SUBMODUL TERKOMPLEMEN PADA MODUL BEBAS YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH DEDEKIND

Dewi Ismiarti[1], Dwi Mifta Mahanani[2]
[1]Fakultas Saintek, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
email: dewiismi@mat.uin-malang.ac.id
[2]Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya
email: mdwimifta@ub.ac.id

Abstrak

Misalkan M adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Telah diketahui bahwa kondisi keterkomplemenan ekivalen dengan kemurnian pada submodul-submodul dari M. Karakterisasi lain melalui modul hasil bagi adalah suatu submodul S terkomplemen jika dan hanya jika M/S bebas. Dalam tulisan ini akan dibahas padanan karakterisasi-karakterisasi tersebut pada modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind.

Keywords: *daerah Dedekind, modul atas daerah Dedekind, submodul murni, submodul terkomplemen.*

1. PENDAHULUAN

Misalkan M adalah R-modul dan$\{S_i | i \in I\}$ adalah koleksi submodul dari M.Modul M dikatakan *jumlah langsung* dari submodul-submodul S_i jika $M = \sum_{i \in I} S_i$ dan $S_i \cap_{j \neq i} S_j = \{0\}$. Jika M adalah jumlah langsung dari submodul-submodul S_i, dituliskan $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$.Misalkan Sadalah submodul dari M. Submodul S dikatakan *suku langsung* dari M jika terdapat submodul T dari M sehingga $M = S \oplus T$. Dalam hal ini T disebut $komplemen$ dari S di M, dan S dikatakan $terkomplemen$.

Berbeda dengan ruang vektor yang setiap subruangnya terkomplemen, submodul dari suatu modul tidak selalu terkomplemen. Sebagai contoh, pada $\mathbb{Z}$-modul$\mathbb{Z}$, submodul $3\mathbb{Z}$ tidak memiliki komplemen karena irisannya dengan sebarang submodul taknol adalah taknol.Dalam [1] diberikan karakterisasi dari submodul terkomplemen pada modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama melalui modul hasil bagi dan submodul murni. Pengertian submodul murni sebagai berikut.

Definisi 1[1]
Misalkan M adalah R-modul. Submodul S dari M dikatakan *murni* jika untuk setiap $x \in S$ dengan $x = ay$ untuk suatu $y \in M$ dan $0 \neq a \in R$ maka $y \in S$.

Teorema 2[1]
Misalkan R adalah daerah ideal utama dan M adalah R-modul bebas yang dibangun secara hingga. Untuk sebarang submodul S dari M, pernyataan-pernyataan berikut ekivalen
1. S terkomplemen
2. S murni
3. M/S bebas.

Daerah Dedekind merupakan suatu kelas gelanggang yang lebih umum dari daerah ideal utama. Tujuan dari penelitian ini adalah membuat padanan karakterisasi submodul terkomplemen dalam Teorema 2 pada modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind.

2. KAJIAN LITERATUR

Misalkan R adalah daerah integral. Himpunan

$$K \coloneqq \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in R, b \neq 0 \right\}$$

membentuk lapangan dan disebut *lapangan hasil bagi* dari R. Lebih lanjut, K juga merupakan R-modul.

Definisi 3[2]
Misalkan R adalah daerah integral dengan lapangan hasil bagi K. Suatu R-submodul taknol $I \subseteq K$ disebut*ideal fraksional* dari R jika terdapat unsur taknol$x \in R$ sehingga $xI \subseteq R$.

Dengan demikian, setiap ideal taknol dari daerah integral adalah ideal fraksional. Misalkan R adalah daerah integral dengan lapangan hasil bagi K dan I adalah ideal fraksional dari R. Didefinisikan *dual* dari I sebagai himpunan

$$I^{-1} := \{x \in K \mid xI \subseteq R\}.$$

Jelas bahwa $II^{-1} \subseteq R$. Jika berlaku $II^{-1} = R$, maka I dikatakan *dapat dibalik.*

Definisi 4[2]
Daerah integralyang setiap ideal fraksionalnya dapat dibalik disebut*daerah Dedekind.*

Untuk mengenali apakah suatu daerah integral merupakan daerah Dedekind cukup ditinjau keterbalikan dari ideal-ideal taknolnya saja seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 5
Suatu daerah integral adalah daerah Dedekind jika dan hanya jika setiap ideal taknolnya dapat dibalik.

