TECNICHE DI MERCATO MOBILIARE
Modelli e applicazioni con Excel e MATLAB
(Terza Edizione, 2020) – ISBN: 978-88-238-2307-5

di Fabiomassimo Mango

Indice

3 I titoli obbligazionari

Sommario

3.1 Premessa

Questo capitolo presenta, attraverso esempi e implementazioni empiriche, le principali modalità di valutazione dei titoli obbligazionari. In particolare, il percorso metodologico costruito permette, attraverso il foglio elettronico Excel, la valutazione del rendimento e del rischio di posizioni in obbligazioni in relazione ai frutti che essi generano. Inoltre, da questa edizione, è presente un approfondimento (paragrafo 3.5 e successivi) dell'andamento della curva di stima del prezzo mediante Convexity, ad opera della Prof.ssa Pina Murè della Sapienza, Università di Roma.

3.2 I criteri di valutazione dei titoli obbligazionari

La valutazione dei titoli obbligazionari è un aspetto rilevante che concerne misurazioni di rendimento effettuate sia al momento dell'effettuazione dell'investimento sia al termine dello stesso. Nella misurazione del rendimento, aldilà della tipologia di strumento finanziario oggetto di analisi, occorre considerare il concetto di frutti dell'investimento, siano essi aleatori o certi, relativi alla componente interessi o capitale.

Nell'ambito di questo perimetro generale, al fine di individuare l'indicatore maggiormente appropriato per la misurazione del rendimento di un titolo obbligazionario, occorre dare per acquisiti alcuni aspetti di carattere generale quali: il differente valore di un'unità di moneta nel tempo e quindi i riferimenti al concetto di capitalizzazione e attualizzazione; l'indicazione sul regime finanziario prescelto, sia esso semplice o composto; e le riflessioni sul regime fiscale da applicare.

3.3 Gli indicatori di rendimento dei titoli obbligazionari

3.3.1 Gli indicatori di rendimento dei titoli obbligazionari

Le tipologie di obbligazioni che saranno analizzate per il calcolo del rendimento sono: titoli sprovvisti di cedola, titoli con cedola a tasso fisso, titoli a tasso variabile e titoli indicizzati.

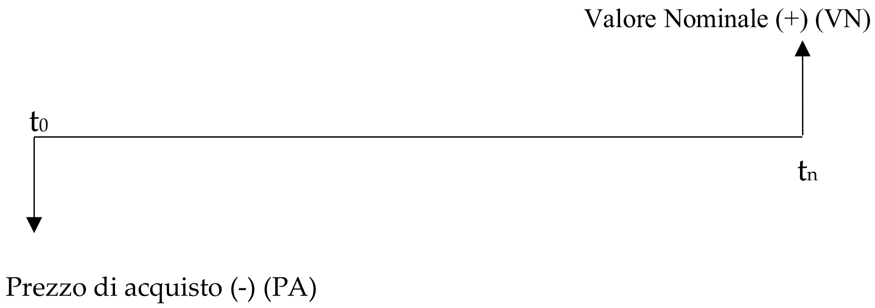
Le obbligazioni senza cedola sono titoli relativamente elementari, poiché la determinazione del rendimento è riconducibile alla sola componente capitale, mentre nei titoli con cedola il rendimento è determinato sia dalla componente dei frutti di capitale sia di interesse.

Appare chiaro che il calcolo del rendimento presuppone, quindi, la conoscenza dell'importo e delle scadenze dei flussi di cassa futuri. Questa caratteristica viene meno nel caso di titoli in cui sono incerti l'importo dei flussi di cassa e i tempi di maturazione degli stessi. Nel primo caso si tratta di titoli caratterizzati dalla variabilità delle cedole, ovvero obbligazioni a tasso variabile, nel secondo caso di obbligazioni indicizzate e quindi titoli con elementi di indicizzazione del capitale e/o delle cedole.

3.3.2 Il rendimento dei BOT e dei CTZ

Le obbligazioni di riferimento nel mercato monetario domestico sono il *Buono Ordinario del Tesoro* (*BOT*) e il *Certificato del Tesoro Zero Coupon* (CTZ). Tali strumenti sono caratterizzati da un profilo finanziario relativamente semplice (Fig. 3.1), in cui il rendimento, come descritto nel capitolo 2, è determinato dallo scarto di emissione, ovvero la differenza tra il prezzo di acquisto e il valore di rimborso, quest'ultimo pari al valore nominale al netto della ritenuta fiscale e delle commissioni di negoziazione.

