Libros de Cátedra

ANTROMÁTICA

Aporte para la formación en Matemática de estudiantes de Antropología y Profesorado de Biología

Viviana Cappello y Romina Herrera (coordinadoras)

n
naturales

FACULTAD DE
CIENCIAS NATURALES Y MUSEO

edulp
Editorial
de la Universidad
de La Plata

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

CAPÍTULO 5
Integrales

Anyelen Di Paolantonio y Guillermo Lamenza

Integración de funciones

¿Qué es integrar una función?

Entenderemos a la integración como una operación matemática que resulta ser la operación inversa a la derivación, así como la división lo es a la multiplicación, o la radicación lo es a la potenciación. Para ello, definiremos algunos conceptos analizando un ejemplo:

Consideremos la función $f(x)=x^3$ cuya derivada es $f'(x)=3x^2$.

Pensemos ahora en el camino inverso, es decir si tuviéramos la función $f(x)=3x^2$, y quisiéramos saber de qué función derivada se obtuvo. ¿Cuál es el procedimiento a realizar? Pensar qué función derivamos para obtener ese resultado.

$f(x)=3x^2$ es una función polinómica, con lo cual su derivada, por regla, se obtuvo de derivar $F(x)=x^3$.

A ésta última función que obtuvimos se la llama **primitiva** o **antiderivada** de la función $f(x)=3x^2$.

En general, a una función $F(x)$ se la denomina primitiva o antiderivada de la función $f(x)$, si y sólo si al derivar $F(x)$ se obtiene $f(x)$ en un intervalo real I.

En símbolos, $F(x)$ es una primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x \in I$

Sin embargo, $f(x)$ no tiene una única primitiva, sino que todas las funciones de la forma $F(x)+C$, es decir, que difieren en una constante C real, son primitivas de $f(x)$ dado que la derivada de una constante es cero.

Teorema: Familia de primitivas

$F(x)+C$ son las primitivas de $f(x)$ sí y sólo si $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$

La operación de hallar todas las primitivas de una función $f(x)$ se llama **integración indefinida** o **antiderivación**. Simbólicamente: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Algunas propiedades de la integración

- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

  La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

- $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

  La integral de la suma o resta de dos funciones es igual a la suma o resta de las integrales de cada función.

Lista de algunas primitivas

Observamos que, si leemos en sentido inverso la tabla de derivadas, obtenemos el siguiente listado.

- $\int k\ dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \wedge n \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + C$

Actividad 1

Hallar las primitivas

1.1 $\int x^2 dx =$	1.2 $\int \frac{x^2}{2} dx$=	1.3 $\int \sqrt{x}\, dx =$
1.4 $\int \frac{dx}{x} =$	1.5 $\int \sqrt[3]{x^2} dx =$	1.6 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$
1.7 $\int \frac{cosx}{5} dx =$	1.8 $\int \left(2 - \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^4} \right) dt$ =	1.9 $\int by^2 (y-a) dy =$
1.10 $\int (2+x)^2 dx =$	1.11 $\int \dfrac{x^2+1}{x} dx =$	1.12 $\int (sen\ u - \frac{1}{2} \cos\ u)\ du =$

Métodos de integración

Generalmente sucede que las funciones a integrar no tienen una familia de primitivas que se pueden hallar directamente. Para ello, existen métodos que nos permiten encontrar dichas primitivas.

Integración por sustitución

En algunos casos nos podemos encontrar con integrandos que son el producto de una función y su derivada o parte de ella.

Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x^3+1} \cdot 3x^2$.

Si llamamos $u = u(x) = x^3 + 1$, su derivada es $du = u'(x)dx = 3x^2dx$. El método de sustitución nos permite hacer lo siguiente:

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{x^3+1} \cdot 3x^2 dx = \int \sqrt{u(x)}.u'(x)dx = \int \sqrt{u}du \rightarrow \text{simplificando la notación.}$$

La resolvemos aplicando reglas: $\int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \dfrac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

Y por último, reemplazamos por lo que originalmente habíamos llamado $u = u(x) = x^3 + 1$:

$$\int f(x)dx = \frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

Otro ejemplo:

Resolver $\int 2x \cdot e^{\left(x^2+1\right)}dx$

Para resolver esta integral podemos usar el método de sustitución porque en ella encontramos la función x^2+1 y su derivada $2x$.

A la función la llamamos $u = x^2+1$ y con la derivada y el dx formamos el du: $du = d\left(x^2+1\right) = 2xdx$.

Reemplazando la integral que queremos resolver:

$$\int 2x \cdot e^{\left(x^2+1\right)}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\left(x^2+1\right)} + C$$

Actividad 2

Calcular aplicando el método de sustitución:

2.1 $\int 2x(x^2+4)^3 dx =$ 2.2 $\int \frac{3x}{x^2+1} dx =$ 2.3 $\int xe^{-\frac{x^2}{2}} dx =$

2.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x}} =$ 2.5 $\int \frac{bx}{\sqrt{c^2-x^2}} dx =$ 2.6 $\int \frac{1+lnx}{x} dx =$

2.7 $\int 2^{-2x} dx =$ 2.8 $\int cosxsenxdx =$ 2.9 $\int asen(wt)dt =$

Otro método muy utilizado para la resolución de integrales indefinidas es el siguiente.

Integración por partes

Este método nos es útil cuando reconocemos en el integrando el producto entre una función y el diferencial de otra. Se deduce de la derivada por regla de un producto de funciones.

Consideremos la siguiente función: $f(x) = x \cdot e^x$

Supongamos que queremos derivarla por regla, entonces tomamos: $u(x) = x$ y $v(x) = e^x$

La elección no es arbitraria, se hará de manera que se simplifique al máximo la integral que quede por resolver.

Recordando la derivada de un producto: $f'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' = u(x)' \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)'$ y aplicándola a la función obtenemos: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$.

Si tomamos la regla del producto y la integramos:

$$\int f'(x)dx = \underbrace{\underbrace{\int [u(x)\cdot v(x)]'dx}_{\text{la integral de una derivada es la misma función}}}_{u(x)\cdot v(x)} = \int [u(x)'\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x)']dx = \int u(x)'\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v(x)'dx$$

Entonces $u(x)\cdot v(x) = \int u(x)'\cdot v(x)dx + \underbrace{\int u(x)\cdot v(x)'dx}_{\text{ésta es la integral que queríamos resolver}}$

Despejando:

$$\boxed{\int u(x)\cdot v(x)'dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x).u(x)'dx}$$

Veamos el ejemplo con el que estábamos trabajando.