Bukti
Misalkan R adalah daerah ideal utama. Jika R adalah Dedekind maka setiap ideal taknol dari R dapat dibalik. Sebaliknya misalkan setiap ideal taknol dari R dapat dibalik dan I adalah sebarang ideal fraksional dari R. Misalkan pula $0 \neq a \in R$ sehingga $aI \subseteq R$ maka aI adalah ideal taknol dari R. Oleh karena itu $(aI)(aI)^{-1} = R$. Akibatnya untuk setiap $r \in R$ dapat dituliskan

$$r = \sum_{i=1}^{n} a y_i x_i$$

dengan $y_i \in I$ dan $x_i \in (aI)^{-1}$. Perhatikan karena $x_i \in (aI)^{-1}$ maka $ax_i I = x_i(aI) \subseteq R$. Oleh karena itu $ax_i \in I^{-1}$. Diperoleh

$$r = \sum_{i=1}^{n} y_i(ax_i) \in II^{-1}.$$

Jadi $R \subseteq II^{-1}$. Dengan demikian $II^{-1} = R$. Artinya setiap ideal fraksional dari R dapat dibalik. Jadi R adalah daerah Dedekind.

■

Misalkan R adalah daerah ideal utama dan $I = aR$ adalah ideal taknol dari R. Jelas bahwa $\left(\frac{1}{a}\right) R \subseteq I^{-1}$. Misalkan $x \in I^{-1}$ maka $xa \in R$ dan oleh karena itu$x \in \left(\frac{1}{a}\right) R$. Diperoleh$I^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right) R$. Karena$1 = a\left(\frac{1}{a}\right) \in II^{-1}$, akibatnya$II^{-1} = R$. Jadi setiap ideal taknol dari R dapat dibalik. Dengan demikian daerah ideal utama adalah daerah Dedekind.

Di lain pihak, daerah Dedekind tidak harus daerah ideal utama. Sebagai contoh,

$$\mathbb{Z}\sqrt{-5} = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

adalah daerah Dedekind namun bukan daerah ideal utama [3]. Dengan demikian daerah Dedekind adalah kelas gelanggang yang lebih umum dari daerah ideal utama.

Selanjutnya akan dikaji karakterisasi dari daerah Dedekind melalui modul projektif.

Definisi 6[3]
Suatu R-modul Pdikatakan *projektif*jika untuk setiap R-epimorfisma $\beta: V \to W$ dan setiap R-homomorfisma $\alpha: P \to W$ terdapat R-homomorfisma $\gamma: P \to V$ sehingga $\alpha = \beta\gamma$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] & \\
V \arrow[r, "\beta"] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 7[2]
Misalkan R adalah daerah integral dan I adalah ideal taknol dari R, maka I dapat dibalik jika dan hanya jika I projektif sebagai R-submodul.

Jadi suatu daerah integral adalah daerah Dedekind jika dan hanya jika setiap idealnya projektif.

Berikut adalah hasil-hasil terkait modul projektif yang akan digunakan untuk pembuktian teorema pada pembahasan. Bukti teorema dapat dilihat pada referensi.

Teorema 8[2]
Jumlah langsung dari modul-modul projektif adalah projektif.

Teorema 9[3]
Sebarang R-modul adalah projektif jika dan hanya jika isomorf dengan suku langsung dari suatu modul bebas.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Setiap modul bebas torsi yang dibangun secara hingga atas daerah integral termuat dalam suatu modul bebas seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 10[2]
Misalkan R adalah daerah integral dan M adalah R-modul yang dibangun secara hingga. Jika M bebas torsi maka M adalah submodul dari suatu R-modul bebas.

Lebih lanjut, sebarang modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind dan termuat pada suatu modul bebas adalah modul projektif.

Teorema 11[2]
Misalkan R adalah daerah Dedekind dan M adalah R-modul yang dibangun secara hingga. Jika M termuat dalam suatu R-modul bebas maka

$$M \cong I_1 \times \cdots \times I_n$$

dengan I_k adalah ideal dari R untuk $k = 1, \cdots, n$. Khususnya M projektif.