Figura 3.1 Profilo finanziario del Buono Ordinario del Tesoro



Per le motivazioni precedenti il calcolo del rendimento al netto di tasse e commissioni di negoziazione del Buono Ordinario del Tesoro risulta poco complesso (Tab. 3.1) e, nel caso dell'applicazione del regime dell'interesse semplice, è dato dalla seguente espressione analitica:

$$r_{regime\ interesse\ semplice} = \frac{VN - (Pnetto\ agg + comm)}{(Pnetto\ agg + comm) * t}$$

mentre nel regime dell'interesse composto:

$$r_{regime\ interesse\ composto} = \left(\frac{VN}{Pnetto\ agg + comm}\right)^{1/t} - 1$$

dove:

VN = prezzo di rimborso
Pnetto agg = prezzo di aggiudicazione +imposizione fiscale
comm= commissione
t = giorni effettivi/ anno convenzionale (commerciale o solare)

mentre nel caso del CTZ (Tab. 3.2) il rendimento nel regime dell'interesse composto si calcola:

$$r_{regime\ interesse\ composto} = \left(\frac{VN - ((VN - Pagg) * aliq.fiscale)}{Pagg}\right)^{1/t} - 1$$

dove:

Pagg=prezzo di aggiudicazione

rammentando che per questo strumento (Tab. 3.2) l'attuale regolamentazione non ammette a carico della clientela nessuna commissione di collocamento poiché per questa tipologia di strumenti sono retrocesse dal Tesoro agli intermediari finanziari al momento della sottoscrizione. Conseguentemente, gli intermediari sono tenuti ad applicare alla clientela il prezzo d'asta, senza aggravio di commissioni. Inoltre, diversamente da quanto avviene per i Buoni Ordinari del Tesoro, la ritenuta non viene applicata alla fonte, ovvero in via anticipata, aumentando in tal modo il prezzo di aggiudicazione, ma in via posticipata, decurtando il capitale di rimborso.

Tabella 3.1 Calcolo del rendimento dei Buoni Ordinari del Tesoro

	B	C	D
1	**BUONO ORDINARIO DEL TESORO (BOT)**		
2	Data di emissione	01/05/14	
3	Data di scadenza/rimborso	31/10/14	
4	Prezzo di rimborso	100	
5	Durata dell'obbligazione espressa in giorni	183	<-- =C3-C2
6	Convenzione anno di riferimento commerciale	360	
7	Giorni effettivi/anno commerciale	0,508	<-- =C5/C6
8	Prezzo d'asta/di aggiudicazione	98,550	
9	*Rendimento lordo nel regime dell'interesse semplice*	2,894%	<-- =(C4-C8)/(C8*C7)
10	*Rendimento lordo nel regime dell'interesse composto*	2,915%	<-- =(C4/C8)^(1/C7)-1
11	Prezzo fiscale	98,550	
12	Ritenuta fiscale applicata	0,125	
13	Ritenuta fiscale	0,18125	<-- =(C4-C11)*C12
14	Arrotondamento alla seconda cifra decimale	0,18000	<-- =ARROTONDA(C13;2)
15	Prezzo netto di aggiudicazione	98,73	<-- =C11+C14
16	*Rendimento netto in regime dell'interesse semplice*	2,530%	<-- =(C4-C15)/(C15*C7)
17	*Rendimento netto in regime dell'interesse composto*	2,546%	<-- =(C4/C15)^(1/C7)-1
18	Commissione di negoziazione	0,3	
19	Prezzo di aggiudicazione oltre costi di negoziazione	99,030	<-- =C15+C18
20	*Rendimento nel regime dell'interesse semplice al netto della ritenuta fiscale e delle commissioni di negoziazione*	1,927%	<-- =(C4-C19)/(C19*C7)
21	*Rendimento nel regime dell'interesse composto al netto della ritenuta fiscale e delle commissioni di negoziazione*	1,936%	<-- =(C4/C19)^(1/C7)-1

