

MIGRACIÓN DE GOTAS POR EFECTO TERMOCAPILAR: DEPENDENCIA CUADRÁTICA DE LA TENSIÓN SUPERFICIAL CON LA TEMPERATURA

DRIVEN DROPLETS BY THERMOCAPILLARY EFFECT: QUADRATIC DEPENDENCE OF THE SURFACE TENSION ON THE TEMPERATURE

J. R. Mac Intyre^{*1}, J. M. Gomba² y C. A. Perazzo^{3,4}

¹Aalto University, School of Science, Department of Applied Physics,
P.O. Box 11100, 00076 Aalto, Finland

²Instituto de Física Arroyo Seco IFAS (UNCPBA) and CIFICEN (UNCPBA-CICPBA-CONICET),
Pinto 399, 7000, Tandil, Argentina.

³IMEtTyB, Universidad Favaloro-CONICET, Solís 453, C1078AAI Buenos Aires, Argentina.

⁴Departamento de Física y Química, FICEN, Universidad Favaloro, Sarmiento 1853, C1198AAG Buenos Aires, Argentina.

Recibido: 27/02/2020; Aceptado: 31/05/2020


Se estudia la migración de gotas depositadas sobre una superficie sólida a la cual se le aplica un gradiente uniforme de temperatura. El presente estudio está enfocado en líquidos parcialmente mojantes denominados “*self-rewetting*”, cuya característica distintiva es la dependencia cuadrática de la tensión superficial con la temperatura. A pesar de que estos líquidos presentan una dinámica compleja, aquí se mostrará como las soluciones obtenidas para líquidos con dependencia lineal en la temperatura pueden adaptarse y ser utilizadas para describir su flujo. A diferencia de los líquidos con tensión superficial lineal en la temperatura, el ancho de las gotas de líquido *self-rewetting* crece con el tiempo.

Palabras clave: efecto Marangoni, tensión superficial cuadrática, mojabilidad parcial.

We study the migration of droplets on a solid surface which is under a uniform temperature gradient. The present article focus on partial wetting fluids which surface tension depends on the squared temperature. These type of liquids, called *self-rewetting*, show a complex dynamics and here we will compare with those liquids of linear dependence in the temperature. Unlike to the latter ones, the droplet width increases with the time.

Keywords: Marangoni effect, non-monotonic dependence of surface tension, partial wetting condition.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2020.31.3.107>

 ISSN 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

El flujo de micro-gotas sobre superficies rígidas que son movilizadas por efectos termocapilares es un tópico de central importancia en la industria [1]. Como resultado del gran número de aplicaciones que hacen uso de este efecto, diferentes métodos se han desarrollado para lograr su control. La configuración que aquí nos interesa analizar consiste en una gota sobre un sustrato al que se le aplica un gradiente uniforme de temperatura. Este último induce un gradiente de tensión superficial en la interfaz líquido-gas que desplaza a la gota desde las zonas de menor a mayor energía superficial [2] (ver Fig. 1).

El efecto Marangoni originado por un gradiente de temperaturas ha sido estudiado intensamente tanto en forma teórica como experimental (ver Karbalaei 2016 y las referencias allí citadas) [1]. En estos estudios se ha demostrado la existencia de un esfuerzo termocapilar umbral por debajo del cual la gota no se desplaza [3]. Para esfuerzos termocapilares mayores que ese umbral, se observa que la velocidad de desplazamiento de la gota es proporcional al gradiente térmico aplicado e inversamente proporcional a la viscosidad [4, 5].

Desde el punto de vista teórico, el problema es habitualmente simplificado al análisis de una gota bidimensional que experimenta un esfuerzo sobre su interfaz líquido-gas, y donde el flujo es resuelto bajo la hipótesis de lubricación. Gomba y Homsy [6] han analizado las dependencias morfológicas del flujo con el ángulo de contacto y la sección transversal de la gota depositada. Su estudio, que incluye interacciones moleculares entre el líquido y el sustrato del tipo London-van der Waals y cuyo modelado implica la incorporación de términos potenciales con exponentes $(n, m) = (3, 2)$, reporta la existencia de tres regímenes de movimiento: a) gotas que se elongan, b) gotas que se escinden en volúmenes más pequeños (*breakup*). Por su parte, Karapetsas et al. [7] también han resuelto un problema de valor inicial incorporando la gravedad a sus simulaciones. Demostraron que para ángulos de equilibrio constantes, el gradiente de temperatura combinado con los efectos gravitatorios mejoran el mojado en la superficie. Más recientemente, Mac Intyre et al. [2] han demostrado que los líquidos no polares, cuya interacción molecular es modelada con exponentes $(n, m) = (4, 3)$, se desplazan en forma estable y sin romperse en gotas más pequeñas, y estudiaron cómo es-

* jmintyre@exa.unicen.edu.ar

ta estabilidad es afectada por la gravedad.

