

## Control de trayectorias basado en álgebra lineal

Scaglia, G. J. E.<sup>a,\*</sup>, Serrano, M. E.<sup>b</sup>, Albertos, P.<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Instituto de Ingeniería Química. Departamento de Ingeniería Química. Universidad Nacional de San Juan. Argentina

<sup>b</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Instituto de Ingeniería Química. Departamento de Física. Universidad Nacional de San Juan. Argentina

<sup>c</sup>Instituto Universitario de Automática e Informática Industrial. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universitat Politècnica de València, España.

**To cite this article:** Scaglia, G. J. E., Serrano, M. E., Albertos, P. 2020. Linear Algebra Based Trajectory Control. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 00, 1-5. <https://doi.org/10.4995/riai.2017.13584>

### Resumen

En este tutorial se resumen las principales características de una nueva metodología de diseño de sistemas de control para el seguimiento de trayectorias en procesos no lineales. Esta metodología, denominada LAB (Linear Algebra Based), fue presentada por los autores hace más de diez años y ha tenido una fuerte repercusión por su sencillez y facilidad de aplicación, si bien no es aplicable para algunos problemas de seguimiento en sistemas no lineales. Se exponen las etapas en el diseño de un controlador LAB, tanto en tiempo continuo como en discreto. La aplicación al control de la trayectoria de un robot móvil, en tiempo continuo, sirve para ilustrar el desarrollo e implementación del control. Se analizan algunas propiedades del sistema controlado y se resaltan las condiciones de aplicación. Numerosas referencias facilitan el desarrollo de algunas características y su aplicación en diversos campos de la robótica y del control de procesos en general.

#### Palabras Clave:

Control de trayectorias, Control por prealimentación, Control por realimentación, Perturbaciones, Incertidumbre en el modelo, Control basado en modelo.

### Linear Algebra Based trajectory control

#### Abstract

In this tutorial, the main features of a new control design methodology for tracking control in nonlinear processes is summarized. The so called LAB (Linear Algebra Based) methodology was introduced by the authors more than ten years ago and it has been accepted and used by many researchers mainly due to its simplicity and easy application. Nevertheless, it is not applicable to all the tracking problems dealing with nonlinear systems. The LAB controller design procedure, both in continuous time and discrete time, is outlined. The design of the trajectory control of a mobile robot illustrates the procedure as well as its implementation. Some properties of the controlled process are discussed and the problem requirements for a successful application are pointed out. Several references allow a deeper analysis of the controlled plant features as well as its application in a variety of processes, either in robotics or in process control.

**Keywords:** Trajectory control, Feedforward control, Feedback control, Disturbances, Model uncertainty, Model based control

## 1. Introducción

Los problemas de control se han clasificado tradicionalmente en dos categorías: *Sistemas de regulación*, en los que la referencia es básicamente constante y el objetivo es reducir el

efecto de las perturbaciones en el proceso controlado, y *servosistemas* o sistemas de control de trayectorias, en los que el objetivo básico es controlar el sistema para que las variables de salida sigan una referencia externa, haciendo frente a posibles perturbaciones. En realidad, ambos problemas de control tienen

\*Autor para correspondencia: [gscaglia@unsj.edu.ar](mailto:gscaglia@unsj.edu.ar)  
Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

una resolución similar basada en la realimentación de la información obtenida del proceso. En el caso de los servosistemas se dispone de una información adicional, la referencia y tal vez también sus derivadas, lo que permite establecer un control por prealimentación que puede mejorar las prestaciones.

Existe una gran variedad de metodologías para el diseño de sistemas de control, aunque todas ellas utilizan el conocimiento (modelo) del comportamiento del sistema y de las perturbaciones. Ello hace que cada metodología sea más o menos apropiada para un problema de control concreto en función de los objetivos de control que se planteen y del tipo de modelo que represente el proceso a controlar.

En este trabajo se va a considerar el problema de seguimiento de trayectorias, con o sin perturbaciones, en sistemas no lineales afines en la señal de control.

El problema de seguimiento de trayectoria es uno de los problemas principales en la teoría de control. Para el caso de sistemas lineales, en Francis (1977) se muestra que el problema se puede resolver si se resuelve un sistema de ecuaciones matriciales lineales. Una técnica utilizada para el seguimiento de trayectoria es la inversión de sistemas. En el trabajo de Brockett (1965) se estableció la primera condición necesaria y suficiente para la invertibilidad en términos de los coeficientes de las matrices del sistema y se estableció un algoritmo de inversión cuando el sistema tiene una sola entrada. En Silverman (1968) se mostró que este algoritmo de inversión se puede generalizar a sistemas variables en el tiempo, manteniendo la condición de ser de una sola entrada, y se puede modificar para obtener un sistema inverso de menor orden dinámico. En Silverman (1969) se mejora el algoritmo propuesto anteriormente.

En Hepburn and Wonham (1984) se define un problema de regulación como el problema de seguir una señal de referencia generada por un modelo dinámico fijo llamado exosistema. Si se cumple que el error de seguimiento tiende a cero con  $t \rightarrow \infty$  y se presenta una adecuada condición sobre la observabilidad, entonces el controlador necesariamente incorpora un modelo interno de la dinámica del exosistema. El problema de regulación de sistemas no lineales se trata ampliamente en Isidori and Byrnes (1990) en donde se considera que la salida pueda seguir una familia de señales de referencia producidas por un exosistema, y el problema tiene solución si y solo si existe la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales. En particular se muestra que la solución del problema del regulador existe bajo la suposición de que la dinámica cero tenga un equilibrio hiperbólico.

En Charlet et al. (1988) se presenta la linealización de un sistema no lineal, dándose las condiciones necesarias y suficientes que se aplican a un modelo general de un avión. En Levine and Marino (1990) se trata el problema de linealización dinámica en  $R^4$  de manera que el sistema de lazo cerrado sea lineal y controlable. En los casos en los que el sistema no tiene bien definido su grado relativo y por lo tanto no es linealizable, en Ghandan and Blankenship (1993) se utiliza un esquema adaptativo de seguimiento. Esta técnica usa realimentación y un cambio de coordenadas.

En Devasia et al. (1996) se introduce un procedimiento de inversión para sistemas no lineales, construyendo una trayectoria de entrada en la pre-imagen de la trayectoria de salida que, para el caso de sistemas de fase no mínima, da lugar a una tra-

yectoria no causal. En este trabajo se realiza una interpretación geométrica interesante en donde se observa que la parte no causal de la entrada nominal lleva los estados internos del sistema a través del espacio inestable de la dinámica cero a una condición inicial particular, mientras la salida permanece en cero. Esto garantiza dos cosas: 1) la salida se reproduce con energía de control finita y 2) al final de la trayectoria, el sistema llega al espacio estable de la dinámica cero, con lo cual los estados convergen a cero sin afectar a la salida.

En den Boom (1998) se utiliza linealización por realimentación junto con un esquema de control predictivo combinando las ventajas de las dos metodologías. En particular en este trabajo se muestra que este esquema se puede extender a sistemas con modelo no afín en la entrada. El problema de inversión estable de un sistema no lineal discreto se trata en Zeng and Hunt (2000), donde dada una secuencia acotada de la salida, se deriva la ecuación del sistema que genera la entrada. El hecho de resolver el problema de inversión es equivalente a encontrar una solución acotada de esta ecuación. Luego, utilizando la iteración de Picard se puede encontrar la trayectoria del estado para alcanzar la linealización exacta.

El problema de linealización por realimentación generalizada se presenta en Rojas and Goodwin (2001), siendo capaz de tratar con algunos sistemas no lineales que tienen dinámicas cero inestables.

En Lee et al. (2003) se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la linealización de sistemas discretos mediante realimentación dinámica restrictiva. En este trabajo se muestra que la clase de sistemas de entrada única que son linealizables mediante realimentación dinámica no es mayor que la clase linealizable mediante realimentación estática, lo cual se mantiene para sistemas continuos también. Un algoritmo para el cálculo de la solución dinámica basada en condiciones geométricas necesarias, que se convierten en condiciones suficientes cuando el índice de prolongación es 2, se presenta en Battilotti and Califano (2004), considerando sistemas continuos afines.

El control por linealización de trayectoria (TLC) es una técnica nueva que combina inversión dinámica de lazo abierto y una realimentación lineal variante en el tiempo (LTV) lo cual garantiza que la salida alcance estabilidad exponencial a lo largo de la trayectoria de referencia (Xingling and Honglun (2016)). Por este motivo la técnica TLC, capaz de rechazar perturbaciones en forma natural, se ha aplicado en el área militar en el problema de seguimiento de trayectorias en misiles (ver, p. ej. Zhu et al. (2001) y Zhu et al. (2000)). Cuando las incertidumbres internas y externas son grandes el desempeño de TLC se degrada (Li et al. (2012), Huang and Zhu (2009)). Para mejorar el desempeño se han utilizado las propiedades de redes neuronales y lógica borrosa para estimar la incertidumbre (Zhu et al. (2008)).

Las técnicas de planificación de ganancia están basadas en la linealización de sistemas no lineales alrededor de distintos puntos de funcionamiento. Para definir las ganancias se utilizan y definen regiones de atracción. Esta técnica se ha utilizado en numerosas aplicaciones (Moore et al. (2014), Lustosa et al. (2017)), habiendo sido sugerida por los autores para el caso de sistemas no lineales linealizables a tramos.

En este tutorial se presenta la técnica de diseño del control de trayectorias para sistemas no lineales afines en el control

basada en álgebra lineal (LAB) asumiendo una dinámica cero estable. La suposición de afinidad en el control no es una limitación para muchas aplicaciones, como se verá a continuación, mientras que la consideración de dinámica cero inestable requiere un tratamiento bastante más complejo que no será objeto de este trabajo. Se definen las condiciones de aplicación y se detalla el procedimiento de diseño del controlador. Se analizan las propiedades básicas del sistema controlado y la selección de parámetros del controlador para asegurar la estabilidad. Este desarrollo se lleva a cabo tanto en tiempo continuo (TC) como en tiempo discreto (TD). La aplicación a un modelo sencillo de un robot móvil muestra los detalles del procedimiento y permite ilustrar las propiedades del sistema controlado, resaltando la sencillez de cálculo y su posible implementación en sistemas de control empotrados. La incertidumbre en el modelo del proceso, así como la presencia de perturbaciones externas, se aborda introduciendo acciones integrales que permiten cancelar o reducir los errores en régimen estacionario. La última sección recopila las ventajas, inconvenientes y cuestiones abiertas en el desarrollo y aplicación de esta nueva metodología. Esta metodología, una de cuyas primeras aplicaciones se publicó en Rosales et al. (2009), ha sido objeto de un libro en el que se exponen diversas aplicaciones, Scaglia et al. (2020).

## 2. Planteamiento del problema

Se supone que se tiene un modelo matemático de la planta, así como la trayectoria a seguir. El modelo general básico se expresa en forma de espacio de estados, como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t), d(t), t) \\ y(t) &= H(x(t), u(t), d(t), t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x \in R^n$  denota el estado del sistema,  $u \in R^m$  la entrada,  $y \in R^p$  la salida del sistema y  $d \in R^n$  representa un vector de perturbación externa, alguno de cuyos elementos puede ser nulo. Para describir completamente el problema de seguimiento, se debe proporcionar la trayectoria de referencia, que será accesible y, posiblemente, también lo serán sus derivadas. Esta trayectoria debe de ser factible, es decir, una trayectoria que pueda seguirse aplicando la entrada de control adecuada y, normalmente estará ligada a un número reducido de variables de estado, nunca superior al número de señales de control ( $m$ ).

Existen muchos enfoques en la literatura (Fukao et al. (2000); Kanayama et al. (1990); Chwa (2004); Bouhenchir et al. (2006)) para tratar este problema. Algunas soluciones son simples pero están basadas en un modelo lineal simplificado de la planta, soluciones que requieren adaptación u otras estrategias para modelos no lineales, como se ha visto en la introducción. Otras soluciones utilizan un modelo complejo de la planta pero requieren una gran carga computacional, no siendo adecuadas para aplicaciones en línea. La mejor solución se basa, en muchos casos, en un enfoque *ad hoc* para una situación particular. En nuestro caso, al tener libertad para definir la evolución de algunas variables de estado, el problema de control se formulará en un escenario algebraico que conduce a un fácil proceso de cálculo del control que no implica ninguna transformación de variables Scaglia et al. (2009).

En nuestro estudio, se suponen *inicialmente* algunas simplificaciones del modelo (1):

1. El modelo es afín en el control
2. La dinámica cero es estable
3. El estado es medible
4. El modelo es invariante en el tiempo
5. El modelo es exacto y no hay perturbaciones
6. Se tiene acceso a las referencias y a sus derivadas

Como se verá más adelante, y en las aplicaciones incluidas en las referencias, estas simplificaciones son asumibles en un gran número de casos prácticos, como son: robots móviles, vehículos autónomos terrestres, marinos o aéreos y una gran variedad de procesos, como reactores químicos.

### 2.1. Modelo del proceso

Con las simplificaciones anteriores, el modelo inicial (1) viene dado por

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t); \quad y(t) = x(t) \quad (2)$$

ya que todo el estado se supone medible. El vector de estado se divide en dos partes:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\xi}(\xi(t), z(t)) \\ f_z(\xi(t), z(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\xi}(\xi(t), z(t)) \\ g_z(\xi(t), z(t)) \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

donde  $\xi \in R^{n_1}$  está formado por las variables cuya trayectoria se pretende seguir, siendo denominado como subvector de variables de seguimiento, y el resto  $z \in R^{n-n_1}$  es el vector que denominaremos de variables *sacrificadas*, puesto que su evolución temporal no es un requerimiento y está dirigida a mejorar el seguimiento de la trayectoria. La trayectoria a seguir  $\xi_r(t)$  está definida por el sistema generador de la referencia, que puede proporcionar también sus derivadas, mientras que la referencia de las variables sacrificadas  $z_r(t)$  será ficticia, siendo generada en el proceso de cómputo de las acciones de control, si así se requiere.

### 2.2. Planteamiento del control

Así pues, el problema de control puede expresarse como: dado el modelo (3) y la referencia  $\xi_r(t)$  determinar la acción de control  $u(t)$  que obliga al vector subestado  $\xi(t)$  a seguir la referencia satisfaciendo el modelo.

