MATEMATIKA

LAPORAN

PENELITIAN BERSAMA DOSEN-MAHASISWA

SPEKTRUM ADJACENCY, SPEKTRUM LAPLACE, SPEKTRUM SIGNLESS-LAPLACE, DAN SPEKTRUM DETOUR GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT $K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

Oleh:

ABDUSSAKIR, M.Pd

DEASY SANDHYA ELYA IKAWATI

F. KURNIA NIRMALA SARI

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2013

LAPORAN PENELITIAN BERSAMA DOSEN-MAHASISWA

1. Judul Penelitian Hibah	:	Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless-Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$
2. Bidang Ilmu	:	Matematika
3. Judul Skripsi	:	(1) Persamaan Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency, Matriks Laplace, dan Matriks Signless-Laplace Graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ (2) Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, dan Spektrum Signless-Laplace Graf Multipartisi Komplit $\mathrm{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$
4. Peneliti	:	Abdussakir, M.Pd (NIP 19751006 200312 1 001) Deasy Sandhya Elya Ikawati (NIM 09610067) F. Kurnia Nirmala Sari (NIM 09610084)
5. Jurusan/Prodi Asal	:	Matematika
6. Lama kegiatan	:	5 (Lima) Bulan
7. Biaya yang diusulkan	:	Rp. 4.000.000,- (Empat Juta Rupiah)

Malang, 14 Januari 2013

Ketua Jurusan Matematika,	Ketua Peneliti,
Abdussakir, M.Pd	Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001	NIP 19751006 200312 1 001

PENGESAHAN LAPORAN

PENELITIAN BERSAMA DOSEN-MAHASISWA

Judul Penelitian	:	Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless-Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$
Bidang Ilmu	:	Matematika
Peneliti	:	Abdussakir, M.Pd (Ketua) Deasy Sandhya Elya Ikawati (Anggota) F. Kurnia Nirmala Sari (Anggota)

Telah disahkan pada tanggal, 14 Januari 2013.

a.n Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Pembantu Dekan Bidang Akademik

Dr. H. Agus Mulyono, S.Pd., M.Kes
NIP. 19750808 199903 1 003

Ketua Peneliti,

Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001

Mengesahkan
Ketua Lemlitbang UIN Maliki Malang,

Dr. Hj. Ulfah Utami, M.Si
NIP. 19650509 199903 2 002

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$.

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i

tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks adjacency dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \le i, j \le p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks adjacency suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Abdussakir, dkk, 2009:73-74).

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \le i, j \le p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks Laplace dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks Signless-Laplace dari graf G.

Pada graf G, lintasan-v_1v_n adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkankan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks Detour dari G adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G.

Pembahasan matriks Adjacency $A(G)$, matriks Laplace $L(G)$, matriks Signless-Laplace $L^+(G)$, dan matriks Detour $DD(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep *spectrum*. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan Spec(G). Jadi, spectrum graf G dapat ditulis dengan

$$\text{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum Adjacency, dari matriks $L(G)$ disebut spektrum Laplace, dari matriks $L^+(G)$ disebut spekturm Signless-Laplace, dan dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum Detour.

Adapun penelitian sebelumnya yang sudah dilakukan para peneliti tentang spectrum graf yaitu Shuhua Yin (2006) meneliti spektrum Adjacency dan spektrum Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Yuanping Zhang (2008) meneliti tentang Q-spectrum graf lolipop. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum Adjacency pada graf Komplit (K_n), graf Star (S_n), graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$), dan graf Lintasan (P_n). Ayyaswamy dan Balachandran (2010) meneliti spectrum Detour beberapa graf. Imam Fachruddin (2010) meneliti spektrum graf hasilkali Cartesius. Lailatul Khusnah (2011) meneliti spektrum Detour pada Graf Komplit (K_n). Bayu Tara Wijaya (2011) meneliti spektrum Detour Graf m-Partisi Komplit.

Melihat penelitian-penelitian sebelumnya, maka peneliti merasa perlu untuk meneliti spektrum suatu graf, yang lebih dikhususkan pada spektrum Adjacency, spektrum Laplace, spektrum Signless-Laplace, dan spektrum Detour pada graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Penelitian ini berusaha meneliti spektrum suatu graf secara lengkap meliputi keempat spectrum dan mengambil graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ dengan $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ dan α_i, $n \in N$.

B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana spektrum Adjacency, spektrum Laplace, spektrum Signless-Laplace, dan spektrum Detour graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan spektrum Adjacency, spektrum Laplace, spektrum Signless-Laplace, dan spektrum Detour graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai *spektrum* suatu graf sehingga dapat menjadi acuan peneliti lain untuk menentukan *spectrum* graf-graf lain yang belum dikaji dalam penelitian ini.

