие годовой ритмики и приливных колебаний, их параметры изменяются по глубине и по пространству.

Для количественной характеристики различий этих параметров необходимо использовать векторный дисперсионный анализ. Специфика такого анализа в том, что величины *SS*, *S*1, *S*2 — тензоры, математическое ожидание $\vec{V}_{ti}$ есть вектор, а дисперсия — тензор.

Для вектора скорости течений $\vec{V}(t,z)$ оба аргумента (фактора) аддитивны, поэтому иерархическая модель необходима лишь как форма представления результатов совместного анализа $\vec{V}(t,z)$ по t и z. Перекрестная классификация учитывает оба аргумента и дает возможность построить подходящую вероятностную модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Белышев А.П., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А. Вероятностный анализ морских течений. Л.: Гимиз, 1983. 264 с.

Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. М.: Мир, 1980. Т. 1. 610 с.; 1981. Т. 2. 500 с.

Иванов Н.Е., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А. Специфика дисперсионного анализа гидрометеорологических процессов и полей // Известия РГО. 2006. Вып. 5. Т. 138. С. 20–39.

Рожков В.А. Теория вероятностей случайных событий, величин и функций с гидрометеорологическими примерами. СПб.: Прогресс-погода, 1996. 560 с.

Рожков В.А. Теория и методы статистического оценивания вероятностных характеристик случайных величин и функций с гидрометеорологическими примерами. Т. 1, 2. СПб.: Гидрометеоиздат, 2002. 780 с.

Рожков В.А. и др. Методы и средства статистической обработки и анализа информации об обстановке в Мировом океане на примере гидрометеорологии. Обнинск: ВНИИГМИ-МЦД, 2009. 416 с.

Рожков В.А., Сухих Н.А. Изменчивость течений в Печорском море // Проблемы Арктики и Антарктики. 2016. № 1 (107). С. 84–95.

Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М.: Наука, 1980. 512 с.

V.A. ROZHKOV, N.A. SUKHIKH

ANALYSIS OF VARIANCE OF SEA CURRENTS' VARIABILITY IN THE PECHORA SEA

The method of vector analysis of variance of vector random processes was used for the description of annual and tidal variability of sea currents in the Pechora Sea.

There are the cases for description of temporal and spatial variability of sea currents.

Keywords: sea current velocity, vector analysis of variance, single-factor analysis of variance models, two-factor analysis of variance models, hierarchical classification, cross-classification.