Bukti
Misalkan M adalah R-modul yang dibangun secara hingga. Misalkan pula F adalah R-modul bebas yang memuat M dengan basis B. Karena M dibangun secara hingga maka terdapat himpunan hingga $X \subseteq B$ sehingga $M \subseteq \langle X \rangle$. Pilih X dengan kardinalitas minimal. Selanjutnya dilakukan induksi pada $|X|$ untuk menunjukkan bahwa M isomorf dengan jumlah langsung ideal-ideal dari R. Untuk $|X| = 1$, maka $M \subseteq \langle x \rangle$ untuk suatu $x \in B$. Misalkan $m \in M$, maka $m = rx$ untuk suatu $r \in R$ yang tunggal. Definisikan pemetaan

$$f: M \longrightarrow R$$
$$m \mapsto r$$

maka f adalah suatu R-monomorfisma. Oleh karena itu M isomorf dengan peta(f) yang merupakan R-submodul dari R. Jadi M isomorf dengan suatu ideal dari R. Asumsikan untuk M dengan $|X| = n - 1$, M isomorf dengan jumlah langsung sejumlah hingga ideal-ideal dari R. Misalkan $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ dan$m \in M$, dengan memandang m sebagai unsur di F maka

$$m = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n$$

dengan koefisien $r_i \in R$ tunggal. Definisikan pemetaan

$$f: M \longrightarrow R$$
$$m \mapsto r_n$$

maka f adalah suatu R-homomorfisma dengan inti$(f) \subseteq \langle x_1, \cdots, x_{n-1} \rangle$. Buat barisan eksak

$$0 \longrightarrow \text{inti}(f) \longrightarrow M \longrightarrow \text{peta}(f) \longrightarrow 0$$

Karena peta(f) adalah R-submodul dari R maka peta(f) adalah ideal dari R. Oleh karena itu peta(f) projektif. Berdasarkan [3, Lema 2.2] dan [3, Teorema 2.8],$M \cong \text{peta}(f) \times \text{inti}(f)$. Perhatikan karena inti$(f) \subseteq \langle x_1, \cdots, x_{n-1} \rangle$maka berdasarkan asumsi induksi,

$$\text{inti}(f) \cong I_1 \times \cdots \times I_t$$

dengan I_k adalah ideal dari R untuk setiap $k = 1, \cdots, t$. Dengan demikian

$$M \cong \text{peta}(f) \times I_1 \times \cdots \times I_t.$$

Khususnya karena jumlah langsung dari modul-modul projektif adalah projektif maka M projektif.

■

Teorema 12
Modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind adalah bebas torsi jika dan hanya jika projektif.

Bukti
Teorema 10 dan Teorema 11 menghasilkan pernyataan dari kiri ke kanan. Sebaliknya misalkan R adalah daerah Dedekind dan M adalah R-modul projektif yang dibangun secara hingga. Karena M projektif maka$M$ isomorf dengan suku langsung dari suatu modul bebas. Perhatikan bahwa setiap submodul dari modul bebas atas daerah integral adalah bebas torsi. Oleh karena itu M bebas torsi.

■

Lema 13
Misalkan M adalah R-modul dan S adalah submodul M. Jika S submodul murni maka M/S bebas torsi.

Bukti
Misalkan $v + S \in M/S$ dan $a \neq 0$. Jika $a(v + S) = 0 + S$ maka $av \in S$. Karena $a \neq 0$ dan S submodul murni maka $v \in S$. Jadi

$v + S = 0 + S$, dengan demikian M/S bebas torsi.

■

Teorema berikut adalah hasil perumuman dari Teorema 2 pada modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind.

Teorema 14

Misalkan R adalah daerah Dedekind dan M adalah R-modul bebas yang dibangun secara hingga. Untuk setiap submodul S dari M, pernyataan-pernyataan berikut ekivalen

1. S terkomplemen
2. S murni
3. M/S projektif.

Bukti

Dari 1 ke 2, misalkan S terkomplemen, maka terdapat submodul T dari M sehingga berlaku $M = S \bigoplus T$. Misalkan $x \in S$ dengan $x = ay$ untuk suatu $y \in M$ dan $0 \neq a \in R$. Tulis

$$y = s + t$$

dengan $s \in S$ dan $t \in T$. Diperoleh

$$x = ay = a(s + t) = as + at.$$

Perhatikan karena $x, as \in S$ maka $x - as \in S$, akibatnya

$$x - as = at \in S \cap T = \{0\}.$$

Diperoleh $at = 0$. Perhatikan bahwa M bebas, maka terdapat suatu basis B bagi M. Tulis

$$t = r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n$$

dengan $r_1, \cdots, r_n \in R$ dan $b_1, \cdots, b_n \in B$. Diperoleh

$$\begin{aligned}(ar_1)b_1 + \cdots + (ar_n)b_n &= a(r_1 b_1) + \cdots + a(r_n b_n)\\ &= a(r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n)\\ &= at = 0.\end{aligned}$$

Karena B bebas linierharuslah

$$ar_1 = \cdots = ar_n = 0.$$

Perhatikan bahwa daerah Dedekind adalah daerah integral, oleh karena itu $ar_i = 0$ dengan $a \neq 0$ berakibat $r_i = 0$. Diperoleh

$$t = 0b_1 + \cdots + 0b_n = 0.$$

Dengan demikian $y = s + t = s + 0 = s \in S$, yakni $y \in S$. Jadi S adalah submodul murni.

Selanjutnya akan ditunjukkan kebenaran pernyataan 2 ke 3. Karena S murni maka M/S bebas torsi, oleh karena itu M/S projektif.

Untuk pembuktian 3 ke 1, misalkanM/S projektif, makaterdapat C suku langsung dari suatu R-modul bebas sehingga $C \cong M/S$. Misalkan φadalah suatu isomorfisma dari C ke M/S dan π adalah epimorfisma natural dari M ke M/S. Perhatikan karena C projektif maka terdapat R-homomorfisma θ dari C ke M sehingga diagram berikut komutatif ($\pi\theta = \varphi$).

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Perhatikan bahwa peta(θ) adalah submodul dari M. Klaim $M = S \bigoplus \text{peta}(\theta)$. Pertama akan ditunjukkan $M = S + \text{peta}(\theta)$. Misalkan $m \in M$, perhatikan $m + S = \pi(m) \in M/S$. Karena φ pada maka terdapat $x \in C$ sehingga $\varphi(x) = m + S$. Perhatikan

$$\begin{aligned}\theta(x) + S = \pi(\theta(x)) &= \pi\theta(x) = \varphi(x)\\ &= m + S.\end{aligned}$$

Diperoleh $m - \theta(x) \in S$, tulis $m - \theta(x) = s$ untuk suatu $s \in S$, maka

$$m = s + \theta(x) \in S + \text{peta}(\theta).$$

Jadi $M \subseteq S + \text{peta}(\theta)$, dengan demikian $M = S + \text{peta}(\theta)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $S \cap \text{peta}(\theta) = \{0\}$. Misalkan $v \in S \cap \text{peta}(\theta)$, maka $v \in S$ dan $v = \theta(c)$ untuk suatu $c \in C$. Perhatikan bahwa $\theta(c) \in S$, maka

$$\varphi(c) = (\pi\theta)(c) = \theta(c) + S = 0 + S.$$

Karena φ satu-satu maka $c = 0$. Diperoleh

$$v = \theta(c) = \theta(0) = 0.$$

Dengan demikian

$$S \cap \text{peta}(\theta) = \{0\}.$$

Diperoleh

$$M = S \bigoplus \text{peta}(\theta).$$

Jadi$S$ adalah submodul terkomplemen.

■

4. KESIMPULAN

Diperoleh pada modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind bahwa submodul terkomplemen ekivalen dengan submodul murni. Selain itu syarat perlu dan cukup bagi submodul terkomplemen adalah modul hasil bagi olehnya projektif.

5. REFERENSI

[1] W. Adkins dan S. H. Weintraub, *Algebra: An Approach via Module*

Theory. New York: Springer-Verlag, 1992.

[2] W. Narkiewicz, “Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers.” Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2004.

[3] D. Passman, *A Course in Ring Theory*. Pacifiic Grove, Calif.: Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books, 1991.