Tomamos la derivada y la integramos:

$$\underbrace{\int f'(x)dx}_{\underbrace{\text{la integral de la derivada es la función}}_{f(x)=x\cdot e^x}} = \int \left(1\cdot e^x + x\cdot e^x\right)dx = \int 1\cdot e^x dx + \underbrace{\int x\cdot e^x dx}_{\underbrace{\text{la integral que queremos resolver}}_{\int x\cdot e^x dx}}$$

Entonces:

$$\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx$$
$$\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x = e^x\left(x-1\right)+C$$

Actividad 3

Calcular utilizando el método de integración por partes

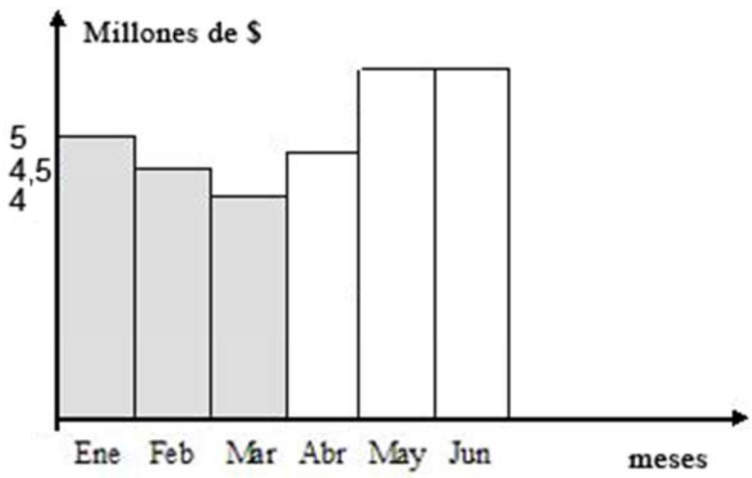
3.1 $\int lnx\ dx =$ 3.2 $\int x^2 \ln\ x\ \ dx =$ 3.3 $\int x^2 e^x\ \ dx =$

3.4 $\int x\ \cos\ x\ dx =$ 3.5 $\int x\ e^x\ \ dx =$ 3.6 $\int \ln\left(\frac{x}{2}\right)dx =$

Previamente habíamos definido a la integración como la operación inversa a la derivación y calculamos integrales indefinidas hallando su familia de primitivas. Ahora desarrollaremos el concepto de integral como cálculo de áreas.

Existe una cantidad muy importante de funciones para las cuales tiene interés particular el cálculo del área bajo su gráfica, algunos ejemplos son:

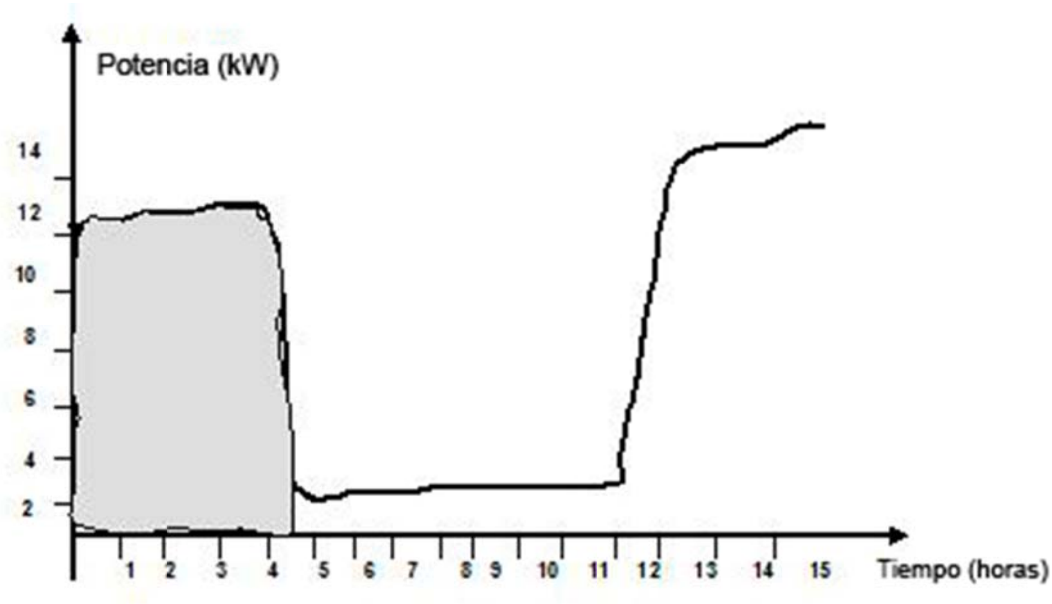
- Las ganancias de una compañía de electricidad durante el primer semestre del año, se representa en la siguiente gráfica:



Si queremos conocer las ganancias acumuladas al finalizar el mes de marzo, sólo tenemos que calcular el área bajo la curva de ganancias para los tres primeros meses:

5 + 4,5 + 4 = 13,5 millones de pesos.

- La figura representa la potencia, en kW, que se está empleando en cada momento en un cierto local, a lo largo del día



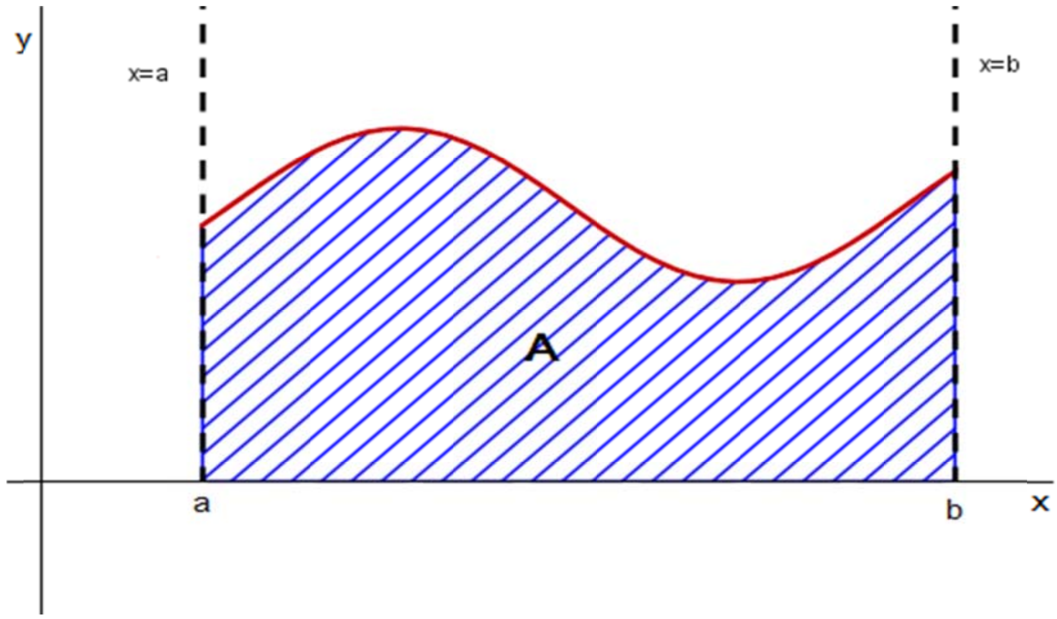
. Queremos calcular el consumo de energía entre las 0 horas y las 4,5 horas de la mañana. La energía, en kWh, es el área bajo la curva de potencia y, para nuestro caso es aproximadamente:

(12,1 kW).(4,5 horas) = 54,45 kWh

Terminamos de ver dos ejemplos en los cuales el área bajo la curva de una determinada función tiene, en cada caso, un significado especial:

- El área bajo la curva de ganancias nos da el monto de las ganancias acumuladas
- El área bajo la curva de potencia, nos proporciona la energía consumida.

