



TRANSCRIPCIONES

## Principios de construcción de modelos de ecuaciones simultáneas en Econometría

Herman Ole Andreas Wold

Revista de Economía y Estadística, Tercera Época, Vol. 8, No. 1 (1964): 1º Trimestre, pp. 93-144.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3567>



La Revista de Economía y Estadística, se edita desde el año 1939. Es una publicación semestral del Instituto de Economía y Finanzas (IEF), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Valparaíso s/n, Ciudad Universitaria. X5000HRV, Córdoba, Argentina.

Teléfono: 00 - 54 - 351 - 4437300 interno 253.

Contacto: [rev\\_eco\\_estad@eco.unc.edu.ar](mailto:rev_eco_estad@eco.unc.edu.ar)

Dirección web <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/index>

### Cómo citar este documento:

Wold, H. (1964). Principios de construcción de modelos de ecuaciones simultáneas en Econometría. *Revista de Economía y Estadística*, Tercera Época, Vol. 8, No. 1: 1º Trimestre, pp. 93-144.

Disponible en: <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REyE/article/view/3567>

El Portal de Revistas de la Universidad Nacional de Córdoba es un espacio destinado a la difusión de las investigaciones realizadas por los miembros de la Universidad y a los contenidos académicos y culturales desarrollados en las revistas electrónicas de la Universidad Nacional de Córdoba. Considerando que la Ciencia es un recurso público, es que la Universidad ofrece a toda la comunidad, el acceso libre de su producción científica, académica y cultural.

<http://revistas.unc.edu.ar/index.php/index>

TRANSCRIPCIONES

# PRINCIPIOS DE CONSTRUCCION DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTANEAS EN ECONOMETRIA (\*) (\*\*)

## 1. INTRODUCCION

1.0. Se han elegido cuatro grandes categorías de modelos para hacer un breve análisis:

*Los sistemas de cadenas causales puros (CCP)*, también conocidos por sistemas de cadenas causales o recursivos. La formulación es completamente dinámica debido a que no entran en los supuestos básicos relaciones de equilibrio ni otros elementos estáticos.

*Los sistemas interdependientes (ID)*. La formulación es mixta: estática-dinámica.

*Los sistemas de cadenas causales condicionales (CCC)*. Es un enfoque estático dinámico. Este tipo de modelo ha sido ideado como una alternativa de los sistemas ID. Tanto los sistemas CCC como los ID son más generales que los sistemas CCP, pero no siendo completamente dinámicos, marcan una drástica limitación al nivel deseado del análisis explicativo.

---

(\*) Traducción del texto inglés hecha por el Licenciado en Ciencias Económicas Aldo Antonio Dadone, de "ISI - The International Statistical Institute - L'Institut International de Statistique - 32 Session - 30/5 - 9/6 1960 - Tokyo".

(\*\*) AGRADECIMIENTO - Deseo expresar aquí mi más profundo agradecimiento a la gentileza y atención del eminente estadístico y econométrista Prof. Herman Wold de la Universidad de Upsala (Suecia) que accedió con todo desinterés a la traducción y publicación de este trabajo en nuestra Revista; al Bureau del Instituto Internacional de Estadística, su Director E. Lunenberg y al Comité Organizador del 32º Congreso del Instituto Internacional de Esta-

*Los sistemas de insumo-producto (IP)*. Se trata esencialmente de un enfoque estático.

1.1. Los cuatro enfoques involucran una evolución científica de los modelos *determinísticos* a los modelos *estocásticos*, o expresado de otra manera, una transición de las ecuaciones *exactas* a las ecuaciones *con perturbaciones aleatorias* en los sistemas.

La noción clave en nuestro análisis es la *esperanza matemática condicional (EMC)*. El argumento básico es muy sim-

dística celebrado en Tokio en 1960 y a su Presidente del Sub-Comité de Programas Prof. Yuzo Morita, todos ellos por haber accedido con igual desinterés y propósito de amplia colaboración a fin de hacer posible esta publicación.

Este trabajo fue presentado por el Prof. Herman Wold al 32º Congreso del Instituto Internacional de Estadística, por especial invitación del Comité Organizador. Fue publicado en "*Bulletin de L'Institut International de Statistique*", Tome 38, 4e Livraison, pp. 111-136.

Las contribuciones científicas del Prof. H. Wold revelan profundidad, originalidad, vigor y rigor metodológico.

Discípulo del reconocido maestro de la Estadística Prof. Harald Cramér, llamó poderosamente la atención del mundo científico con su penetrante y rigurosa tesis doctoral "A study in the analysis of stationary time series" cuya primera edición fue publicada en 1938. La segunda edición, con un apéndice del Prof. Peter Whittle, se publicó en 1954.

Desde esas fechas las contribuciones científicas del Prof. H. Wold se suceden ininterrumpidamente, tanto en los dominios de la Estadística Matemática como en la Econometría.

En este último dominio, resulta una cita obligada su famoso libro "Demand analysis. A study in Econometrics", en colaboración con L. Jurén, publicado en 1952 y traducido al español en un meritorio esfuerzo del Consejo Superior de Investigaciones Científicas de España. En ella ya realiza un penetrante análisis crítico de los fundamentos metodológicos en la construcción de modelos de ecuaciones simultáneas en Teoría Económica. La década de 1950 es testigo de un formidable debate alrededor de este argumento. Se realiza un esclarecedor estudio comparativo de los modelos con especial referencia a los de ecuaciones interdependientes de Haavelmo y los de cadenas causales de Wold y teniendo presente sus bondades desde el punto de vista de sus supuestos básicos, usos operativos del modelo con fines de análisis teórico y en trabajos de aplicación —con particular énfasis en sus propiedades predictivas—

ple: si suponemos que la ecuación del modelo constituye una EMC sometida a perturbaciones aleatorias, esta hipótesis suministra (1) las bases racionales para el uso operativo de la ecuación en trabajos teóricos y aplicados, y (2) las bases racio-

y métodos de estimación de parámetros.

Las contribuciones del Prof. H. Wold a este debate continúan hasta la fecha con singular brillo y talento científico.

En efecto, a la bibliografía que se da al final de su estudio corresponde agregar los siguientes trabajos sobre este tema, publicados con posterioridad:

1. A triptych on Causal Systems:
  - I. Recursive vs. Nonrecursive systems by Robert H. Strotz y H. O. A. Wold;
  - II. Interdependence as a specification error by Robert H. Strotz;
  - III. A generalization of Causal Chain Models by H.O.A. Wold, publicado en *Econometría*, Vol. 28, Nº 2, 1960 pp. 417-463;
2. H. Wold (1960): Unbiased predictors Proc. Fourth Berkeley Symp. Stat. Prob., Vol. 1, Berkeley University of California Press, pp. 719-761.
3. H. Wold (1963): Forecasting by the chain principle. In *Time series analysis symposium*, ed. M. Rosenblatt, pp. 471-497. John Wiley and Sons. New York.
4. Robinson E. and H. Wold (1965): Minimum delay structure of least-squares/co-ipso predicting systems for stationary stochastic processes. In *Time series analysis symposium*, ed. M. Rosenblatt, pp. 192-196. John Wiley and Sons. New York.
5. Gadd, A. and H. Wold (1964): The Janus Coefficient: A measure for the accuracy of prediction in *Econometric model building: The causal chain approach*, ed. H. Wold. North Holland Publishing Co. Amsterdam.
6. H. Wold: On the consistency of least squares prediction. *Sankhya Silver Jubille Volume* (En imprenta).
7. Basmann, R.: A review of some basic considerations in econometric model Building. *Econometrica*. (En imprenta).
8. Strotz, R. and H. Wold: Reply to the previous paper by Professor R. Basman. *Econometrica*. (En imprenta).
9. Wold, H.: The approach of model building and the possibilities of its utilization in the human sciences. *Trasactions des Monaco entretiens*. (En imprenta).
10. Wold, H.: Towards a verdict on macroeconomic simultaneous equations. Study week of the Pontifical Academy of Sciences, 7th-14th. October 1963.

DR. CAMILO DAGUM  
Decano de la Facultad de  
Ciencias Económicas

nales para estimar sus parámetros por el clásico método de mínimos cuadrados.

Por el uso sistemático de este argumento obtenemos una visión unificada de los principios de construcción de los cuatro tipos de modelos. Para cada modelo resumimos: (0) sus supuestos básicos, (1) su uso operativo, y (2) los métodos estadísticos de estimación de parámetros. En la introducción, Sec. 2, el mismo argumento es aplicado al caso especial de los modelos uni-ecuacionales. Este análisis se vincula al problema de "la elección de la regresión" que en las décadas de los años 1920 y 1930 fue muy discutido en la formulación econométrica del análisis de la demanda.

1.2. El material revisado, estando disperso en amplias áreas, no pretende constituir un estudio completo.

El material analizado está seleccionado y ordenado con el objeto de elucidar los alcances y las limitaciones de los distintos tipos de modelos. El énfasis no está puesto en las consideraciones básicas de la construcción de modelos. Destacaremos los siguientes puntos:

(i) Las aplicaciones potenciales de los tres primeros modelos no están limitadas a la econometría; son de aplicación general en las ciencias socio-económicas y, en forma más general aún, en el amplio dominio del análisis de los datos no experimentales. Si comparamos con otras áreas socio-económicas, los modelos econométricos están más articulados en la especificación de las hipótesis, y son más generales y avanzados en la construcción formal.

(ii) Los modelos son genuinas innovaciones en el amplio dominio de los modelos científicos. Por esto, aun cuando las ciencias socio-económicas en su conjunto están menos desarrolladas que las ciencias naturales, el área que analizamos es una notable excepción a la regla general que afirma que en lo fundamental, la construcción de modelos de las teorías socio-econó-

micas siguen los moldes que en principio ya están establecidos en las ciencias naturales. Las características innovadoras de los modelos en discusión residen en el tratamiento de sus problemas sobre la *reversibilidad de las ecuaciones*.

Aquí se encuentran también las profundas y características diferencias entre los cuatro sistemas. Los modelos han sido muy debatidos como es natural en vista de las nuevas características de los mismos y las profundas diferencias de los enfoques.

(iii) El desiderátum general en la construcción de modelos es hacer un uso operativo de dos tipos de ecuaciones, a saber: (a) las ecuaciones de conducta que constituyen el total o parte del sistema en su forma *estructural*, y (b) las ecuaciones (generalmente dinámicas) del sistema en su forma *reducida*. Los dos requisitos son cumplidos por los sistemas CCP, y también por los sistemas donde todas las ecuaciones se suponen exactas, como es el caso, para las especificaciones acostumbradas, de los sistemas IP. En general, los dos requisitos están en conflicto irrevocable, y esto produce la separación de los caminos entre los sistemas CCC y los sistemas ID. Los sistemas CCC están especificados a fin de hacer un uso operativo de ecuaciones (a), mientras que los sistemas ID hacen uso de las ecuaciones (b).

(iv) La elección entre los sistemas CCC y los sistemas ID no es una cuestión de representatividad de la muestra observada, ni de diferencias en la estimación estadística de los parámetros. Esto está ilustrado por un caso especial donde un sistema CCC y un sistema ID define un mismo proceso estocástico, y los dos modelos por lo tanto dan precisamente la misma bondad de ajustamiento a la muestra observada. En principio, una comparación de tales modelos puede ser llevada a cabo en una situación hipotética —fuera de la muestra observada—

cuando todas las perturbaciones (estocásticas) cesan de presentarse desde un determinado momento.

(v) La elección entre los sistemas CCC y los sistemas IP es una cuestión que depende del uso operativo que se vaya a hacer de los modelos. En lo referente a fundamento, los dos enfoques son más bien complementarios que competitivos.

(vi) Una vez que un modelo está especificado con respecto a su estructura teórica y a su uso operativo, el problema estadístico de la estimación de parámetros es una cuestión técnica, y por lo tanto, en principio, un tema no sujeto a controversias.

1.3. El análisis econométrico en términos de modelos de ecuaciones simultáneas es un enfoque relativamente nuevo. Esto es así en particular con respecto a sus aplicaciones. El trabajo aplicado, aunque relativamente voluminoso, está aún en sus comienzos.

El trabajo aplicado con sistemas de ecuaciones simultáneas no está comprendido en este análisis. Solamente en cada introducción se considerarán brevemente algunas de las características de los campos de aplicación, con fines de información básica. También, el trabajo aplicado es citado solamente con fines ilustrativos y sin pretender evaluarlos.