2. Memberikan informasi mengenai *spektrum* suatu graf sehingga dapat digunakan oleh peneliti lain untuk mengkaji lebih mendalam tentang karakteristik suatu graf atau untuk aplikasi pada masalah yang berkaitan.

BAB III

PEMBAHASAN

Berikut ini dipaparkan hasil penelitian terkait penentuan spectrum pada graf multi partisi komplit K$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$. Sebagaimana dijelaskan pada bab sebelumnya, jika $\alpha_i = n$ untuk semua i, maka K$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ ditulis menjadi $K_{n(k)}$. Pada pembahasan ini, spektrum graf multipartisi komplit K$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ dibahas secara terpisah antara $K_{n(k)}$ dengan K$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$, pada saat terdapat $\alpha_i \neq \alpha_j$. Hasil penelitian dinyatakan langsung dalam bentuk teorema beserta buktinya.

A. Spektrum Graf Multipartisi Komplit K$(\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k})$ dengan $\boldsymbol{\alpha_i = n}$ untuk semua *i*

Teorema 1

Misalkan $K_{n(k)}$ adalah graf k-partisi komplit dengan n titik pada masing-masing partisi. Maka spectrum Adjacency graf $K_{n(k)}$ adalah

$$Spec\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti :

Matriks adjacency dari graf $K_{n(k)}$ adalah

$$A\left(K_{n(k)}\right)=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\left(K_{n(k)}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I-A\left(K_{n(k)}\right)\right)=\begin{bmatrix}\lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - A)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(K_{n(k)})=\lambda^{k(n-1)}(\lambda+n)^{k-1}(\lambda-(k-1)n)$$

Karena, $\det(K_{n(k)})=0$, maka

$$\det(K_{n(k)})=\lambda^{k(n-1)}(\lambda+n)^{k-1}(\lambda-(k-1)n)=0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda=-n \; atau \; \lambda=0 \; atau \; \lambda=(k-1)n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -n$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(K_{n(k)}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n-(k-1)n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -n+n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n+n \end{bmatrix}$$

Matriks di atas adalah matriks berukuran $kn\ x\ kn$, untuk $\lambda = -n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua yaitu $-n+n$ sebanyak $k-1$, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -n$ adalah $k-1$.

Untuk $\lambda = 0$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(K_{n(k)}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ hanya menghasilkan k baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $kn \times kn$, maka baris yang berisi 0 semua ada $kn - k$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah $k(n-1)$.

Untuk $\lambda = (k-1)n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(K_{n(k)}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (k-1)n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & (k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & (k-1)n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & (k-1)n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1)n+n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)n+n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)n-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (k-1)n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (k-1)n$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa

$$Spec\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2

Misalkan $K_{n(k)}$ adalah graf k-partisi komplit dengan n titik pada masing-masing partisi. Maka spectrum Detour graf $K_{n(k)}$ adalah

$$Spec_{DD}\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks detour dari graf $K_{n(k)}$ adalah

$$DD\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & kn-1 & kn-1 & \cdots & kn-1 \\ kn-1 & 0 & kn-1 & \cdots & kn-1 \\ kn-1 & kn-1 & 0 & \cdots & kn-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kn-1 & kn-1 & kn-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $DD\ (K_{n(k)})$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - DD\left(K_{n(k)}\right)\right) = \begin{bmatrix} \lambda & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & \lambda & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & \lambda & \cdots & -(kn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena $\det(\lambda I - DD\ (K_{n(k)}))$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det\left(\lambda I - DD\ (K_{n(k)})\right) = (\lambda + kn - 1)^{kn-1}(\lambda - (kn-1)^2)$$

Karena, $\det\left(\lambda I - DD\ (K_{n(k)})\right) = 0$, maka

$$\det\left(\lambda I - DD\ (K_{n(k)})\right) = (\lambda + kn - 1)^{kn-1}(\lambda - (kn-1)^2) = 0$$

dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = -(kn-1)\ atau\ \lambda = (kn-1)^2$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -(kn-1)$ disubsitusikan ke dalam $\det\left(\lambda I - DD\ (K_{n(k)})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(kn)^2+kn & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -(kn-1)$ hanya menghasilkan 1 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $kn \times kn$, maka baris yang berisi 0 semua ada $kn-1$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(kn-1)$ adalah $(kn-1)$.