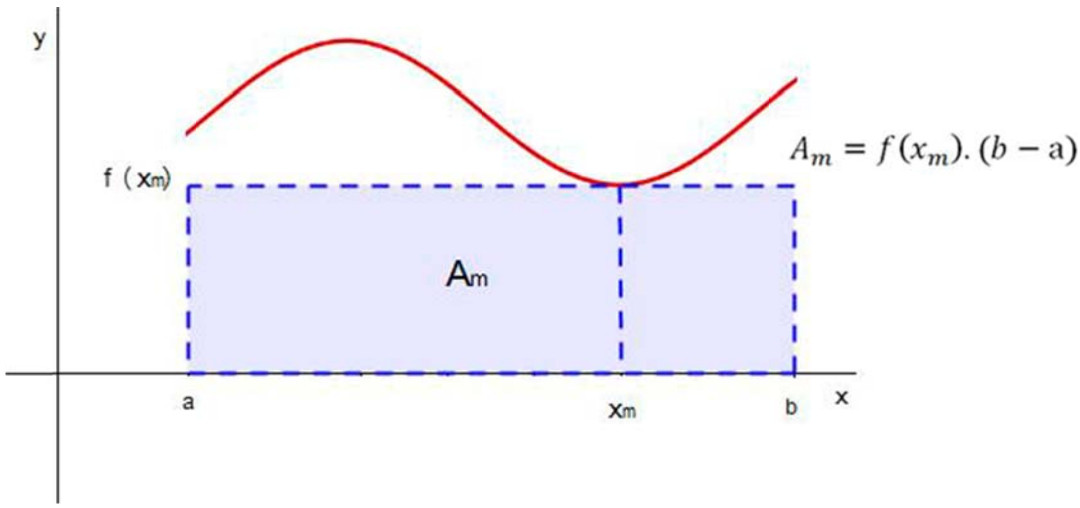
De los ejemplos anteriores podemos entender que el cálculo de área bajo una curva puede resultar de mucha utilidad. Esto nos lleva a averiguar cómo puede calcularse el área. Para ello, conociendo la ecuación de una curva y = f (x), veremos cómo hallar el área entre dicha curva, el eje de las x y dos rectas que pasan por los puntos cuyas abscisas son x = a y x = b.



Una primera aproximación es calcular el área mediante un rectángulo con base en el eje x y altura equivalente al mínimo valor que toma la función en todo el ancho del correspondiente rectángulo.

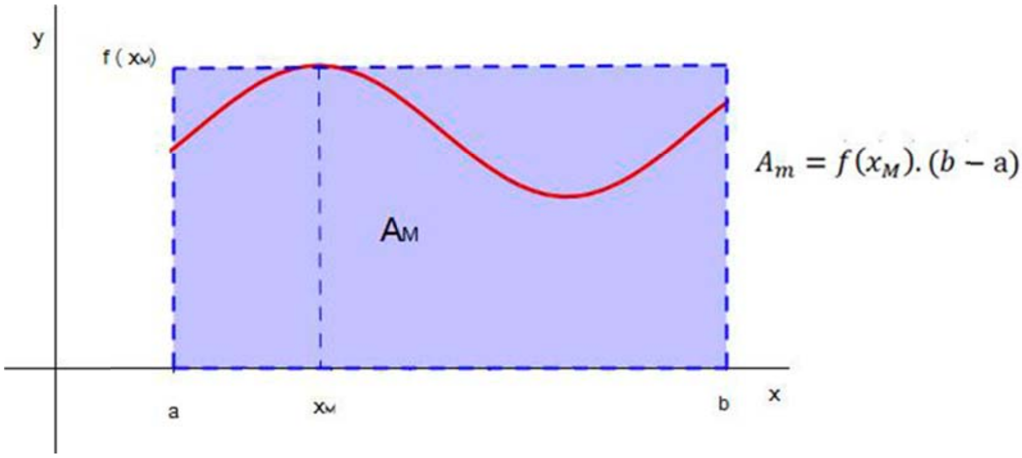
Queremos calcular el área encerrada por la curva de la función f(x), el eje de las x y las rectas de ecuación x = a y x = b.

En este caso calcularemos el área del rectángulo cuya base será el segmento $\overline{\mathrm{ab}}$ y cuya altura será el valor $f(x_m)$ siendo x_m la abscisa para la cual la función f(x) asume su valor mínimo en el intervalo considerado; de manera que tal área será menor que el área que pretendemos calcular.



A esta área la llamaremos A_m. Ésta será el producto de f (x_m) por (b – a). Es decir $A_m = f(x_m).(b - \mathrm{a})$

De manera análoga tomaremos el rectángulo de base $\overline{\mathrm{ab}}$ y $f(x_M)$, siendo x_M la abscisa donde la función toma su valor máximo; en tal caso el área calculada superará el valor del área bajo la curva.



Si consideramos una división del intervalo dado [a,b] en subintervalos y calculamos áreas de rectángulos que se ajusten a la curva, obtendremos una mejor aproximación al área exacta que define la función f(x).

Para esto debemos definir que es una **partición de un intervalo** [a,b] tomando n+1 valores x_i, pertenecientes a dicho intervalo, tales que:

$$\mathrm{a} = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots\ldots x_n = b$$

a la cual llamaremos **partición de orden n**, denotando como $\mathbf{P_n}$ al conjunto de estos subintervalos definidos por dos valores sucesivos x_i.

$$P_n = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots\ldots\ldots [x_{i-1}, x_i], \ldots\ldots [x_{n-1}, x_n]\}$$

Llamaremos longitud del intervalo [a,b] al número: b – a , y entonces la longitud del subintervalo i – ésimo será el número:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Se define **norma de la partición** al mayor número de los Δx_i , es decir la norma N es:

N = máximo Δx_i

De manera que nos proporciona la longitud del mayor subintervalo.

También debemos definir el **aumento de una partición en un intervalo** [a,b].

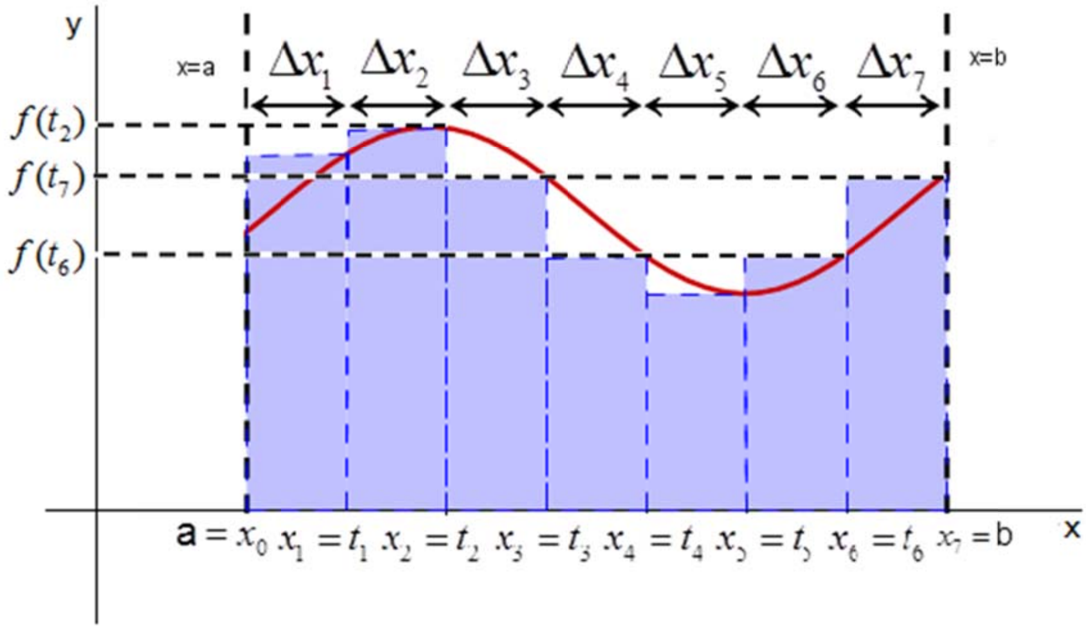
Dada una partición P_n llamaremos aumento de dicha partición al conjunto de números $t_1, t_2, \ldots\ldots., t_i, \ldots\ldots, t_n$ pertenecientes cada uno a un subintervalo distinto de la partición. En símbolos:

$$T_n = \{t_1, t_2, \ldots\ldots., t_i, \ldots\ldots, t_n\}$$

tal que cumplan las condiciones:

$$x_{i-1} \le t_i \le x_i \quad \text{para } \ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n.$$

Volviendo al cálculo del área bajo la curva y haciendo ahora una partición P_n del [a,b], definiendo en ella un aumento T_n y tomando como área la suma de las áreas de los rectángulos elementales: $A_i = f(t_i)\Delta x_i$



En la figura el área aproximada está dada por la suma $A_{aprox} = \sum_{i=1}^{7} A_i$ como $A_i = f(t_i)\Delta x_i$,

entonces $A_{aprox} = \sum_{i=1}^{7} f(t_i)\Delta x_i$

Suma de Riemann

Sea una función f(x) definida en el intervalo cerrado [a,b], P_n una partición de ese intervalo y T_n un aumento correspondiente a esa partición. Se toma el producto entre la longitud Δx_i y el valor de la función f(x): $f(t_i)\ \Delta x_i$

Llamaremos **suma de Riemann** a la suma de todos estos productos:

S_n = $f(t_1)\ \Delta x_1 + f(t_2)\ \Delta x_2 + \dots\dots\dots\dots + f(t_i)\ \Delta x_i + \dots\dots\dots + f(t_n)\ \Delta x_n$ que en forma abreviada escribiremos:$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$

El valor que toma la suma dependerá de la función f(x) considerada, de los valores de a y b, de la partición específica P_n que se haya elegido, y también de los valores t_i tomados para el aumento.

Integral Definida

Continuando con la idea de dividir al intervalo en el cual queremos calcular el área, seleccionando rectángulos que mejor se ajusten a la curva, iremos tomando distintas particiones P_n cada una posterior a la otra a medida que n, el número de sub-intervalos crece. Consecuentemente, aumentando el número de intervalos haciendo tender n a infinito, pero teniendo la precaución de no dejar ningún subintervalo sin subdividir. Para lograr esto, por ejemplo, se puede hacer que cada partición posterior se obtenga de una anterior por una subdivisión de cada subintervalo en dos.

Además, si a medida que aumentamos n haciendo tender la norma N a cero, estamos asegurando que ningún subintervalo permanezca sin subdividir.

Teniendo en cuenta estas consideraciones sobre la forma particular de hacer tender n a infinito, podemos definir la integral definida como el límite I al cual tiende la suma de Riemann, siempre que dicho límite exista. Si el límite $\boldsymbol{I}$ existe, decimos que f(x) es integrable sobre $[a,b]$

Si una función es continua sobre $[a,b]$ entonces se puede demostrar que es integrable sobre dicho intervalo, cuando el número de subintervalos n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i = I$$

y para expresarlo usaremos el símbolo de Leibnitz: $I = \int_a^b f(x)\ dx$

que se lee "integral entre a y b de f de x, diferencial de x". El símbolo $\int$ proviene de una deformación de la S de suma; el número "a" recibe el nombre de límite inferior de integración y "b" el de límite superior.

Llamaremos intervalo de integración, al intervalo $[a,b]$ y a f(x), integrando.

Entonces: $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$ usando el concepto de norma, esto mismo se podrá escribir: $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{N\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$

Se puede demostrar, que una vez aplicado el límite sobre la suma de Riemann, el valor resultante, es decir la integral, ya no depende de la partición ni del aumento particularmente tomado, sino sólo de la función f(x) y de los extremos a y b. Se hace notar especialmente que el cálculo de una integral definida es un número, el que resulte del límite propuesto sobre la suma de Riemann.

Si volvemos sobre el cálculo del área bajo la curva planteado anteriormente, en donde obtuvimos como resultado: $A_{aprox} = \sum_{i=1}^{7} f(t_i)\Delta x_i$, intuitivamente nos damos cuenta que el área aproximada A_{aprox} se ajustará cada vez más al área A bajo la curva a medida que mayor sea el número de intervalos de la partición. También es intuitivo que, en el límite, cuando el número de los rectángulos elementales tiende a ∞ , la suma dará exactamente el área A.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Como conclusión obtenemos:

Si f(x) es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

Área= $\int_a^b f(x) dx$

Algunas propiedades de la integral definida

- Intervalo de integración de longitud nula: $\int_a^a f(x) \; dx = 0$
- Aditividad de los intervalos de integración:

$\int_a^b f(x) \; dx = \int_a^c f(x) \; dx + \int_c^b f(x) \; dx$ si c es un punto del intervalo $[a,b]$

- Intercambio de los extremos de integración: $\int_a^c f(x) \; dx = -\int_c^a f(x) \; dx$
- Propiedad lineal de las integrales definidas:

- Propiedad de aditividad o superposición:

$\int_a^b f(x) \; dx + \int_a^b g(x) \; dx = \int_a^b [f(x) + g(x)] \; dx$

- Propiedad de homogeneidad:

$\int_a^b K \; f(x) \; dx = K \int_a^b f(x) \; dx$

Si f(x) es una función continua en $[a,b]$, $x \in [a,b]$ entonces se puede definir la función integral $A(x) = \int_a^x f(x) \; dx$ donde $A(x)$ es una primitiva de f(x); o sea: $A'(x) = f(x)$. Esta definición nos es útil para la demostración del siguiente teorema.

Teorema Fundamental de Cálculo Integral

Sea F(x) una primitiva de f(x), entonces se verifica que

$F'(x) = f(x)$ (I);

por la definición anterior la función integral A(x) es otra primitiva de f(x) o sea:

$A'(x) = f(x)$ (II)

y sabemos que dos funciones que tienen igual derivada difieren de una constante. Por lo tanto de las ecuaciones (I) y (II) podemos plantear:

(III) $A(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$

Para calcular la constante **C** hacemos x = a.

$\int_a^a f(x)\,dx = F(x) + C$

Usando una de las propiedades de la integral definida

$0 = F(a) + C$

de donde

$C = -F(a)$ (IV)

Reemplazando (IV) en (III)

$\int_a^x f(x)\ dx = F(x) - \underbrace{F(a)}_{c}$

y haciendo x = b, resulta

$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ (V) conocida con el nombre de:

Regla de Barrow

Recordemos que F(x) es una primitiva de f(x).

La expresión (V) vincula el concepto de integral definida y el de antiderivada, que como sabemos, se calcula mediante integración indefinida. El uso de esta regla simplifica notablemente el cálculo de las integrales definidas.