Son de especial interés en la parte aplicada los grandes proyectos de construcción de modelos macroeconómicos, realizados por equipos de trabajo con presupuestos comparables a los grandes y costosos proyectos en las ciencias naturales. Después del trabajo de Tinbergen con los sistemas CCP en la década de 1930, el escenario ha sido dominado hasta hace poco por los sistemas IP y los sistemas ID. Estos esfuerzos pioneros han sido provechosos e importantes en varios aspectos, pero cuando llega el momento de predecir resultados de tangible relevancia práctica se ha extraído relativamente poco de estos grandes proyectos. Esta afirmación no debe entenderse como



una crítica; por el contrario, es deseable que las innovaciones teóricas estén probadas en la práctica por vía de trabajos aplicados en escala apropiada. Lo que quiero destacar es la urgente necesidad de evaluaciones comparativas sistemáticas de los resultados publicados, con miras a obtener en el futuro una mejor guía para investigaciones teóricas y aplicadas. La importancia de una eficiente distribución de los recursos disponibles para trabajos aplicados con modelos macroeconómicos está reforzada por el hecho que gran parte de los costos son insumidos por la compilación previa de datos estadísticos, y que los diferentes modelos hacen uso de relativamente distintos tipos de datos; al decir esto estoy pensando en el conflicto que en cierto modo existe entre los requisitos de los sistemas CCP y los IP.

Los recientes desarrollos dentro del área de los sistemas CCP son muy interesantes, siendo de destacar los progresos concretos en el uso de tales modelos como instrumentos para predicciones macroeconómicas de corto plazo. No es ésta la oportunidad de entrar en una evaluación de los resultados obtenidos hasta ahora en los trabajos de aplicación con modelos de ecuaciones simultáneas, pero haremos brevemente algunos comentarios para subrayar que en tal evaluación, lo relevante no es solamente la propiedad general de los distintos tipos de modelos, sino también los diferentes grados en que los recursos potenciales del material teórico y empírico han sido explotados en la construcción de modelos.

(i) Los promisorios resultados de los recientes trabajos aplicados con los sistemas CCP son parcialmente —y en una gran medida— una cuestión que no tiene nada que ver con la elección entre los sistemas CCP y los otros tipos de modelos. Así, en los modelos macroeconómicos de predicción anteriormente mencionados es una característica importante el hecho que trabajen con: (a) series cronológicas trimestrales, y (b) con estadísticas sobre órdenes de compras e inventarios. Especial-

mente esto último abre posibilidades que no están todavía explotadas en otros tipos de modelos. Además se hace referencia a mejoramientos *ad hoc* de naturaleza teórica, tal como una selección más adecuada de las variables explicativas en las ecuaciones de comportamiento.

(ii) En segundo lugar, los promisorios resultados, otorgan en parte, ventajas a los sistemas CCP. Con referencia a 1.2 (iii), el punto principal es quizás, que los sistemas CCP son más flexibles, en los usos operativos, que los sistemas CCC o los sistemas ID, por cuanto los sistemas CCP pueden ser usados para inferencias causales y de predicción, tanto en su forma original como en la reducida.

Los sistemas ID, como ilustramos en la sección 6.1, frecuentemente dan valores, para los parámetros estimados, marcadamente superiores comparados con los que se obtienen para los sistemas CCP y CCC. Esta característica, sin embargo, no nos da una guía que nos explique cómo es que los sistemas ID han dado hasta ahora pobres predicciones en las aplicaciones, donde el uso operativo de los sistemas ID está basado en su forma reducida, no en sus ecuaciones originales. Un argumento más importante es que el paso a la forma reducida usualmente lleva a ecuaciones con muchas variables explicativas, y esto da lugar a colinealidades, problemas de identificación, y consiguientes dificultades en la estimación de parámetros.

Las dificultades recién mencionadas para el sistema ID no se presentan en los sistemas CCC. Esto sin embargo no significa que en los sistemas CCC, un modelo ideado con propósitos de análisis estático-dinámico ofrezca un enfoque enteramente satisfactorio. Así, (ver Advertencia 6.12) los sistemas CCC están en la zona de peligro donde se pueden cometer considerables errores de especificación para el caso típico cuando las hipótesis del enfoque mixto incluyen una ecuación de equilibrio instantáneo. Al mismo tiempo, sin embargo, este ejemplo nos

muestra que el error de especificación surge de los mismos supuestos de equilibrio instantáneo, y no de la formulación específica de los sistemas CCC. Por otra parte, a juzgar por los Ejemplos 5.11-12, los sistemas CCC son usados a menudo en la construcción de modelos esencialmente estáticos.

En lo tocante al sistema IP por último, no es correcto comparar los resultados de sus predicciones con aquéllos de los sistemas CCP. Con su esquema rígido de coeficientes técnicos y no tomando en cuenta la dimensión tiempo, el sistema IP es un enfoque estático y primariamente descriptivo. Cuando se lo usa con fines de predicción, aunque no es un modelo acurado, sin embargo puede ser atractivo como un simple y tosco recurso aproximado.

1.4. Este artículo es principalmente expositivo. Su contribución consistiría en parte en el ordenamiento del material analizado, y en parte en los pasajes siguientes: Algunos fundamentos (principios) formales en la Sec. 5.1; la interpretación en los Ejemplos 5.11-12 de los modelos (4.8) y (5.9) como sistemas CCC; el enunciado explícito del procedimiento (5.21); el análisis en la Advertencia 6.12 de la diferencia entre las estimaciones de la elasticidad de la demanda dadas por la ecuación CCP (6.2) y la ecuación CCC (6.4); la generalización de los sistemas IP (7.1) por el enfoque de los sistemas CCC.

Agradezco al Econometric Institute, Inc., de Nueva York, su presidente Sr. Peter W. Hoguet y su director de investigaciones Dr. Colin Clark por permitirme informar acerca del modelo macroeconómico de predicción del Instituto (Ref. 9) y por poner a mi disposición material no publicado acerca del modelo. El Sr. G. Stojkovic ha puesto amablemente a mi disposición material no publicado (Ref. 37). Por sus críticas constructivas agradezco al círculo de amigos y asociados, incluyendo

a los señores R. Bentzel, E. Lyttkens, G. Stojkovic y S. Thore, quienes han leído el manuscrito en un primer borrador. Tomo la responsabilidad exclusiva por las limitaciones que contenga este artículo.

## 2. MODELOS UNIECUACIONALES COMO MATERIAL DE CONSTRUCCION PARA LOS MODELOS EXPLICATIVOS (1)

### 2.0. *Introducción*

La transición de las ecuaciones exactas a las ecuaciones con perturbaciones aleatorias en la construcción de modelos descriptivos, es en parte una cuestión muy simple. En parte es una generalización que involucra problemas que requieren cuidadosa atención, como es atestiguado por el famoso peligro latente en "la elección de la regresión". En esta introducción la racionalidad de la inferencia explicativa a partir de modelos uniecuacionales será brevemente analizada. El énfasis se pondrá en los procedimientos de fundamental relevancia, tanto en los modelos uni-ecuacionales como en los multi-ecuacionales.

Siendo el argumento de alcance general, será suficiente considerar el caso de una sola variable explicativa. Sea:

$$(1 \text{ a-b}) \quad y = \alpha + \beta x ; \quad y = \alpha + \beta x + v$$

para ecuaciones exactas y con perturbaciones aleatorias, respectivamente. La referencia se hace a fin de distinguir entre: (a) errores en las variables, y (b) errores en las ecuaciones.

(a) Modelos que contienen *errores en las variables*. Si escribimos:

(1) El problema central de esta sección, tomado de las Refs. 57-58, es tomar los supuestos de tipo (5)-(6) como base para el razonamiento de: (a) el uso operativo de las ecuaciones explicativas, y (b) la estimación estadística de sus parámetros. También, el material es bien conocido tras más de 50 años de debate sobre "la elección de la regresión"; véase Refs. 34, 30, 14, 61, 12, 10, 13, 50, 21, 60, 55.

$$(2 \text{ a-c}) \quad x = x^* + v_1 ; y = y^* + v_2 ; y^* = \alpha + \beta x^*$$

el supuesto básico de este enfoque es que las variables sin errores  $x^*$ ,  $y^*$  satisfacen una ecuación exacta (2 c).

(b) *Modelos con errores en las ecuaciones:*

(b<sub>1</sub>) *La especificación de Gauss-Fisher.* La ecuación (1 b) se refiere aquí a observaciones no estocásticas de la variable  $x$ , y la perturbación  $v$  se supone que es una variable aleatoria con esperanza matemática igual a cero para todo  $x$ . En el caso más simple se supone que  $v$  tiene la misma distribución normal para todo  $x$ .

(b<sub>2</sub>) *La especificación de Galton-Yule.* Las variables  $x$  e  $y$  de (1 b) se supone que tienen una distribución de probabilidad conjunta tal que  $v$ , para todo  $x$ , tiene esperanza matemática (EM) igual a cero. En el caso más simple la distribución conjunta es normal.

Todos los sistemas considerados en este artículo son del tipo de (b<sub>2</sub>). Los modelos sometidos a análisis están, de este modo, proyectados para situaciones donde los errores de observación son pequeños en relación a las perturbaciones en las ecuaciones. La experiencia demuestra que éste es, a menudo, el caso en Econometría. En el caso (b), los enfoques (b<sub>1</sub>) y (b<sub>2</sub>) tienen mucho en común, y esto está acentuado por la adopción de especificación para modelos uni-ecuacionales que cubre las características básicas de ambos tipos de modelos.

### 2.1. *Procedimientos básicos de inferencia.*

En el uso operativo de ecuaciones con perturbaciones aleatorias, los dos procedimientos siguientes son de fundamental relevancia.

PROCEDIMIENTO 2.10: *Inferencia predictiva.* Considerando la ecuación (1 b), se suponen conocidas  $x$  e  $y$ . Entonces el procedimiento es calcular  $y$  de (1 a) omitiendo la perturbación.

Seguidamente consideraremos la situación cuando (1 b) es un modelo de series cronológicas y  $x$  es el valor con rezago de  $y$ .

PROCEDIMIENTO 2.11: *Inferencia sustitutiva*. Considerando el modelo de series cronológicas:

$$(3) \quad y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + v_t$$

suponemos conocido el valor de  $y_{t-2}$  mientras  $y_t$ , e  $y_{t-1}$  son desconocidos. Entonces el procedimiento es calcular  $y_t$  de:

$$(4) \quad y_t = \alpha + \alpha \beta + \beta^2 \cdot y_{t-2}$$

haciendo uso recursivo de (3) y omitiendo las perturbaciones.

2.2. *Fundamentos racionales de los procedimientos* 2.10-11.

Considerando primero el Procedimiento 2.10 adoptamos:

SUPUESTO 2.20. *En el modelo (1 b) la EMC de  $y$ , dada  $x$ , es:*

$$(5) \quad E(y | x) = \alpha + \beta x$$

En el Supuesto 2.20, el Procedimiento 2.10 tiene un fundamento racional obvio: da el valor *esperado* (o *promedio*) de  $y$  para  $x$  conocido.

Volviendo al Procedimiento 2.11, veremos que la situación es similar.

SUPUESTO 2.21. *En el modelo (3) la EMC de  $y_t$  para  $y_{t-1}$  conocido, está dada por:*

$$(6) \quad E(y_t | y_{t-1}) = \alpha + \beta y_{t-1}$$

*Por lo tanto, el residuo  $v_t$ , es independiente de  $y_{t-1}$  e  $y_{t-2}$ .*

Por (6), el Procedimiento 2.10 se aplica a (3) y da el valor esperado de  $y_t$  para  $y_{t-1}$  conocido. Luego, sustituyendo  $y_{t-1}$  obtenemos (4), y gracias a la última parte del Supuesto 2.21 la expresión (4) da el valor esperado de  $y_t$  para  $y_{t-2}$  conocido.

ADVERTENCIA 2.20. Resumiendo, el Procedimiento 2.10-11 tiene un claro fundamento racional como operaciones con las

EMC. Tratando a (1 b) y (3) como si fueran ecuaciones exactas, el procedimiento da valores *esperados* (o *promedios*) de  $y$ , no valores exactos, para valores conocidos de  $x$  e  $y_{t-2}$ , respectivamente.

ADVERTENCIA 2.21. Alternativamente, el fundamento del Procedimiento 2.10-11 puede ser formulado como sigue: Suponiendo que  $x$  está sometido a cambios conocidos, mientras aquellos factores no especificados que están resumidos en la perturbación  $v$  permanezcan constantes, entonces el cambio sobreviniente en  $y$  puede ser *exactamente* calculado de (1 a).