Los trabajos mencionados previamente analizan líquidos cuya tensión superficial tienen una dependencia lineal decreciente con la temperatura, y son denominados “líquidos ordinarios” en la Fig. 1. Por el contrario, en este trabajo analizamos fluidos que presentan una dependencia cuadrática de la tensión superficial con la temperatura, comúnmente llamados líquidos “self-rewetting” [8, 9], ver Fig. 1. Karapetsas et al. [10] han analizado algunos aspectos del flujo de estos líquidos en los que se destaca el caso en el que el centro de la gota está ubicada sobre el mínimo de la curva de tensión superficial, lo que provoca que el líquido escape radialmente hacia afuera de la gota. En el presente artículo, nos interesa explorar el efecto sobre el flujo de un decrecimiento monótono y cuadrático de la tensión superficial con la temperatura, con el objeto de observar cómo se modifican los tres regímenes de flujo ya reportados para líquidos ordinarios, es decir, para los que la tensión superficial decrece linealmente con la temperatura [2, 11].

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la siguiente sección se expone el modelo utilizado en las simulaciones, desarrollado dentro del marco de la aproximación de lubricación. En la Sec. III se muestran los resultados principales y se comparan las nuevas soluciones con aquellas para líquidos ordinarios. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sec. IV.

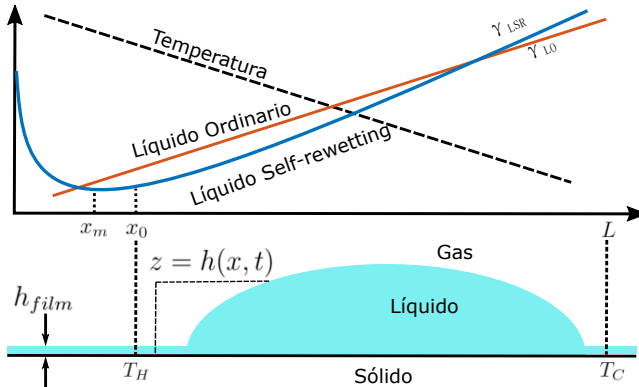


FIG. 1: Esquema del problema. Las curvas indican la temperatura y tensión superficial para un líquido ordinario (rojo) y otro self-rewetting (azul) versus la posición sobre la superficie. Una gota depositada sobre un sustrato sólido calentado en forma no homogénea con $T_H > T_C$. El gradiente de temperatura genera un gradiente de tensión en la superficie del fluido, que desplaza a la gota desde la región de menor hacia la de mayor tensión superficial. La gota es ubicada siempre sobre la zona donde la curva de tensión superficial decrece con la temperatura.

II. MODELO

La Fig. 1 presenta el esquema del problema termocapilar, donde una gota bidimensional de densidad ρ y viscosidad μ se encuentra depositada sobre un sustrato sujeto a un gradiente uniforme de temperatura ($T_H > T_C$). En nuestras simulaciones la gota es siempre depositada a la derecha de la posición del mínimo x_m de la curva de tensión superficial (donde la energía superficial decrece con el aumento de la temperatura). Utilizando la aproximación de lubricación, la ecuación que describe la evolución del perfil de alturas de

la gota $h(x, t)$ es [2, 11]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma_0}{3\mu} h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = 0. \quad (1)$$

Los términos entre paréntesis dan cuenta de tres diferentes efectos: (1) la presión de Laplace resultante de la curvatura superficial multiplicada por una tensión superficial de referencia γ_0 ; (2) la presión del potencial molecular $\Pi(h)$ [12], que modela la interacción molecular sólido-líquido y es de relevancia a escala microscópica; (3) el efecto Marangoni resultante de la variación de la tensión superficial γ producto del gradiente térmico aplicado en el sustrato. Para evitar la divergencia del esfuerzo en la triple línea de contacto, se emplea un modelo de film precursor de extensión infinita y espesor h_{film} [13] que rodea a la gota.

