ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА ЕРГОНОМІКА

УДК 514.18
DOI https://doi.org/10.32838/TNU-2663-5941/2020.3-1/01

Борисенко В.Д.
Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Устенко С.А.
Одеський національний політехнічний університет

Устенко І.В.
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

МОДИФІКАЦІЯ ЛЕМНІСКАТИ БЕРНУЛЛІ ТА ЇЇ ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Стаття присвячена розробленню методу модифікації лемніскати Бернуллі з метою забезпечення заданих кутів нахилу дотичних у початковій і кінцевій точках ділянки лемніскати, розташованій у ділянці додатних значень абсцис та ординат ортогональної системи координат, а також проведення кривої через проміжну точку. Звичайна лемніската має на початку координат кут нахилу дотичної, рівний 45°. У точці перетину пелюстки лемніскати з віссю абсцис ортогональних координат дотична до неї розташовується перпендикулярно до цієї осі. Для модифікації лемніскати введені два параметри, один із яких є степенем кореня, а другий є деяким раціональним додатним або від'ємним числом, але таким, що не призводить до від'ємного значення косинуса, що знаходиться під знаком кореня. Зміна кута нахилу дотичної в початковій точці реалізується введенням під знак кореня додаткової компоненти. Розроблено метод проведення дуги модифікованої лемніскати через точку, задану в площині розташування лемніскати з довільними кутами нахилу дотичних у початковій і кінцевій точках модельованої дуги модифікованої лемніскати. Метод застосовано до розрахунку координат перехідної кривої, яка влаштовується між прямолінійною та круговою ділянками залізничного шляху. Задача розв'язується за умови, що модельована крива буде дотичною до прямолінійної та кругової рейок, а в точці стикування з круговою ділянкою мати в ній кривину, рівну оберненій величині радіуса кола кругової рейки. Наведені результати моделювання тестового прикладу перехідної кривої залізничного шляху, які підтвердили працездатність розробленого методу модифікації лемніскати Бернуллі. Запропонований метод модифікації лемніскати реалізовано у вигляді комп'ютерного коду, який дає змогу, окрім числових результатів, отримувати графічні зображення модельованих кривих на екрані монітора комп'ютера.

Ключові слова: *лемніската Бернуллі, модифікація, дотична, кривина, перехідна крива.*

Постановка проблеми. Рівняння лемніскати вперше в математичній літературі зустрілося в 1694 році в статті Я. Бернуллі про приливи та відливи. Я. Бернуллі відзначив схожість цієї лінії з цифрою 8 і з вузловою пов'язкою, яку він називав «лемніск» (від грецького – пов'язка). Звідси й випливає назва цієї поширеної в практичному застосуванні кривої.

Лемніската Бернуллі в ортогональних координатах описується рівнянням четвертого порядку вигляду

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a\left(x^2 - y^2\right).$$

Характеристична властивість лемніскати Бернуллі полягає в тому, що ця крива є геометричним місцем точок M, добуток відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (так званих фокусів) є величиною сталою й дорівнює квадрату половини відстані між фокусами.

Лемніската Бернуллі складається з двох пелюсток. Початок ортогональних координат, у яких вона побудована, є для неї подвійною точкою з дотичними $y = \pm x$. Ці дотичні є асимптотами кривої, вони взаємно перпендикулярні.

Отже, лемніската Бернуллі є кривою четвертого порядку, вона має вигляд лежачої вісімки.

Її дуже часто називають символом нескінченності.

Плоскі алгебраїчні лінії вищих порядків мають широке практичне застосування. Серед цих кривих провідне місце посідає лемніската Бернуллі. Лемніскатні криві поширені в багатьох галузях науки й техніки, зокрема під час профілювання лопаток осьових і радіальних турбін, середніх ліній профілів лопаток осьових компресорів, вхідних патрубків аеродинамічних труб, побудови перехідних кривих, які влаштовуються між прямолінійними й круговими ділянками залізничних та автомобільних шляхів. Ці криві мають привабливі переваги, зумовлені монотонністю зміни кривини, кута нахилу дотичної вздовж обводу.