Untuk $\lambda = (kn-1)^2$ disubstitusikan ke dalam $\det\left(\lambda I - DD\ (K_{n(k)})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (kn-1)^2 & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & (kn-1)^2 & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & (kn-1)^2 & \cdots & -(kn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & (kn-1)^2 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks dengan menggunakan metode Jordan maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -kn+(kn)^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -kn+(kn)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(kn)^2-kn+kn+(kn)^2 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (kn-1)^2$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (kn-1)^2$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec_{DD}\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 3

Misalkan $K_{n(k)}$ adalah graf k-partisi komplit dengan n titik pada masing-masing partisi. Maka spectrum Laplace graf $K_{n(k)}$ adalah

$$Spec_L\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks Laplace dari graf $K_{n(k)}$

$$L\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & (k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $L\left(K_{n(k)}\right)$ yaitu,

$\det\left(\lambda I - L\left(K_{n(k)}\right)\right) =$

$$\begin{bmatrix} \lambda-(k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-(k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda-(k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-(k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda-(k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena $\det(\lambda I - L\left(K_{n(k)}\right))$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det\left(\lambda I - L\ (K_{n(k)})\right) = \lambda(\lambda - (k-1)n)^{k(n-1)}(\lambda - kn)^{k-1}$$

Karena, $\det\left(\lambda I - L\ (K_{n(k)})\right) = 0$, maka

$$\det\left(\lambda I - L\ (K_{n(k)})\right) = \lambda(\lambda - (k-1)n)^{k(n-1)}(\lambda - kn)^{k-1} = 0$$

dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0\ atau\ \lambda = (k-1)n\ atau\ \lambda = kn$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = 0$ disubsitusikan ke dalam $\det\left(\lambda I - L\ (K_{n(k)})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & (k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -(k-1)n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -(k-1)n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n-(k-1)n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n-(k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)n-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah 1.

Untuk $\lambda = (k-1)n$ disubstitusikan ke dalam $\det\left(\lambda I - L\ (K_{n(k)})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (k-1)n$ hanya menghasilkan k baris yang elemennya tidak berisi 0 semua yaitu, dan diketahui matriks di atas berukuran $kn \times kn$, maka baris yang berisi 0 semua ada $kn - k$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (k-1)n$ adalah $k(n-1)$.

Untuk $\lambda = kn$ disubstitusikan ke dalam $\det\left(\lambda I - L\ (K_{n(k)})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} kn-(k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & kn-(k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & kn-(k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & kn-(k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & kn-(k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & kn-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n+(k-1)n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (k-1)n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak $k-1$, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = kn$ adalah $k-1$.

Jadi terbukti bahwa $Spec_L(K_{n(k)}) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$

B. Spektrum Graf Multipartisi Komplit $\mathrm{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$

Graf multipartisi komplit $\mathrm{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ dengan $\alpha_1, = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{k-1} = m$ dan α_k= m + 1 akan ditulis menjadi K_{k-1}(m)(m+1). Dengan demikian, maka K(m, m, m, …,m, m+1) dengan m sebanyak a faktor akan ditulis menjadi K_a(m)(m+1).

Teorema 4

Misal $K_a(m)(m+1)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $2 \leq a, m \in N$.

Maka spektrum Adjacency $\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah :

$$Spec\left(A\left(K_a(m)(m+1)\right)\right) = \begin{pmatrix} -m & 0 & \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} & \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} \\ a-1 & a(m-1)+m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti :

Misalkan $A\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah matriks adjacency dari graf multipartisi komplit $\left(K_a(m)(m+1)\right)$.

$$A(K_a(m)(m+1)) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} am \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1 \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0\ 1 \cdots 1 \cdots}}_{am}\ \underbrace{\hphantom{1 \cdots 1}}_{m+1} & \end{array}$$

Setelah didapatkan matriks $A\big(K_a(m)(m+1)\big)$ maka persamaan polinomial karakteristik dari $A\big(K_a(m)(m+1)\big)$, yaitu :

$$\big(\lambda I - A(K_a(m)(m+1)\big) = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\det|\lambda I - A(K_a(m)(m+1))| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\det|\lambda I - A(K_a(m)(m+1))| = \begin{array}{cl} \left| \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \right| & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m+1 \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{-1 \cdots -1 \ -1 \cdots -1 \cdots}}_{am} \ \underbrace{\hphantom{\lambda \cdots 0}}_{m+1} & \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda + m & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda + m & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda - \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} a(m\text{-}1)+m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} a\text{-}1 \\ \left.\vphantom{\frac{1}{2}}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\frac{1}{2}}\right\} 1 \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{\lambda \cdots 0}}_{a(m\text{-}1)+m} \ \underbrace{\hphantom{0 \cdots \lambda+m}}_{a\text{-}1} \ \underbrace{\hphantom{\lambda - \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am}}{2}}}_{1} \ \underbrace{\hphantom{\lambda - \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am}}{2}}}_{1} & \end{array}$$

Sehingga dari pola diagonal utama yang diperoleh dengan mengeliminasi matriks akan membentuk suatu persamaan polinomial karakteristik, yaitu :

$$\det(\lambda I - A(K(m)(m+1))) = \lambda^{a(m-1)+m}\left(\lambda+m\right)^{a-1}(\lambda - \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2})(\lambda - \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2})$$

Dari persamaan polinomial karakterisktik tersebut, maka untuk mendapatkan nilai eigennya adalah :

$$\det\left(\lambda I - A\left(K\left(m\right)\left(m+1\right)\right)\right) = 0$$

$$\lambda^{a(m-1)+m}\left(\lambda+m\right)^{a-1}(\lambda - \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2})(\lambda - \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2}) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 0$ atau $\lambda_2 = -m$ atau $\lambda_3 = \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am\,(am+2m+4+m^2)}}{2}$ atau $\lambda_4 = \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am\,(am+2m+4+m^2)}}{2}$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1.

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubsitusikan λ_1 ke dalam $\det\left(\lambda I - A\left(K_a(m)(m+1)\right)\right)$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - A(K_a(m)(m+1))| = \begin{array}{l} \left|\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} am \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1 \end{matrix} \\ \quad\underbrace{\hphantom{-1 \cdots -1 \; -1 \cdots -1 \cdots}}_{am} \; \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{m+1} \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & m & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(a-1)m}{2}+\frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{(a-1)m}{2}-\frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2}
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} a(m-1)+m \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} a-1 \\
\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} 1 \\
\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} 1
\end{array}
\\
\underbrace{\qquad\quad}_{a(m-1)+m}\ \underbrace{\qquad\quad}_{a-1}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{1}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{1} &
\end{array}$$

Karena pada matriks di atas adalah matriks yang mempunyai kolom sebanyak $(a+1)m+1$ dan terdapat $a(m-1)+m$ nulitas. Menurut teorema 2.4 dijelaskan bahwa nulitas dari matriks A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak $a(m-1)+m$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk $\lambda_2 = -m$ disubsitusikan λ_2 ke dalam $\det\left(\lambda I - A\left(K_a(m)(m+1)\right)\right)$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - A(K_a(m)(m+1))| = \begin{array}{cc}
\left|\begin{pmatrix}
-m & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & -m & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & \cdots & -1 & -m & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
-1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -m & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
-1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -m & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
-1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -m
\end{pmatrix}\right| & \begin{array}{l} \} \, am \\ \\ \} \, m+1 \end{array} \\
\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{am} & \underbrace{\qquad\quad}_{m+1} \end{array} &
\end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
-m & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-2m-(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{-2m-(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2}
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \} \, a(m\text{-}1)+m \\ \} \, a\text{-}1 \\ \} \, 1 \\ \} \, 1 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \underbrace{\qquad\quad}_{a(m\text{-}1)+m} & \underbrace{\qquad}_{a\text{-}1} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1} \end{array} &
\end{array}$$

Pada matriks di atas dapat dilihat bahwa matriks tersebut memilik $(a-1)$ nulitas. Menurut teorema 2.4 dijelaskan bahwa nulitas dari matriks A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -m$ sebanyak $(a-1)$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3.

Untuk $\lambda_3 = \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am\,(am+2m+4+m^2)}}{2}$ disubsitusikan λ_3 ke dalam $\det\big(\lambda I - A\big(K_a(m)(m+1)\big)\big)$.

Dengan cara yang sama dengan pembuktian sebelumnya, pada matriks dapat dilihat bahwa matriks tersebut memilik 1 nulitas. Menurut teorema 2.4 dijelaskan bahwa nulitas dari matriks A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_3 = \frac{(a-1)m}{2} - \frac{\sqrt{am\,(am+2m+4+m^2)}}{2}$ sebanyak 1.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4.

Untuk $\lambda_4 = \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am\,(am+2m+4+m^2)}}{2}$ disubsitusikan λ_4 ke dalam $\det\big(\lambda I - A\big(K_a(m)(m+1)\big)\big)$.

Dengan cara yang sama dengan pembuktian sebelumnya, pada matriks dapat dilihat bahwa matriks tersebut memilik 1 nulitas. Menurut teorema 2.4 dijelaskan bahwa nulitas dari matriks A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan

$\lambda_3 = \frac{(a-1)m}{2} + \frac{\sqrt{am\,(am+2m+4+m^2)}}{2}$ sebanyak 1.

Jadi terbukti bahwa

$$Spec\left(A\left(K_a(m)(m+1)\right)\right)=\begin{pmatrix} -m & 0 & \frac{(a-1)m}{2}-\frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} & \frac{(a-1)m}{2}+\frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} \\ a-1 & a(m-1)+m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 5

Misal $K_a(m)(m+1)$ adalah graf multipartisi komplit dengan m sebanyak $a, 1 \leq m \in \mathbb{N}$.

Maka spektrum Laplace $\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah :

$$Spec\left(K_a(m)(m+1)\right)=\begin{pmatrix} 0 & am & am+1 & (a+1)m+1 \\ 1 & m & a(m-1) & a \end{pmatrix}$$

Bukti :

Misalkan $A\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah matriks adjacency dari graf multipartisi komplit $\left(K_a(m)(m+1)\right)$.

$$A(K_a(m)(m+1))=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} am \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1 \end{array} \\ \underbrace{\hspace{6cm}}_{am} \quad \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{m+1} \end{array}$$

$D\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah matriks derajat dari graf multipartisi komplit $K_a(m)(m+1)$.

$$D(K_a(m)(m+1)) = \begin{array}{c@{}l} \left(\begin{array}{cccccccccc} am+1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & am+1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & am \end{array}\right) & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} am \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m+1 \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{am+1 \quad \cdots \quad am+1 \quad am+1 \quad \cdots \quad am+1 \quad \cdots}}_{am} \underbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad am}}_{m+1} & \end{array}$$

Maka matriks Laplace dari graf multipartisi komplit adalah:

$$L\big(K_a(m)(m+1)\big) = D\big(K_a(m)(m+1)\big) - A\big(K_a(m)(m+1)\big)$$

$$L(K_a(m)(m+1)) = \left(\begin{array}{cccccccccc} am+1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & am+1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & am \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$$L\big(K_a(m)(m+1)\big) = \begin{array}{c@{}l} \left(\begin{array}{cccccccccc} am+1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & am+1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & am+1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & am \end{array}\right) & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} am \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m+1 \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{am+1 \quad \cdots \quad am+1 \quad am+1 \quad \cdots \quad am+1 \quad \cdots}}_{am} \underbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad am}}_{m+1} & \end{array}$$

Setelah didapatkan matriks $L\big(K_a(m)(m+1)\big)$ maka persamaan polinomial karakteristik dari $L\big(K_a(m)(m+1)\big)$, yaitu :

$$\big(\lambda I - L(K_a(m)(m+1)\big) = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} am+1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & am+1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & am+1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & am \end{pmatrix} \right)$$

$$\det|\lambda I - L(K_a(m)(m+1))| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} am+1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & am+1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & am+1 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & am+1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & am \end{pmatrix} \right|$$

$$\det|\lambda I - L(K_a(m)(m+1))| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-am-1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-am-1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda-am-1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-am-1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda-am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda-am \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m+1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{\lambda-am-1 \quad \cdots \quad \lambda-am-1 \quad \lambda-am-1 \quad \cdots \quad \lambda-am-1 \quad \cdots}}_{am} \; \underbrace{\hphantom{\lambda-am \quad \cdots \quad \lambda-am}}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan meto[illegible] yang ada pada *softwa*[illegible] 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda - am & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda - am & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - am - 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & \lambda - am - 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - \left(\left(a+1\right)m+1\right) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \left(\left(a+1\right)m+1\right)
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\}\,1 \\
\}\,m \\
\}\,a(m-1) \\
\}\,a
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
\underbrace{\qquad}_{1} & \underbrace{\qquad\qquad}_{m} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{a(m\text{-}1)} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{a}
\end{array}
&
\end{array}$$

Sehingga dari pola diagonal utama yang diperoleh dengan mengeliminasi matriks akan membentuk suatu persamaan polinomial karakteristik, yaitu :

$$\det(\lambda I - L(K_a(m)(m+1))) = \lambda(\lambda - am)^m(\lambda - am - 1)^{a(m-1)}\left(\lambda - \left(\left(a+1\right)m+1\right)\right)^a$$

Dari persamaan polinomial karakterisktik tersebut, maka untuk mendapatkan nilai eigennya adalah :

$$\det\left(\lambda I - L\left(K_a\left(m\right)\left(m+1\right)\right)\right) = 0$$

$$\lambda(\lambda - am)^m(\lambda - am - 1)^{a(m-1)}\left(\lambda - \left(\left(a+1\right)m+1\right)\right)^a = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 0$ atau $\lambda_2 = am$ atau $\lambda_3 = am + 1$ atau $\lambda_4 = (a+1)m + 1$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1.

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubsitusikan λ_1 ke dalam $\det\left(\lambda I - L\left(K_a(m)(m+1)\right)\right)$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - L(K_a(m)(m+1))| = \left|\begin{pmatrix} -am-1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -am-1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -am-1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -am-1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & -am & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & -am \end{pmatrix}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} am \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m+1 \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{1 \cdots 1 \quad 1 \cdots 1 \quad\quad}}_{am} \; \underbrace{\hphantom{1 \cdots 1}}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -am & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-am & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-am-1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & \lambda-am-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-\left(\left(a+1\right)m+1\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\left(\left(a+1\right)m+1\right) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, 1 \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} a(m-1) \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} a \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{0}}_{1}\;\underbrace{\hphantom{-am \cdots 0}}_{m}\;\underbrace{\hphantom{\lambda-am-1 \cdots \lambda-am-1}}_{a(m-1)}\;\underbrace{\hphantom{\lambda-((a+1)m+1) \cdots \lambda-((a+1)m+1)}}_{a}$$

Pada matriks di atas terdapat 1 nulitas. Menurut teorema 2.4 dijelaskan bahwa nulitas dari matriks A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 1.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2.

Untuk $\lambda_2 = am$ disubsitusikan λ_2 ke dalam $\det\left(\lambda I - L\left(K_a(m)(m+1)\right)\right)$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - L(K_a(m)(m+1))| = \left\| \begin{matrix} -1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m+1 \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}_{am} \quad \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\left(\begin{matrix} am & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & m+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m+1 \end{matrix} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{1}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} a(m-1) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{x}}_{1} \quad \underbrace{\hphantom{xxxx}}_{m} \quad \underbrace{\hphantom{xxxx}}_{a(m-1)} \quad \underbrace{\hphantom{xxxxx}}_{a}$$

Karena untuk $\lambda_2 = am$ menghasilkan m nulitas (diketahui dari persamaan polinomial $(\lambda - am)^m$), maka banyak basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = am$ sebanyak m.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3.

Untuk $\lambda_3 = am + 1$ disubsitusikan λ_3 ke dalam $\det(\lambda I - L(K_a(m)(m+1)))$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - L(K_a(m)(m+1))| = \begin{array}{c} \left|\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} m+1 \end{matrix} \\ \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0 \; 1 \cdots 1 \cdots}}_{am} \underbrace{\hphantom{1 \cdots 1}}_{m+1} \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} am+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -m \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{0}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} a(m-1) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} a \end{matrix} \\ \underbrace{\hphantom{am+1}}_{1} \; \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{m} \; \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{a(m-1)} \; \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{a} \end{array}$$

Karena untuk $\lambda_3 = am + 1$ menghasilkan $a(m-1)$ nulitas (diketahui dari persamaan polinomial $(\lambda - am - 1)^{a(m-1)}$), maka banyak basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = am + 1$ sebanyak $a(m-1)$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4.

Untuk $\lambda_4 = (a+1)m + 1$ disubsitusikan λ_4 ke dalam $\det(\lambda I - L(K_a(m)(m+1)))$

diperoleh :

$$\det|\lambda I - L(K_a(m)(m+1))| = \left|\begin{pmatrix} m & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & m & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & m & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & m & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & m+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & m+1 \end{pmatrix}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m+1 \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{m \cdots 0\ 1 \cdots 1 \cdots}}_{am} \quad \underbrace{\hphantom{1 \cdots m+1}}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{pmatrix} (a+1)m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{1}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} a(m-1) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} a \end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{(a+1)m+1}}_{1} \quad \underbrace{\hphantom{m+1 \cdots m+1}}_{m} \quad \underbrace{\hphantom{0 \cdots m}}_{a(m-1)} \quad \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{a}$$

Karena untuk $\lambda_4 = (a+1)m+1$ menghasilkan a nulitas (diketahui dari persamaan polinomial $(\lambda - (a+1)m+1)^a$), maka banyak basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = (a+1)m+1$ sebanyak a.

Jadi terbukti bahwa $Spec\left(L\left(K_a(m)(m+1)\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & am & am+1 & (a+1)m+1 \\ 1 & m & a(m-1) & a \end{pmatrix}$

Teorema 6

Misal $K(m)(m+1)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ maka spektrum *Signless*-Laplace $\left(K(m)(m+1)\right)$ adalah :

$$Spec(S\left(K(m)(m+1)\right)) = \begin{pmatrix} 0 & m & m+1 & 2m+1 \\ 1 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti :

Misalkan $A\left(K(m)(m+1)\right)$ adalah matriks adjacency dari graf bipartisi komplit $\left(K(m)(m+1)\right)$.

$$A(K(m)(m+1)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{matrix}}\right\} m+1 \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{am} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m+1} \end{array}$$

$D\big(K(m)(m+1)\big)$ adalah matriks derajat dari graf bipartisi komplit $K(m)(m+1)$.

$$D(K(m)(m+1)) = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{matrix}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} am \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{m+1\quad 0\quad \cdots\quad m+1}}_{am} & \underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0}}_{m+1} \end{array} \end{array}$$

Maka matriks *signless*-Laplace dari graf bipartisi komplit adalah:

$$S\big(K(m)(m+1)\big) = D\big(K(m)(m+1)\big) + A\big(K(m)(m+1)\big)$$

$$S(K(m)(m+1)) = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$S\big(K(m)(m+1)\big) = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} m+1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{matrix}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} am \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{m+1\quad 0\quad \cdots\quad m+1}}_{am} & \underbrace{\hphantom{1\quad 1\quad 1\quad \cdots\quad 1}}_{m+1} \end{array} \end{array}$$

Setelah didapatkan matriks $S\big(K(m)(m+1)\big)$ maka persamaan polinomial karakteristik dari $S\big(K(m)(m+1)\big)$, yaitu :

$$\big(\lambda I - S(K(m)(m+1)\big) = \left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m+1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{pmatrix}\right)$$

$$\det|\lambda I - S(K(m)(m+1))| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m+1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{pmatrix}\right|$$

$$\det|\lambda I - S(K(m)(m+1))| = \left|\begin{matrix}\begin{pmatrix} \lambda-m-1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda-m-1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-m-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda-m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \lambda-m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \lambda-m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-m \end{pmatrix}\end{matrix}\right| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m+1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{am}\qquad\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-m & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-m-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda-m-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-2m-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{0}\right\} 1 \\ \left.\begin{array}{l} \vphantom{0} \\ \vphantom{\vdots} \\ \vphantom{0} \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{l} \vphantom{0} \\ \vphantom{\vdots} \\ \vphantom{0} \end{array}\right\} m-1 \\ \left.\vphantom{0}\right\} 1 \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{1}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m-1}\ \underbrace{\qquad\quad}_{1} \end{array}$$

Sehingga dari pola diagonal utama yang diperoleh dengan mengeliminasi matriks akan membentuk suatu persamaan polinomial karakteristik, yaitu :

$$\det(\lambda I - S(K(m)(m+1))) = \lambda(\lambda - m)^m (\lambda - m - 1)^{m-1} \left(\lambda - 2m - 1\right)$$

Dari persamaan polinomial karakterisktik tersebut, maka untuk mendapatkan nilai eigennya adalah :

$$\det\left(\lambda I - S\left(K\left(m\right)\left(m+1\right)\right)\right) = 0$$

$$\lambda(\lambda - m)^m (\lambda - m - 1)^{m-1} \left(\lambda - 2m - 1\right) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 0$ atau $\lambda_2 = m$ atau $\lambda_3 = m + 1$ atau $\lambda_4 = 2m + 1$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1. Untuk $\lambda_1 = 0$ disubsitusikan λ_1 ke dalam $\det\left(\lambda I - S\left(K(m)(m+1)\right)\right)$ diperoleh :

$$\det|\lambda I-S(K(m)(m+1))| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-m-1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda-m-1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-m-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda-m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \lambda-m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \lambda-m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-m \end{pmatrix}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m+1 \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{am}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan Jordan yang ada pada Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -m & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -m-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -m-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2m-1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{1}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{m}\;\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m-1}\;\underbrace{\qquad}_{1}$$

Pada matriks di atas terdapat 1 nulitas. Menurut teorema 2.4 dijelaskan bahwa nulitas dari matriks A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 1.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2.

Untuk $\lambda_2 = m$ disubsitusikan λ_2 ke dalam det $\left(\lambda I - S\left(K(m)(m+1)\right)\right)$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - S(K(m)(m+1))| = \left|\begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{-1 \;\; -1 \;\; \cdots \;\; -1}}_{am} & \underbrace{\hphantom{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0}}_{m+1} \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m-1 \\ \} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{\hphantom{m}}_{1} & \underbrace{\hphantom{0 \;\; \cdots \;\; 0}}_{m} & \underbrace{\hphantom{0 \;\; \cdots \;\; 0}}_{m-1} & \underbrace{\hphantom{-m-1}}_{1} \end{array}$$

Karena untuk $\lambda_2 = m$ menghasilkan *m* nulitas (diketahui dari persamaan polinomial $(\lambda - m)^m$), maka banyak basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = m$ sebanyak *m*.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3.