Resulta cómodo usar la notación:

$F(b) - F(a) = F(x)\ \Big]_a^b$

con ello la regla de Barrow puede escribirse:

$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\ \Big]_a^b$

Por ejemplo, para hallar $\int_{-1}^{2} x^2\ dx$

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$$

Actividad 4

Hallar las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow:

$$4.1 \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$4.2 \int_0^{\sqrt{3}} t \cdot \sqrt{t^2+1} dt =$$

$$4.3 \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x+3} =$$

$$4.4 \int_0^{-1} x \cdot e^x dx =$$

$$4.5 \int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right) dx =$$

$$4.6 \int_1^e 2x \cdot \ln(x) dx =$$

Cálculo de áreas por integración definida

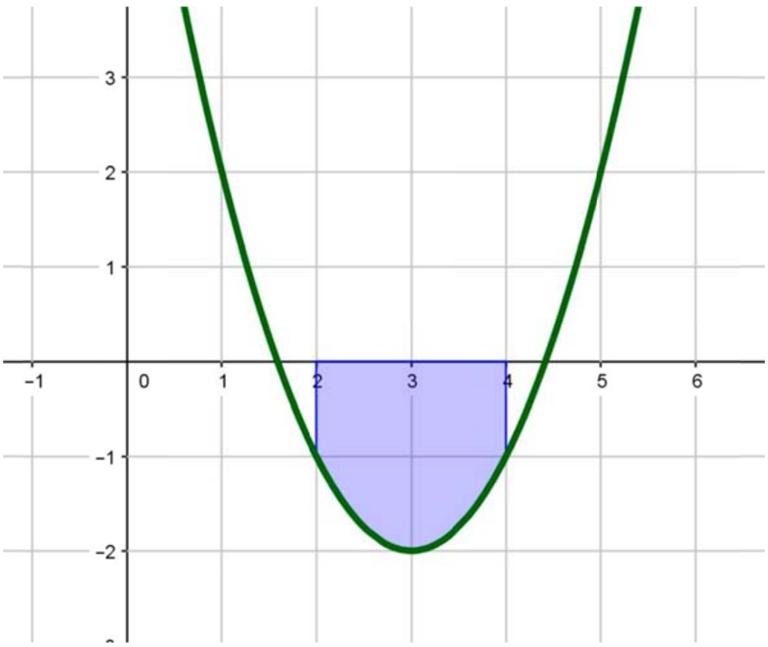
Las áreas, siendo números que representan una medida de superficie, es decir el número de veces que cabe la unidad de superficie, no pueden ser negativas.

Las integrales definidas en cambio, sí pueden dar como resultado un número negativo. Esto ocurre precisamente toda vez que la función asume valores negativos en la totalidad del intervalo de integración.

Por ejemplo, integremos la función $f(x) = (x-3)^2 - 2$ entre los valores 2 y 4 y el eje x

$$\int_2^4 \left[(x-3)^2 - 2\right] dx = \int_2^4 \left(x^2 - 6x + 7\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 7x\right) \Big]_2^4 =$$

$$\left(\frac{64}{3} - 48 + 28\right) - \left(\frac{8}{3} - 12 + 14\right) = \frac{4}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{10}{3}$$



Dentro de ese intervalo la función toma exclusivamente valores negativos y el valor resultante de la integración es un número negativo; sin embargo, el área entre la curva y el eje no puede ser negativa; en consecuencia, debe tomarse el valor absoluto del resultado de la integral cuando lo que se está calculando es un área. El valor negativo de la integral en estos casos lo único que indica es que la curva está por debajo del eje x.

En estos casos, tomamos el valor absoluto del resultado: $\left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$. Este será el valor del área que encierran las curvas dadas.

La dificultad se presenta cuando a lo largo del intervalo de integración la función cambia de signo de modo que parte de la curva queda debajo del eje x y parte encima de él. Si no se tiene la precaución de graficar la curva y con ello evidenciar este hecho, se cometerá el error de suponer que la integral está dando el área entre la curva y el eje x, cuando en realidad el resultado de la integral estará dando la diferencia entre las áreas que están por encima del eje x y las que están debajo.

En el ejemplo, ocurriría esto si integramos entre 0 y 6. Para evitar este inconveniente debemos dividir el intervalo de integración en tantos subintervalos dentro de los cuales la función tenga un mismo signo; integrar entonces separadamente sobre cada intervalo y sumar luego los valores absolutos de cada resultado.

Por ejemplo, calcularemos el área limitada por $y = x^2 - 2x$, el eje x y las rectas x=0 y x=3

1) Hallamos las intersecciones de la curva con el eje x.

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$ resulta $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$

2) Calculamos la integral definida en $[0,2]$

$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

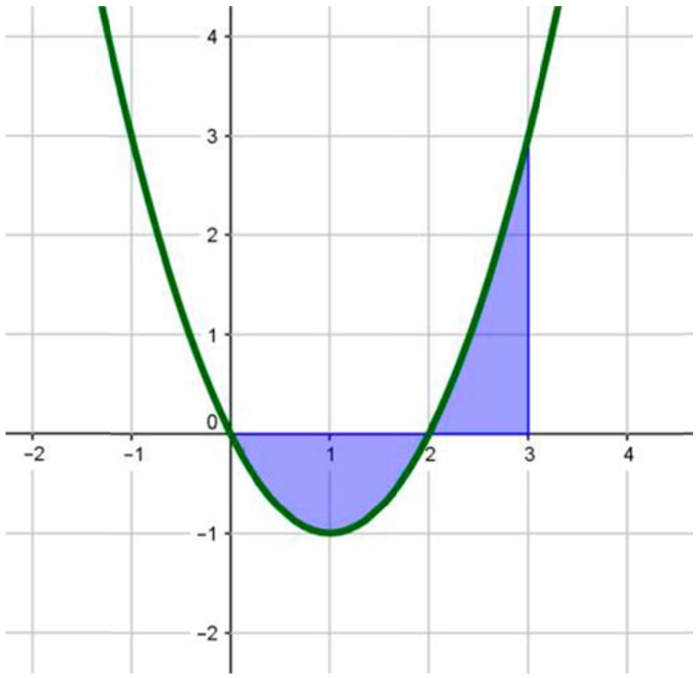
Tomamos el valor absoluto del resultado obtenido: $\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

3) Calculamos la integral definida en $[2,3]$

$$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{27}{3} - 9 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