Проте лемніскатним кривим притаманні й певні недоліки. Так, на початку ортогональної системи координат пелюстка лемніскати має кут нахилу дотичної, який дорівнює 45°, а в точці, що знаходиться на перетині лемніскати з віссю абсцис, цей кут є рівним 90°. Ця обставина суттєво обмежує сферу застосування лемніскат, оскільки на практиці часто буває необхідним забезпечувати різноманітні комбінації кутів нахилу дотичних у вказаних точках. У зв'язку з викладеним необхідно розробити заходи, пов'язані з подоланням цих недоліків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Однією з класичних публікацій, присвячених аналітичному огляду плоских кривих, є робота А.А. Савелова [1]. У цій праці достатньо уваги приділено опису властивостей лемніскати Бернуллі, які є численними та різноманітними. Низку цікавих властивостей лемніскати пов'язують із її квадратурою, кривиною, визначенням довжини дуги від полярного кута, рівного нулю, до деякого заданого його значення, показано, що інверсія лемніскати дає синусоїдальну спіраль. Методи побудови лемніскати графічними способами розглядаються в роботі [2].

Жоден довідник із вищої математики [3; 4] не обходить питання плоских кривих, розгляду їх властивостей та особливостей. У цих виданнях обов'язково приділяється певна увага лемніскаті Бернуллі.

Завершуючи аналіз літературних джерел, необхідно зазначити, що питання модифікації рівняння лемніскати Бернуллі не розглядається. Тільки в роботі [5] стосовно профілів лопаток осьових турбін пропонується змінювати кут нахилу дотичної до лемніскати на початку ортогональних координат шляхом множення ординат точок лемніскати на коефіцієнт, який є функцією кута виходу потоку з решітки профілів.

Постановка завдання. Метою статті є розроблення заходів, пов'язаних із забезпеченням потрібних кутів нахилу дотичних до лемніскати шляхом модифікації певним чином її рівняння в полярній системі координат, зокрема зміни показника степеня, коефіцієнта при полярному куті та додавання до рівняння спеціального компонента.

Виклад основного матеріалу дослідження. Рівняння лемніскати в полярних координатах має вигляд:

$$\rho = a\sqrt{\cos(2\phi)},$$

де ρ, φ – полярні радіус і кут; a – параметр лемніскати, який визначає координати найбільш віддалених точок лемніскати на осі x.

Ця крива в початковій точці ортогональних координат має кут нахилу дотичної, рівний 45°, а на відстані а від початку – цей кут дорівнює 90°. Але в деяких практичних застосуваннях необхідно забезпечувати різноманітні комбінації кутів нахилу дотичних в означених точках.

Модифікуємо рівняння лемніскати й запишемо його в такому вигляді:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(n\phi)},$$

де m і n – параметри.

Параметр n має визначатися залежно від потрібного кута нахилу дотичної до лемніскати на початку ортогональної системи координат. Він знаходиться як величина, що дорівнює результату ділення 90° на значення потрібного кута нахилу дотичної, тобто

$$n = 90/\alpha_0,$$

де α_0 – кут нахилу дотичної, який береться в градусах.

Для зміни кута нахилу дотичної в початковій точці введемо під знак кореня додаткову компоненту Δ. За цих дій модифіковане рівняння лемніскати набуде вигляду:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(n\phi) + \Delta}.$$

Додаткова компонента має задовольняти таким умовам: у початковій точці лемніскати $\Delta = 0$; у кінцевій точці – підкореневий вираз $\cos(n\phi) + \Delta = 0$. Означеним умовам задовольняє вираз:

$$\Delta = -\mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi).$$

При $n\phi = 0$ величина $\Delta = 0$, а при $n\phi = \pi - \alpha_1$ підкореневий вираз

Остаточно рівняння модифікованої лемніскати візьмемо у вигляді:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(n\phi) - \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi)} . \qquad (1)$$

Це рівняння дає змогу будувати лемніскати з різними комбінаціями кутів нахилу дотичних у початковій і кінцевій точках модельованої лінії.