ADVERTENCIA 2.22. (2) En las dos advertencias anteriores, el fundamento de la inferencia desde ecuaciones con perturbaciones se estableció en dos formas diferentes. Ambos argumentos pueden ser considerados como una formulación más precisa de la cláusula *ceteris paribus* que es el recurso acostumbrado para este propósito. El argumento de la Advertencia 2.20 involucra un supuesto *ceteris paribus*, ya que los Procedimientos 2.10-11 en la práctica se aplican fuera de la muestra observada, siendo el supuesto subyacente que las perturbaciones tengan la misma distribución que en la muestra. El supuesto *ceteris paribus* adoptado en la Advertencia 2.21 requiere mucho más, porque mientras la muestra observada involucra perturbaciones, los procedimientos son aplicados a situaciones donde las perturbaciones se supone que no se presentan: situaciones hipotéticas donde las ecuaciones pueden ser tratadas como si fueran exactas.

Si la cláusula *ceteris paribus* de las Advertencias 2.20-21 se simbolizan respectivamente con A y B, repetimos que la cláusula A es mucho más general que la B. Es también claro que la cláusula B es de objetable relevancia debido a su naturaleza hipotética. En el área analizada, la separación de los caminos se presenta en los modelos uni y multi-ecuacionales.

(2) Para el mismo argumento, véase también Ref. 58, Sec. 6. 2.

Las cláusulas *ceteris paribus* a menudo no están presentadas en un estilo bien articulado, pero frecuentemente se desprende del contexto que la cláusula es del tipo A. En algunos casos el uso operativo de ecuaciones con perturbaciones corresponde a una cláusula del tipo B. Los Procedimientos 2.10-11 no son típicos en este último aspecto; la cláusula B entra a jugar en los procedimientos operativos donde las variables están tratadas de una manera simétrica, en especial: (a) por reversión de ecuaciones, y (b) por resolución de un sistema de ecuaciones implícitas.

En este análisis, se pondrá énfasis sobre la cláusula *ceteris paribus* A. Este recurso nos ayudará a obtener una visión de conjunto de la transición de las ecuaciones exactas a las ecuaciones con perturbaciones, en la construcción de modelos econométricos. Desde este punto de vista, las aplicaciones de la cláusula B aparecerán como reminiscencias fuera de lugar en operaciones con ecuaciones exactas.

### 2.3. Inferencia causal <sup>(3)</sup>

En la literatura sobre modelos econométricos, los conceptos causales han jugado una parte polémica. Es cierto que hay diferencias entre los modelos al nivel básico de las hipótesis causales, pero la separación de los caminos descansa en un nivel aún más profundo, especialmente en la especificación de los modelos en términos de EMC y en las correspondientes propiedades operativas de los modelos. Por ello sería posible considerar el siguiente examen como un tratamiento puramente matemático, con los argumentos claves expuestos, repito, en términos de EMC. De todos modos servirá a nuestros fines de

(3) Para una discusión de los conceptos causales desde el punto de vista de una teoría general del conocimiento, véase Refs. 56, 59. Para el uso de la terminología causal en los sistemas CCP y CCC véase Refs. 45, 60, 53; para el uso en los sistemas ID véase Refs. 36, 3, 39.



vincular la terminología causal de los sistemas CCP y CCC, aunque tan sólo fuera para mostrar que esta terminología está de acuerdo con el sentido comúnmente usado de los conceptos causales.

DEFINICIÓN 2 30. La ecuación (1 a) se llama una *ecuación causal* si expresa la hipótesis que cuando  $x$  cambia, entonces (1 a) muestra los cambios resultantes en  $y$ . La definición se extiende a las ecuaciones con perturbaciones, por ejemplo (1 b) y (3), siendo entonces la hipótesis que las ecuaciones sin perturbaciones dan el cambio *promedio* o *esperado* en  $y$ .

Cuando querramos destacar (1 a-b) y (3) como ecuaciones causales, serán escritas:

$$(7 \text{ a-c}) \quad y \leftarrow \alpha + \beta x ; \quad y \leftarrow \alpha + \beta x + v ; \quad y_t \leftarrow \alpha + \beta y_{t-1} + v$$

Cuando tratemos con las ecuaciones causales (7), la inferencia en los Procedimientos 2.10-11 pueden ser especificados en términos causales. Distinguimos:

PROCEDIMIENTO 2.30: *Inferencia causal*. Considerando la ecuación (7 b), el procedimiento es aplicar (5) para calcular el efecto (esperado)  $y$ , cuando la causa  $x$  es conocida.

La hipótesis causal (7) en general no informa qué sucederá con  $x$  si hay un cambio en  $y$ . Así, en la situación (7 a) podemos o no tener:

$$(8) \quad x \leftarrow \frac{1}{\beta} (y - \alpha)$$

Si tenemos tanto (7 a) como (8), las dos ecuaciones se llaman *causalmente reversibles*. Si definimos el sistema (3.4) sin perturbaciones, la ecuación (3.4 c) es un ejemplo de una ecuación causal exacta que no es causalmente reversible.

#### 2.4. *Inferencia inversa*.

Desde los comienzos de la teoría de la correlación es bien conocido que las ecuaciones de regresión y las EMC no son

reversibles en el mismo sentido como ecuaciones exactas. Enunciamos este simple hecho como

TEOREMA 2.40. *Las EMC son reversibles solamente en el caso especial de ecuaciones exactas (no estocásticas).* Es decir:

$$(9) \quad x = \frac{1}{\beta} (y - \alpha) + v^*$$

con

$$(10) \quad E(x | y) = \frac{1}{\beta} (y - \alpha)$$

Los supuestos (1 b) y (5) son compatibles con (9) — (10) si, y solamente si:

$$(11) \quad v \equiv v^* \equiv 0 \text{ (es decir, prob } (v = v^* = 0) = 1).$$

Después de la detallada exposición de la Sección 2.1-3 y el Teorema 2.40, el siguiente procedimiento necesita poco o ningún comentario.

PROCEDIMIENTO 2.40: *La inversión de ecuaciones exactas.* Considerando la ecuación (1 a), supongamos  $y = y_0$  conocido, y  $x$  desconocido. Entonces el procedimiento es calcular  $x$  a partir de la ecuación inversa:

$$(12) \quad x = \frac{1}{\beta} (y_0 - \alpha)$$

PROCEDIMIENTO 2.41: *Inversa de las ecuaciones con perturbaciones.* Considerando la ecuación (1 b), supongamos  $y = y_0$  conocida y  $x$  desconocida. Luego, el procedimiento consiste en usar (12) para calcular el valor  $x$  para el cual el valor esperado de  $y$  es  $y_0$ .

Volviendo a la inversa de las ecuaciones causales podemos distinguir entre la *dirección de la inferencia causal* y la *dirección de la influencia causal*. Se observará que el Procedimiento 2.42 se aplica tanto a las ecuaciones exactas como a las

## CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

ecuaciones con perturbaciones, mientras que el Procedimiento 2.43 se aplica solamente a ecuaciones exactas.

**PROCEDIMIENTO 2.42:** *Inversión de la dirección de la inferencia causal.* Considerando la ecuación (7 b), se supone la variable efecto  $y = y_0$  conocida y la variable causa  $x$  desconocida. Luego, el procedimiento es usar (12) para calcular el valor  $x$  de la variable causa para el cual el efecto *esperado* es  $y = y_0$ .

**PROCEDIMIENTO 2.43:** *Inversión de la dirección de la influencia causal.* Considerando la ecuación (7 a), se supone que (7 a) es causalmente reversible en el sentido de (8). Luego el procedimiento es considerar  $x$  como efecto e  $y$  como causa, y usar (12) para calcular el efecto incógnita  $x$  a partir de una causa conocida  $y = y_0$ .

### 2.5. Estimación estadística de parámetros.

Primeramente se hace referencia a la observación general 1.2 (vi).

**ADVERTENCIA 2.50.** Los procedimientos operativos tales como los considerados en la Sección 2.1-4 son los mismos en aplicaciones teóricas y empíricas. Por lo tanto las notaciones en 2.1-4 pueden ser tomadas tanto para referirse a conceptos teóricos como empíricos, de acuerdo al contenido.

En esta subsección las notaciones dadas en 2.1-4 pueden ser tomadas para referirse a conceptos teóricos. Para ecuaciones como la (1 b) y (3) estimadas empíricamente, escribimos:

$$(13 \text{ a-b}) \quad y = a + b x + v ; y_t = a + b y_{t-1} + v_t$$

Consideraremos (13 a) y (13 b) como la regresión de  $y$  sobre  $x$  estimada por mínimos cuadrados. En consecuencia, con los símbolos habituales, los parámetros de (13 a) son:

$$(14 \text{ a-b}) \quad b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} = \frac{\sum (x - \bar{x})y}{\sum (x - \bar{x})^2} ; a = \bar{y} - b \bar{x}$$

y de la misma forma para (13 b).

TEOREMA 2.50. *Bajo condiciones muy generales, las estimaciones mínimo cuadráticas (14) tenderán, para grandes muestras, a los parámetros teóricos, es decir:*

$$(15 \text{ a-b}) \quad \text{prob. lim } a = \alpha \quad ; \quad \text{prob. lim } b = \beta$$

Considerando brevemente una comprobación que comprende tanto (13 a) como (13 b), consideraremos (13 a), y avanzaremos en dos etapas:

(i) La ecuación (1 b) es, en el Supuesto 2.20 la regresión mínimo cuadrática teórica de  $y$  sobre  $x$ . Por lo tanto  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser expresadas en términos de los momentos teóricos de los dos primeros órdenes. Esto da  $\beta$  como la razón covarianza-varianza teóricas

$$(16) \quad \beta = \mu_{xy} \mid \mu_{xx}$$

(ii) Los momentos observados de primero y segundo orden, bajo condiciones generales, tenderán a los correspondientes momentos teóricos. En particular,  $\text{cov}(x, y)$  y  $\text{var}(x)$  tendrán  $\mu_{xy}$  y  $\mu_{xx}$  como límites estocásticos.

ADVERTENCIA 2.51. El Supuesto 2.20 implica que la perturbación  $v$  de (1 b) tiene media cero y covarianza con  $x$  también igual a cero,

$$(17 \text{ a-b}) \quad E[v] = 0 \quad ; \quad E[v \cdot x] = 0$$

En el tratamiento de ecuaciones con perturbaciones es costumbre adoptar supuestos del tipo (17 a-b) en las especificaciones básicas. En cambio tomando (5) como supuesto básico, establecemos inmediatamente: (a) el fundamento del Procedimiento 2.10, y (b) la ecuación clave (16) en los argumentos (i) — (ii).

Cae fuera del propósito de este artículo considerar los errores standards de las estimaciones (14) o los problemas con-  
siguientes de docimasia de hipótesis.

## 3. SISTEMAS DE CADENAS CAUSALES PUROS (CCP) (1)

3.0. *Introducción.*

Cuando Jan Tinbergen, en la década 1930-40 construyó su sistema macroeconómico CCP para los Países Bajos (1937), Estados Unidos (1939) y el Reino Unido (1951), su enfoque pionero trajo consigo varias líneas de desarrollo científico en una síntesis constructiva: Teoría económica (teorías de los ciclos económicos; análisis por períodos; varios modelos dinámicos en la forma de sistemas de ecuaciones simultáneas), análisis matemático (tratamiento de sistemas dinámicos como ecuaciones en diferencias, ordinarias o estocásticas), y métodos estadísticos (estimación de parámetros; docimasia de hipótesis). Lo que sobre todo ha sido reconocido como un jalón en el enfoque de Tinbergen, es la sistemática coordinación del material teórico y empírico en la construcción de modelos dinámicos.

La intuición selectiva de Tinbergen en la formulación de los principios de construcción de sus modelos dinámicos está más allá de todo elogio. Y hasta cierto punto los fundamentos de su enfoque fueron literalmente intuitivos, como cuando hizo uso de la regresión por mínimos cuadrados para la estimación de parámetros.

Los modelos de Tinbergen fueron de gran empeño, sistemas con más de cincuenta ecuaciones y unas setenta variables. Por un momento estuvieron solos en el campo; habían transcurrido más de veinte años antes de que se publicaran nuevamente trabajos empíricos con los sistemas CCP. En el intervalo, los fundamentos de estimación de parámetros del sistema CCP por cuadrados mínimos han sido establecidos sobre una base

(1) Las referencias básicas son Tinbergen (1939-1940). La presente exposición, siguiendo las Refs. 54, 56-57, destaca la concepción de los modelos desde el punto de vista de su uso operativo.

de máxima verosimilitud (ver Sec. 3.3). Además los fundamentos del enfoque han sido fortalecidos por estudios teóricos<sup>(2)</sup>. Estos han establecido, por una parte el alcance general de los sistemas CCP para propósitos de análisis dinámico, y por la otra, los fundamentos del procedimiento operativo para inferencia a partir de los sistemas CCP en trabajos teóricos y aplicados. En años recientes el interés general en el enfoque ha aumentado. Han sido publicados resultados de relevancia práctica<sup>(3)</sup>.