Untuk $\lambda_3 = m + 1$ disubsitusikan λ_3 ke dalam $\det(\lambda I - S(K(m)(m+1)))$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - S(K(m)(m+1))| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} am \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{am}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m+1}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ 1 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-1 \\ \}\ 1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{1}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{m}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{m-1}\ \underbrace{\quad}_{1}$$

Karena untuk $\lambda_3 = m + 1$ menghasilkan $m - 1$ nulitas (diketahui dari persamaan polinomial $(\lambda - m - 1)^{m-1}$), maka banyak basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = m + 1$ sebanyak $m - 1$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4.

Untuk $\lambda_4 = 2m + 1$ disubsitusikan λ_4 ke dalam $\det(\lambda I - S(K(m)(m+1)))$ diperoleh :

$$\det|\lambda I - S(K(m)(m+1))| = \begin{array}{c} \left|\begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & m & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & m+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & m+1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & m+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m+1 \end{pmatrix}\right| \\ \underbrace{\hphantom{-1\;-1\;\cdots\;-1}}_{am}\;\underbrace{\hphantom{m+1\;\;0\;\;0\;\;\cdots\;\;m+1}}_{m+1} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}m\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} am \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{matrix}}\right\} m+1 \\ \vphantom{\underbrace{x}_{m}} \end{array}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka akan didapatkan :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{2m+1}}_{1}\;\underbrace{\hphantom{m+1\;\cdots\;m+1}}_{m}\;\underbrace{\hphantom{0\;\cdots\;m}}_{m-1}\;\underbrace{\hphantom{0}}_{1} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{1}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} m-1 \\ \left.\vphantom{1}\right\} 1 \\ \vphantom{\underbrace{x}_{m}} \end{array}$$

Karena untuk $\lambda_4 = 2m + 1$ menghasilkan 1 nulitas (diketahui dari persamaan polinomial $(\lambda - 2m + 1)$), maka banyak basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = 2m + 1$ sebanyak 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec\big(S\left(K(m)(m+1)\right)\big) = \begin{pmatrix} 0 & m & m+1 & 2m+1 \\ 1 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix}$

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai spektrum Adjacency, spectrum Detour, spektrum Laplace, dan spektrum *Signless*-Laplace, dapat diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Misalkan $K_{n(k)}$ adalah graf k-partisi komplit dengan n titik pada masing-masing partisi. Maka spectrum Adjacency graf $K_{n(k)}$ adalah

$$Spec\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

2. Misalkan $K_{n(k)}$ adalah graf k-partisi komplit dengan n titik pada masing-masing partisi. Maka spectrum Detour graf $K_{n(k)}$ adalah

$$Spec_{DD}\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$$

3. Misalkan $K_{n(k)}$ adalah graf k-partisi komplit dengan n titik pada masing-masing partisi. Maka spectrum Laplace graf $K_{n(k)}$ adalah

$$Spec_L\left(K_{n(k)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$$

4. Misal $K_a(m)(m+1)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $2 \leq a, m \in N$. Maka spektrum Adjacency $\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah :

$$Spec\left(A\left(K_a(m)(m+1)\right)\right)=\begin{pmatrix} -m & 0 & \frac{(a-1)m}{2}-\frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} & \frac{(a-1)m}{2}+\frac{\sqrt{am(am+2m+4)+m^2}}{2} \\ a-1 & a(m-1)+m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Misal $K_a(m)(m+1)$ adalah graf multipartisi komplit dengan m sebanyak $a, 1 \leq m \in \mathbb{N}$. Maka spektrum Laplace $\left(K_a(m)(m+1)\right)$ adalah :

$$Spec\left(K_a(m)(m+1)\right)=\begin{pmatrix} 0 & am & am+1 & (a+1)m+1 \\ 1 & m & a(m-1) & a \end{pmatrix}$$

6. Misal $K(m)(m+1)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ maka spektrum *Signless*-Laplace $\left(K(m)(m+1)\right)$ adalah :

$$Spec(S\left(K(m)(m+1)\right))=\begin{pmatrix} 0 & m & m+1 & 2m+1 \\ 1 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian, maka penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menentukan spectrum graf multipartisi komplit yang belum dibahas dalam penelitian ini. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada penentuan spectrum graf yang lain.