На рис. 1 показані три модифіковані лемніскати, побудовані за рівнянням (1). На ньому зображені дві прямі, дотичні до початкової та кінцевої точок кривої. Лемніскати моделювалися з кутами $\alpha_1 = -60°$ у початковій точці кривої і $\alpha_0 = 75°$ у кінцевій її точці. Параметр m для кривої *1* мав значення 1,25; для кривої 2 – 1,50; для кривої 3 – 1,75.

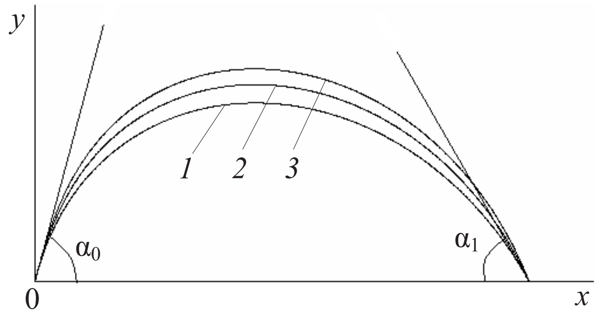

Рис. 1. Модифіковані дуги лемніскат

Відомо, що кут нахилу дотичної до кривої пов'язаний із похідною від рівняння, яким описується крива. Похідна параметричної функції dy/dx є результатом ділення похідної $dy/d\phi$ на похідну $dx/d\phi$.

Ортогональні координати будь-якої точки полярно заданої кривої є добутком полярного радіуса на відповідну тригонометричну функцію полярного кута. Диференціюємо ці залежності й отримуємо вираз для похідної dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\phi + \rho\cos\phi}{\rho'\cos\phi - \rho\sin\phi}. \qquad (2)$$

Полярний радіус ρ модифікованої лемніскати визначається залежністю (1), яку для зручності запишемо у вигляді:

$$\rho = a\left[\cos(n\phi) - \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi)\right]^{\frac{1}{m}}. \qquad (3)$$

Для розрахунку похідної dy/dx за виразом (2) необхідно мати похідну ρ'. Знайдемо цю похідну, для чого продиференціюємо залежність (3) по полярному куту φ. Будемо мати:

$$\rho' = \frac{-na}{m}\left[\cos(n\phi) - \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi)\right]^{\frac{1-m}{m}} \times$$
$$\times\left[\sin(n\phi) + \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\cos(n\phi)\right]. \qquad (4)$$

Підставивши (3) і (4) до формули (2), отримаємо вираз для розрахунку похідної.

Розглянемо задачу, пов'язану з проведення дуги модифікованої лемніскати через точку, довільно задану в площині розташування лемніскати. Основним питанням у розв'язанні цієї задачі є визначення параметра m.

Абсцису деякої заданої точки А можна подати так:

$$x_A = a\sqrt[m]{\cos(n\phi_A) - \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi_A)}\cos\phi_A . \qquad (5)$$

Полярний кут φ_A точки A визначається за формулою:

$$\phi_A = \text{arctg}\frac{y_A}{x_A}.$$

Логарифмуючи (5), після перетворень отримаємо вираз для визначення параметра m:

$$m = \frac{\ln\left[\cos(n\phi_A) - \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi_A)\right]}{\ln\dfrac{x_A}{a\cos\phi_A}}. \qquad (6)$$

Кривина кривої k, заданої в полярних координатах, визначається за такою формулою:

$$k = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\left[\rho^2 + (\rho')^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (7)$$

Для знаходження першої похідної ρ' запишемо рівняння модифікованої лемніскати (1) у вигляді:

$$\rho^m = a^m\left[\cos(n\phi) - \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi)\right].$$