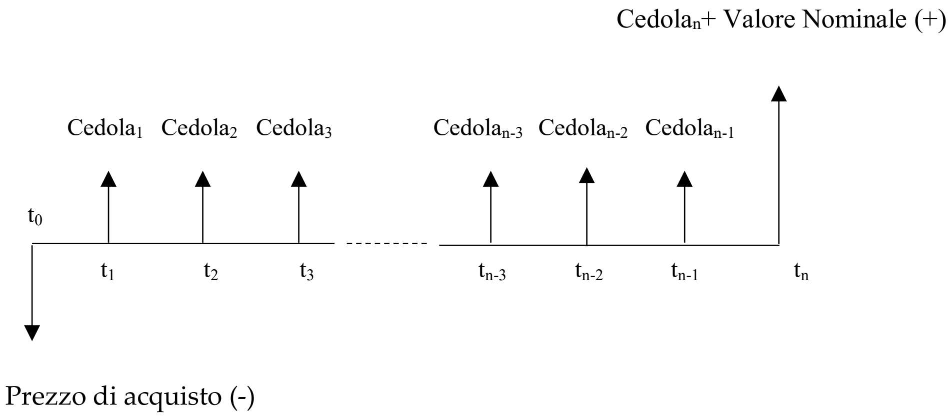
Tabella 3.2 Calcolo del rendimento dei Certificati del Tesoro Zero Coupon

	B	C	D
1	**CERTIFICATO DEL TESORO ZERO COUPON (CTZ)**		
2	Data di emissione	30/07/14	
3	Data di scadenza/rimborso	30/07/16	
4	Prezzo di rimborso	100	
5	Durata dell'obbligazione espressa in giorni	731	<-- =C3-C2
6	Convenzione anno di riferimento solare	365	
7	Giorni effettivi/anno solare	2,0027397	<-- =C5/C6
8	Prezzo d'asta/di aggiudicazione	92,45	
9	*Rendimento lordo nel regime dell'interesse composto*	0,040	<-- =((C4/C8)^(1/C7))-1
10	Prezzo fiscale	92,45	<-- =C8
11	Ritenuta fiscale applicata	0,125	
12	Ritenuta fiscale	0,94375	<-- =(C4-C10)*C11
13	Prezzo di rimborso al netto della ritenuta fiscale	99,05625	<-- =C4-C12
14	*Rendimento nel regime dell'interesse composto al netto della ritenuta fiscale*	3,506%	<-- =((C13/C8)^(1/C7))-1
15			

3.3.3 Il rendimento dei BTP

I Buoni del Tesoro Poliennali sono titoli obbligazionari provvisti di cedola fissa, per i quali il calcolo del rendimento risulta maggiormente complesso, in quanto è necessario tenere conto sia della componente capitale sia dei frutti da interesse. Questa specificazione si traduce in un profilo finanziario (Fig. 3.2) più articolato rispetto a quello dei BOT e dei CTZ.

Figura 3.2 Profilo finanziario del Buono poliennale del Tesoro



Il parametro maggiormente appropriato per il calcolo del rendimento di posizioni in obbligazioni a cedola fissa è il *Tasso di Rendimento Effettivo a Scadenza* (*TRES*), ovvero quel tasso che, in logica finanziaria dell'attualizzazione, uguaglia la somma dei valori attuali dei flussi di cassa futuri prodotti dall'obbligazione al prezzo di acquisto espresso in termini di prezzo *Tel Quel*, ovvero il suo *corso secco* maggiorato del *rateo interessi* (quota parte di cedola maturata dall'ultimo stacco):

$$P_{TelQuel} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1 + TRES)^{\left(t_k - \frac{gg}{365}\right)}}$$

dove:

F_k = flussi di cassa futuri
Rateo interessi = Cedola *gg/365
$P_{TelQuel}$ = Corso Secco+Rateo Interessi
gg = giorni intercorrenti dallo stacco dell'ultima cedola o l'acquisto del titolo

t_k = periodi di stacco della cedola espressi in anni
L'esempio che segue (Tab. 3.3) mostra il caso di acquisto sul mercato secondario di un BTP decennale alla data del 05/08/2016 con cedola annuale emesso l'01/05/2011 e con scadenza l'01/05/2021.

Tabella 3.3 Caratteristiche tecniche del BTP (fase 1)

	B	C	D
4	**BUONI DEL TESORO POLIENNALI (BTP)**		
5	Data di emissione	01/05/11	
6	Data di scadenza/rimborso	01/05/21	
7	Data di acquisto	05/08/16	
8	Data ultimo stacco della cedola	01/05/16	<-- **=M4**
9	Data prossimo stacco della cedola	01/05/17	<-- **=O4**
10	Giorni precedente stacco della cedola	96	<-- **=M7**
11	Giorni prossimo stacco della cedola	269	<-- **=N8**
12	Prezzo di acquisto/corso secco	103,00	<-- **103**
13	Durata nominale (anni)	10	
14	Cedola (%)	4,00%	
15	Frequenza della cedola (anni)	1	
16	Valore nominale	100,00	
17	Modalità di rimborso	a scadenza	
18	Prezzo d'asta/di aggiudicazione	97,00	
19	Rateo	1,052	<-- **=(C16*C14)*C10/C21**
20	Prezzo TelQuel	104,052	<-- **=C12+C19**
21	Convenzione anno solare	365	
22	*Tasso rendimento effettivo a scadenza*	3,00%	<-- **0,03**
23			