En la metodología propuesta se trata de obtener la acción de control directamente a partir de (3). Para ello, y con el fin de evitar tener como resultado acciones de control inadecuadas, se introducen ciertas aproximaciones. En primer lugar, la derivada de las variables de estado cuya trayectoria se pretende seguir, se sustituye inicialmente por la de las variables de referencia suponiendo una aproximación suave, por ejemplo, proporcional al error de seguimiento de cada variable. Aunque no hay definida una referencia para las variables sacrificadas, ésta se escogerá para que (5) tenga solución exacta. Su derivada se definirá más adelante con un enfoque similar. Es decir

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_r(t) + k_{\xi}[(\xi_r(t) - \xi(t))] \\ \dot{z}_r(t) + k_z[(z_r(t) - z(t))] \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $k_{\xi}, k_z$  son dos matrices diagonales definidas positivas (dimensión  $n_1, n - n_1$ , respectivamente) que son los parámetros de control.

Si se consigue el seguimiento de trayectorias propuesto, los modelos (3) y (4) serán idénticos y la dinámica del sistema controlado vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_r(t) + k_{\xi}[(\xi_r(t) - \xi(t)) - f_{\xi}(\xi(t), z(t))] \\ \dot{z}_r(t) + k_z[(z_r(t) - z(t)) - f_z(\xi(t), z(t))] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\xi}(\xi(t), z(t)) \\ g_z(\xi(t), z(t)) \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

que puede expresarse como

$$b(t) = A(t)u(t) \quad (6)$$

Para poder calcular la acción de control requerida, el vector  $b(t)$  y la matriz  $A(t)$  deben ser compatibles, es decir,  $b$  debe pertenecer al espacio columna de  $A$ . Si ese es el caso, la acción de control será la solución exacta de (6) y se podrá calcular mediante

$$u(t) = A^{\dagger}(t)b(t) \quad (7)$$

donde  $()^{\dagger}$  denota la matriz pseudoinversa.

### 3. Diseño del control basado en álgebra lineal

A continuación se establecen los pasos a seguir en el cálculo de un controlador siguiendo la metodología de Diseño del Control Basado en Álgebra Lineal (LAB CD, en la terminología anglosajona), resaltando las opciones a decidir en cada paso y sus posibles implicaciones.

Se parte de un proceso del que se tiene un modelo y se fija una referencia a seguir. En principio se supondrá que se cumplen las condiciones enumeradas en la sección anterior, es decir: el modelo es invariante con el tiempo, no hay perturbaciones, se tiene acceso al estado y el modelo es afín en el control y de fase mínima.

**Paso 1** Obtener una representación interna del proceso, (2), donde se ponga de manifiesto que el modelo es afín en el control.

**Paso 2** Descomponer el vector de estado en los subvectores  $\xi(t)$  y  $z(t)$ , formados por las variables a seguir y sacrificadas, respectivamente.

**Paso 3** Definir una aproximación de las derivadas de las variables de estado a las de sus referencias. El enfoque más frecuente es el proporcional, como se indica en (4). La selección de los coeficientes  $k_i$  determinará el comportamiento del sistema controlado. Esta aproximación puede refinarse, si la dinámica del sistema controlado lo requiere.

**Paso 4** Para satisfacer la condición algebraica ( $b \in A$ ), se determina el valor de la referencia de las variables sacrificadas de forma que la primera ecuación en (5) sea compatible con el resto. Es decir, que

$$\dot{\xi}_r(t) + k_{\xi}[(\xi_r(t) - \xi(t)) - f_{\xi}(\xi(t), z_r(t))] = g_{\xi}(\xi(t), z_r(t))u(t)$$

sea compatible con la segunda ecuación, deduciéndose de aquí la referencia  $z_r(t)$ . Este cómputo en forma analítica puede ser muy elaborado dependiendo de la complejidad del modelo.

**Paso 5** Se calcula la acción de control resolviendo por mínimos cuadrados la ecuación del modelo del sistema controlado (6).

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_r(t) + k_{\xi}[(\xi_r(t) - \xi(t)) - f_{\xi}(\xi(t), z_r(t))] \\ \dot{z}_r(t) + k_z[(z_r(t) - z(t)) - f_z(\xi(t), z(t))] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\xi}(\xi(t), z_r(t)) \\ g_z(\xi(t), z(t)) \end{bmatrix} u(t) \quad (8)$$

En esta ecuación aparece la referencia de las variables sacrificadas, calculada en el paso anterior, pero también sus derivadas, que deberán computarse o estimarse.

En esta secuencia se explicita que la estructura del controlador y sus parámetros se definen en el Paso 3. El cálculo de la acción de control es sencillo, mediante la resolución de (6), si bien en esta ecuación aparecen las referencias de las variables de estado y sus derivadas y, el cálculo de algunas de ellas que se realiza en el Paso 4, puede presentar problemas computacionales. Estas cuestiones aparecerán de forma clara en el desarrollo de las aplicaciones que se incluyen.

## 4. Prestaciones del controlador LAB

En este planteamiento inicial se ha supuesto que el modelo es exacto y que no hay perturbaciones. Por lo tanto, la prestación más relevante del sistema controlado será su estabilidad, dejando el análisis de robustez y de otras prestaciones, así como el comportamiento estacionario, para una sección posterior (Sección 8).

### 4.1. Dinámica de errores

El estudio de la estabilidad de sistemas no lineales puede abordarse desde distintas perspectivas, dependiendo del tipo de no linealidad que presente el sistema y de la complejidad del modelo. En este caso, se va a plantear cuál es la dinámica de los errores de seguimiento y analizar en qué condiciones estos errores tienden a cero o están acotados a lo largo del tiempo.

Para evaluar el comportamiento dinámico de los errores de seguimiento, supongamos que se ha diseñado el control de acuerdo con el Paso 5 de la sección anterior y que se han computado todas las referencias de las variables sacrificadas y estimadas sus derivadas, como se requiere en el Paso 4. Para hacer factible la solución de (5), las referencias deben ser tales que (8) tenga una solución exacta. Por lo tanto, restando (3) de (8) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_r - \dot{\xi} + k_{\xi}[(\xi_r - \xi) - [f_{\xi}(\xi, z_r) - f_{\xi}(\xi, z)]] \\ \dot{z}_r - \dot{z} + k_z[(z_r - z)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\xi}(\xi, z_r) - g_{\xi}(\xi, z) \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (9)$$

en la que se ha suprimido el argumento tiempo, para simplificar la notación. Llamando  $e_{\xi} = \xi_r - \xi$  y  $e_z = z_r - z$  a los errores en las variables de estado, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\xi} \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{\xi}e_{\xi} \\ -k_z e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{\xi}(\xi, z_r) - f_{\xi}(\xi, z) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\xi}(\xi, z_r) - g_{\xi}(\xi, z) \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (10)$$

o, en forma compacta,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\xi} \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{\xi}e_{\xi} \\ -k_z e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{\xi}(\xi, z_r, z, u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

en la que la función  $h_{\xi}(\bullet)$  depende del modelo del proceso. Se demostrará que esta función tiende a cero cuando  $e_z \rightarrow 0$ .