Диференціюванням обох частин цього рівняння по φ отримаємо:

$$m\rho^{m-1}\rho' = -na^m\left[\sin(n\phi) + \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\cos(n\phi)\right],$$

звідки

$$\rho' = -\frac{na^m\left[\sin(n\phi) + \text{ctg}(\pi - \alpha_1)\cos(n\phi)\right]}{m\rho^{m-1}}. \qquad (8)$$

Для знаходження другої похідної ρ'' диференціюємо вираз (8) по φ:

$$m(m-1)\rho^{m-2}\rho' + m\rho^{m-1}\rho'' =$$
$$= -n^2 a^m \left[\cos(n\phi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi)\right].$$

Після перетворень цей вираз набуде вигляду

$$\rho'' = -\frac{m(m-1)\rho^{m-2}\rho' + n^2 a^m \left[\cos(n\phi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\phi)\right]}{m\rho^{m-1}}. \quad (9)$$

Застосуємо модифіковану лемніскату до моделювання перехідних кривих залізничних колій, найбільш проблемними місцями яких є криві ділянки шляху. Особливу роль відіграє перехідна крива, вставкою якої забезпечується плавність переходу від прямолінійної ділянки до кругової.

Перехідні криві повинні задовольняти таким вимогам [6, 7]: на початку перехідної кривої, розташованому в кінці прямолінійної ділянки, радіус кривини повинен відповідати нескінченності, а потім, поступово зменшуючись, наближатися до радіуса кривини кругової ділянки.

Отже, головні вимоги, які подаються до перехідної кривої, полягають у тому, щоб на її початку кривина k дорівнювала нулю (для виключення удару), а на кінці величині – 1/R (для зменшення впливу відцентрових сил).

На рис. 2 цифрою *1* позначено прямолінійну ділянку шляху, цифрою *2* – кругову ділянку радіуса R, цифрою *3* – перехідну криву.

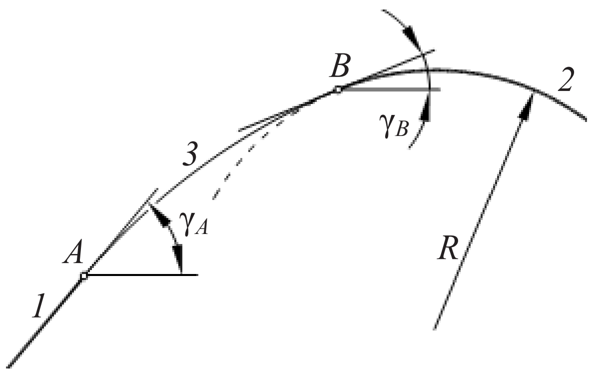

Рис. 2. Перехідна крива між прямою та круговою ділянками шляху

Застосуємо для побудови перехідної кривої модифіковану лемніскату у вигляді (1). Ця крива на початку ортогональних координат має нульове значення кривини, що є привабливим для стикування її в цій точці з прямолінійною ділянкою залізничного шляху.

За початок координат візьмемо точку стикування прямолінійної ділянки шляху з модифікованою лемніскатою. У цій системі координат розташуємо коло кругової ділянки шляху. При цьому будуть задані радіус кола R та координати його центра x_C, y_C.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно підібрати модифіковану лемніскату так, щоб вона пройшла дотично до прямолінійної та кругової ділянок шляху. Це можна зробити, якщо якимось чином знайти значення параметра лемніскати a, показник кореня m, параметр n та кут α_1.