Per calcolare il *Tasso di Rendimento Effettivo a Scadenza* occorre contare i giorni intercorrenti tra la data di stacco dell'ultima cedola e la data di acquisto del titolo (96) e il suo complemento all'anno (365-96=269), in modo tale da poter identificare l'intervallo intercorrente tra la data di acquisto e lo stacco della prossima cedola. In alternativa, è possibile calcolare direttamente l'intervallo temporale tra la data di acquisto del titolo e lo stacco della prossima cedola (269). Poiché la cadenza cedolare è annuale, al fattore così determinato espresso in anni (269/365= 0,736) basterà sommare il valore unitario per ogni anno residuo, al fine di individuare tutti i periodi frazionati relativi alla maturazione delle cedole future (0,736; 1,736; 2,736; 3,7367; 4,736). In tal modo, fissando un TRES arbitrario, pari nell'esempio al 3,00% (cella C22), sarà possibile utilizzare la funzione ricerca obiettivo per la determinazione del TRES effettivo, avendo avuto cura di concatenare il prezzo del titolo (cella N19) alla struttura dei flussi di cassa attualizzati (Tab. 3.4).

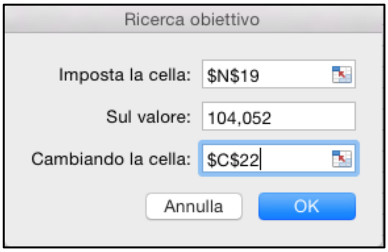
Tabella 3.4 Scadenzario finanziario (fase 1)

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
2																
3	Periodo		t0	t1	t2	t3	t4	t5	acquisto	t6	t7	t8	t9	t10		
4	Data		01/05/11	01/05/12	01/05/13	01/05/14	01/05/15	01/05/16	05/08/16	01/05/17	01/05/18	01/05/19	01/05/20	01/05/21		
5	Intervallo (gg)			366	365	365	365	366		365	365	365	366	365	<-- =Q4-P4	
6									365		<-- =O4-M4					
7	Alfa							96		<-- =N4-M4						
8	Beta								269		<-- =O4-N4					
9																
10																
11	Nuovi periodi								t0	t1	t2	t3	t4	t5		
12	Periodo frazionari	1							0,736986301		<-- =N8/C21					
13		2								1,736986301		<-- =G12+$N$12				
14		3									2,736986301		<-- =G13+$N$12			
15		4										3,736986301		<-- =G14+$N$12		
16		5											4,736986301		<-- =G15+$N$12	
17	Flussi									4,00	4,00	4,00	4,00	104,00		
18																
19	Valore attuale								105,396							
20										3,914	<-- =O17/(1+C22)^N12					
21											3,800	<-- =P17/(1+C22)^O13				
22												3,689	<-- =Q17/(1+C22)^P14			
23													3,582	<-- =R17/(1+C22)^Q15		
24														90,411	<-- =S17/(1+C22)^R16	
25																

Per poter determinare il valore del TRES attraverso il foglio di calcolo Excel è necessario, noto il prezzo *Tel Quel* (104,052) dell'obbligazione (Tab. 3.3, cella C20), seguire i passaggi successivi al fine di calcolare iterativamente il tasso che rende pari il prezzo *Tel Quel* alla sommatoria dei flussi di cassa attualizzati:

- nel menù in alto selezionare DATI e successivamente ANALISI DI SIMULAZIONE;
- selezionare l'opzione RICERCA OBIETTIVO;
- compilare la finestra (Fig. 3.3) che si apre come segue:

Figura 3.3 Funzione Ricerca Obiettivo



In tal modo sarà identificata una univoca soluzione (Fig. 3.4 e Tab. 3.5), ovvero il TRES, pari al 3,302% (Tab. 3.6, cella C22).