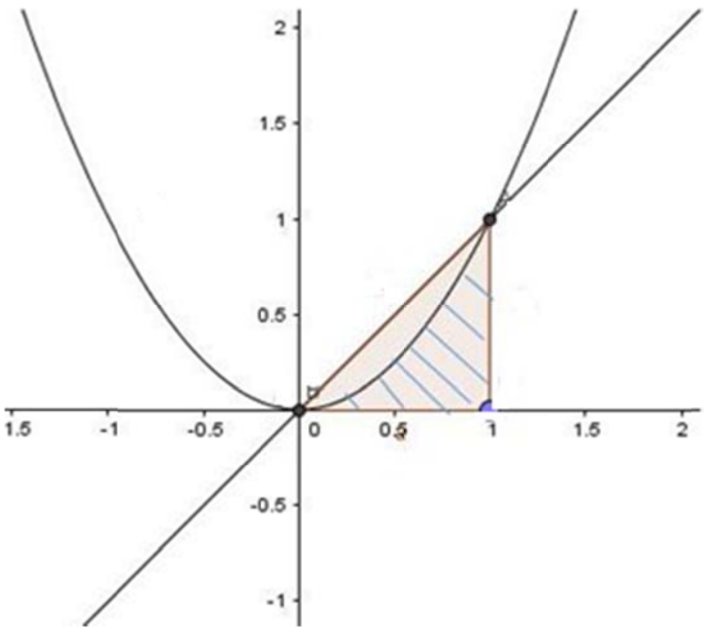
Finalmente se suman los resultados que obtuvimos:

$$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

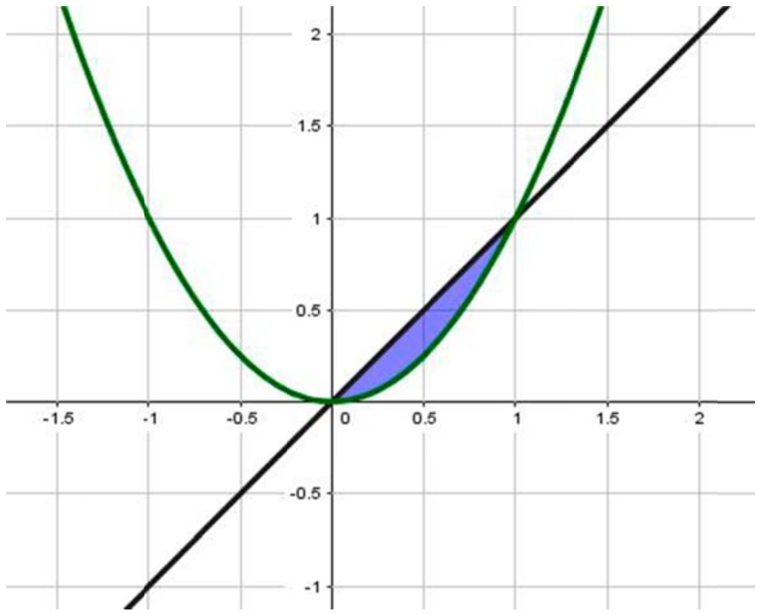


Calcularemos el área encerrada entre la recta **y = x** y la parábola **y = x^2**

El área deberá obtenerse como diferencia entre el área bajo la recta y el área bajo la parábola, entre los límites que marcan las intersecciones de ambas gráficas, es decir: $x^2 = x$ $\Leftrightarrow$ $x^2 - x = 0$ que tiene como raíces 0 y 1



$$\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



Actividad 5

Hallar el área limitada por:

5.1 $y = x^2 - 5x$ y el eje x

5.2 $y = x - x^2 + 6$ y el eje x

5.3 $y = x^2 - x - 2$ $y = 0, x = 1$ y $x = 3$

5.4 $y = \ln(x)$ el eje x en el intervalo [1,e]

5.5 $y = senx$ $y = 0, x = 0, x = 2\pi$

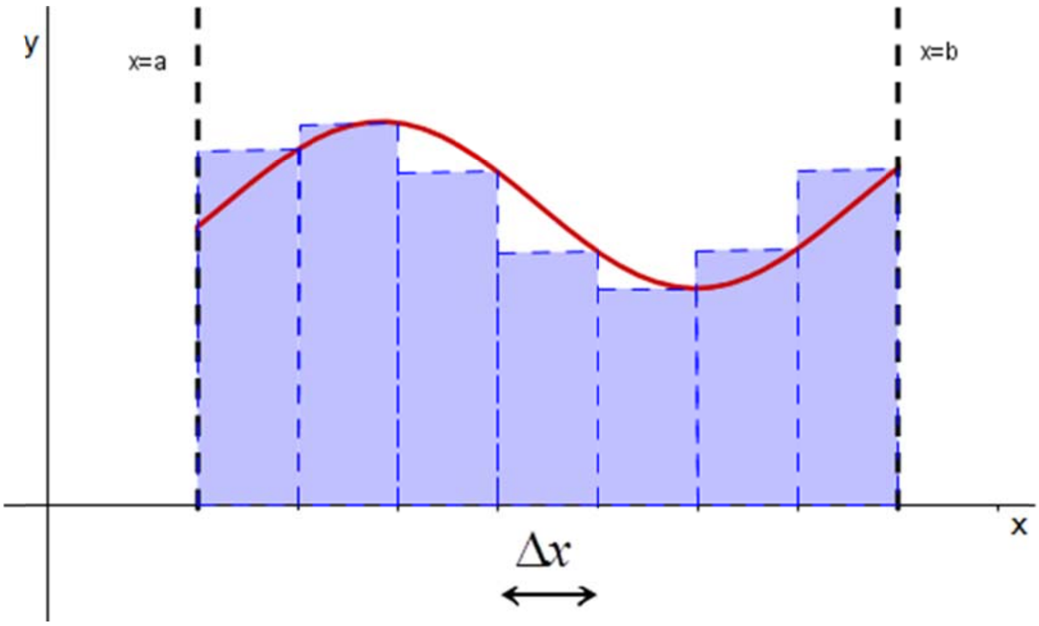
5.6 $y = x - x^2$ e $y = -x$

5.7 $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 6x + 10$

Integración numérica

En general sucede que no se puede hallar el valor exacto de una integral, ya sea porque el caso de aplicación no lo requiere o más comúnmente porque las funciones a integrar no tienen primitiva fácilmente calculable. Dado que la integral de una función puede obtenerse hallando el límite de una sucesión, para aproximar dicho resultado se emplea el mismo procedimiento tomando un término de la sucesión suficientemente avanzado.

Partimos el intervalo [*a,b*] en n sub-intervalos igual de longitud Δx y tomamos el valor de la función en el extremo izquierdo de cada intervalo, de manera que la integral tiene como valor aproximado:



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \Delta x\left[f(a)+f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\cdots+f(a+(n-1)\Delta x)\right]$$

Por ejemplo, calculando la integral: $\int_0^1 x\,dx$

a) Por el método exacto: $\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2} = 0,5$