Указані параметри й кут α_1 визначаються в такій послідовності. Задаємося величиною кута γ_B. Оскільки координати x_C, y_C центра кола кругової ділянки та її радіус R задані, то можна розрахувати проміжні значення координат точки B:

$$x_B = x_C - R\sin\gamma_B;$$
$$y_B = y_C + R\cos\gamma_B.$$

За відомими координатами точки B визначаємо її полярний кут:

$$\phi_B = \mathrm{arctg}\left(\frac{y_B}{x_B}\right).$$

Знаходження невідомих величин, необхідних для побудови перехідної кривої, яка подаватиметься модифікованою лемніскатою, виконано шляхом розв'язання оптимізаційної задачі з чотирма параметрами. Для цього застосовано високоефективний алгоритм Хука-Дживса [8], розроблений для мінімізації функцій багатьох змінних, перевагою якого є те, що в процесі мінімізації не використовуються похідні від цільової функції по параметрах, що оптимізуються..

У задачі, що розв'язується, існують два критерії. Перехідна крива, яка вийшла з точки A, має прийти в точку B, бути в ній дотичною до кола кругової ділянки та мати однакову з колом кривину. Оскільки існують два критерії, то задача належить до класу багатокритеріальних. Для її розв'язання застосовано принцип Гермейєра [9], який передбачає використання для цільової функції єдиного показника Q, у якому складникам цільової функції приписують різну вагу λ_i:

$$Q = \sum_1^2 \lambda_i W_i;$$

$$\sum_1^2 \lambda_i = 1.$$

Цільова функція в нашій задачі має вигляд:

$$\mathrm{Q} = \lambda_1 \left|\gamma_B - \mathrm{arctg}\theta_B\right| + \lambda_2 \left|k_B - 1/R\right|.$$

У цій цільовій функції під кутом θ_B розуміється кут нахилу модифікованої лемніскати до осі абсцис у точці B, розрахований як арктангенс похідної, визначеної за виразом (2), оскільки кут береться в ортогональних координатах, а під k_B – кривина модифікованої лемніскати в точці B, яка обчислюється за виразом (7).

Для розрахунку цільової функції виконуються такі дії:

– за відомим кутом нахилу прямої рейки розраховується параметр n;

– за виразом (6) знаходиться показник кореня m;

– за виразом (2) розраховується похідна в точці B;

– на підставі розрахованої похідної знаходиться кут нахилу дотичної в точці B, що дає можливість знайти першу компоненту цільової функції, пов'язану з визначенням різниці кутів нахилу дотичних у точці B;

– за виразом (7) розраховується кривина модифікованої лемніскати в точці B;

– визначається друга компонента цільової функції, яка пов'язана зі знаходженням різниці кривини, отриманої за виразом (7), та оберненою величиною радіуса кола кругової ділянки шляху.

Сформувавши цільову функцію, розв'язують оптимізаційну задачу. Отримані при цьому результати тестового прикладу в графічному вигляді представлені на рис. 3. На цьому рисунку цифрою *1* позначено прямолінійну ділянку шляху, продовження якої свідчить про те, що перехідна крива є дотичною до прямолінійної ділянки. Цифрою *2* на рисунку позначено кругову ділянку шляху радіуса R, цифрою *3* – отриману за результатами розрахунків перехідну криву, цифрою *4* – графік розподілу кривини модифікованої лемніскатної кривої, цифрою *5* – дотичну до кола кругової ділянки та перехідної кривої в точці B, у якій стикуються вказані лінії.

Аналізуючи графік розподілу кривини перехідної кривої, можна відмітити, що на початку цієї кривої кривина дорівнює нулю. По мірі переміщення по перехідній кривій кривина спочатку поступово зростає, потім стабілізується. Але при наближенні до точки стикування з круговою кривою кривина дещо знижується, що призводить до незначного гальмування транспортного засобу. І цей факт є позитивним.