### 3.1. Rasgos característicos del enfoque

Considerando un sistema CCP de forma lineal generalizado, escribiremos:

$$(1) \quad y_i(t) = L_i(y, x) + v_i(t) \quad i = 1, \dots, n$$

usando la siguiente notación (que utilizaremos en los modelos subsiguientes):

El sistema involucra  $n$  ecuaciones.

Todas las variables están dadas como series cronológicas, como en (2.3) (los períodos de tiempo, ahora indicados entre paréntesis algunas veces se omitirán);

$y_1, \dots, y_n$  son las variables *endógenas* que el modelo se propone explicar; las variables  $x_1, \dots, x_m$  son *exógenas*, y representan influencias externas.

En el caso especial de  $v_i(t) \equiv 0$  la ecuación para  $Y_i(t)$  es una ecuación exacta. De otra manera las  $v_i(t)$  son residuos estocásticos.

(2) Véase la Ref. 3, donde la base económica racional de los sistemas CCP vs. ID está explorada, y las Refs. 51-52, 60, 54, donde el énfasis se pone sobre los aspectos estocásticos de la construcción del modelo.

(3) Como se comentó más arriba en la sección 1.3. se han registrado promisorios resultados en las predicciones de un modelo macroeconómico recientemente construido, Ref. 9, una ingeniosa concepción híbrida entre el sistema ID y CCP con 85 ecuaciones. Véase también la siguiente nota.

## CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Los siguientes supuestos básicos son característicos para los sistemas CCP:

**SUPUESTO 3.10.** El sistema (1) explica las variables endógenas por medio de las EMC. En símbolos:

$$(2) \quad E[y_i(t) | y, x] = L_i(y, x) \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $L_i$  es una forma lineal de tipo:

$$(3) \quad L_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} y_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \gamma_{ijk} y_j(t-k) + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^r \theta_{ijk} x_j(t-k)$$

o literalmente: las variables explicativas  $x$  e  $y$  de la variable endógena  $y_i(t)$  pueden incluir:

- (a) Las variables endógenas  $y_1(t), \dots, y_{i-1}(t)$ .
- (b) Cualquier valor rezagado  $y_j(t-k)$  de cualquier variable endógena.
- (c) Cualquier valor rezagado o no  $x_j(t-k)$  de cualquier variable exógena.

**SUPUESTO 3.11.** El residuo  $v_i(t)$  es independiente de las variables  $x$  e  $y$  que entran en  $L_i(y, x)$  así también como de aquellas variables  $x$  e  $y$  que entran en esta ecuación cuando una o más variables endógenas rezagadas o no son eliminadas de  $L_i(y, x)$  por medio de sustituciones, haciendo uso recursivo de las ecuaciones (1).

**ADVERTENCIA 3.10.** Como en (2.17), el Supuesto 3.10 implica:

(i) Para cada  $i$ , el residuo  $v_i(t)$  no está correlacionado con las variables  $x$  e  $y$  que constituyen la forma lineal  $L_i(y, x)$ .

Del mismo modo, el Supuesto 3.11 implica:

(ii) Todos los residuos  $v_i(t)$  con o sin rezago, están mutuamente no correlacionados.

Inversamente, si todas las distribuciones conjuntas son normales, (i) es equivalente al Supuesto 3.10. Por lo tanto (i) — (ii) pueden ser consideradas como versiones aproximadas de los Supuestos más rigurosos 3.10-11.

### 3.1.1. Interpretación causal.

Las ecuaciones de los sistemas CCP permiten una interpretación causal en el sentido de la Definición 2.30.

Las ecuaciones de los sistemas CCP, en general, son ideadas como ecuaciones de comportamiento para cada una de las unidades de decisión. Debido a la interpretación causal de las ecuaciones (2), al comportamiento de la *i*-ésima unidad de decisión puede dársele una interpretación del tipo de estímulo respuesta, con  $y_1(t)$  como variables respuesta (efecto) y las variables  $x$  e  $y$  del segundo miembro, como factores estímulos (causas).

EJEMPLO 3.10. Para ilustrar el enfoque de los sistemas CCP, citaremos el siguiente modelo simplificado de oferta y demanda para un mercado de libre competencia (4):

$$\begin{aligned} s(t) &= \alpha_1 + \beta_1 p(t-1) + v_1(t) \\ (4 \text{ a-c}) \quad p(t) &= p(t-1) + \gamma [d(t-1) - s(t)] + v_2(t) \\ d(t) &= \alpha_2 - \beta_2 p(t) + v_3(t) \end{aligned}$$

En el orden dado, las tres ecuaciones del sistema son: una ecuación de oferta, un mecanismo de precio y una ecuación de demanda. Las tres ecuaciones son ecuaciones de comportamiento; las unidades de decisión son, respectivamente, los productores, los intermediarios y los consumidores.

(4) Véase Ref. 57, Sec. 2.4, y, para un sistema CCP levemente diferente, Refs. 51, 60 p. 15, 54. Además el mecanismo de precio (4 b) es muy simple, y casi como un simple mecanismo ha dado buenos ajustamientos en trabajos aplicados (el mercado estadounidense de sandías, Ref. 56). El Sr. G. Stojkovic, Ref. 37, me informó que el mismo simple mecanismo está trabajando bien para varios otros bienes.



3.1.2. *La forma reducida*

Si consideramos a (1) como un sistema de ecuaciones implícitas para las variables endógenas  $y_i(t)$ , y lo resolvemos con respecto a ellas, obtenemos lo que es conocido como la *forma reducida* del sistema. La forma reducida puede ser expresada así:

$$(5) \quad y_i(t) = R_i(y, x) + w_i(t) \quad i = 1, \dots, n$$

$$(6) \quad R_i = \alpha^*_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \gamma^*_{ijk} y_j(t-k) + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^s \theta^*_{ijk} x_j(t-k)$$

donde el residuo  $w_i(t)$  es lineal en  $v_1(t), \dots, v_i(t)$ , es decir

$$(7) \quad w_i(t) = \sum_{j=1}^i \lambda_{ij} v_j(t)$$

Los Supuestos 3.10-11 implican:

$$(8) \quad E[y_i(t) | y, x] = R_i(y, x)$$

y análogamente para la Advertencia 3.10:

(i\*) El residuo  $w_i(t)$  no está correlacionado con las variables  $y, x$  que constituyen la forma  $R_i(y, x)$ ;

(ii\*) Los residuos  $w_i(t), w_j(t-k)$ , que se refieren a diferentes momentos del tiempo están mutuamente no correlacionados.

Para dar un ejemplo de sustituciones iteradas en el sistema (4) deducimos la siguiente ecuación en diferencias finitas para  $p(t)$

$$(10) \quad p(t) = \gamma \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) + (1 - \gamma \beta_1 - \gamma \beta_2) p(t-1) + w(t)$$

donde

$$(11) \quad w(t) = v_2(t) + \gamma \cdot v_3(t-1) - \gamma \cdot v_1(t)$$

no está correlacionada con  $p(t-1)$ .

Ahora estamos en condiciones de enunciar los argumentos básicos en relación a dos ventajas fundamentales de los sistemas CCP, a saber: por una parte su flexibilidad en el uso operativo, y por otra su generalidad con fines de análisis dinámico:

ADVERTENCIA 3.11. Debido a la estructura recursiva del primer sumatorio en (3), el procedimiento operativo que conduce del sistema CCP (1) a su forma reducida (5) es una secuencia de sustituciones. Cada paso en la secuencia elimina una variable endógena (Cf. al Procedimiento 2.11).

ADVERTENCIA 3.12. Las propiedades de los residuos de los sistemas CCP, y en particular el Supuesto 3.11, pueden parecer a primera vista altamente restrictivos. Por lo menos están de acuerdo con lo que siempre puede ser logrado, al menos en la versión aproximada de la Advertencia 3.10 (i)—(ii). En efecto, con referencia al teorema general sobre el poder resolutorio de los sistemas CCP,<sup>(5)</sup> si las series  $y_i(t)$  y  $x_k(t)$  están dadas arbitrariamente en (1) y (3), es posible determinar el máximo rezago  $r$  y los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  de modo que todas las variables "no correlacionadas" en (i) e (ii) efectivamente tendrán correlaciones que numéricamente son más pequeñas que un número arbitrario dado  $\Delta > 0$ .

### 3.2. *Procedimientos operativos*

En su trabajo pionero con el sistema CCP en la década de los años 1930 el uso operativo de los modelos de Tinbergen

(5) Véase Ref. 51 p. 16 (o Ref. 60 Teorema 12.6.1), una versión degenerada de lo que se conoce como el teorema de la descomposición predictiva de las series estacionarias del tiempo (para el caso especial de una variable, véase Ref. 49, Teorema 7). Para los correspondientes teoremas sobre el poder resolutorio de los sistemas como la forma reducida, véase Refs. 62, 31.

deriva de los siguientes dos procedimientos fundamentales de inferencia:

PROCEDIMIENTO 3.20. *Inferencia predictiva y causal con las ecuaciones de comportamiento que constituyen el modelo en su forma original.*

PROCEDIMIENTO 3.21. *Inferencia sustitutiva con el modelo en su forma original; específicamente,*

a. *Inferencia predictiva de un período para el siguiente.* (Esta forma de inferencia es equivalente a la inferencia predictiva con la forma reducida del modelo).

b. *La construcción de ecuaciones en diferencias finitas en una variable endógena* (las ecuaciones usadas para inferir sobre las propiedades oscilatorias intrínsecas del modelo).

Tinbergen usó los Procedimientos 3.20-21 sobre una base más o menos intuitiva. Es instructivo distinguir aquí los sistemas con ecuaciones exactas de los sistemas de ecuaciones con perturbaciones. Es inmediato que los Procedimientos 3.20-21 son válidos como operaciones con ecuaciones exactas. Que el procedimiento se extiende a las ecuaciones con perturbaciones se deduce a partir del mismo argumento que en 2.2. Lo remarkable es que los procedimientos dan inferencia predictiva y causal en términos de EMC.

ADVERTENCIA 3.20. Los sistemas CCP, como se vio en los Procedimientos 3.20-21, hacen uso operativo de: (a) las ecuaciones de conducta que constituyen el sistema en su forma original, y (b) la forma reducida. Tanto en (a) como en (b) las ecuaciones toman la forma de EMC. En general, las ecuaciones (a) especifican las fuerzas económicas que el sistema explica y sus movimientos dinámicos, mientras que las ecuaciones (b) muestran el dinamismo formal del sistema, ya que la forma reducida indica cómo las variables endógenas están influenciadas por sus valores pasados y las variables exógenas.

### 3.3. *Estimación estadística de parámetros*

Tinbergen hizo uso de la regresión mínimo cuadrática para estimar los parámetros de sus sistemas CCP, siendo estimada cada ecuación por la regresión del efecto variable sobre las variables causales. Este enfoque fue adoptado sobre una base intuitiva, sin entrar en los problemas específicos que surgen cuando los datos están dados como series cronológicas (ver Sec. 2.5.). El fundamento del enfoque fue establecido por Bentzel y Wold (1946), quienes demostraron que para los sistemas que satisfacen los supuestos de tipo (i) — (ii) en la Advertencia 3.10 y para los cuales todas las distribuciones conjuntas son normales, las estimaciones por mínimos cuadrados coinciden con las de máxima verosimilitud. Más generalmente, la prueba presentada en (2.15) se extiende al caso multidimensional, siendo los resultados claves que las estimaciones por mínimos cuadrados de los sistemas CCP son asintóticamente insesgadas siempre que el proceso estocástico definido por el sistema sea *ergódico*, es decir, si un conjunto de series cronológicas generadas por el sistema contiene información completa sobre el proceso (6).

## 4. LOS SISTEMAS INTERDEPENDIENTES (ID) (1)

### 4.0. *Introducción*

Los sistemas ID, luego de la introducción por T. Haavelmo en 1943, fueron inmediatamente sometidos a intensos estu-

(6) Véase Ref. 57 p. 368.

(1) Las Refs. 27, 20 son consideraciones normativas de la teoría de los sistemas ID, con completa referencia a los primeros trabajos. Las principales contribuciones sobre la parte aplicada comprende las Refs. 22, 6, 19, 24, 40, 2. Para exposiciones en libros de texto véanse las Refs. 47, 23. Para un estudio comparativo de los sistemas CCP e ID, véanse las Refs. 4, 51, 60, 3, 54, 39, 56-58. El presente examen se apoya fuertemente en las Refs. 39, 57, 58.

dios bajo los auspicios de la Cowles Foundation. En una primera fase la investigación se concentró sobre una multitud de problemas teóricos que planteaban, principalmente: (a) la exigencia de nuevos métodos estadísticos de estimación de parámetros, y (b) los problemas de identificación, una engorrosa característica de los sistemas ID. A mediados de la década de 1950 aparecen varios trabajos empíricos, que constituyen grandes intentos con énfasis en los problemas de predicción. Estos trabajos de aplicación dejaron mucho que desear; así, en un reciente y autorizado mensaje, el iniciador del enfoque se ha referido a los trabajos aplicados con los sistemas ID como dando predicciones pobres y siendo en su conjunto decepcionantes (2).

En la evolución de los modelos estáticos a los dinámicos, los sistemas CCP están en la etapa final. Las aspiraciones de dichos sistemas son completamente dinámicas, ya que: (a) los cambios temporales en las variables endógenas están explicados en términos de fuerzas económicas, estando formados los sistemas por ecuaciones de conducta que permiten una interpretación en términos de estímulo-respuesta; y (b) las proposiciones sobre las ecuaciones de equilibrio entre las variables u otras características estáticas pueden surgir como teoremas deducidos del modelo, pero ninguna relación estática se introduce como hipótesis en la construcción del modelo. Desde este punto de vista los sistemas ID son una involución: Se permite la existencia de elementos estáticos en la construcción del modelo. Desde otro punto de vista los sistemas ID son los más avanzados y los más generales, ya que las interrelaciones entre las variables endógenas no necesitan seguir la forma recursiva de (3.3). Las formas no recursivas surgen de varios modos en los modelos hipotéticos. Los casos típicos son aquellos modelos que hacen uso de:

(2) Ref. 18.

- (i) Ecuaciones de equilibrio instantáneo;
- (ii) Otras restricciones lineales entre las variables endógenas;
- (iii) Ecuaciones explicativas agregadas, siendo hecha esta agregación con personas, el tiempo, o de otra manera;
- (iv) Variables observadas como aproximaciones de variables anticipadas.

Hemos llegado ahora al punto de separación de los caminos. Mientras los sistemas CCP, como se afirmó en la Advertencia 3.20, están diseñados para uso operativo del modelo tanto en la forma original como en la forma reducida, en los sistemas ID este dualismo se destruye. En realidad, los sistemas ID rompen la forma recursiva de (3.3); por consiguiente la transformación a la forma reducida ya no puede ser hecha por sustituciones sucesivas (ver Advertencia 3.11); la transformación involucrará una o más reversiones de las ecuaciones estocásticas; por lo tanto no será ya posible especificar las ecuaciones tanto en la forma original como en la forma reducida así como obtener inferencias en términos de EMC. Siendo irrevocable este dilema, el enfoque de los sistemas ID consiste en diseñar el modelo para uso operativo en la forma reducida, pero no en la forma original. En otras palabras, las ecuaciones en su forma original son consideradas como un sistema *implícito* para las variables endógenas, obteniendo las ecuaciones explícitas en la forma reducida. Estas ecuaciones toman la forma de EMC. La otra alternativa del dilema corresponde al enfoque de las cadenas causales condicionales (sistemas CCC, tratados en la Sección 5), estando éstos diseñados para uso operativo en la forma original, pero no en la forma reducida. Así como cuando los comparamos con los sistemas CCP, es necesario recordar que tanto los sistemas ID como los sistemas CCC marcan una drástica limitación de los niveles de aspiración en el uso operativo de los modelos.

4.1. Aspectos característicos del enfoque

La forma lineal general de un sistema ID puede ser escrita así:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_j(t) = A_i(y, x) + v_i(t) \quad i = 1, \dots, n$$

con

$$(2) \quad A_i(y, x) = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \gamma_{ijk} y_j(t-k) + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^r \theta_{ijk} x_j(t-k)$$

El primer miembro de (1) puede tener o no una forma más general que el modelo recursivo de las variables endógenas de (3.1). La convención de llevar estas variables al primer miembro de (1) sirve para acentuar una característica típica de los sistemas ID, aquella por la cual las variables endógenas que entran en una misma ecuación, son tratadas: (a) en forma simétrica, y (b) como si fueran libremente reversibles de un miembro a otro de la ecuación.

Además, la diferencia entre los modelos (1) y (3.1) aparece en los residuos. Los supuestos típicos de (1) son los siguientes:

SUPUESTO 4.10. (i) Para cada  $i$ , el residuo  $v_i(t)$  no está correlacionado con todas las variables *predeterminadas*, es decir, con todas las variables exógenas, con o sin rezago, y con todas las variables endógenas no rezagadas;

(ii) Dos desvíos cualesquiera,  $v_i(t)$ ,  $v_j(t-k)$  que se refieren a distintos momentos de tiempo, están mutuamente no correlacionados.

4.1.1. *La forma reducida*

La definición de la forma reducida es literalmente la misma que en la Sec. 3.1.2. Para evitar un nuevo conjunto de notaciones simbolizaremos la forma reducida de (1) del mismo modo que en (3.5-7), con el agregado de que ahora (3.7) toma la forma:

$$(3) \quad w_i(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} v_j(t)$$

Los supuestos 4.10 (i) — (ii) implican que los residuos de la forma reducida tendrán precisamente las mismas propiedades que en 3.1.2. (i\*) — (ii\*). Por lo tanto en el caso común cuando todas las distribuciones conjuntas se suponen normales, la ecuación (3.8) seguirá siendo cierta; repitiendo:

$$(4) \quad E(y_i(t) | y, x) = R_i(y, x) \quad i = 1, \dots, n$$

Es decir que la forma reducida de un sistema ID provee EMC para las variables endógenas.

EJEMPLO 4.10.(3) Un caso simple de un sistema ID está dado por:

$$(5 \text{ a-c}) \begin{cases} d(t) = \alpha_1 - \beta_1 p(t) + v_1(t) & \text{(Ecuación de demanda)} \\ s(t) = \alpha_2 + \beta_2 p(t-1) + v_2(t) & \text{(Ecuación de oferta)} \\ d(t) = s(t) = q(t) & \text{(Ecuación de equilibrio instantáneo)} \end{cases}$$

El precio  $p(t)$  y la cantidad  $q(t)$  son variables endógenas. De acuerdo con el Supuesto 4.10 (i), los residuos  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  no están correlacionados con el precio rezagado  $p(t-1)$ . La forma reducida consta de dos ecuaciones: la (5 b) y

---

(3) Este sistema ilustra la transición de las ecuaciones exactas a las con perturbaciones, en cuanto los modelos de esta clase entran en los trabajos pioneros sobre los sistemas ID (Refs. 16, 26, 15, mientras cae bajo la teoría de la telaraña de los primeros años de la década de 1930 (Refs. 45, 11) si los residuos se omiten.



$$(6) \quad p(t) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} p(t-1) + w(t)$$

donde  $w(t)$  no está correlacionado con  $p(t-1)$ .

El modelo (5) proporciona un claro ejemplo del argumento básico sobre las EMC: Si omitimos el residuo  $w(t)$ , la ecuación (6) nos dará, para  $p(t-1)$  conocido, la EMC de  $p(t)$ .

$$(7) \quad E[p(t) | p(t-1)] = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} p(t-1)$$

Análogamente, (5 b) nos da la EMC de  $s(t)$  [=  $q(t)$ ] dado  $p(t-1)$ , mientras (5 a) *no* nos dará en general, para  $p(t)$  conocido, la EMC de  $d(t)$  [=  $q(t)$ ].

EjemPlo 4.11.<sup>(4)</sup> El siguiente sistema ID, un modelo macroeconómico simple del tipo keynesiano, ha jugado su papel en la discusión del enfoque de ecuaciones simultáneas,

$$(8 \text{ a-c}) \quad \begin{cases} C(t) = \alpha_1 + \beta_1 Y(t) + v_1(t) \\ I(t) = \alpha_2 + \beta_2 Y(t) + v_2(t) \\ Y(t) = C(t) + I(t) \end{cases}$$

Las tres variables son endógenas:  $Y(t)$  es el producto nacional,  $C(t)$  es el consumo,  $I(t)$  es la inversión. Los residuos de los sistemas ID están en general, intercorrelacionados con las variables endógenas; por lo tanto se supone que  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  están correlacionados con  $Y(t)$ .

El modelo (8) es un sistema degenerado. Como no hay rezagos, el sistema es estático en el sentido de un equilibrio móvil. Dado que no hay rezagos ni tampoco variables exógenas, el sistema no tiene forma reducida.

(4) Ref. 3; véase también Ref. 17.

#### 4.2 *Procedimientos operativos.*

Con referencia a las aplicaciones con los sistemas ID, el uso operativo de los modelos se basa en el siguiente procedimiento.

PROCEDIMIENTO 4.20. *La inferencia que trabaja con la forma reducida del modelo; incluye:*

- a. *La inferencia predictiva de un período al siguiente;*
- b. *La inferencia sustitutiva, tal como la construcción de ecuaciones en diferencias en una variable endógena.*

Los Procedimientos 4.20 a-b tienen un claro fundamento basado en los supuestos típicos de los sistemas ID. Los supuestos implican que las ecuaciones de la forma reducida, pero no en general aquéllas de la forma no reducida, proporcionarán EMC para las variables endógenas.

Con respecto a un sistema ID, en su forma no reducida, debe ser considerado primariamente como un recurso auxiliar, un punto de partida para la construcción de la forma reducida. Es una cuestión a debatirse para qué uso operativo puede servir el modelo en su forma original. Pero dado que es una cuestión al margen del presente estudio, la dejaremos así por el momento.

##### 4.2.1. *Interpretación causal.*<sup>(5)</sup>

La noción de dependencia causal en los sistemas ID se usa en un sentido más general que en los sistemas de cadenas causales. En la terminología de los sistemas ID, las variables endógenas son consideradas como causalmente dependientes de las variables predeterminadas, en el sentido de una *dependencia conjunta*. Al mismo tiempo, cada ecuación en la forma reducida de un sistema ID es causal en el estricto sentido de

(5) Véanse las referencias de la Sec. 2, nota 3, especialmente Referencia 39. Véase también Ref. 33, especialmente para destacar una interpretación causal de las ecuaciones implícitas (el método de Walras de tatonnement).

(2.10), mientras que las ecuaciones de la forma no reducida, en general no son causales en el mismo sentido.

#### 4.3. *Estimación estadística de los parámetros*

Como ha sido señalado desde los comienzos del presente estudio, la regresión mínimo cuadrática en general da estimaciones sesgadas de los parámetros si es aplicada a un sistema ID en su forma original<sup>(6)</sup>. Varias técnicas han sido desarrolladas para la estimación de parámetros en los sistemas ID, incluyendo<sup>(7)</sup>: (a) Estimaciones de máxima verosimilitud; (b) El método de información limitada, que estima la forma reducida mediante la regresión mínimo cuadrática; (c) El método de estimación por mínimos cuadrados bietápicos. Todos estos métodos se basan en la forma reducida, dando todos ellos las mismas estimaciones para los parámetros en el caso típico fundamental cuando las ecuaciones son lineales, todas las distribuciones conjuntas son normales, y el sistema es *exactamente identificado*. Un sistema ID es exactamente identificado si la transformación de su forma reducida al sistema en la forma original es una transformación biunívoca en el espacio paramétrico. También puede suceder que el sistema sea *superidentificado* o *subidentificado*. Por ejemplo, el sistema (5) es exactamente identificado, mientras que el (8) es subidentificado. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los sistemas ID son superidentificados.

#### 4.4. *Una advertencia.*

En la anterior exposición de los medios y fines de los sistemas ID, he tratado de sintetizar los trabajos normativos

(6) Refs. 16, 26.

(7) Para las contribuciones sobre (a) véanse Refs. 27, 20, también para referencias adicionales; para (b) véase Ref. 15; para (c) véanse las Refs. 42, 32. El problema de la identificación ha sido explorado en muchas investigaciones; véanse las Refs. 27, 20.

del enfoque, Refs. 27 y 20. El enfoque no es sin embargo suficientemente uniforme. Así, con referencia a L. Klein (Refs. 22-24) se emplean a veces las ecuaciones en la forma no reducida, para los usos operativos en las aplicaciones. Para señalar otro caso, el método de estimación bietápico de H. Theil (Ref. 42) no trata las variables endógenas en forma simétrica. Tales características ambivalentes de los sistemas ID, revelan que sus principios básicos de construcción no están completamente establecidos. Al mismo tiempo la ambivalencia torna difícil tratar decididamente el enfoque.