Figura 3.4 Risultato Funzione Ricerca Obiettivo

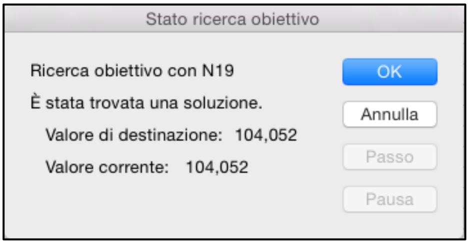


Tabella 3.5 Scadenziario finanziario (fase 2)

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
2																
3	Periodo		t0	t1	t2	t3	t4	t5	acquisto	t6	t7	t8	t9	t10		
4	Data		01/05/2011	01/05/2012	01/05/2013	01/05/2014	01/05/2015	01/05/2016	05/08/2016	01/05/2017	01/05/2018	01/05/2019	01/05/2020	01/05/2021		
5	Intervallo (gg)			366	365	365	365	366		365	365	365	366	365	<-- =Q4-P4	
6									365		<-- =O4-M4					
7	Alfa							96		<-- =N4-M4						
8	Beta								269		<-- =O4-N4					
9																
10																
11	Nuovi periodi								t0	t1	t2	t3	t4	t5		
12	Periodo frazionari	1							0,736986301		<-- =N8/C21					
13		2								1,736986301		<-- =G12+$N$12				
14		3									2,736986301		<-- =G13+$N$12			
15		4										3,736986301		<-- =G14+$N$12		
16		5											4,736986301		<-- =G15+$N$12	
17	Flussi									4,00	4,00	4,00	4,00	104,00		
18																
19	Valore attuale								104,052							
20										3,905	<-- =O17/(1+C22)^N12					
21											3,780	<-- =P17/(1+C22)^O13				
22												3,660	<-- =Q17/(1+C22)^P14			
23													3,543	<-- =R17/(1+C22)^Q15		
24														89,164	<-- =S17/(1+C22)^R16	
25																

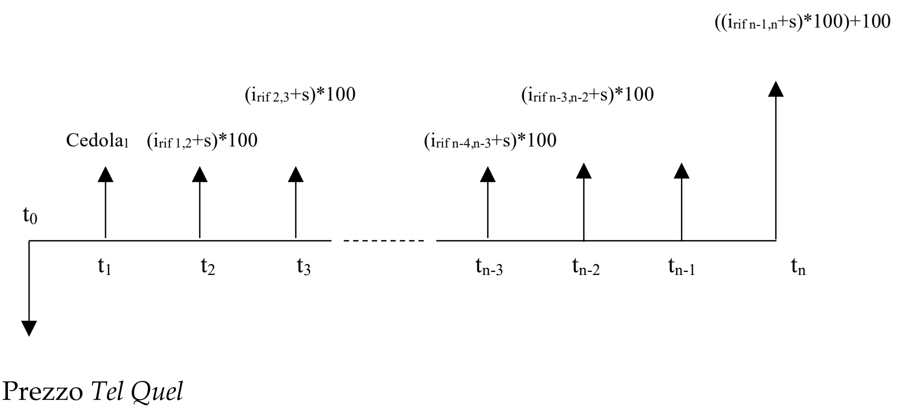
Tabella 3.6 Caratteristiche tecniche del BTP (fase 2)

	B	C	D	E
4	**BUONI DEL TESORO POLIENNALI (BTP)**			
5	Data di emissione	01/05/11		
6	Data di scadenza/rimborso	01/05/21		
7	Data di acquisto	05/08/16		
8	Data ultimo stacco della cedola	01/05/16	<-- **=M4**	
9	Data prossimo stacco della cedola	01/05/17	<-- **=O4**	
10	Giorni precedente stacco della cedola	96	<-- **=M7**	
11	Giorni prossimo stacco della cedola	269	<-- **=N8**	
12	Prezzo di acquisto/corso secco	103,00	<-- **103**	
13	Durata nominale (anni)	10		
14	Cedola (%)	4,00%		
15	Frequenza della cedola (anni)	1		
16	Valore nominale	100,00		
17	Modalità di rimborso	a scadenza		
18	Prezzo d'asta/di aggiudicazione	97,00		
19	Rateo	1,052	<-- **=(C16*C14)*C10/C21**	
20	Prezzo TelQuel	104,052	<-- **=C12+C19**	
21	Convenzione anno solare	365		
22	*Tasso rendimento effettivo a scadenza*	3,30%	<-- **0,0330256338177319**	
23				

3.3.4 Il rendimento del CCTeu

I CCTeu sono titoli a tasso variabile che presentano una durata normalmente pari a 5 anni. Gli interessi vengono corrisposti con cedole posticipate semestrali indicizzate al tasso Euribor 6 mesi e sulla remunerazione incide anche lo scarto d'emissione, determinato dalla differenza tra il valore nominale a rimborso e il prezzo pagato all'emissione. Il profilo finanziario del CCTeu è rappresentato (Fig. 3.5):

Figura 3.5 Profilo finanziario del Certificato di Credito del Tesoro Indicizzato all'Euribor 6 mesi (CCTeu)



Da quanto affermato in precedenza si desume che nel caso del CCTeu non è possibile parlare di un tasso di riferimento ma, più propriamente, di tasso di rendimento tendenziale (TRET), ovvero:

$$P_{TelQuel} = \frac{c}{(1+TRET)^{t_1}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(i_{rif} + s) * 100}{(1+TRET)^{t_k}} + \frac{100}{(1+TRET)^{t_n}}$$

A titolo di esempio, e considerando il tasso Euribor a 6 mesi, si prendano in considerazione i seguenti dati (Tab. 3.7) e si presupponga la replica del tasso di riferimento implicito nell'ultima cedola maturata, in modo tale che il valore delle cedole successive alla prima sia determinato sommando all'interesse di riferimento lo *spread* desiderato.

Tabella 3.7 Caratteristiche tecniche del CCTeu (fase 1)

	B	C	D	E
2	**CERTIFICATI DI CREDITO DEL TESORO INDICIZZATI ALL'EURIBOR 6 MESI (CCTeu)**			
3	Data di emissione	01/07/2012		
4	Data di scadenza/rimborso	01/07/2017		
5	Data di acquisto	01/07/2012		
6	Prezzo di aggiudicazione	102,00		
7	Durata nominale (anni)	5		
8	Livello cedola iniziale (%)	4,60%	**<-- =C14+C10**	
9	Livello cedole successive (%)	Eur6mesi + 0,60		
10	Spread fissato dall'emittente	0,60%		
11	Frequenza della cedola (anni)	1		
12	Valore nominale	100,00		
13	Modalità di rimborso	a scadenza		
14	Tasso di riferimento	4,00%		
15	*Tasso di rendimento tendenziale (TRET)*	4,15%	**<-- 0,041488349167192**	
16	*Margine finanziario*	0,1488%	**<-- =C15-C14**	
17				

In altre parole, il prezzo di aggiudicazione, o il prezzo *Tel Quel*, deve essere pari alla sommatoria dei flussi di cassa identificati nell'ipotesi di replica degli stessi in costanza del tasso di riferimento. Costruita la struttura dei flussi attualizzati (Tab. 3.8) e posta la somma degli stessi pari al prezzo di aggiudicazione (cella G8), utilizzando la funzione RICERCA OBIETTIVO di Excel è possibile, dopo aver fissato un tasso arbitrario (cella C15), calcolare il *Tasso di Rendimento Effettivo a Scadenza* (che altro non è che il Tasso di Rendimento Tendenziale denominato ora "Effettivo a Scadenza" perché, essendo stati attualizzati i flussi, il rendimento è divenuto certo) impostando la cella G8 sul valore 102,00 e cambiando la cella C15. Poiché tale tasso, pari a 4,15%, (Tasso di Rendimento Tendenziale divenuto Tasso di Rendimento Effettivo a Scadenza) risulta maggiore del tasso di riferimento, è possibile identificare un margine finanziario pari a 0,1489%. Tutto ciò si traduce in una richiesta del mercato in termini di premio al rischio inferiore, ovvero in valutazioni maggiormente fiduciose, rispetto a quelle dell'emittente.

Tabella 3.8 Scadenziario finanziario del CCTeu

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	Periodo	t0	t1	t2	t3	t4	t5		
3	Data	01/07/2012	01/07/2013	01/07/2014	01/07/2015	01/07/2016	01/07/2017		
4	Intervallo (gg)		365	365	365	366	365		
5	Intervalli (anni)		1	2	3	4	5		
6	Flussi		4,6	4,6	4,6	4,6	104,60		
7									
8	Valore attuale	102	**<-- =H9+I10+J11+K12+L13**						
9			4,4167561	**<-- =H6/(1+$C$15)^H5**					
10				4,2408118	**<-- =I6/(1+$C$15)^I5**				
11					4,0718764	**<-- =J6/(1+$C$15)^J5**			
12						3,9096706	**<-- =K6/(1+$C$15)^K5**		
13							85,361022	**<-- =L6/(1+$C$15)^L5**	
14									
15									

A riprova di quanto affermato, basti verificare (Tab. 3.9) che il prezzo risulta pari a 100 proprio in corrispondenza di un TRET pari a 4,60%, ovvero quando, in presenza di un tasso di riferimento del 4%, si ottiene un margine finanziario dello 0,60% pari allo spread richiesto dall'emittente.

Tabella 3.9 Caratteristiche tecniche del CCTeu (fase 2)

	B	C	D	E
2	**CERTIFICATI DI CREDITO DEL TESORO INDICIZZATI ALL'EURIBOR 6 MESI (CCTeu)**			
3	Data di emissione	01/07/12		
4	Data di scadenza/rimborso	01/07/17		
5	Data di acquisto	01/07/12		
6	Prezzo di aggiudicazione	102,00		
7	Durata nominale (anni)	5		
8	Livello cedola iniziale (%)	4,60%		
9	Livello cedole successive (%)	Eur12mesi + 0,60		
10	Spread	0,60%		
11	Frequenza della cedola (anni)	1		
12	Valore nominale	100,00		
13	Modalità di rimborso	a scadenza		
14	Tasso di riferimento	4,00%		
15	*Tasso di rendimento tendenziale*	4,60%	<-- **0,0459994186219621**	
16	*Margine finanziario*	0,5999%	<-- **=C15-C14**	
17				

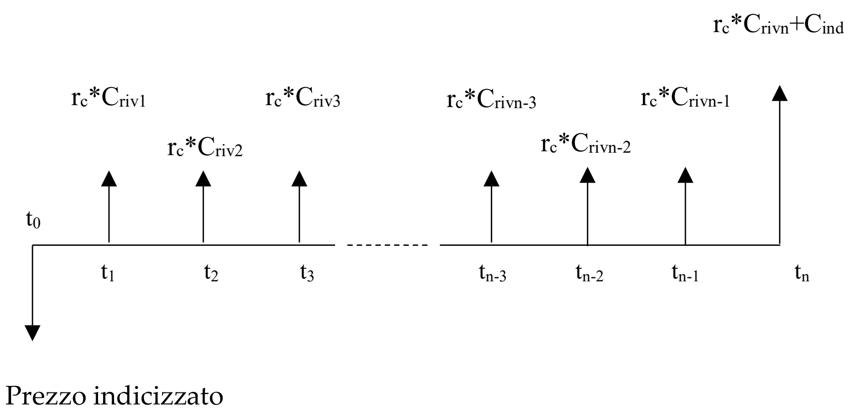
3.3.5 Il rendimento del BTPi

Il BTP indicizzato (come descritto nel capitolo 2) è ancorato all'evoluzione dell'inflazione europea. In questa tipologia di strumenti sia il capitale rimborsato a scadenza sia le cedole sono rivalutati sulla base dell'inflazione dell'area euro, attraverso l'*Indice Armonizzato dei Prezzi al Consumo* (IAPC) con esclusione del tabacco. Tale caratteristica consente all'investitore di poter usufruire di questo titolo di Stato per assicurarsi una protezione contro l'aumento del livello dei prezzi.

Le componenti che contribuiscono a formare il rendimento, ipotizzando un acquisto all'emissione, sono le cedole annuali o semestrali (come prodotto del tasso di interesse, identificato in termini reali al momento dell'emissione, e il valore del capitale rivalutato al periodo intercorso tra la data di godimento e la data di pagamento di ogni cedola) e il capitale di rimborso (individuato come prodotto del capitale espresso al valore nominale alla data di scadenza per il coefficiente di indicizzazione).

Il profilo finanziario di un'obbligazione BTPi si presenta, pertanto, nel seguente modo (Fig. 3.6):

Figura 3.6 Profilo finanziario del Buono Poliennale Del Tesoro Indicizzato



E, dal punto di vista formale:

$$P_{Ind} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_c * C_{riv,k}}{(1 + TRIN)^{t_k}} + \frac{C_{ind}}{(1 + TRIN)^{t_n}}$$