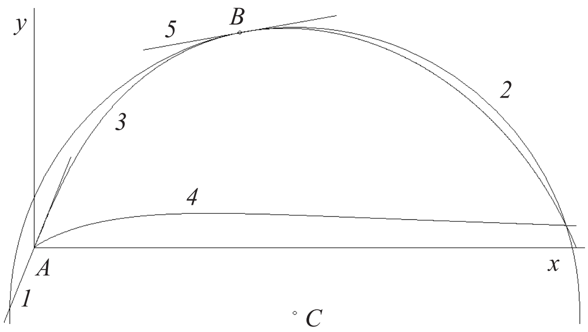

Рис. 3. Тестовий приклад побудови перехідної кривої між прямолінійною та круговою ділянками шляху

Запропонований метод моделювання перехідних кривих може бути застосованим під час побудови автомобільних шляхів, хоча, на відміну від залізничного шляху, для автомобільних доріг треба враховувати рельєф місцевості, якому притаманні спуски та підйоми шляху, розташовані часто на невеликій відстані.

Висновки. Запропонований метод модифікації лемніскати Бернуллі дає змогу моделювати дуги цих кривих із заданими комбінаціями кутів у початкових і кінцевих точках. Показано, що за цим методом можна визначити величини застосованих під час модифікації лемніскати параметрів і цим самим забезпечувати проходження кривої через задану проміжну точку площини.

Практичною реалізацією доведено, що модифіковані лемніскати можна застосовувати під час геометричного моделювання перехідних кривих, які влаштовуються між прямою та круговою ділянками залізничного шляху.

Список літератури:

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). Москва : УРСС, 2010. 296 с.
2. Lockwood E.H. A book of curves. Cambridge : Cambridge university press. 1961. 199 p.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Москва : Наука, 1986. 544 с.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Москва : Наука, 1969. 872 с.
5. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. Москва : Энергия, 1974. 592 с.
6. Амелин С.В., Дановский Л.М. Путь и путевое хозяйство. Москва : Транспорт, 1986. 215 с.
7. Лазарян В.А. О форме переходной кривой (Теоретические основы выбора рациональной формы переходной кривой). Динамика транспортных средств. Киев : Наукова думка, 1985. С. 10–24.

8. Hooke R., Jeeves T.A. Direct search solution of numerical and statistical problems. *Journal of the ACM.* 1961. Vol. 8. № 2. P. 212–229.
9. Кини Р.П., Райха Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. Москва : Радио и связь, 1981. 560 с.

Borisenko V.D., Ustenko S.A., Ustenko I.V. MODIFICATION OF THE BERNOULLI'S LEMNISCATE AND ITS PRACTICAL APPLICATION

The paper is devoted to the development of the method of modification of Bernoulli's lemniscates in order to provide given angles of tangent tangents at the start and end points of the lemniscate's section, located in the region of positive values of the abscissa and ordinates of the Cartesian coordinate system, as well as to draw a curve through an intermediate point. An ordinary lemniscate has a tangent angle of 45° at the origin. At the point of intersection of the petal of the lemniscate with the abscissa axis of Cartesian coordinates, the tangent to it is perpendicular to this axis. To modify lemniscate, two parameters are entered, one of which is the exponent of the root and the other is some rational positive or negative number, but one that does not lead to a negative cosine value under the root sign. Changing the angle of tangent at the starting point is realized by introducing an additional component under the root. The method of drawing a modified lemniscate arc through a point arbitrarily given in the plane of arrangement of the lemniscate with arbitrary angles of tangent at the beginning and end points of the modeled arc of the modified lemniscate is developed. The method is applied to the calculation of the coordinates of the transition curve, which is arranged between the straight and circular sections of the railway track. The problem is solved provided that the modeled curve is tangent to the straight and circular rails, and at a point of joining have a curvature in it equal to the inverse of the radius of the circle of a circular rail. The results of modulation of a test example of a transition curve of the railway track, which confirmed the efficiency of the proposed method of modification of Bernoulli lemniscate. The proposed lemniscate modification method is implemented as a computer code that allows, in addition to numerical results, to obtain graphical representations of simulated curves on a computer monitor screen.

Key words: *Bernoulli's lemniscate, modification, tangent, curvature, transition curve.*