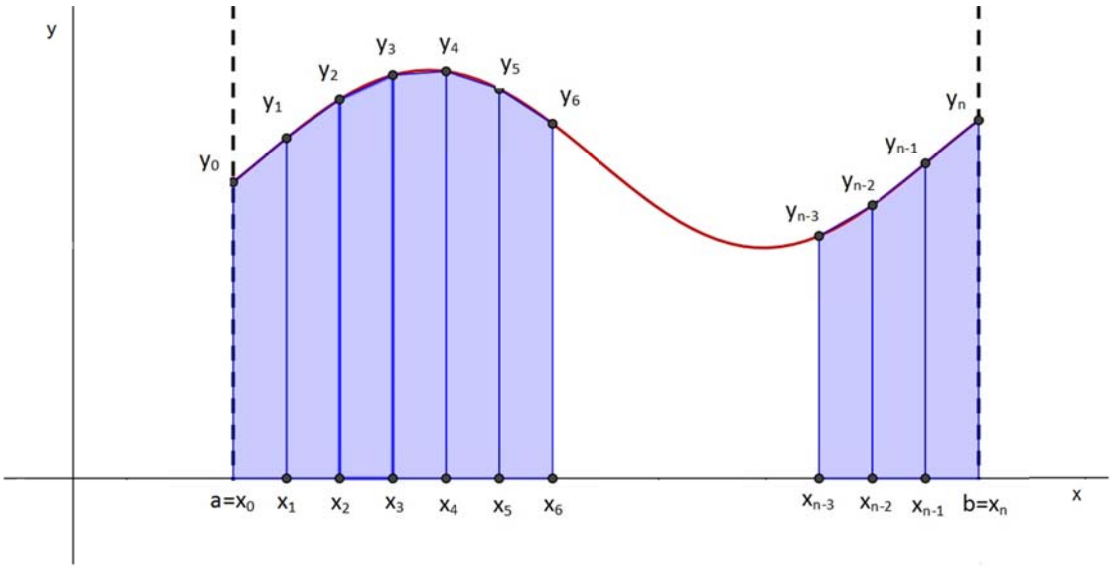
b) Por el método aproximado: hacemos n = 100 para lo cual resulta $\Delta x = \frac{1-0}{100} = 0,01$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{100}\left[0+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{98}{100}+\frac{99}{100}\right] = 0,495 \text{ (el valor exacto es 0,5)}$$

Un método de cálculo aproximado que mejora el de tomar rectángulos de igual base y alturas correspondientes al valor de la función en el extremo izquierdo (o derecho) de los subintervalos es el llamado:

Método de los Trapecios

Este método reemplaza cada uno de los rectángulos elementales por un trapecio de altura igual a la longitud Δx común de los sub-intervalos y bases respectivamente iguales a los valores de la función en los extremos de cada uno de los sub-intervalos, consiguiéndose, de este modo una mejor aproximación al valor exacto de la integral.



Suponemos entonces conocidos los valores que toma la función en los puntos situados a igual distancia $x_0, x_1, ..., x_n$ siendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Un primer valor aproximado del área limitada por los puntos A_0, A_n, x_n, x_0 puede obtenerse sumando las áreas de los trapecios inscriptos en cada una de las superficies parciales.

Área $(y_0, y_1, x_0, x_1) = ½\, \Delta x*(y_0 + y_1)$; la suma resulta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{2} * \left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right) = \Delta x\left(\frac{E}{2} + P + I\right)$$

siendo E = suma de las ordenadas extremas; P = suma de las ordenadas de subíndices pares; I = suma de las ordenadas de índices impares.

Por ejemplo, calcularemos: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$ (esta integral no puede hallarse fácilmente con la Regla de Barrow)

Siendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$; tomando $\Delta x = 0{,}1$ puede construirse la siguiente tabla:

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	0,7071	0,7053	0,7001	0,6917	0,6804	0,6666	0,6509	0,6337	0,6155	0,5965	0,5773

Resultando $\frac{E}{2} = \frac{0,7071 + 0,5773}{2} = 0,6422$

$$P + I = 5,9407$$

$$y$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong 0,1 * 6,5829 \cong 0,65829$$

El área aproximada bajo la curva $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en el intervalo $\left[0,1\right]$ es de $0,65829cm^2$.

Fórmula de Simpson

En la fórmula de los trapecios, hemos sustituido la curva por una poligonal inscripta. Una mejor forma de aproximación es sustituir la curva por arcos de parábola. La fórmula de Simpson, aproxima el cálculo del área bajo la curva, sustituyendo la curva por una parábola, resultando para el cálculo la siguiente expresión:

$$\acute{A}rea \cong \frac{\Delta x}{3}\left(E+4I+2P\right)$$

teniendo E, I y P significado análogo al descripto para la fórmula de los trapecios.

Por ejemplo, calcularemos: $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$; tomando Δx = 0,1 como en el método de los trapecios, podemos hallar *(usando la tabla construida para dicho método)*:

$$E=0,7071+0,5773=1,2844$$

$$4I= 4\left(0,7053+0,6917+0,6666+0,6337+0,5965\right) = 13,1752$$

$$2P =2\left(0,7001+0,6804+0,6509+0,6155\right) = 5,2938$$

$$A\cong \frac{0,1}{3}\left(1,2844+13,1752+5,2938\right)\cong \frac{0,1}{3}*19,7534\cong 0,6584$$

El área aproximada bajo la curva $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en el intervalo $\left[0,1\right]$ es de $0,6584cm^2$.

Sugerimos leer del capítulo 10: “Estimación del trabajo que realiza el músculo cardíaco durante un ciclo” y “Cálculo de la fotosíntesis”, donde se vincula la integración estudiada en este capítulo. Y del capítulo 9: “Áreas y volúmenes de piezas arqueológicas”.

Actividad 6

6.1 Aplicando la fórmula de los trapecios, hallar el valor aproximado de las siguientes integrales definidas, tomando un total de 10 intervalos entre los extremos de integración

6.1.1 $\int_0^1 e^{-x^2}\cdot dx=$

6.1.2 $\int_3^5 \dfrac{dx}{\ln\left(x\right)}=$

6.2 Aplicando la fórmula de Simpson $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{3}(E+4I+2P)$ calcular aproximadamente la longitud de arco de la curva $y = e^x$ en el intervalo [-1,1] $(n = 10)$.

Otro campo de aplicación donde nos puede resultar de suma utilidad la fórmula de Simpson es para calcular el volumen de algún cuerpo o estructura. Como puede encontrarse en el ámbito de las geociencias (Malvić et al. 2014; Slavinić y Cvetković 2016; entre otros) podemos utilizar este método de integración numérica, por ejemplo, para relevar el volumen una estructura arqueológica. Pensemos en una práctica en terreno de un sitio arqueológico donde comienza a excavarse con niveles artificiales de un espesor de 5cm, una cuadrícula en la cual se puede discriminar una estructura de combustión.

Se desea calcular el volumen del fogón teniendo como dato una representación del mismo sobre un plano por medio de un sistema llamado curva de nivel.

Un sistema de este tipo está basado en la proyección sobre un plano de comparación de las intersecciones entre la superficie del sitio y un conjunto de planos paralelos y equidistantes