## 4.2. Estabilidad

Según se desprende de la segunda fila de (11), teniendo en cuenta la definición de los coeficientes  $k_i$  dados en (4), los errores en las variables sacrificadas evolucionarán de acuerdo con

$$e_z(t) = e^{-k_z t} e_z(0) \quad (12)$$

Por otra parte, los errores de las variables cuya trayectoria se quiere controlar tendrán una dinámica caracterizada por

$$\dot{e}_\xi(t) = -k_\xi e_\xi(t) + h_\xi(\xi, z_r, z, u) \quad (13)$$

Por lo tanto, estos errores tienen una dinámica compuesta de un término similar a (12) más un componente forzado debido a la señal  $h_\xi(\bullet)$ . Si esta señal está acotada, la evolución de los errores dependerá del primer término.

Así pues, una condición necesaria para la estabilidad del sistema controlado es que los coeficientes  $k_i$  sean todos positivos (o con parte real positiva). En cada proceso, habrá que evaluar la función  $h_\xi(\bullet)$  y analizar su comportamiento temporal.

En cualquier caso, se demuestra que las variables sacrificadas convergen hacia sus referencias. Una característica especialmente interesante del enfoque LAB CD es que primero los errores de seguimiento para las variables sacrificadas se llevan a cero y luego los errores de seguimiento de trayectoria también se llevan a cero como se pondrá de manifiesto en los ejemplos que siguen. Esto será una guía para diseñar el controlador (4).

## 5. LAB en tiempo discreto

Hoy en día, todos los controladores están implementados en sistemas digitales. Por lo tanto, el controlador debe expresarse en TD. Una opción sería discretizar la acción de control previamente calculada, pero se pueden obtener mejores resultados si el controlador se deriva para un modelo en TD de la planta. Además, el modelo inicial de la planta puede expresarse directamente en TD y, en este caso, el diseño del control debe realizarse en este marco. Si se supone un muestreo regular, con muestreo de período  $T$  para obtener las mediciones y se usa un dispositivo de retención con el mismo período para aplicar la acción de control, el modelo de la planta sería

$$x_{k+1} = f_d(x_k) + g_d(x_k)u_k \quad (14)$$

donde  $kT$  es el instante de muestreo. Si inicialmente el modelo de la planta viene dado por (3), el primer paso sería discretizar este modelo. El enfoque más simple es la aproximación de Euler,

$$\frac{d[x(t)]}{dt} \Big|_{t=kT} \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \quad (15)$$

Se pueden usar muchas otras aproximaciones, pero si el período de muestreo es lo suficientemente pequeño, la aproximación de Euler es aceptable y se puede aplicar fácilmente a plantas no lineales. Una ventaja adicional de esta discretización, incluso operando con sistemas lineales, es que el sistema en TD no presenta ceros adicionales a los discretizados obtenidos del modelo en TC. Estos ceros adicionales, en general, son de fase no mínima imponiendo limitaciones al empleo de controles calculados con inversión del modelo de la planta. Por otra parte, como se dispone de todos los estados en cada periodo de muestreo, no

se tiene el problema de error acumulativo que es la principal desventaja de este método.

Utilizando el modelo en TC (2), y teniendo en cuenta el periodo de muestreo  $T$ , el modelo de la planta sería

$$x_{k+1} = x_k + T[f(x_k) + g(x_k)]u_k \quad (16)$$

En cuanto al cálculo del control, seguiríamos los pasos expuestos en la sección 3, es decir:

1. Se obtiene una representación como (14).
2. Se descompone el vector de estado en los subvectores a seguir y complementario variables sacrificadas.
3. La aproximación a la trayectoria de referencia se expresaría para cada una de las variables como

$$x_{k+1} = x_{r,k+1} - k_x(x_{r,k} - x_k) \quad (17)$$

siendo  $k_x = 1 - T\kappa_x$ , y  $\kappa_x$  el parámetro correspondiente definido en TC para un acercamiento proporcional al error.

4. Se determinan las referencias de las variables sacrificadas necesarias para asegurar una solución exacta a la ecuación  $\dot{x} = A_k u_k$ .
5. Estimando los valores futuros de las anteriores referencias, se resuelve la ecuación anterior para calcular la acción de control.

## 5. Control en tiempo continuo de un robot móvil

Los robots móviles se utilizan actualmente para tareas de limpieza autónomas, para el acceso a entornos peligrosos, para mejorar el rendimiento y la calidad y lograr aplicaciones precisas en la agricultura; también para operaciones con riesgo radiactivo en escenarios nucleares con el fin de minimizar los riesgos y donde la presencia del operador humano está restringida o prohibida, etc.

Para lograr un control de seguimiento de trayectoria de alta precisión para un robot móvil con ruedas (WMR), se han propuesto en el pasado muchos enfoques de control sofisticados utilizando un modelo cinemático o dinámico del robot. Obviamente, el modelo, y por ende el diseño, cinemático es más simple. El robot móvil es el dispositivo más utilizado para tratar problemas de seguimiento. Hay mucha literatura con diferentes propuestas (ver, por ejemplo, Li et al. (2015); Sun et al. (2016); Proaño et al. (2015); Panahandeh et al. (2019), y muchos otros). La metodología que se propone, cuando es aplicable, conduce a soluciones simples y fáciles de utilizar por el usuario final.

Esta aplicación aparece en diversas publicaciones de los autores (Scaglia et al. (2009, 2008); Serrano et al. (2017)), si bien aquí se hará un desarrollo formal utilizando diversos modelos y comparando los resultados. Mediante un diagrama de simulación se realizará una implementación rápida del control, y se describirá un procedimiento para determinar los parámetros del controlador, analizándose el rendimiento de la planta controlada, tanto en el comportamiento transitorio (estabilidad) como en el estado estacionario (Scaglia et al. (2019)).

6.1. Control cinemático de un robot móvil

En la Figura 1 se esquematiza un prototipo elemental de robot móvil. En cuanto al modelo cinemático elemental viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(t) \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) &= V(t) \text{sen } \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) &= W(t) \end{aligned} \quad (18)$$

donde,  $V$  es la velocidad lineal del robot móvil,  $W$  es su velocidad angular,  $(x, y)$  es su posición cartesiana y  $\theta$  es su orientación. Este modelo ha sido ampliamente utilizado para controlar robots móviles por muchos autores en la bibliografía. Una ventaja en el uso de este modelo es que la mayoría de los robots comerciales tienen las velocidades lineal y angular como las señales de entrada.

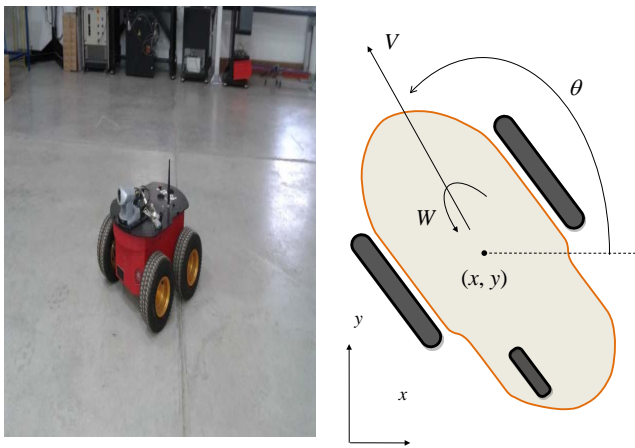


Figura 1: Prototipo de Robot Móvil.

Por lo tanto, el objetivo es encontrar los valores de  $V$  y  $W$  para que el robot móvil siga una trayectoria preestablecida  $(x_r, y_r)$  con un error mínimo. La orientación se considerará como una variable sacrificada para conducir la posición del robot a alcanzar la trayectoria de referencia. Su referencia,  $z_r$ , se determinará más adelante.

De acuerdo con la metodología LAB CD descrita en la sección anterior, se busca una trayectoria suave, evitando grandes errores de seguimiento pero también acciones de control demasiado grandes. Es decir, la trayectoria controlada pretende ser

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}_r(t) + k_x e_x(t) = \Delta \dot{x} \\ \dot{y}(t) &= \dot{y}_r(t) + k_y e_y(t) = \Delta \dot{y} \\ \dot{\theta}(t) &= \dot{\theta}_r(t) + k_\theta e_\theta(t) = \Delta \dot{\theta} \end{aligned} \quad (19)$$

determinada por los parámetros del controlador  $\{k_x, k_y, k_\theta\}$ , asumiendo una trayectoria cuyas derivadas se aproximan a las de las señales de referencia proporcionalmente al correspondiente error de seguimiento. Por lo tanto, combinando (18)-(19), y suprimiendo el argumento del tiempo, el problema de control es encontrar las señales de control de tal manera que el comportamiento controlado de la planta sea modelado por

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} \quad (20)$$

que es la ecuación (6) ( $b = Au$ ) para este problema. Con el fin de tener una solución exacta para esta ecuación,  $b$  debe estar en el espacio columna de  $A$ , es decir, que debe ser una combinación lineal de las columnas de  $A$ . Analizando las dos primeras filas, se debe cumplir

$$\Delta x = V \cos \theta; \quad \Delta y = V \text{sen } \theta \Rightarrow \theta_r = \text{atan} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (21)$$

que define la referencia de la orientación.

Las acciones de control se calculan resolviendo (20) por mínimos cuadrados, una vez que la orientación en la matriz  $A$  ha sido reemplazada por el valor requerido (21) para obtener una solución exacta. Es decir

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \cos \theta_r + \Delta y \text{sen } \theta_r \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

Hay que recordar que las opciones de control se definen en (19) y, por lo tanto, los parámetros  $k_i$  son los parámetros de ajuste del controlador, habiéndose adoptado una estructura del controlador que se basa en una aproximación proporcional al error. En esta misma ecuación se pone de manifiesto que la acción de control  $W$  depende de la derivada de la referencia de  $\theta$  que, en principio, no se conoce y habrá que estimar. En este caso, teniendo en cuenta (21), se podría calcular como:

$$\dot{\theta}_r = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \frac{d\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{dt}$$

6.2. Propiedades del sistema controlado

En la sección anterior, se ha desarrollado el control de seguimiento del robot móvil modelado por (18) para seguir una trayectoria dada, lo que lleva a una ley de control de prealimentación/realimentación expresada por (19) (21) y (22). En la Figura 2 se representa un diagrama de bloques de la planta y el controlador en el que los diferentes bloques implementan las ecuaciones (18)-(22)

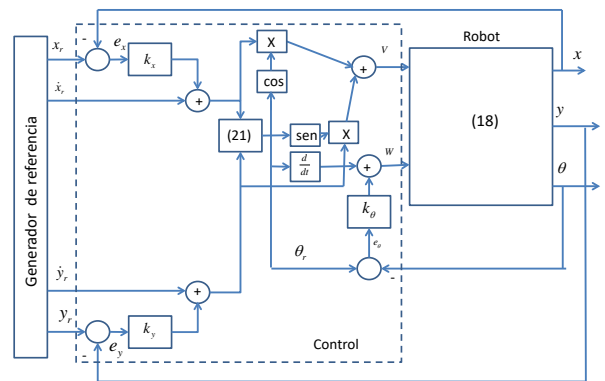


Figura 2: Diagrama de bloques del robot móvil controlado.

Se puede implementar fácilmente un diagrama Simulink (Matlab®) para facilitar la experimentación por el lector de la solución de control propuesta.

Las prestaciones del robot móvil controlado se evalúan en estado estacionario y en el comportamiento transitorio. Primero, se analizan los errores de seguimiento.

### 6.2.1. Errores de seguimiento

La convergencia a cero de los errores de seguimiento depende de los parámetros del controlador. El siguiente teorema define estos errores.

**Teorema 6.1.** Si el comportamiento del sistema está modelado por (18) y el controlador está diseñado siguiendo (22), los errores de seguimiento al seguir una trayectoria factible dada son tales que tienden a cero con el tiempo ( $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ ) si los parámetros del controlador son positivos, es decir,  $k_x > 0$ ,  $k_y > 0$  y  $k_\theta > 0$ .

**Prueba.** Para comprobar la convergencia a cero de los errores de seguimiento comencemos con la variable  $\theta$ . Si se aplica la acción de control  $W$  calculada en (22) para la velocidad angular, definida según la tercera ecuación en (19), la evolución de la orientación esta determinada en (18) y será

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_r(t) + k_\theta(\theta_r(t) - \theta(t)) \quad \dot{e}_\theta = -k_\theta e_\theta \quad (23)$$

Por lo tanto, la dinámica del error de orientación se define por

$$e_\theta(t) = e^{-k_\theta t} e_\theta(0) \quad (24)$$

y si  $k_\theta > 0$  se asegura la anulación de este error para  $t \rightarrow \infty$ .

Consideremos ahora los errores de las variables de seguimiento. La expansión en serie de Taylor (Apostol (1967)) para la función  $\cos \theta$  será

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_r - \sin(\theta_r + \lambda(\theta_r - \theta))(\theta - \theta_r) \\ \theta_\lambda &= \theta_r + \lambda(\theta_r - \theta); \quad 0 < \lambda < 1 \end{aligned} \quad (25)$$

De las primeras ecuaciones en (18) y (22) se tiene

$$\dot{x}(t) = V \cos \theta = (\Delta x \cos \theta_r + \Delta y \sin \theta_r) \cos \theta \quad (26)$$

Combinando (26) y (25), y teniendo en cuenta (21),

$$\dot{x} = \dot{x}_r + k_x(x_r - x) + f_\lambda e_\theta; \quad f_\lambda = V \sin \theta_\lambda \quad (27)$$

Es decir

$$\dot{e}_x = -k_x e_x - f_\lambda e_\theta \quad (28)$$

De manera similar para la variable  $y$ , operando con la función seno, se obtiene

$$\dot{e}_y = -k_y e_y - f_\psi e_\theta \quad (29)$$

donde  $f_\psi$ ;  $0 < \psi < 1$  se define similarmente a  $\lambda$ .

Así pues, la dinámica de los errores de las variables de estado del sistema se pueden expresar por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_x & 0 & -f_\lambda \\ 0 & -k_y & -f_\psi \\ 0 & 0 & -k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} \quad (30)$$

Del análisis de (30) se deduce que el error de la orientación tiende a cero, para valores positivos del coeficiente  $k_\theta$  y que los errores dinámicos en las coordenadas tienden a cero en tanto en cuanto  $k_x, k_y$  sean positivos, ya que las funciones  $f_\lambda, f_\psi$  están acotadas y multiplicadas por el error de orientación, que tiende a cero. Este análisis se completa con el corolario 6.2.