Para modelar sistemas con mojado parcial es usual introducir la interacción molecular sólido-líquido de la siguiente forma [13, 14]

$$\Pi(h) = \kappa \left[\left(\frac{h_*}{h} \right)^n - \left(\frac{h_*}{h} \right)^m \right]. \quad (2)$$

Los términos modelan la competición de dos fuerzas antagonicas de origen molecular actuando sobre el fluido en la región cercana al sustrato. Los exponentes deben cumplir la relación $n > m > 1$, y la constante h_* es un espesor energéticamente favorecido. La constante que da cuenta de la intensidad de los efectos moleculares κ está relacionada con el ángulo de contacto estático θ mediante [12]

$$\kappa = \frac{\gamma_0(n-1)(m-1)}{2h_*(n-m)} \tan^2 \theta. \quad (3)$$

En el presente trabajo, se utilizará un potencial molecular que modele efectos de corto y largo alcance, $(n, m) = (4, 3)$ [15, 16].

Como se mencionó previamente, la superficie del sólido presenta un gradiente uniforme de temperaturas T_s . Efectivamente, integrando la ecuación de Laplace, $d^2 T_s / dx^2 = 0$ [11], e imponiendo las condiciones de contorno de ambos extremos de la placa, $T(x_0) = T_H$ y $T(L) = T_C$, se obtiene

$$T_s(x) = -\frac{(T_H - T_C)}{L - x_0} (x - x_0) + T_H. \quad (4)$$

En particular, en lo que sigue se utilizará $x_0 = 0$.

Dado que el espesor de la película líquida es mucho menor que su extensión, y que los líquidos considerados en el presente artículo son de alta conductividad térmica, la interfaz líquido-gas presenta la misma distribución de temperatura T que el sustrato T_s [2]. Por lo tanto, la relación entre el gradiente de tensión superficial y la distribución de temperatura en el sustrato viene dada por [11]

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{d\gamma}{dT} \frac{dT_s}{dx}. \quad (5)$$

La ecuación anterior da cuenta de la dependencia espacial del esfuerzo de Marangoni que queda fuertemente determinado por la distribución de temperatura en el sustrato, T_s .

Los líquidos comúnmente denominados *self-rewetting*,

compuestos por una solución de agua y alcohol con una gran concentración de carbono (*n-heptanol*), exhiben una dependencia cuadrática con la temperatura, [8, 9]

$$\gamma = \gamma_0 - \sigma(T - T_0) + \frac{\sigma'}{2}(T - T_0)^2, \quad (6)$$

siendo σ y σ' constantes positivas y γ_0 la tensión superficial a la temperatura de referencia T_0 (la concavidad en la dependencia de γ con la temperatura está relacionada con el número de grupos oxidrilos en los líquidos *self-rewetting* y ésta es la responsable de la modificación de la velocidad con la que migra la gota [9]). Utilizando la definición anterior y la ecuación (4), el esfuerzo Marangoni (5) resulta

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = (\sigma - \sigma'(T_s - T_0)) \frac{(T_H - T_C)}{L}, \quad (7)$$

y, por lo tanto, el valor absoluto del esfuerzo τ se incrementa con $|x - x_m|$, siendo

$$x_m = -\frac{L}{T_H - T_C} \left(\frac{\sigma}{\sigma'} + T_0 - T_H \right) \quad (8)$$

la posición donde ocurre el mínimo en la tensión superficial. En lo que resta, se considerará $T_0 = T_H$.

Definiendo un conjunto de variables adimensionales como $\hat{x} = x/a$, $\hat{h} = h/a$ y $\hat{t} = t/t_T$, siendo $a = \sqrt{\gamma_0/\rho g}$ la longitud capilar, la ecuación que modela el espesor del film (1) toma la forma (se omitirá el acento circunflejo sobre las variables adimensionales para simplificar la notación)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{h}^3 \frac{\partial^3 \hat{h}}{\partial \hat{x}^3} + B(1 + \alpha \hat{x}) \hat{h}^2 \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(K \hat{h}^3 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(\frac{\hat{h}_*}{\hat{h}} \right)^n - \left(\frac{\hat{h}_*}{\hat{h}} \right)^m \right] \right), \end{aligned} \quad (9)$$

donde se ha adoptado como escala temporal

$$t_T = \frac{3\mu a}{\gamma_0}, \quad (10)$$

y las constantes están dadas por

$$K = \frac{\tan^2 \theta (n-1)(m-1)}{2h_*(n-m)}, \quad (11)$$

$$B = \frac{3a\sigma}{2\gamma_0} \left(\frac{T_H - T_C}{L} \right), \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{a\sigma'}{\sigma} \left(\frac{T_H - T_C}{L} \right). \quad (13)$$

El espesor energéticamente favorecido, h_* , se encuentra ahora en unidades de a .

La resolución numérica de la ecuación diferencial (9) se realiza por medio del método de elementos finitos [11]. Para controlar los parámetros y disminuir el tiempo de cómputo, se utilizará como perfil inicial el correspondiente al de una gota estática de sección A y ángulo de contacto θ , cuya solución analítica puede encontrarse en Mac Intyre et al. 2016 [15].

A partir de resultados experimentales [4, 5, 7], estima-

mos los valores numéricos para los parámetros en la Ec. (9) como $0.002 \leq B \leq 0.05$ y $0.002 \leq \alpha \leq 0.01$. El área transversal para los volúmenes de gotas utilizados experimentalmente como condicional inicial corresponden al rango de área transversal adimensional $0.1 \leq A \leq 10$ [6]. El valor asignado para h_* condiciona el mallado y, con el objetivo de tener un tiempo razonable de cómputo, se asignará $h_* \geq 5 \times 10^{-3}$.

III. RESULTADOS

Presentaremos a continuación las soluciones de la Ec. (9) para líquidos con $\alpha \neq 0$, y los compararemos con aquellos con $\alpha = 0$ [2].

La Fig. 2 muestra la evolución de una gota con ángulo de contacto pequeño, $\theta = 4^\circ$, para ambos tipos de líquidos. Se observa en ambos casos la aparición de un frente capilar típico, donde el líquido se acumula formando una cresta, seguido por un perfil cuyo espesor decrece con el tiempo.

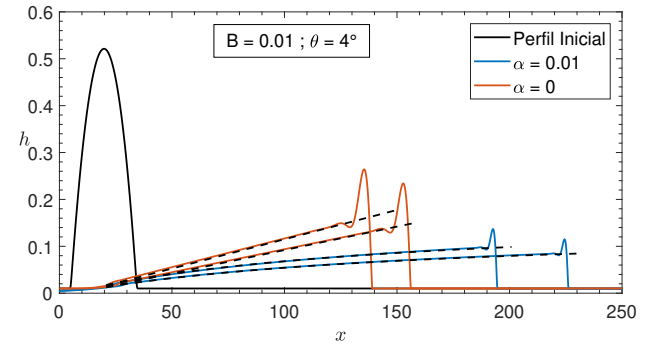


FIG. 2: Perfil de alturas a los tiempos $t = 4 \times 10^4$ y $t = 5 \times 10^4$ para $\theta = 4^\circ$, $A = 10$, $h_* = 0.01$, $B = 0.01$ y $(n, m) = (4, 3)$. En línea a trazos se presenta la curva dada por la Ec. (14) para $\alpha \neq 0$ (azul) y por la Ec. (15) para $\alpha = 0$ (rojo).

Se ha demostrado que para líquidos ordinarios, i.e. con $\alpha = 0$, el perfil por detrás del frente capilar es lineal cuando el ángulo de contacto es chico [2, 6]. A diferencia de ese caso, para $\alpha \neq 0$ el perfil de la gota no es lineal y queda bien descrito por

$$h - h_L = \frac{\ln(1 + \alpha x)}{2B\alpha t} - \xi \left(\frac{\ln(1 + \alpha x)}{2B\alpha t} \right)^2, \quad (14)$$

donde h_L y ξ son dos parámetros de ajuste. Observar que la expresión anterior permite recuperar el perfil lineal reportado para líquidos ordinarios [2, 6] como el límite $\alpha \rightarrow 0$

$$h - h_L \rightarrow \frac{x}{2Bt}. \quad (15)$$

Las curvas dadas por las Ecs. (14) y (15) se superponen satisfactoriamente con las correspondientes soluciones de la Ec. (9), como se muestra en la Fig. 2. Por otro lado, nótese que la velocidad con la cual se propaga el frente es mayor para los líquidos *self-rewetting* ($\alpha \neq 0$); esto es debido a que el gradiente de tensión superficial crece a medida que el líquido avanza hacia la región de temperaturas frías.

En el caso de ángulos de contacto intermedios y $\alpha = 0$, la gota desarrolla un film estable de espesor h_e detrás del frente capilar que avanza a una velocidad [2] $U \sim KB^{1/3}$. Por el contrario, la Fig. 3 muestra que, cuando $\alpha \neq 0$, el film

generado no tiene un espesor constante h_e sino que decrece con la posición y su velocidad U aumenta a medida que la gota avanza.

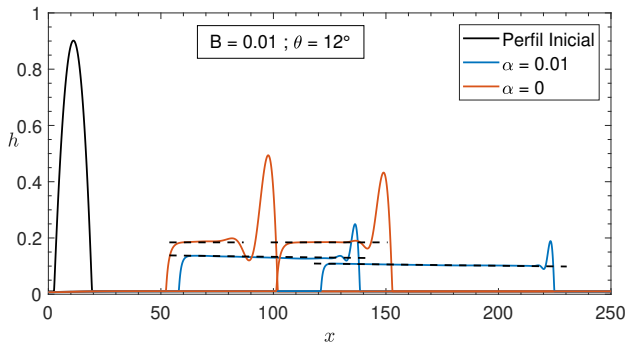


FIG. 3: Evolución del perfil de alturas a $t = 2.5 \times 10^4$ y $t = 5 \times 10^4$ con $\theta = 12^\circ$, $A = 10$, $h_* = 0.01$, $B = 0.01$ y $(n, m) = (4, 3)$. Nótese que para los líquidos ordinarios, el film es de espesor constante ($\alpha = 0$, en rojo). Para líquidos no ordinarios ($\alpha = 0.01$, en azul), el espesor decrece linealmente con la posición. Las líneas a trazos vienen dadas por la Ec. (16).

El espesor constante que adquiera la gota cuando $\alpha = 0$ está relacionado con los parámetros del problema como $h_e \sim KB^{-2/3}$ (ver Mac Intyre et al. [2]). Por lo tanto, siguiendo un análisis similar al mencionado artículo, la expresión anterior se modifica para el caso más general de $\alpha \neq 0$ como

$$h_e \sim KB^{-2/3}(1 + \alpha x)^{-2/3}. \quad (16)$$

Ambas expresiones para la altura h_e se muestran en línea a trazos en la Fig. 3.

Finalmente, cuando el ángulo de contacto es grande y $\alpha = 0$, la gota migra por la superficie manteniendo su forma inicial. Sin embargo, cuando $\alpha \neq 0$, la gota se desplaza sin mantener su forma, disminuyendo su altura a medida que avanza sobre la superficie sólida. La Fig. 4 muestra la comparación de esta situación con aquella en que sí mantiene su forma al desplazarse, por ejemplo, para una gota con ángulo de contacto $\theta = 25^\circ$. Aquí la velocidad no solo es mayor que con $\alpha = 0$, sino que se incrementa más rápidamente que en los casos previos debido a que el ancho de la gota es menor.

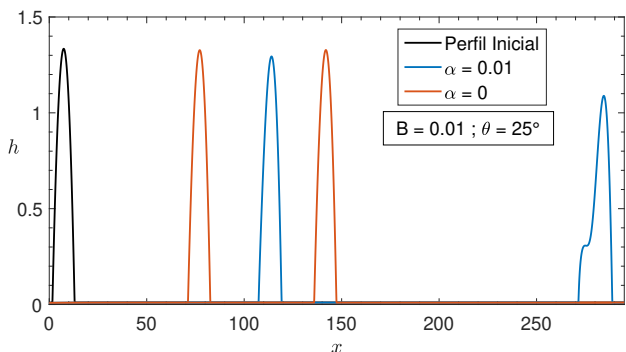


FIG. 4: Evolución del perfil de alturas con $\theta = 25^\circ$, $A = 10$, $h_* = 0.01$, $B = 0.01$ y $(n, m) = (4, 3)$. La comparación es entre el caso con $\alpha = 0$ y $\alpha = 0.01$, a los tiempos $t = 1.3 \times 10^4$ y $t = 2.5 \times 10^4$.

IV. DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

Se ha analizado brevemente el efecto Marangoni en líquidos cuya tensión superficial varía cuadráticamente con la temperatura. Es bien conocido que una gota de líquido ordinario, cuya tensión superficial decrece linealmente con la temperatura, se desplaza según uno de tres diferentes regímenes de migración posibles dependiendo del ángulo de contacto estático [2]. Aquí hemos mostrado cómo estos regímenes se modifican cuando la dependencia de la tensión superficial es cuadrática.

En el régimen de ángulos pequeños, el perfil lineal detrás del frente capilar que presentan los líquidos ordinarios es reemplazado por uno logarítmico en los líquidos self-retweeting. La nueva solución tiende a la solución lineal ya reportada en el límite $\alpha \rightarrow 0$. En el régimen de transición, el espesor constante que caracterizaba al perfil de líquidos ordinarios, es ahora un film cuyo espesor disminuye a medida que la gota avanza. Aquí hemos modificado la expresión conocida para este espesor [2], para representar el nuevo perfil dependiente de la coordenada. Por último, en el régimen de ángulos grandes, la gota ya no mantiene su perfil original al desplazarse como sí lo hace para líquidos ordinarios.

Comentaremos dos aspectos interesantes que surgen al considerar fluidos cuya tensión superficial presenta una dependencia no lineal con la temperatura. En primer lugar, un líquido sometido a un gradiente de temperaturas tal que normalmente se desplaza dentro del régimen descrito como de grandes ángulos, puede adoptar un perfil que corresponde al régimen de ángulos de contacto pequeños si el efecto no lineal es incrementado significativamente, tal como se muestra en la Fig. 5. Esto indica que cuando α aumenta, los valores del ángulo de contacto críticos que definen el paso de un régimen de flujo a otro se desplazan y el comportamiento obtenido a ángulos grandes pasa a ser descrito ahora por el de ángulos pequeños. Si bien a nuestro mejor saber y entender aún no se conocen materiales con $\alpha > 0.5$, las simulaciones numéricas muestran que el desarrollo de materiales con una fuerte no linealidad en la curva $\gamma(T)$ permitirían introducir un nuevo parámetro para el control efectivo de la morfología del flujo.

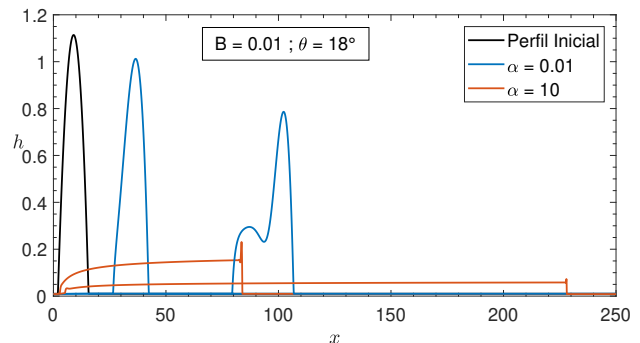


FIG. 5: Evolución del perfil de alturas con $\theta = 18^\circ$, $A = 10$, $h_* = 0.01$, $B = 0.01$ y $(n, m) = (4, 3)$. La comparación se da entre el caso con $\alpha = 10$ y $\alpha = 0.01$, a los tiempos $t = 5 \times 10^3$ y $t = 1.5 \times 10^4$.

A medida que el frente de la gota migra hacia regiones más frías, el esfuerzo superficial se ve incrementado y la diferencia de tensión entre el frente y la parte trasera de la

gota crece, lo que aumenta el ancho de la región mojada con el tiempo. Cuando los efectos no lineales son el único término responsable del desplazamiento, el ancho de la gota aumenta linealmente con el tiempo, tal como lo han demostrado Chaudhury y Chakraborty [17].

El segundo aspecto corresponde a la posición relativa de la gota con respecto al mínimo en la tensión superficial x_m . En los casos analizados en la sección anterior, la migración de la gota tiene un sentido único debido a que $x_0 > x_m$. Sin embargo, la existencia de un mínimo en la tensión superficial (ver Fig. 1) modifica este escenario: si x_m se encuentra dentro del intervalo del ancho que ocupa la gota, ambos extremos avanzarán en sentidos opuestos [10]. En ese caso, la velocidad del desplazamiento de cada frente dependerá del volumen de fluido que quede a cada lado del mínimo y de la simetría de la curva de tensión superficial versus la temperatura.

AGRADECIMIENTOS

J.R.M.I. agradece la mención otorgada en el marco del Premio Giambiagi así como también la invitación a realizar el presente artículo. J.M.G. y C.A.P., en su carácter de directores de la tesis doctoral, agradecen al Jurado del premio.

REFERENCIAS

- [1] A. Karbalaei, R. Kumar y H. J. Cho. Thermocapillarity in Microfluidics—A Review. *Micromachines* **7** (2016).
- [2] J. R. Mac Intyre, J. M. Gomba, C. A. Perazzo, P. G. Correa y M. Sellier. Thermocapillary migration of droplets under molecular and gravitational forces. *J. Fluid Mech.* **847**, 1-27 (2018).
- [3] M. L. Ford y A. Nadim. Thermocapillary migration of an attached drop on a solid surface. *Phys. Fluids* **6**, 3183-3185 (1994).
- [4] J. B. Brzoska, F. Brochard-Wyart y F. Rondelez. Motions of Droplets on Hydrophobic Model Surfaces Induced by Thermal Gradients. *Langmuir* **9**, 2220-2224 (1993).
- [5] J. Z. Chen, S. M. Troian, A. A. Darhuber y S. Wagner. Effect of contact angle hysteresis on thermocapillary droplet actuation. *J. Appl. Phys.* **97** (2005). ISSN: 00218979.
- [6] J. M. Gomba y G. M. Homsy. Regimes of thermocapillary migration of droplets under partial wetting conditions. *J. Fluid Mech.* **647**, 125-142 (2010). ISSN: 0022-1120.
- [7] G. Karapetsas, K. C. Sahu y O. K. Matar. Effect of contact line dynamics on the thermocapillary motion of a droplet on an inclined plate. *Langmuir* **29**, 8892-8906 (2013).
- [8] J. C. Legros, M. C. Limbourg-Fontaine y G. Petre. Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection. *Acta Astronaut.* **11**, 143-147 (1984).
- [9] M. C. Limbourg-Fontaine, G. Petre, J. C. Legros y E. Van Ransbeeck. Thermocapillary movements around a surface tension minimum under microgravity conditions (Part I. Technical description of the stem experiments. D1 mission of spacelab). *Acta Astronaut.* **13**, 197-208 (1986).
- [10] G. Karapetsas, K. C. Sahu, K. Sefiane y O. K. Matar. Thermocapillary-Driven Motion of a Sessile Drop: Effect of Non-Monotonic Dependence of Surface Tension on Temperature. *Langmuir* **30**, 4310-4321 (2014).
- [11] J. R. Mac Intyre. *Efectos de Fuerzas Moleculares sobre gotas estáticas y flujos termocapilares* www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/1400. Tesis doct. (UNCPBA, 2017), 1-198.
- [12] L. W. Schwartz y R. R. Eley. Simulation of Droplet Motion on Low-Energy and Heterogeneous Surfaces. *J. Colloid Interface Sci.* **202**, 173-188 (1998).
- [13] A. Oron, S. H. Davis y S. G. Bankoff. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.* **69**, 931-980 (1997).
- [14] R. V. Craster y O. K. Matar. Dynamics and stability of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1131-1198 (2009).
- [15] J. R. Mac Intyre, J. M. Gomba y C. A. Perazzo. New analytical solutions for static two-dimensional droplets under the effects of long- and short-range molecular forces. *J. Eng. Math.* (2016).
- [16] J. R. Mac Intyre, J. M. Gomba y C. A. Perazzo. Efectos de la gravedad y de fuerzas moleculares de corto y largo alcance sobre la morfología de gotas. *Anales AFA* **24**, 98-101 (2013).
- [17] K. Chaudhury y S. Chakraborty. Spreading of a Droplet over a Nonisothermal Substrate: Multiple Scaling Regimes. *Langmuir* **31**, 4169-4175 (2015).