## 5. LOS SISTEMAS DE CADENAS CAUSALES CONDICIONALES (CCC).<sup>(1)</sup>

### 5.0. *Introducción*

Los sistemas CCC fueron introducidos en 1959 como una construcción alternativa de los sistemas ID. El coeficiente tipo es el mismo que para el sistema ID; por lo tanto, cualquier sistema ID (4.1) puede ser reespecificado como un sistema CCC, suponiendo que las ecuaciones de comportamiento del sistema tengan la forma de EMC sujetas a perturbaciones estocásticas. Como puntualizamos en la sección 4.0, la diferencia relativa con los sistemas ID es de explicación explícita vs. implícita de las variables endógenas. A un nivel básico, estos distintos puntos de partida tienen repercusiones a través de toda la construcción del modelo: En la interpretación causal de las ecuaciones; en la estimación estadística de sus parámetros; en el uso operativo del modelo tanto en trabajos teóricos como en trabajos aplicados.

Mientras los sistemas CCP tienen una estructura uniforme como modelos completamente dinámicos, surge claramente de

---

(1) Esta sección se basa en las Refs. 57-58, con adición de algún material nuevo de investigación.

las situaciones (i) — (iv) mencionadas en la Sec. 4.0 que la noción de Sistema CCC es una designación genérica que cubre una gama de modelos estático-dinámicos que van desde los modelos esencialmente estáticos en un extremo a los modelos completamente dinámicos en el otro. Todavía es demasiado pronto para evaluar la relevancia práctica del enfoque. Como indicamos brevemente en 1.3 (ii) es posible o más aún, probable, que la respuesta arrojará diferencias sobre la amplia variedad de los modelos estático-dinámicos.

Los sistemas CCC son un tipo intermedio de modelo entre los sistemas CCP y los sistemas ID. Siendo fácilmente comparables con ambos, el enfoque trata de mejorar los conocimientos sobre el muy debatido problema de los sistemas ID. En la presente exposición se pone el énfasis sobre este aspecto pedagógico de los sistemas CCC.

### 5.1 *Los aspectos característicos del enfoque*

Un sistema CCC de forma lineal y generalizada puede escribirse así:

$$(1 \text{ a-b}) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i^*(t) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_j(t) + A_i(y,x) + v_i(t); \quad i = 1, \dots, h \\ C_j(y,x) = 0 \quad j = 1, \dots, k; \quad h + k = n \end{array} \right.$$

con las notaciones y supuestos siguientes:

Las ecuaciones (1 a) son *ecuaciones de comportamiento*.

Las ecuaciones (1 b) son *condiciones adicionales*, también llamadas *restricciones*.

$y_i^*(t)$  simboliza alguna variable especificada  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ , digamos  $y_{i+}(t)$ .

El apóstrofe (') del primer sumatorio indica que el término  $\beta_{i+} y_{i+}(t)$  está ausente, es decir que  $\beta_{i+} = 0$ ;

$A_i(y,x)$  es una forma lineal del tipo de (4.2).

$C_j(y, x)$  es una forma lineal de variables sin restricciones, endógenas o exógenas, con o sin rezago.

SUPUESTO 5.10. Las ecuaciones de comportamiento (1 a) explican las variables endógenas por medio de EMC, en símbolos:

$$(2) \quad E[y_i^*(t) | y, x] = B_i(y, x) \quad i = 1, \dots, h$$

con

$$(3) \quad B_i(y, x) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_j(t) + A_i(y, x)$$

ADVERTENCIA 5. 10. Las ecuaciones de comportamiento (1 a) en general contienen perturbaciones, mientras que las restricciones (1 b) se supone que son ecuaciones exactas. La distinción entre estos dos tipos de relaciones puede ser algo indeterminada. Así puede ocurrir, lo mismo que en los sistemas CCP, que una identidad exacta se interprete como una ecuación de conducta. Se notará también que el sistema (1) puede contener dos ecuaciones explicativas para una misma variable; por ejemplo, esto sucede si las restricciones (1 b) incluyen una ecuación de equilibrio instantáneo, digamos  $y_{i*}(t) = y_{i*}(t)$ .

ADVERTENCIA 5.11. Como en (2.17), el Supuesto 5.10 implica:

(i) Para cada  $i$ , el residuo  $v_i(t)$  no está correlacionada con las variables  $y, x$  que constituyen la forma lineal  $B_i(y, x)$ .

En general, el Supuesto 3.11 no tiene contrapartida en los sistemas CCC. Como una consecuencia, los residuos simultáneos  $v_i(t), v_j(t-k)$  pueden perfectamente estar intercorrelacionados, y el siguiente supuesto puede o no cumplirse:

(ii) Dos desvíos cualesquiera  $v_i(t), v_j(t-k)$  que se refieren a distintos momentos del tiempo no están correlacionados entre sí.

Los supuestos (i) — (ii) ponen de relieve que los sistemas CCC generalizan los sistemas CCP en la dirección de los sistemas ID. En efecto, el supuesto (i) coincide con 3.1 (i), pero no con 4.1 (i), y (ii) coincide con 4.1 (ii) pero no con 3.1 (ii).

### 5.1.1. Ejemplos

Los siguientes ejemplos se han seleccionado con miras a mostrar: (a) que el enfoque de los sistemas CCC, aunque muy simple, da nacimiento a consideraciones enteramente nuevas en la construcción de modelos (Ejemplos 5.10), y (b) que ese paso puede encontrarse en la literatura anterior que está más o menos de acuerdo con el enfoque de los sistemas CCC (Ejemplo 5.11-12). Considerando a (b) uno podría preguntarse cómo es posible que el supuesto básico (2) de los sistemas CCC no haya sido explotado antes en la construcción de modelos econométricos. Una respuesta parcial a esto puede estar en la influencia dominante del enfoque de los sistemas ID.

EJEMPLO 5.10<sup>(2)</sup>. Vamos a considerar un modelo que simbolizaremos como en (4.5 a-c), pero especificado como un sistema CCC. Así, en concordancia con (2), tendremos:

$$(4 \text{ a-b}) \quad E[q(t) | p(t)] = \alpha_1 - \beta_1 p(t) ; E[q(t) | p(t-1)] = \\ = \alpha_2 + \beta_2 p(t-1).$$

Como en (2.17), esto implica que  $v_1(t)$  no está correlacionado con  $p(t)$ , ni  $v_2(t)$  con  $p(t-1)$ . En contraste a (4.7), por otra parte, la ecuación (4.6) de la forma reducida *no* tomará, en el presente modelo, la forma de una EMC.

ADVERTENCIA 5.12<sup>(3)</sup>. Es instructivo comparar el Ejemplo 4.10 para los siguientes valores:

(2) Refs. 57-58. Cf. también con la Ref. 39, p. 425.

(3) Véase la Ref. 57, también para una discusión más detallada de los puntos a-c

(5)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ;  $\beta_1 = 2$  ;  $\beta_2 = 0,6$  ;  $r[v_1(t), v_2(t)] = 0$   
y el Ejemplo 5.10 para los siguientes valores:

(6)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ;  $\beta_1 = 0,8$  ;  $\beta_2 = 0,6$  ;  $r[v_1(t), v_2(t)] = 0,3$

Suponiendo que toda distribución conjunta es normal, es fácilmente verificable que el sistema ID, para los valores de (5) define un mismo proceso estocástico que el sistema CCC para los valores de (6). El proceso es un proceso estacionario Gauss-Markov, con nueve parámetros, y los dos modelos dan los mismos valores para los nueve parámetros. El caso da material para varias conclusiones:

a. La diferencia entre los sistemas ID y CCC no es una cuestión que dependa de una mayor o menor aproximación a la realidad. En efecto, desde que los sistemas dados por (5) y (6) definen un mismo proceso, los dos modelos darán precisamente el mismo grado de bondad en el ajustamiento cuando se aplica a un conjunto dado de datos estadísticos. O, para decirlo de otro modo, de cada uno de los modelos es posible generar una serie artificial de datos temporales, pero después no es posible decir qué datos provienen de qué modelo.

b. La diferencia entre los sistemas ID y CCC no está referida al sesgo en el procedimiento de estimación estadística. En efecto, para cada modelo una estimación técnica que sea apropiada para ese tipo de modelo, proporcionará estimaciones consistentes para los parámetros del mismo. Así, con referencia al último párrafo, si nosotros empleamos la serie cronológica artificial para la estimación de parámetros de acuerdo con el sistema ID obtendremos estimaciones consistentes para los parámetros (5), y si los métodos de estimación de los sistemas CCC se aplican a la misma serie cronológica, obtendremos estimaciones consistentes para los parámetros (6). Específicamente, el coeficiente  $\beta_1$  de la ecuación de demanda (4.5 a) del sistema ID se estimará en aproximadamente 2, mientras que el



coeficiente  $\beta_1$  de la ecuación de demanda del sistema CCC se estimará en aproximadamente 0,8.

c. La diferencia entre los sistemas ID y CCC es una cuestión referida al uso de los modelos en trabajos teóricos y aplicados. Específicamente, la ecuación de demanda (4.5 a) del sistema ID no es una ecuación de demanda en el mismo sentido operativo que la ecuación de demanda del sistema CCC. O, con referencia al caso donde las variables están dadas en forma logarítmica, el coeficiente  $\beta_1 = 2$  en (5) no es una elasticidad de demanda en el mismo sentido que el coeficiente  $\beta_1 = 0,8$  en (6).

Volveremos sobre los puntos b y c.

*EJEMPLO 5.11* (4). El modelo es (4.8), ahora reespecificado como un sistema CCC.

En consecuencia:

$$(7 \text{ a-b}) \quad E[C(t) | Y(t)] = \alpha_1 + \beta_1 Y(t) ; E[I(t) | Y(t)] = \alpha_2 + \beta_2 Y(t)$$

Las ecuaciones (7) implican que  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  no están correlacionados con  $Y(t)$ .

En vista de la diferencia entre los Ejemplos 4.11 y 5.11 destacamos que hay varios caminos mediante los cuales se puede dar una interpretación de comportamiento a (7 a-b). Uno es considerar la variable agregada  $Y(t)$  como dividida en dos componentes,  $C(t)$  e  $I(t)$ , con la división sujeta a una perturbación estocástica, de acuerdo con (7). Esta interpretación implica:

$$(8) \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 ; \beta_1 + \beta_2 = 1 ; v_1(t) = -v_2(t)$$

(4) Conforme a la Ref. 3, p. 166, donde se discute este tipo de modelo, rechazándoselo debido a sus implicaciones sobre los residuos. Entiendo que los autores no notan que las ecuaciones de tipo (8 c) son automáticamente completadas por los residuos de la regresión mínimo cuadrática. Cf. también con la Ref. 57, sección 4, nota 8.

EJEMPLO 5.12<sup>(5)</sup>. El modelo está definido por

$$(9 \text{ a-b}) \begin{cases} X_i = \alpha_i + \beta_i Y + v_i & i = 1, \dots, h \\ X_1 + \dots + X_h = Y \end{cases}$$

con la especificación

$$(10) \quad E[X_i | Y] = \alpha_i + \beta_i Y \quad i = 1, \dots, h$$

Formalmente, el modelo (9) es una directa generalización del anterior Ejemplo 5.11. Proyectado para datos de sección mixta ("cross section") en presupuestos familiares, el sistema (9) divide el ingreso familiar  $Y$  en  $h$  gastos agregados  $X_i$ , y explica cada  $X_i$  por una ecuación lineal de Engel, especificada como una EMC. En consecuencia:

$$(11) \quad \sum \alpha_k = 0 ; \sum \beta_k = 1 ; r(v_i, Y) = 0 \quad i = 1, \dots, h$$

### 5.1.2. Interpretación causal

Gracias a (2), cualquier ecuación de comportamiento que es parte de un sistema CCC permite una interpretación causal en el sentido de (2.7 b). Al respecto, la situación es la misma que para los sistemas CCP, pero fundamentalmente distinta de los sistemas ID.

### 5.1.3. La forma reducida

La noción de forma reducida se extiende en un sentido formal a los sistemas CCC. Como ya destacamos en la Sec. 4.0 (ver también Ejemplo 5.10), en general no toman la forma de EMC, y en consecuencia no permiten una interpretación causal en el sentido de (2.7 b).

(5) Cf. con la Ref. 41, donde un modelo de tipo (9) está tratado como un sistema ID, y la Ref. 35, donde la situación está discutida sobre la base de argumentos que están estrechamente relacionados a la especificación (10).