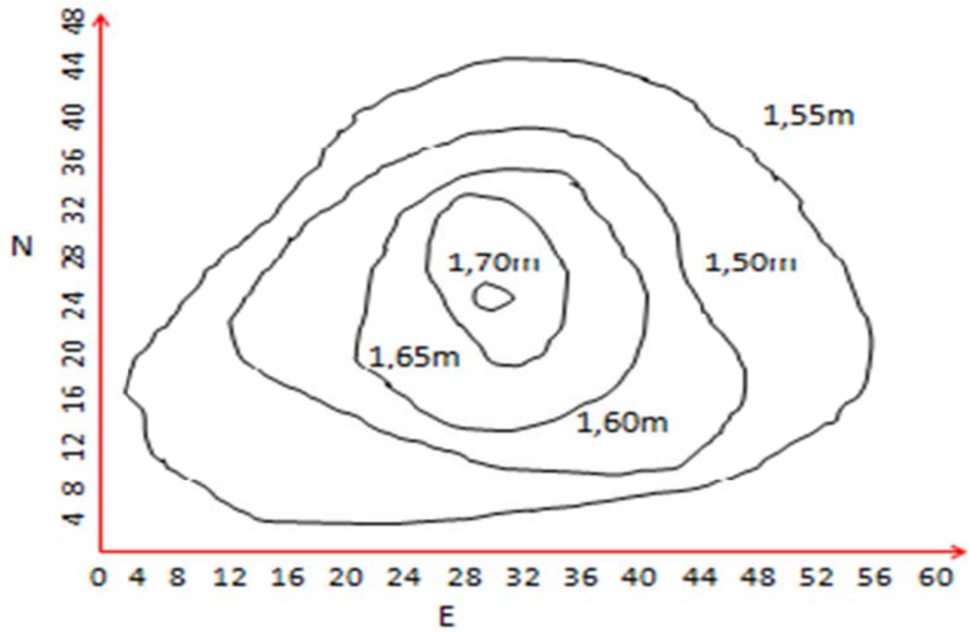
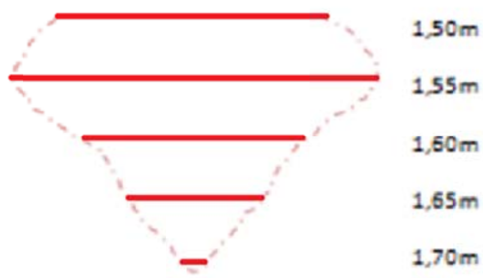


Figura 1

La primera aparición de la estructura de combustión fue evidente a los 150cm de profundidad; a 170cm estaba su límite inferior.

En un corte vertical su forma aproximada es:



Su dispersión fue mapeada mediante el empleo de un sistema cartesiano ortogonal donde los ejes representan los sentidos E y N en la cuadrícula. Los puntos que se reconocieron están remarcados en la Figura 1.

Nos proponemos, como ya dijimos, calcular el volumen aproximado utilizando la fórmula de Simpson. Para lograr el objetivo propuesto debemos calcular primero las áreas de cada una de las superficies encerradas por la curva de nivel. Ver los cuadros I, II, III y IV.

Cuadro I

Profundidad: $z = 150cm$

$n = 10$; $a = 8$; $b = 48$; $h = \frac{b-a}{n} = \frac{40}{10} = 4[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
8	0		
12		11	
16			17
20		22	
24			26
28		28	
32			15
36		21	
40			16
44		12	
48	0		
$\sum$	0	94	74
4I + 2P		376	148

El área a 1,5 m será: $A150 \cong \frac{4}{3}(0+376+148) = 698{,}67[cm^2] \cong 7{,}00[dm^2]$

Cuadro II

Profundidad: $z = 155cm$

$n = 14$; $a = 2$; $b = 58$; $h = \frac{b-a}{n} = \frac{56}{14} = 4[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
2	0		
6		16	
10			24
14		29	
18			35
22		40	
26			42
30		42	
34			42
38		40	
42			37
46		29	
50			25
54		18	
58	0		
Σ	0	214	205
4I + 2P		856	410

El área a 1,55 m será:

$$A155 \cong \frac{4}{3}(0+856+410) = 1688[cm^2] \cong 16{,}9[dm^2]$$

Cuadro III

Profundidad: $z = 160cm$

$n = 6$; $a = 16$; $b = 40$; $h = \frac{40-16}{6} = 4[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
16	0		
20		12	
24			18
28		20	
32			14
36		12	
40	0		
$\sum$	0	44	32
4I + 2P		176	64

El área a 1,60 m será:

$$A160 \cong \frac{4}{3}(176+64) = 320[cm^2] \cong 3{,}2[dm^2]$$

Cuadro IV

Profundidad: $z = 165cm$

$n = 6$; $a = 24$; $b = 36$; $h = \dfrac{36-24}{6} = 2[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
24	0		
26		6	
28			8
30		7	
32			5
34		3	
36	0		
$\sum$	0	16	13
4I + 2P		64	26

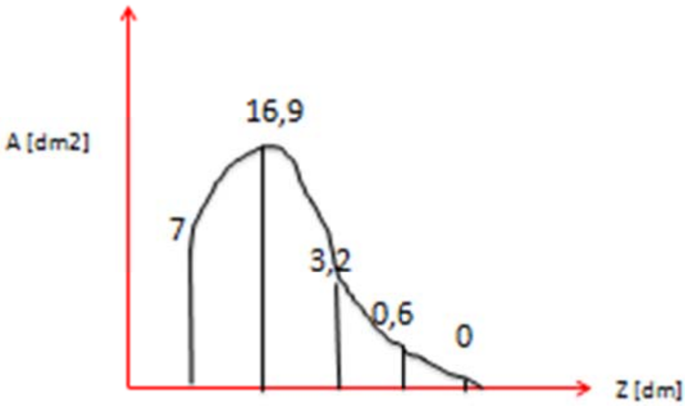
El área a 1,65 m será:

$$A165 \cong \frac{2}{3}(64+26) = 60[cm^2] = 0{,}6[dm^2]$$

$$A170 \cong 0$$

Cálculo del volumen

Para comprender el procedimiento que seguiremos para hallar el volumen, volquemos los resultados obtenidos sobre un gráfico en el cual sobre el eje de ordenadas anotamos las áreas de las curvas de nivel en dm^2 y sobre el eje de abscisas las cotas del fogón en dm.



La integral definida:

$V = \int_{15}^{17} A(z) \cdot dz$ nos dará el volumen buscado.

Aplicando Simpson con:

$n = 4$; $a = 15$; $b = 17$; $h = \frac{17-15}{4} = 0{,}5[dm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
15,0	7,0		
15,5		16,0	
16,0			3,2
16,5		0,6	
17,0	0		
Σ	7,0	17,5	3,2
4I + 2P	7,0	70,0	6,4

El volumen de manera aproximada será:

$$V \cong \frac{0,5}{3}\left(7+70+6,4\right) \cong 13,9[dm^3]$$

Bibliografía

Berio, A. y otros. (2011). *Matemática 2 Activa*. (1ª ed). Argentina. Puerto de Palos.

Larson, R. (2001). *Cálculo y geometría analítica. (6ª ed).* México. Programas Educativos S.A.

López C (2005). *Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática*. Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Malvić T., Rajić R., Slavinić P. y K. Novak Zelenika (2014). Numerical integration in volume calculation of irregular anticlines. *The Mining-Geological-Petroleum Engineering Bulletin* 29 (2):1–8.

Slavinić P. y M. Cvetković (2016). Volume calculation of subsurface structures and traps in hydrocarbon exploration – A comparison between numerical integration and cell based models. *Open Geosciences* 8:14–21.

Smith, S. (1998). *Algebra, trigonometría y geometría analítica.* Naucalpan de Juárez: Addison Wesley.

Antromática : aporte para la formación en matemática de estudiantes de Antropología y Profesorado de Biología / Viviana Cappello ... [et al.] ; coordinación general de Viviana Cappello ; Romina Herrera ; prólogo de Ricardo Alberto Massucco. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1484-2

1. Matemática. 2. Antropología. 3. Biología. I. Cappello, Viviana II. Cappello, Viviana , coord. III. Herrera, Romina, coord. IV. Massucco, Ricardo Alberto , prolog.
CDD 510.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2017
ISBN 978-950-34-1484-2
© 2017 - Edulp

naturales

Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA