

УДК 514.18

ЗАСТОСУВАННЯ НАТУРАЛЬНОЇ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ ДО АПРОКСИМАЦІЇ ДИСКРЕТНО ПОДАНОЇ КРИВОЇ

Борисенко В.Д., д.т.н.

Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського,
Устенко І.В., к.т.н.,

Устенко А.С.

Національний університет кораблебудування імені адмірала
Макарова (Миколаїв, Україна)

Робота присвячена розробці нового підходу до апроксимації кривої, поданої сукупністю дискретних точок. Аналітичний опис шуканої кривої реалізується із застосуванням натуральної параметризації та лінійного закону розподілу кривини від довжини власної дуги. Для побудови апроксимаційної залежності ординат заданих дискретних точок від їх абсцис необхідно знайти величини п'ятьох параметрів. До цих параметрів відносяться два невідомі коефіцієнти лінійного закону розподілу кривини, довжина дуги, кути нахилу дотичної в початковій та кінцевій точках шуканої кривої. Початкові значення кутів нахилу дотичних визначаються на підставі осереднених величин похідних, які розраховуються по трьох точках методом скінчених різниць, довжина дуги приймається рівною довжині дуги ламаної. Застосування положень диференціальної геометрії до кутів нахилу дотичних дозволяє знайти залежність одного коефіцієнта лінійного закону розподілу кривини від решти параметрів. Розраховується апроксимаційна крива першого наближення і визначаються довжини дуг для точок, які відповідають абсцисам точок вихідних даних. По визначеним довжинам дуг інтегруванням знаходяться ординати проміжно отриманих точок і розраховуються квадрати їх відхилень від заданих дискретних точок. Числовим методом мінімізації функції багатьох змінних знаходяться величини всіх невідомих параметрів. За цільову функцію в цьому обчислювальному процесі приймається сума квадратів відхилень між проміжними та заданими дискретними точками. Розроблений метод призначений для аналітичного подання кривих, якими подаються опукла та увігнута ділянки профілів лопаток осьових компресорів, координати яких задаються у табличній формі.

Ключові слова: апроксимація, натуральна параметризація, лінійний закон розподілу кривини, метод найменших квадратів.

Постановка проблеми. Традиційним методом формування

профілів лопаток осьових компресорів є розподіл вздовж скелетної (середньої) лінії експериментально відпрацьованого аеродинамічного профілю. Як правило, ці профілі задаються в табличній формі, тобто у вигляді дискретної, не дуже поширеної сукупності точок. Впровадження у виробництво сучасного технологічного устаткування висуває певні вимоги до якості подання профілів лопаток осьових компресорів. По-перше, це відноситься до кількості точок, їх має бути значно більше. По друге, необхідно підвищити точність подання точок, наведених у таблицях. За прийнятим у компресорній справі підходом координати точок задаються у відносному вигляді, з трьома знаками після коми. Абсциси точок профілю варіюються у межах від нуля до одиниці, а ординати точок приймаються у відсотках від максимальної товщини профілю. У багатьох практичних застосуваннях проєктантам компресорів треба мати аналітичні залежності ординат точок від їх абсцис.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасній літературі можна знайти достатньо різноманітних методів, присвячених розв'язанню питання апроксимації даних [1, 2]. При цьому застосовуються явні, неявні, параметричні форми подання кривих. У роботі [1] наведені універсальні алгоритми і програмні модулі, які дозволяють як інтерполювати дані, так і апроксимувати їх. Однією з перших публікацій, в якій закладені основи прикладної дискретної геометрії, слід вважати роботу [3]. Але в цій роботі лівова увага приділена розв'язанню задачі загушення точок дискретно поданої кривої. Питанню застосування натуральної параметризації до моделювання кривих ліній і поверхонь присвячена робота [4]. Метою цієї роботи була розробка методів моделювання кривих, які мали задовольняти певним умовам, наприклад, проходити через задані точки площини чи простору та мати в них наперед визначені кути нахилу дотичних. Отже, запропоновані в роботі [4] методи побудови кривих можна, в певній мірі, віднести до так званих конструкційних, не пов'язаних ні з інтерполяцією, ні з апроксимацією.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є розробка методу апроксимації кривих, заданих сукупністю точок, із застосуванням натуральної параметризації та лінійного закону розподілу кривини від довжини власної дуги стосовно профілів лопаток осьових компресорів.

Основна частина. Розв'яжемо задачу апроксимації обводів профілів лопаток осьових компресорів, базуючись на ідеях роботи [4]. Тобто, будемо подавати обводи спинки і коритця профілю кривими, які описуються у натуральній параметризації. Для числового рішення поставленої задачі необхідно задатися певним

законом розподілу кривини від довжини дуги. Приймаючи до уваги те, що компресорні профілі мають слабовигнуті обводи, приймемо, що їх кривина підпорядковується лінійному закону розподілу:

$$k(s) = as + b, \quad (1)$$

де a і b – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню в процесі розв’язання поставленої задачі; s – криволінійна координата.

З диференціальної геометрії відомо, що кривина кривої k визначається наступною залежністю:

$$k(s) = d\varphi/ds,$$

де φ – кут нахилу дотичної.

Вирази для визначення кута нахилу дотичної та координат точок кривої в залежності від довжини її дуги мають вигляд:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds; \quad (2)$$

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds; \quad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds, \quad (3)$$

де $\varphi(0)$, $x(0)$, $y(0)$ – кут нахилу дотичної та координати початкової точки модельованої кривої.

Для побудови апроксимаційної кривої необхідно мати значення п’ятьох параметрів: невідомі коефіцієнти лінійного закону розподілу кривини a і b , довжину дуги S , кут нахилу дотичної в початковій точці, який позначимо як φ_1 , та значення ординати початкової точки y_1 кривої.

Пошук цих параметрів будемо виконувати числовим методом мінімізації суми квадратів відхилень проміжно отриманих точок апроксимаційної кривої, абсциси яких збігаються з абсцисами вихідних точок.

Значення невідомих параметрів першого наближення визначаються наступним чином. Кут φ_1 приймається рівним арктангенсу, аргумент якого є середнім значенням похідних, що знаходяться методом скінчених різниць для другої та третьої заданих точок. При цьому прирости ординат і абсцис беруться по відношенню до першої точки. Довжина кривої S першого наближення приймається рівною довжині ламаної лінії, розрахованій по координатам вихідних точок.

Оскільки значення параметрів a і b навіть у першому наближенні важко оцінити, то введемо до розгляду кут наприкінці кривої, який позначимо як φ_2 і визначимо його так, як це було зроблено при знаходженні кута φ_1 . Але при цьому приймаються до

розгляду остання та дві передостанні вихідні точки.

Оцінивши кут φ_2 , можна після інтегрування виразу (2), виконаного з урахуванням закону розподілу кривини (1), знайти залежність коефіцієнта a від решти параметрів закону розподілу кривини:

$$a = \frac{2}{S} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{S} - b \right).$$

Далі розраховуємо апроксимаційну криву першого наближення і визначаємо довжини дуг для точок, які відповідають абсцисам точок вихідних даних. Для цього скористаємося підпрограмою *zeroin*, наведеною в роботі [5]. Ця підпрограма призначена для знаходження дійсного нуля функції. У нашому випадку цією функцією виступає різниця значень абсцис вихідних точок і точок, отриманих при побудові апроксимаційної кривої з проміжними значеннями параметрів, які впливають на її форму. У першу чергу це відноситься до коефіцієнтів a і b та довжини дуги S закону розподілу кривини.

Знайшовши довжини дуг, які відповідають вихідним точкам із заданими абсцисами, визначаємо ординати нових точок. Розраховуємо суму квадратів відхилень ординат нових точок від вихідних. Тобто діємо так, як це притаманно традиційному методу найменших квадратів. Безпосередньо для рішення оптимізаційної задачі застосовано алгоритм, запропонований в роботі [6].

На рис. 1 наведені проміжні результати пошуку параметрів апроксимаційної кривої. Світлі кола відповідають вихідним точкам, які прийняті довільно, але вони в якійсь мірі нагадують криволінійний обвід профілю лопатки. Зазначимо, що вихідні точки взяті з деяким розкидом від реального обводу профілю. Це зроблено з метою більш яскравої демонстрації запропонованого методу апроксимації кривих із застосуванням їх натуральної параметризації та лінійного закону розподілу кривини.

Маленькі зачернені кола на цьому рисунку відповідають положенням проміжних точок, які вони займають в процесі знаходження оптимальних параметрів шуканої апроксимаційної кривої. Як впливає з розгляду цього рисунку, проміжні точки чітко рухаються по вертикальним прямим, побудованим зі значеннями абсцис заданих вихідних точок.

Остаточна отримана апроксимаційна крива показана на рис. 2. На ньому також світлі кола відповідають вихідним даним. Зачернені кола меншого радіуса є візуалізацією результатів рішення взятої за мету апроксимаційної задачі. Крива, яка з'єднує зачернені кола, побудована із застосуванням знайдених параметрів лінійного закону

розподілу кривини від довжини дуги. Дані, необхідні для побудови цієї кривої, визначалися числовим інтегруванням виразів (3) з поступовим збільшенням верхнього ліміту інтегрування від 0 до S .

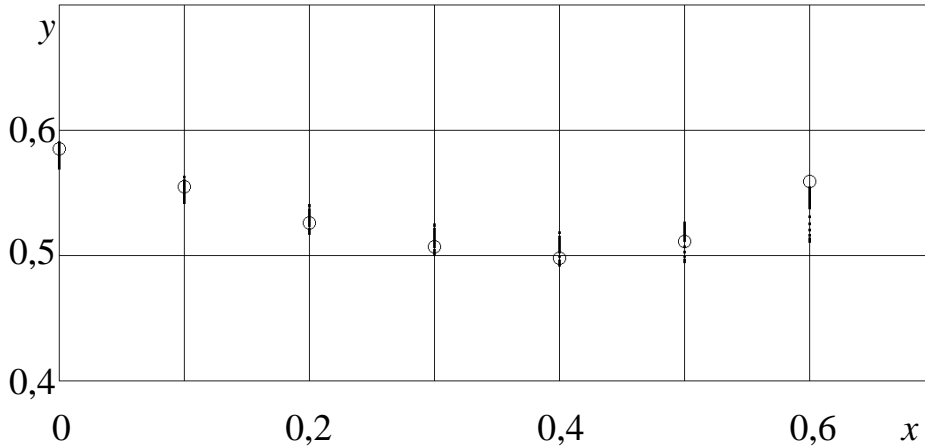


Рис. 1. Візуалізація процесу пошуку параметрів апроксимаційної кривої

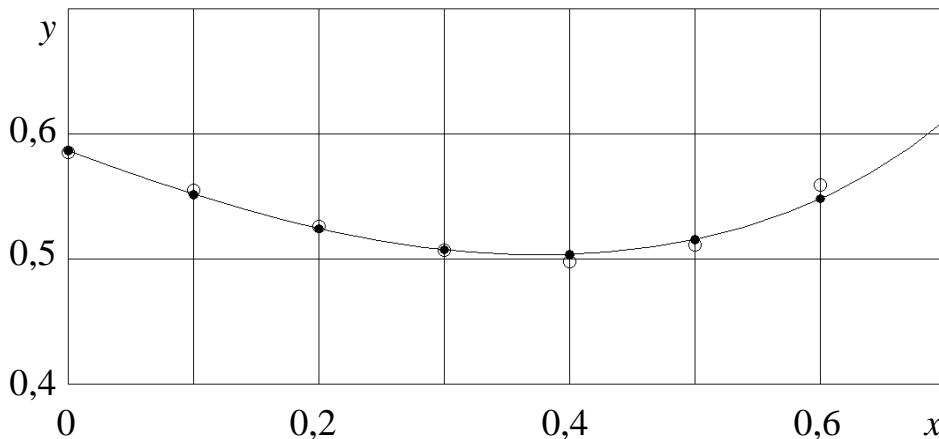


Рис. 2. Апроксимаційна крива та вихідні точки

Щодо розподілу кута нахилу дотичної до апроксимаційної кривої можна відмітити, що інтеграл (2) береться аналітично і результат цього інтегрування має вигляд:

$$\varphi(s) = \varphi_1 + \frac{as^2}{2} + bs.$$

На підставі запропонованого методу апроксимації дискретно поданих кривих розроблено програмний код у середовищі Fortran PowerStation.

Висновки. Запропонований метод дозволяє апроксимувати дискретно подані криві із застосуванням натуральної параметризації

та лінійного закону розподілу кривини від довжини дуги. Метод може бути застосований при удосконаленні геометричних характеристик обводів профілів лопаток осьових компресорів. Подальші дослідження з цього питання мають бути орієнтовані на розробку заходів, спрямованих на використання квадратичних залежностей розподілу кривини.

Література

1. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. / В.А. Василенко. – Новосибирск: Наука, 1983. – 214 с.
2. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
3. Основи прикладної дискретної геометрії: Навчальний посібник / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – 194 с.
4. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, І.В. Устенко. – Миколаїв: МНУ, 2018. – 220 с.
5. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
6. Hooke R. Direct search solution of numerical and statistical problems. / R. Hooke, T.A. Jeeves // *Journal of the Association for Computing Machinery (ACM)*. 1961. – Vol. 8, No 2. – 212–229.

ПРИМЕНЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ КРИВОЙ

Борисенко В.Д., Устенко І.В., Устенко А.С.

Работа посвящена разработке нового подхода к аппроксимации кривой, представленной совокупностью дискретных точек. Аналитическое описание искомой кривой реализуется с применением натуральной параметризации и линейного закона распределения кривизны от длины собственной дуги. Для построения аппроксимирующей зависимости ординат заданных дискретных точек от их абсцисс необходимо найти

величины пяти параметров. К этим параметрам относятся два неизвестных коэффициента линейного закона распределения кривизны, длина дуги, углы наклона касательной в начальной и конечной точках искомой кривой. Начальные значения углов наклона касательных определяются на основании усредненных величин производных, которые рассчитываются по трем точкам методом конечных разностей, а длина дуги принимается равной длине дуги ломаной. Применение положений дифференциальной геометрии к углам наклона касательных позволяет найти зависимость одного коэффициента линейного закона распределения кривизны от остальных параметров. Рассчитывается аппроксимирующая кривая первого приближения и определяются длины дуг для точек, соответствующих абсциссам точек исходных данных. По определенным длинам дуг интегрированием находятся ординаты промежуточно полученных точек и рассчитываются квадраты их отклонений от заданных точек. Численным методом минимизации функции многих переменных находятся величины всех неизвестных параметров. За целевую функцию в этом вычислительном процессе принимается сумма квадратов отклонений между промежуточными и заданными дискретными точками. Разработанный метод предназначен для аналитического представления кривых, которыми описываются выпуклый и вогнутый участки профилей лопаток осевых компрессоров, координаты которых задаются в табличной форме.

Ключевые слова: аппроксимация, естественная параметризация, линейный закон распределения кривизны, метод наименьших квадратов.

APPLICATION OF NATURAL PARAMETRIZATION FOR APPROXIMATION OF A DISCRETE REPRESENTED CURVE

Borisenko V., Ustenko I., Ustenko A.

The work is devoted to the development of a new approach to the approximation of the curve presented by a set of discrete points. The

analytical description of the desired curve is realized with the use of natural parameterization and the linear law of the distribution of curvature from the length of its own arc. To construct the approximation dependence of the ordinates of the given discrete points from their abscissa, one must find the values of the five parameters. These parameters include two unknown coefficients of the linear law of the distribution of the curvature, the length of the arc, the angles of inclination of the tangent at the initial and the final points of the desired curve. The initial values of the tilt angles are determined on the basis of the averaged values of the derivatives, which are calculated on three points by the method of finite differences, and the length of the arc is assumed to be equal to the length of the arc of the broken. The application of the positions of differential geometry to the tilt angles allows us to find the dependence of one coefficient of the linear law of the distribution of curvature on the remaining parameters. An approximation curve for the first approximation is calculated and the lengths of arcs for the points corresponding to the abscissas of the points of the initial data are determined. By the definite lengths of the arcs, numerical integration contains the ordinates of the intermediate points obtained and calculate the squares of their deviations from the given points. Numerical method of minimizing the function of many variables are the values of all unknown parameters. The target function in this computational process is the sum of squares of deviations between intermediate and given discrete points. The developed method is intended for the analytical representation of the curves, which are presented curved sections of the profiles blades of axial compressors, whose coordinates are given in tabular form.

Keywords: approximation, natural parameterization, linear law of curvature distribution, least squares method.