**Nota.** La ecuación (30) representa la dinámica de un sistema lineal con una no linealidad agregada que tiende a cero. Se puede demostrar que la no linealidad está limitada de la misma manera que se mostró para otras funciones en Scaglia et al. (2019). También implica que, en general, el error de seguimiento en la variable sacrificada se lleva a cero y luego todos los errores de seguimiento se cancelan.

### 6.2.2. Estabilidad de la planta controlada.

El robot controlado está modelado por el conjunto de ecuaciones resumidas al comienzo de esta sección. Para demostrar la estabilidad de la planta controlada se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 6.2.** En las condiciones indicadas en el teorema 6.1 la planta controlada para seguir una trayectoria dada es estable.

**Prueba.** El sistema (30) puede considerarse como un sistema en cascada donde la segunda parte (tercera variable) es estable, si  $k_\theta > 0$ . Por otro lado, la primera parte es globalmente uniformemente asintóticamente estable en el origen si  $k_x > 0, k_y > 0$ . Es decir, si las primeras variables son estables para  $e_\theta = 0$ . Por lo tanto, mediante el Lema de estabilidad para sistemas en cascada (Lema 4.7, Khalil (2002) tercera edición), el sistema completo es estable.

El sistema de control LAB se ha aplicado a procesos muy diversos: robots, barcos autónomos, vehículos aéreos no tripulados, reactores químicos entre otros. El lector interesado puede consultar estas aplicaciones en las referencias que se indican.

## 7. Propiedades estructurales del control LAB

En la aplicación sobre el robot móvil se ha puesto de manifiesto la facilidad de desarrollo e implementación del control LAB, así como las propiedades básicas del sistema controlado. En esta sección, sobre un sistema lineal monovariable, se va a explicitar las propiedades estructurales de este control. Si bien la metodología LAB tiene su mayor utilidad en el diseño de sistemas de control para procesos no lineales, la interpretación con operadores y bloques, en el caso de sistemas lineales, proporciona una clara visión de las acciones de control que se aplican.

Sea un sistema lineal definido por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_{m+1}s^m + \dots + q_1}{s^n + p_n s^{n-1} + \dots + p_1} = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (31)$$

en la que no hay cancelación de polos y ceros. Para simplificar la notación, se define el vector  $p = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$ . Se considera inicialmente una señal de entrada  $v(s)$  tal que

$$u(s) = \frac{1}{q(s)} v(s); \quad \rightarrow \frac{y(s)}{v(s)} = G_1(s) = \frac{1}{p(s)} \quad (32)$$

Se diseña el control LAB asumiendo  $y(s)$  como variable cuya trayectoria se quiere controlar y  $v(s)$  como señal de entrada. Siguiendo los pasos expuestos en la metodología LAB:

**Paso 1** Obtener un modelo en espacio de estados tomando, por ejemplo, la forma canónica de controlabilidad:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (33)$$

en el que la última fila se puede expresar como

$$\dot{x}_n = -p_n x_n + v \quad (34)$$

siendo  $x \in R^n$  el vector de estado.

**Paso 2** Separar en  $x$  la variable a seguir y las sacrificadas

$$\xi = y = x_1; \quad z = \begin{bmatrix} x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \quad (35)$$

**Paso 3** Definir la aproximación deseada a la trayectoria de referencia

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,r} + k_1(x_{1,r} - x_1) \\ \dot{x}_{2,r} + k_2(x_{2,r} - x_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n,r} + k_n(x_{n,r} - x_n) \end{bmatrix} \quad (36)$$

dando lugar al sistema controlado (combinando (33) y (36))

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,r} + k_1(x_{1,r} - x_1) - x_2 \\ \dot{x}_{2,r} + k_2(x_{2,r} - x_2) - x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n,r} + k_n(x_{n,r} - x_n) + px \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (37)$$

Se describe como  $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$  el vector de los parámetros de control.

**Paso 4** Calcular de las referencias de las variables sacrificadas para que la ecuación del sistema controlado (6), (37), tenga solución exacta. En este caso, dada la elección de las variables de estado en (33), se tendrá (de las primeras  $n - 1$  filas de (37))

$$\begin{bmatrix} x_{2,r} \\ x_{3,r} \\ \vdots \\ x_{n,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,r} + k_1(x_{1,r} - x_1) \\ \dot{x}_{2,r} + k_2(x_{2,r} - x_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1,r} + k_{n-1}(x_{n-1,r} - x_{n-1,r}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

siendo

$$x_{1,r} = y_r = \xi_r$$

**Paso 5** Calcular la acción de control resolviendo (6). Es decir, a partir de la última fila de (37)

$$v = \dot{x}_{n,r} + k_n(x_{n,r} - x_n) + p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \quad (39)$$

para lo que se requiere  $\dot{x}_{n,r}$ . A partir de la última fila de (38), derivando, se obtiene

$$\dot{x}_{n,r} = \dot{x}_{n-1,r} + k_{n-1}(\dot{x}_{n-1,r} - \dot{x}_{n-1})$$

y calculando las sucesivas derivadas, teniendo en cuenta (38), se obtiene en (39)

$$v(s) = c(s)y_r(s) + [p(s) - c(s)]x_1(s) \quad (40)$$

siendo

$$c(s) = \prod_{i=1}^n (s + k_i) = s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_n$$

y  $p(s)$  definido en (31), teniendo en cuenta que  $x_1 = y$

### 7.1. Estructura de control

De acuerdo con (40), el control tiene dos componentes: una prealimentación  $c(s)$  de la referencia y una realimentación  $[p(s) - c(s)]$  de la salida (de hecho, del estado). Si esta acción de control se aplica al modelo de la planta (32), resulta

$$p(s)y(s) = v(s) \Rightarrow c(s)y(s) = c(s)y_r(s) \quad (41)$$

consiguiéndose un seguimiento perfecto. Si se considera la entrada real a la planta, la señal de control (32) será

$$u(s) = \frac{c(s)}{q(s)}y_r(s) + \frac{[p(s) - c(s)]}{q(s)}y(s) \quad (42)$$

poniendo de manifiesto los dos términos, de prealimentación y realimentación. En ambos se observa la presencia de  $q(s)$  en el denominador, lo que limita su aplicabilidad, con el planteamiento aquí expuesto, a sistemas de fase mínima (31).

### 7.2. Estabilidad

Obsérvese que la realimentación del estado asigna los polos del sistema controlado en  $c(s) = 0$ , mientras que la prealimentación cancela estos polos.

Obviamente, los parámetros del controlador ( $k_i$ ) definen la estabilidad del sistema controlado.

Por otra parte, para asegurar la estabilidad interna, se requiere que el polinomio  $q(s)$  tenga los ceros negativos, es decir, que el sistema sea de fase mínima.