5.2. *Procedimientos operativos*

Gracias a (2), los sistemas CCC permiten el siguiente uso operativo del modelo:

PROCEDIMIENTO 5.20. *La inferencia predictiva y causal de las ecuaciones de comportamiento que forman parte del modelo en su forma original, y la inferencia predictiva de las ecuaciones exactas del modelo.*

En lo tocante a inferencia inversa, las consideraciones de la Sec. 2.4 se extienden tanto a los sistemas CCP como a los CCC. Para los sistemas CCC destacamos:

PROCEDIMIENTO 5.21. *La reversión de la dirección de la inferencia causal.* Suponemos conocidos los valores de  $y_1^*(t)$ , ...  $y_n^*(t)$  en el sistema (1), mientras las demás variables son desconocidas. En este caso el procedimiento es omitir todos los residuos y usar (1) para determinar los valores de las otras variables tales que los valores *esperados* de  $y_1^*(t)$ , ...,  $y_n^*(t)$  sean iguales a los valores conocidos.

Las incógnitas pueden estar sub, sobre o unívocamente determinadas; para el caso de correspondencia biunívoca, véase Sec. 7.2. La siguiente cuestión está formalmente relacionada con el problema de identificación de los sistemas ID <sup>(6)</sup>.

Sabiendo que en general (2) no es válido para las ecuaciones de la forma reducida, es del caso preguntarse qué uso, si es que tiene alguno, puede hacerse de la forma reducida de los sistemas CCC. Al respecto la situación es la misma que para la forma no reducida de los sistemas ID. Mientras los sistemas CCP, de acuerdo con (3.2) y (3.8), hacen uso operativo del modelo tanto en la forma original como en la reducida, los supuestos (4.4) y (5.2) constituyen una separación de los caminos lo cual es una inevitable consecuencia de: (a) el coefi-

(6) La inferencia en el Procedimiento 5.21 se refiere a las variables, mientras el problema de la identificación se refiere a los parámetros, es decir, los coeficientes de las variables.

ciente tipo no recursivo de los sistemas CCC e ID, y (b) trabajar con ecuaciones de comportamiento que están sujetas a perturbaciones.

ADVERTENCIA 5.20. Con referencia a la Advertencia 2.22, y adoptando una cláusula *ceteris paribus* del tipo B, consideremos los sistemas CCC e ID en la hipotética situación de que el flujo de perturbaciones llegue a detenerse, mientras las ecuaciones que reglan las variables endógenas permanecen igual que antes. Entonces los sistemas pueden ser considerados como formados por ecuaciones exactas, y podemos hacer uso operativo de la forma reducida de los sistemas CCC y también de la forma original de los sistemas ID. En esta situación hipotética, se debe destacar, sería posible discriminar entre los dos tipos de modelos, desde que el desarrollo sin perturbaciones podría revelar los parámetros del modelo. Sin embargo, como se destacó en la Advertencia 2.22, este argumento es de cuestionable relevancia, desde que la situación hipotética involucra un cambio en las condiciones básicas de la muestra observada.

### 5.3. *Estimación estadística de los parámetros*

Gracias a (2), el argumento dado en 2.5 y 3.3 se extiende a los sistemas CCC. Brevemente enunciado, el procedimiento de estimación se aplica al modelo en su forma original, y aquí el método de regresión mínimo cuadrático proporcionará, bajo condiciones muy generales, estimaciones asintóticamente insesgadas para los parámetros. Si se desea, los parámetros de la forma reducida pueden entonces ser estimados resolviendo el sistema con respecto a las variables endógenas.

Se notará que el problema de identificación (ver Sec. 4.3) no surge en el enfoque de los sistemas CCC.

## 6. EJEMPLOS EMPIRICOS

6.0. Es bueno notar que la cláusula *ceteris paribus* B de la Advertencia 5.20 donde la corriente de perturbaciones llega a detenerse es enteramente diferente de la situación correspondiente a un modelo construido sin ninguna perturbación. En esta última situación todas las ecuaciones son libremente reversibles, la forma original y la reducida son equivalentes para propósitos de predicción, y desaparecen las diferencias entre los sistemas CCP, ID y CCC. Esto da lugar a la pregunta ¿cuál es la relevancia numérica de esa separación de caminos entre los modelos cuando se trabaja, en la práctica, con ecuaciones con perturbaciones? La pregunta es de la mayor importancia, tanto más por haber sido menospreciado su tratamiento en la literatura, como tiende a suceder desde que el análisis del asunto, trata a menudo con ecuaciones no estocásticas<sup>(1)</sup>.

El propósito principal de esta sección es poner de relieve que las diferencias entre los sistemas CCP, ID y CCC son de gran relevancia numérica.

6.1. *Tres sistemas de ecuaciones simultáneas ajustados para los mismos datos estadísticos* (2)

Citamos las ecuaciones de demanda de tres modelos de oferta-demanda que han sido proyectados para el mercado de sandías en los Estados Unidos, en el período 1930-1951. Notaciones:  $X$  es la demanda;  $P$  es el precio,  $Y$  es el ingreso,  $N$  es la población,  $F$  es el flete unitario,  $L$  es el costo del nivel de vida. Las variables están dadas en forma logarítmica, y los

(1) Para el caso en cuestión véase Ref. (7), un temprano precursor de la Ref. 9. Sus propiedades estocásticas, no estando especificadas, no es claro para mí si el modelo de la Ref. 7 (o la Ref. 9) podría ser considerado mejor como un sistema CCP, un sistema ID o un sistema CCC.

(2) Véase el artículo original para los detalles sobre los modelos. Para comentarios más amplios, véase también la Ref. 57, Secc. 5.

cocientes son los logaritmos de los cocientes de los valores no logarítmicos. Se omiten los residuos.

Sistema interdependiente (Suits, 1955)

$$(1) \quad \frac{X}{N} = -0,901 P + 1,378 \frac{Y}{N} - 0,614 F - 0,126$$

Cadena causal pura (Wold, 1959 a)

$$(2) \quad \frac{X}{N} = -0,206 \frac{P}{L} + 0,430 \frac{Y}{NL} - 1,088$$

Cadena causal condicional, primera variante (Wold, 1959b)

$$(3) \quad \frac{X}{N} = -0,417 P + 0,776 \frac{Y}{N} - 0,563 F - 0,882$$

Cadena causal condicional, segunda variante (Wold, 1959b)

$$(4) \quad \frac{X}{N} = -0,315 \frac{P}{L} + 0,509 \frac{Y}{NL} - 1,077$$

Se notan grandes diferencias en los resultados numéricos, y en particular en la elasticidad precio de la demanda, es decir, el coeficiente para  $P$  o  $P/L$  tomado con signo negativo.

Los resultados invitan a hacer varios comentarios:

ADVERTENCIA 6.10. El elevado valor de 0,901 en (1) concuerda con algunos precedentes trabajos aplicados con los sistemas ID, donde se ha observado que las elasticidades han sido mayores que las obtenidas en mercados comparables por los métodos tradicionales. Desde que la estimación de (1) está basada en la forma reducida, y que por lo tanto involucra la reversión de las ecuaciones de demanda, apenas sorprende que la elasticidad precio resulte más alta —en verdad más de cuatro veces mayor— en el sistema ID que en el sistema CCP.

Sin ser completamente la misma, la situación está relacionada con el bien conocido hecho de que la inversión de la regresión de  $P$  sobre  $X$  tiene un coeficiente mayor que la regresión de  $X$  sobre  $P$ .

ADVERTENCIA 6.11. Si las ecuaciones de un sistema ID y el correspondiente sistema CCC dan un ajustamiento exacto para los datos observados, los dos modelos deberían tener los mismos parámetros. Por lo tanto surge claramente de (1) y (3) que cuando se trabaja con ecuaciones aproximadas, la diferencia entre los dos tipos de modelos es de gran relevancia numérica. Repetimos lo expuesto en la Advertencia 5.12 c, es decir, que el coeficiente 0,901 no puede ser interpretado como una elasticidad de demanda en el mismo sentido directo que el coeficiente 0,417 en (3).

ADVERTENCIA 6.12<sup>(3)</sup>. Las ecuaciones CCC (3)-(4) dan elasticidades precio mayores que las ecuaciones CCP (2). Aunque es relativamente pequeña comparada con el modelo (1), la desviación se repite para distintos bienes. Por ello la desviación parece ser sistemática, y de acuerdo al siguiente argumento, tiene la naturaleza de un error de especificación.

En (3)-(4) se supone que la demanda iguala a la oferta por vía de un equilibrio instantáneo, y la cantidad  $X$  se toma en sustitución de la demanda observada  $D$ , y la oferta observada  $S$ . Ahora en la muestra observada, la diferencia  $S-D$  está correlacionada negativamente con  $P$ . Este descubrimiento empírico puede ser interpretado como una característica general de los mercados de libre competencia: *Si el precio de mercado  $P$  tiende a ser mayor (menor) que el precio de equilibrio instantáneo, digamos  $P^*$ , la diferencia  $P-P^*$  tiende a ser relativamente pequeña (grande) cuando el precio es alto, y relativamente grande (pequeña) cuando el precio es bajo.* Si combi-

(3) Ref. 38.

namos esta proposición empírica con el hecho de que la cantidad  $X$  en el modelo (2) se toma como la demanda observada  $D$ , es fácil inferir que hay una diferencia sistemática entre las elasticidades de (2) y (3)-(4), y que el error de especificación yace en (3)-(4) y no en (2).

## 7. SISTEMAS INSUMO-PRODUCTO (IP) (1)

### 7.0. *Introducción*

Estrechamente relacionado con los conceptos de contabilidad nacional y presupuestos, el análisis de insumo producto de W. Leontief (1941) es un notable, aunque simple desarrollo de este clásico orden de ideas. Desde el siglo XVIII, los ordenamientos tabulares de este tipo han pertenecido en lo fundamental a la teoría económica (la tabla de Quesnay). El nuevo giro en el análisis de Leontief es la inferencia inversa de los coeficientes técnicos y las demandas finales dadas.

### 7.1. *Aspectos característicos del enfoque*

Los sistemas IP existen con distintas variantes: con distinciones entre economías cerradas y abiertas, variables reales o monetarias, etc. Para nuestro propósito será suficiente considerar un caso típico simple. Nuestra exposición pondrá énfasis en dos características específicas de los sistemas IP comparándolos con los modelos de la sección 3-6, especialmente:

- (i) El enfoque de los sistemas IP es estático, o más precisamente, una aplicación en gran escala de estática comparativa;
- (ii) Los sistemas IP están especificados como ecuaciones exactas (sin perturbaciones).

(1) Las referencias básicas son: Leontief (1941; 1953), también para generalizaciones en varias direcciones. Véase también "El análisis de Dorfman", Ref. 8.



CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Además veremos cómo el enfoque de los sistemas CCC se presta a una generalización de los sistemas IP, en la dirección de las ecuaciones con perturbaciones.

EJEMPLO 7.10. (2)

*Cuadro de insumo-producto para Noruega, 1948*

Valores en millones de coronas noruegas (mcrs). Coeficientes en por ciento (números subrayados)

| Sectores productivos de origen                           | Sectores productivos de destino |                        |                        |                        |                        | Prod. Neto                     |
|--|---------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------------|
|  | I                               | II                     | III                    | IV                     | V                      |                                |
| I. Bienes de consumo                                     | 1322<br><u>18,6</u>             | 51<br><u>1,7</u>       | 80<br><u>1,6</u>       | 16<br><u>0,5</u>       | 34<br><u>0,4</u>       | 5606<br><u>(y<sub>1</sub>)</u> |
| II. Industria de la construcción                         | 22<br><u>0,3</u>                | 26<br><u>0,8</u>       | 64<br><u>1,3</u>       | 9<br><u>0,2</u>        | 111<br><u>1,2</u>      | 2852<br><u>(y<sub>2</sub>)</u> |
| III. Otras industrias                                    | 202<br><u>2,9</u>               | 848<br><u>27,5</u>     | 560<br><u>11,0</u>     | 67<br><u>1,9</u>       | 142<br><u>1,6</u>      | 3302<br><u>(y<sub>3</sub>)</u> |
| IV. Transporte   | 56<br><u>0,8</u>                | 45<br><u>1,5</u>       | 28<br><u>0,6</u>       | 18<br><u>0,5</u>       | 689<br><u>7,8</u>      | 2681<br><u>(y<sub>4</sub>)</u> |
| V. Comercio y servicios                                  | 2137<br><u>30,0</u>             | 336<br><u>10,9</u>     | 1453<br><u>28,4</u>    | 379<br><u>10,7</u>     | 1147<br><u>12,9</u>    | 3421<br><u>(y<sub>5</sub>)</u> |
| VI. Sector general: familias, capital, comercio exterior | 3370<br><u>47,4</u>             | 1776<br><u>57,6</u>    | 2936<br><u>57,1</u>    | 3028<br><u>86,1</u>    | 6750<br><u>76,1</u>    | 1401                           |
| I-VI. Producto bruto                                     | 7109<br><u>100,0</u>            | 3083<br><u>100,0</u>   | 5122<br><u>100,0</u>   | 3517<br><u>100,0</u>   | 8873<br><u>100,0</u>   | 19263                          |
|  | <u>(X<sub>1</sub>)</u>          | <u>(X<sub>2</sub>)</u> | <u>(X<sub>3</sub>)</u> | <u>(X<sub>4</sub>)</u> | <u>(X<sub>5</sub>)</u> |                                |

Vamos a considerar la industria de la construcción. La segunda columna da el producto bruto de esta industria, 3.083 mcrs. y la segunda fila su producto neto 2.852 mcrs. La diferencia, 231 mcrs., es el producto de la industria de la construcción insumido por las cinco industrias, de las cuales 22 mcrs. son destinados a la producción de bienes de consumo,

(2) La tabla original, Ref. 5, tiene 34 x 34 entradas.

26 mers. son transferencias internas del sector de la construcción, etc. De esta manera el cuadro muestra cómo la oferta total de bienes y servicios, 19263 mers. (= producto nacional bruto 14.092 mers. + importaciones 5.171) surge como una producción neta tras la división en seis sectores. Los números en bastardilla dan las transferencias entre los sectores, como porcentaje del producto bruto del sector que recibe. Por ejemplo, las transferencias de "otras industrias" hacia el sector de la construcción se elevan al 27,5 % del producto bruto de la industria de la construcción. Los porcentajes son llamados *coeficientes técnicos*. El supuesto básico del enfoque de Leontief es que los coeficientes técnicos son estables en los cinco sectores de compras. Por lo tanto, los coeficientes pueden ser usados para calcular qué producto bruto  $X_i$  se requiere en los cinco sectores para lograr un conjunto dado de *demandas finales*  $y_i$ , es decir, de productos netos. En símbolos matemáticos esto puede expresarse así:

$$(1) \quad a_{11} X_1 + \dots + a_{1n} X_n + y_1 = X_1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

siendo  $a_{ij}$  los coeficientes técnicos,

$$(2) \quad a_{ij} = X_{ij} | X_j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

donde  $X_{ij}$  son las transferencias entre los  $n$  sectores. Inversamente, (1) puede ser resuelto para dar el producto bruto  $X_i$ , en términos de demandas finales  $y_i$ , es decir:

$$(3) \quad X_i = b_{11} y_1 + \dots + b_{1n} y_n \quad (i = 1, \dots, n)$$

### 7.2. Enfoques generalizados

Es una limitación inherente de los sistemas IP (1) que los coeficientes técnicos se supongan estables, mientras que si el sistema es aplicado a datos anuales consecutivos, los coeficientes estimados a partir de (2) exhibirán variaciones aleatorias y/o sistemáticas. En un reciente y muy interesante de-

sarrollo, el supuesto de coeficientes estables se ha probado que es insostenible, y sus tendencias han sido exploradas por una adaptación de las técnicas de programación lineal.<sup>(3)</sup>

El enfoque de insumo producto tiene alguna semejanza con los modelos de las secciones 4-5. Así en (1), podemos considerar las  $X_i$  como variables endógenas y las  $y_i$  como variables exógenas, y (3) puede ser interpretada como la forma reducida de (1). Haciendo uso de esta interpretación, el enfoque (1) puede ser generalizado en un sistema CCC, el que tiene la forma de un sistema IP donde los coeficientes técnicos son constantes a través del tiempo. El recurso es: (a) agrupar los dos términos en  $X_i$  y escribir, digamos,  $a^*_{ii} = a_{ii}-1$ ; (b) suponer que el sistema resultante, digamos (1\*), da la EMC para cada  $y_i$  en términos de las  $X_i$ ; y (c) introducir los residuos correspondientes  $\epsilon_i$ . En el supuesto que los coeficientes  $a_{ij}$  sean estables, y no hubiera tendencia a la colinealidad entre los productos brutos  $X_i$ , los coeficientes  $a_{ij}$  y  $a^*_{ii}$  pueden entonces ser estimados por regresión mínimo cuadrática, tratando con cada ecuación de (1\*) separadamente. Con esta interpretación generalizada del sistema (1) la forma reducida (3) dará estimaciones para el producto bruto  $X_i$  tales que el valor *esperado* del producto neto igualará a las demandas finales dadas  $y_i$ .

Así generalizado, el sistema (1\*) tiene alguna semejanza con el enfoque del análisis factorial en psicología. Las demandas finales  $y_i$  corresponden a los puntajes observados en las pruebas, el producto bruto  $X_i$  a los factores, y los coeficientes  $a_{ij}$  y  $a^*_{ii}$  a la ponderación de los factores. Sin embargo existe la diferencia que la  $X_i$  no son observables en el análisis factorial, pero sí lo son en el análisis de insumo producto. Por otra parte, con referencia a la técnica de mínimos cuadrados del análisis factorial, desarrollado por Whittle<sup>(4)</sup>, el sistema (3)

(3) Ref. 1.

(4) Ref. 48.

es análogo a la estimación de los valores de los factores individuales en términos de los puntajes observados en las pruebas.

HERMAN O. A. WOLD

Instituto Universitario de Estadística  
Upsala, Suecia

LISTA DE REFERENCIAS

1. ARROW, K. J. y M. HOFFENBERG (1959): *A time series analysis of interindustry demands*. Amsterdam: North-Holland.
2. BALL, R. J., y A. HAZLEWOOD y L. R. KLEIN (1959): *Bulletin of the Oxford University Institute of Statistics*, 21, pp. 3-16.
3. BENTZEL, R. y B. HANSEN (1954): *Review of Economic Studies*, 22, pp. 153-168.
4. BENTZEL, R. y H. WOLD (1946): *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 29, pp. 95-114.
5. CENTRAL BUREAU OF STATISTICS, Noruega (1952): *National accounts 1930-39 and 1946-1951*. Norges Officielle Statistikk XI, 109. Oslo: Aschehoug.
6. CHRIST, C. (1951): Artículo publicado en: *Conference on business cycles* (pp. 35-107). New York: National Bureau of Economic Research.
7. CLARK, C. (1949: *Econometrica*, 17, pp. 93-124.
8. DORFMAN, R. (1954): *Review of Economics and Statistics*, 36, pp. 121-133.
9. ECONOMETRIC INSTITUTE, Inc., New York (1959): *The Econometric Institute Model*. Apéndice, 8 pp., en "Forecasts for 1960 for selected industries based on computations of the Econometric Institute model of the United States economy". (Copia mimeográfica).
10. EZEKIEL, M. (1950): *Methods of correlation analysis*. New York. Wiley and Sons. 3ª ed., 1959.
11. — (1938): *Quarterly Journal of Economics*, 52, pp. 255-280.
12. FRISCH, R. (1929): *Nordisk Statistisk Tidskrift*, 8, pp. 36-102.
13. — (1934): *Statistical confluence analysis by means of complete regression systems*. Oslo: Inst. Univ. de Economía, Publicación Nº 5.
14. GINI, C. (1921): *Metron*, 1, Nº 5, pp. 63-82.
15. GIRSCHICK, M. A. y T. HAAVELMO (1947): *Econometrica*, 15, páginas 79-110. Reimpresión, revisada: Hood-Koopmans, eds. (1953).
16. HAAVELMO, T. (1943): *Econometrica*, 11, pp. 1-12.
17. — (1947): *Journal of the American Statistical Association*, 42, pp. 105-122. Reimpresión: Hood-Koopmans, eds. (1953).
18. — (1958): *Econometrica*, 26, pp. 351-357.
19. HILDRETH, C. y F. G. JARRET (1955): *A statistical study of live-stock production and marketing*. New York: Wiley and Sons.

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

20. HOOD, W. C. y T. C. KOOPMANS, eds. (1953): *Studies in econometric methods*. New York: Wiley and Sons.
21. KENDALL, M. G. (1951-52): *Biometrika*, 38, pp. 11-25, and 39, pp. 96-108.
22. KLEIN, L. R. (1950): *Economic fluctuations in the United States 1921-41*. New York: Wiley and Sons.
23. — (1953): *A textbook of econometrics*. Evanston, Ill.: Row, Peterson.
24. KLEIN, L. R. y A. GOLDBERGER (1955): *An econometric model of the United States 1929-1952*. Amsterdam: North-Holland.
26. KOOPMANS, T. C. (1945): *Journal of the American Statistical Association*, 40, pp. 488-566.
27. —, ed. (1950): *Statistical inference in dynamic economic models*. New York: Wiley and Sons.
28. LEONTIEF, W. W. (1941): *The structure of American economy, 1919-39*. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press.
29. —, ed. (1953): *Studies in the structure of the American economy*. New York: Oxford Univ. Press.
30. MACKEFRANG, E. P. (1906): *Pristeorier*. (Danish) Copenhagen: Bagge.
31. MASANI, P. (1959): Artículo en: *Probability and statistics. The Harald Cramer volume*. (pp. 175-189). Estocolmo: Almqvist & Wiksell. (New York: Wiley and Sons, 1960).
32. NAGAR, A. L. (1959): *Econometrica*, 27, pp. 575-595.
33. PATINKIN, D. (1956): *Money, interest and prices*. Evanston, Ill.: Row, Peterson.
34. PEARSON, K. (1901): *Philosophical Magazine* (6), 2, pp. 559-572.
35. PRAIS, S. J. (1959): *Econometrica*, 27, pp. 127-129.
36. SIMON, H. (1953): *Paper in Hood-Koopmans*, eds. (pp. 49-74).
37. STOJKOVIC, G. (manuscrito): *Market models for agricultural products*.
38. STOJKOVIC, G. y H. WOLD (manuscrito): *A bias effect of instantaneous equilibrium assumptions*.
39. STROTZ, R. H. and H. WOLD (1960): *Causal chains vs. interdependent systems: An attempt at synthesis*. A publicarse en *Econometrica*.
40. SUITS, D. (1955): *Journal of Farm Economics*, 37, pp. 237-251.
41. SUMMERS, R. (1959): *Econometrica*, 27, pp. 121-126.
42. THEIL, H. (1958): *Economic forecasts and policy*. Amsterdam: North-Holland.
43. TINBERGEN, J. (1930): *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1, páginas 669-679.
44. — (1937): *An econometric approach to business cycle problems*. París: Herman.
45. — (1939): *Statistical testing of business cycle theories, I: A method and its application to investment activity. II: Business cycles in the United States of America, 1919-1932*. Ginebra: Liga de las Naciones.
46. — (1940): *Review of Economic Studies*, 7, pp. 73-90.

- 46a. — (1951): *Business cycles in the United Kingdom, 1870-1914*. Amsterdam: North-Holland. 2ª ed. 1956.
47. TINTNER, G. (1952): *Econometrics*. New York: Wiley and Sons.
48. WHITTLE, P.: *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 35, pp. 225-239.
49. WOLD, H. (1938): *A study in the analysis of stationary time series*. Upsala: Almqvist.
50. — (1945): *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 28, pp. 181-200.
51. — (1949): *Econometrica*, 17, Suplemento, pp. 1-22.
52. — (1921): *Sankhya*, 11, pp. 205-216.
53. — (1954): *Econometrica*, 22, pp. 162-177.
54. — (1955): Artículo en: *Cahiers du séminaire d'économetrie de R. Roy*, N° 3 (pp. 81-101). París: Centre National de la Recherche Scientifique.
55. — (1956): *Journal of the Royal Statistical Society (A)*, 119, pp. 28-61.
56. — (1959a): *Review of the International Statistical Institute*, 26, pp. 5-25.
57. — (1959b): Artículo en: *Probability and Statistics. The Harald Cramér volume* (pp. 355-454). Estocolmo: Almqvist & Wiksell. (New York: Wiley and Sons, 1960).
58. — (1960): *A generalization of causal chain models*. A publicación en *Econometrica*.
59. — (manuscrito): *On the definition and meaning of causal concepts*.
60. WOLD, H. en colaboración con L. JURÉEN (1952): *Demand analysis. A study in econometrics*. Estocolmo: Almqvist & Wiksell. (New York: Wiley and Sons, 1953). )
61. WORKING, E. J. (1927): *Quarterly Journal of Economics*, 41, pp. 212-235.
62. ZASUHN, V. (1941): *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*. N. S. 33, pp. 435-437.