### 7.3. Extensión al caso de sistemas no lineales

Como se ha indicado, la aplicación del LAB a sistemas no lineales depende del modelo del sistema. Para ilustrar las propiedades del sistema controlado se va a considerar un modelo de segundo orden tal como

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}) + g(y, \dot{y})u \quad (43)$$

frecuente en aplicaciones mecánicas. Definiendo el vector de estado como en (31), es decir

$$x_1 = y; \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt};$$

el modelo se completa con

$$\dot{x}_2 = f_x(x) + g_x(x)u \quad (44)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso lineal se llega a la acción de control

$$u = \frac{1}{g_x(x)}[\ddot{y}_r + (k_1 + k_2)\dot{y}_r + k_2 k_1 y_r] \quad (45)$$

$$- \frac{1}{g_x(x)}[(k_1 + k_2)x_2 + k_1 k_2 x_1 + f_x(x)] \quad (46)$$

Como siempre, aparece un término de prealimentación de la referencia y un término de realimentación. Es interesante resaltar que esta realimentación es la misma que se obtiene cuando se realiza una linealización por realimentación, añadiendo también un término adicional para asignar los polos del sistema realimentado en  $\{-k_1, -k_2\}$ . Si el modelo fuera similar al (43) pero de orden superior, el tratamiento sería similar y también la solución para la acción de control.

En el caso de un modelo no lineal más general, tal como (2), el cálculo del control LAB dependerá de las dificultades que estas funciones entrañen en el cálculo de las referencias de las variables sacrificadas y sus derivadas.



## 8. Perturbaciones

El tratamiento de las perturbaciones depende mucho de la información que se disponga de las mismas, así como de la posibilidad de su medición. En este trabajo tutorial se va a considerar un modelo sencillo para las perturbaciones, englobando perturbaciones externas e incertidumbres en el modelo, proporcionando una solución también sencilla de implementar.

Supongamos que el comportamiento del proceso a controlar se puede representar por el modelo

$$\dot{x}(t) = f_m(x(t)) + g_m(x(t))u(t) + w(t) \quad (47)$$

donde  $w(t)$  es una perturbación externa. Asumimos un modelo conocido del proceso dado por (2). Con este modelo, el proceso se puede representar por

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) + d(t) \quad (48)$$

donde  $d(t) = f_m(x(t)) - f(x(t)) + g_m(x(t)) - g(x(t)) + w(t)$  que se supondrá **polinómica**. Es decir  $d(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2 + \dots$  En el caso más sencillo será una perturbación constante  $d_0$ .

### 8.1. Acción integral

Siguiendo la tradicional solución de introducir una acción integral para eliminar (en régimen estacionario) el efecto de las perturbaciones constantes, se va a modificar el Paso 3 en el diseño del controlador LAB definiendo una aproximación de las derivadas de las variables de estado a las de las referencias que sea función del error y de la integral del error. Para cada variable de estado, la integral de su error de seguimiento será:

$$U_x(t) = \int_0^t [x_r(\tau) - x(\tau)]d\tau \quad (49)$$

El control estará definido por la nueva aproximación (49) que se expresará como

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_r(t) + k_{\xi}[\xi_r(t) - \xi(t)] + k_{i,\xi}U_{\xi}(t) \\ \dot{z}_r(t) + k_z[z_r(t) - z(t)] + k_{i,z}U_z(t) \end{bmatrix} \quad (50)$$

calculándose el resto de pasos de forma similar a como se hizo en la sección 3.

En este caso, la dinámica de los errores de seguimiento se puede deducir que conduce a

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\xi} + k_{\xi}e_{\xi} + k_{i,\xi}U_{\xi} \\ \dot{e}_z + k_z e_z + k_{i,z}U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{\xi}(\xi, z_r, z, u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

en vez de (11). Para asegurar la estabilidad del sistema controlado los ceros de los polinomios del primer miembro deberán tener parte real negativa.

### 8.2. Múltiples integradores

Esta solución se puede generalizar para el caso de perturbaciones que sean de tipo polinomial, como se indica en (48), añadiendo más integradores en cada variable de estado. Obviamente, esto hace más compleja la estructura del controlador así como el análisis de sus propiedades.

En cada aplicación concreta se evaluará la naturaleza de las perturbaciones y la conveniencia de poner más o menos integradores en cada variable de estado.

## 9. Conclusiones

En este artículo se ha expuesto la metodología de diseño de sistemas de control para el seguimiento de trayectorias basado en álgebra lineal (LAB), ilustrando el proceso de diseño con el control de trayectoria de un robot móvil, utilizando el modelo cinemático del mismo. Es de resaltar que dicho cálculo no tiene una carga computacional elevada y es susceptible de implementarse en controladores empotrados en sistemas autónomos. Como principales ventajas de este método de diseño del control cabe destacar:

- Se obtiene una solución explícita de la ley de control
- El sistema controlado es estable y su dinámica se define ajustando los parámetros de controlador
- El control tiene una componente de realimentación, lo que relaja la precisión del modelo
- El control tiene una componente de prealimentación, lo que permite un mejor seguimiento de las referencias
- Se puede admitir incertidumbre en el modelo y/o perturbaciones externas
- Se puede calcular el control en tiempo continuo o discreto.
- Se aplica al seguimiento de trayectorias o de perfiles de referencia en una gran variedad de procesos

Obviamente, este método no es una panacea ni aplicable en todos los problemas de seguimiento. Entre los principales inconvenientes hay que destacar:

- El modelo del comportamiento del sistema debe ser afín en el control
- El estado del proceso debe ser accesible. El uso de observadores del estado puede subsanar parcialmente este requerimiento
- No se tiene una clara indicación de las prestaciones del sistema
- Se requiere tener acceso a las derivadas de la señal de referencia
- El cálculo de las referencias para las denominadas variables sacrificadas puede ser complicado
- Se debe realizar una estimación de las derivadas de estas referencias

Como temas complementarios o en desarrollo cabe mencionar:

- Correlación entre las prestaciones del sistema controlado y los parámetros de control
- Análisis del efecto de observadores
- Análisis e influencia del periodo de muestreo en la implementación del control
- Presencia de saturación en las señales de control

- Consideración de otro tipo de perturbaciones
- Influencia de las acciones integrales en la respuesta transitoria
- Diseño del control para sistemas con dinámica cero inestable
- Ampliar el campo de aplicaciones al control de otros procesos dinámicos

Finalmente es de resaltar que esta metodología ha sido ya aplicada en diversos tipos de procesos, como puede verse en las referencias que se indican (Scaglia et al. (2015); Serrano et al. (2013); Pantano et al. (2018, 2019); Fernández et al. (2018); Rosales et al. (2015); Gandolfo et al. (2014)).

## Referencias

- Apostol, T., 1967. *CALCULUS, One -Variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra*. Blaisdell Publishing Company.
- Battilotti, S., Califano, C., 2004. A constructive condition for dynamic feedback linearization. *Systems & control letters* 52(5), 329–338.
- Bouhenchir, H., Cabassud, M., Le Lann, M.-V., 2006. Predictive functional control for the temperature control of a chemical batch reactor. *Computers & Chemical Engineering* 30 (6–7), 1141–1154.
- Brockett, R., 1965. Poles, zeros, and feedback: State space interpretation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 10(2), 129–135.
- Charlet, B., Levine, J., Marino, R., 1988. Dynamic feedback linearization with application to aircraft control. *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX, USA 1*, 701–705.
- Chwa, D., 2004. Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates. *IEEE transactions on control systems technology* 12 (4), 637–644.
- den Boom, T. J. J. V., 1998. On feedback linearization in LMI-based nonlinear MPC. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference* 3, 1684–1688.
- Devasia, S., Chen, D., B., P., 1996. Nonlinear inversion-based output tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41(7), 930–942.
- Fernández, M. C., Rómoli, S., Pantano, M. N., Ortiz, O. A., Patiño, E., Scaglia, G. J., 2018. A new approach for nonlinear multivariable fed-batch bioprocess trajectory tracking control. *Automatic Control and Computer sciences* 52 (1), 13–24.
- Francis, B. A., 1977. The linear multivariable regulator problem. *SIAM Journal on Control and Optimization* 15(3), 486–505.
- Fukao, T., Nakagawa, H., Adachi, N., 2000. Adaptive tracking control of a non-holonomic mobile robot. *IEEE transactions on Robotics and Automation* 16 (5), 609–615.
- Gandolfo, D., Rosales, C., Patiño, D., Scaglia, G., Jordan, M., 2014. Trajectory tracking control of a pvtol aircraft based on linear algebra theory. *Asian Journal of Control* 16 (6), 1849–1858.
- Ghandan, R., Blankenship, G. L., 1993. Adaptive approximate tracking and regulation of nonlinear systems. *Proceedings of 32nd IEEE Conference on Decision and Control* 1, 2654–2659.
- Hepburn, J., Wonham, W., 1984. Error feedback and internal models on differentiable manifolds. *IEEE Transactions on Automatic Control* 29(5), 397–403.
- Huang, R., Zhu, J. J., 2009. Time-varying high-gain trajectory linearization observer design. *Proceedings of American Control Conference* 1, 4628–4635.
- Isidori, A., Byrnes, C. I., 1990. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 35(2), 131–140.
- Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., Noguchi, T., 1990. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In: *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, pp. 384–389.
- Khalil, H., 2002. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Lee, H. G., Arapostathis, A., I.Marcus, S., 2003. An algorithm for linearization of discrete-time systems via restricted dynamic feedback. In *Proceedings of 42nd IEEE International Conference on Decision and Control* 2, 1362–1367.
- Levine, J., Marino, R., 1990. On dynamic feedback linearization in R/sup 4/. In *Proceedings 29th IEEE Conference on Decision and Control* IEEE. Honolulu, Hawaii. 1, 2088–2090.
- Li, X. S., Li, Y. H., Li, X., Peng, J., Li, C. X., 2012. Robust trajectory linearization control design for unmanned aerial vehicle path following. *Systems Engineering and Electronics* 34(4), 767–772.
- Li, Z., Deng, J., Lu, R., Xu, Y., Bai, J., Su, C.-Y., 2015. Trajectory-tracking control of mobile robot systems incorporating neural-dynamic optimized model predictive approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 46 (6), 740–749.
- Lustosa, L. R., Defaÿ, F., Moschetta, J. M., 2017. The feasibility issue in trajectory tracking by means of regions-of-attraction-based gain scheduling. *IFAC-PapersOnLine* 50(1), 11504–11508.
- Moore, J., Cory, R., Tedrake, R., 2014. Robust post-stall perching with a simple fixed-wing glider using LQR-Trees. *Bioinspiration & biomimetics* 9(2), 025013.
- Panahandeh, P., Alipour, K., Tarvirdizadeh, B., Hadi, A., 2019. A kinematic lyapunov-based controller to posture stabilization of wheeled mobile robots. *Mechanical Systems and Signal Processing* 134, 106319.
- Pantano, M. N., Fernández, M. C., Serrano, M. E., Ortiz, O. A., Scaglia, G. J., 2018. Tracking control of optimal profiles in a nonlinear fed-batch bioprocess under parametric uncertainty and process disturbances. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 57 (32), 11130–11140.
- Pantano, M. N., Fernández, M. C., Serrano, M. E., Ortiz, O. A., Scaglia, G. J. E., 2019. Trajectory tracking controller for a nonlinear fed-batch bioprocess. *Revista Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones* ISSN: 1815-5928 38 (1), 78.
- Proaño, P., Capito, L., Rosales, A., Camacho, O., 2015. Sliding mode control: Implementation like pid for trajectory-tracking for mobile robots. In: *2015 Asia-Pacific Conference on Computer Aided System Engineering*. IEEE, pp. 220–225.
- Rojas, O. J., Goodwin, G. C., 2001. Preliminary analysis of a nonlinear control scheme related to feedback linearization. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control* 2, 1743–1748.
- Rosales, A., Scaglia, G., Mut, V., di Sciascio, F., 2009. Navegación de robots móviles en entornos no estructurados utilizando álgebra lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 6(2), 79–88.
- Rosales, C., Gandolfo, D., Scaglia, G., Jordan, M., Carelli, R., 2015. Trajectory tracking of a mini four-rotor helicopter in dynamic environments—a linear algebra approach. *Robotica* 33 (8), 1628–1652.
- Scaglia, G., Montoya, L. Q., Mut, V., di Sciascio, F., 2009. Numerical methods based controller design for mobile robots. *Robotica* 27 (2), 269–279.
- Scaglia, G., Quintero, O. L., Mut, V., di Sciascio, F., 2008. Numerical methods based controller design for mobile robots. *IFAC Proceedings Volumes* 41 (2), 4820 – 4827.
- Scaglia, G., Serrano, E., Rosales, A., Albertos, P., 2015. Linear interpolation based controller design for trajectory tracking under uncertainties: Application to mobile robots. *Control Engineering Practice* 45, 123–132.
- Scaglia, G., Serrano, E., Rosales, A., Albertos, P., 2019. Tracking control design in nonlinear multivariable systems: Robotic applications. *Mathematical Problems in Engineering* 2019.
- Scaglia, G., Serrano, M., Albertos, P., 2020. *Linear Algebra Based Controllers: Design and Applications*. Springer International Publishing. URL: <https://books.google.es/books?id=ELZoDwAAQBAJ>
- Serrano, M. E., Godoy, S. A., Quintero, L., Scaglia, G. J., 2017. Interpolation based controller for trajectory tracking in mobile robots. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 86 (3–4), 569–581.
- Serrano, M. E., Scaglia, G. J., Godoy, S. A., Mut, V., Ortiz, O. A., 2013. Trajectory tracking of underactuated surface vessels: A linear algebra approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22 (3), 1103–1111.
- Silverman, L., 1968. Properties and application of inverse systems. *IEEE transactions on Automatic Control* 13(4), 436–437.
- Silverman, L., 1969. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE transactions on Automatic Control* 14(3), 270–276.
- Sun, W., Tang, S., Gao, H., Zhao, J., 2016. Two time-scale tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24 (6), 2059–2069.
- Xingling, S., Honglun, W., 2016. Trajectory linearization control based output tracking method for nonlinear uncertain system using linear extended state observer. *Asian Journal of Control* 18(1), 316–327.
- Zeng, G., Hunt, L. R., 2000. Stable inversion for nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45(6), 1216–1220.
- Zhu, J. J., Banker, B., Hall, C., 2000. X-33 ascent flight control design by trajectory linearization—a singular perturbation approach. *Proceedings of AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit* 1, 4159.
- Zhu, J. J., Funston, K., Hall, C. E., Hodel, A. S., 2001. X-33 entry flight control design by trajectory linearization—a singular perturbation approach. *Guidance and control* 1, 151–170.
- Zhu, L., Jiang, C. S., Xue, Y. L., 2008. Robust adaptive trajectory linearization control for aerospace vehicle using single hidden layer neural networks. *Acta Armamentarii* 29(1), 52–56.