evidenziando che il tasso di rendimento indicizzato (TRIN) è quell'unico tasso che uguaglia la sommatoria dei valori attuali dei frutti incerti come prodotto dell'obbligazione indicizzata, al suo prezzo di acquisto. Per tale motivo questo tasso non è oggetto di calcolo e un'alternativa, in ipotesi di massima semplificazione, è rappresentata dal caso in cui il tasso di rendimento venga calcolato con riferimento a un prezzo calcolato al netto della componente di indicizzazione, ipotizzando che tutte le cedole siano pari al tasso di interesse reale indicato dall'emittente al momento dell'emissione e che, in ultimo, il rimborso del capitale avvenga al valore nominale. Si prenda, per esempio, il seguente caso (Tab. 3.10), in cui il tasso obiettivo è denominato tasso di rendimento reale (TRR).
Per il calcolo dello stesso occorrerà costruire lo scadenziario finanziario (Tab. 3.11), come per il caso del BTP, impostando un tasso discrezionale e, successivamente, attraverso l'uso della funzione RICERCA OBIETTIVO, calcolare il valore del tasso di rendimento impostando la cella G8 sul valore 100 cambiando la cella C15 (Fig. 3.7). È importante ricordare che il livello delle cedole è determinato come prodotto tra il valore nominale del capitale per il coefficiente di indicizzazione rilevato alla data di pagamento delle cedole e che il capitale di rimborso a scadenza è dato dal prodotto del valore nominale del capitale per il coefficiente di indicizzazione rilevato alla scadenza (ovvero l'indice armonizzato dei prezzi al consumo dell'area dell'euro).

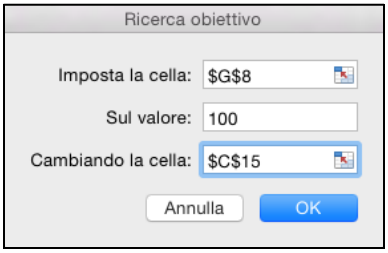
Tabella 3.10 Caratteristiche tecniche del BTPi (fase 1)

	B	C	D
2	**BUONI DEL TESORO POLIENNALI INDICIZZATI ALL'INFLAZIONE EUROPEA (BTP€i)**		
3	Data di emissione	01/06/12	
4	Data di scadenza/rimborso	01/06/17	
5	Data di acquisto	01/06/12	
6	Prezzo di acquisto/corso secco	100,00	
7	Durata nominale (anni)	5	
8	Livello cedola reale (%)	1,45%	
9	Livello cedole successive (%)	tcr*vcr	
10	Frequenza della cedola (anni)	1	
11	Valore nominale	100,00	
12	Modalità di rimborso	a scadenza	
13	Valore del capitale a scadenza	VN*coeff.ind.	
14	Tasso di inflazione atteso medio	2%	
15	*Tasso di rendimento reale*	1,00%	<-- **0,01**
16	*Tasso di rendimento indicizzato*	3,0000%	<-- **=C14+C15**

Tabella 3.11 Scadenziario finanziario del BTPi (fase 1)

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	Periodo	t0	t1	t2	t3	t4	t5		
3	Data	01/06/12	01/06/13	01/06/14	01/06/15	01/06/16	01/06/17		
4	Intervallo (gg)		365	365	365	366	365		
5	Intervalli (anni)		1	2	3	4	5		
6	Flussi		1,45	1,45	1,45	1,45	101,45		
7									
8	Valore attuale	102,18	<-- **=H9+I10+J11+K12+L13**						
9			1,43564356	<-- **=H6/(1+$C$15)^H5**					
10				1,42142927	<-- **=I6/(1+$C$15)^I5**				
11					1,40735571	<-- **=J6/(1+$C$15)^J5**			
12						1,3934215	<-- **=K6/(1+$C$15)^K5**		
13							96,526194	<-- **=L6/(1+$C$15)^L5**	
14									

Figura 3.7 Funzione Ricerca Obiettivo



Il risultato sarà un tasso di rendimento reale (TRR) pari a 1,45% e, ipotizzando un tasso di inflazione atteso medio pari al 2%, un tasso di rendimento indicizzato (TRI) pari al 3,45% (Tab. 3.13).

Tabella 3.12 Scadenziario finanziario del BTPi (fase 2)

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	Periodo	t0	t1	t2	t3	t4	t5		
3	Data	01/06/12	01/06/13	01/06/14	01/06/15	01/06/16	01/06/17		
4	Intervallo (gg)		365	365	365	366	365		
5	Intervalli (anni)		1	2	3	4	5		
6	Flussi		1,45	1,45	1,45	1,45	101,45		
7									
8	Valore attuale	100,00	<-- =H9+I10+J11+K12+L13						
9			1,42927623	<-- =H6/(1+$C$15)^H5					
10				1,40884864	<-- =I6/(1+$C$15)^I5				
11					1,38871302	<-- =J6/(1+$C$15)^J5			
12						1,36886518	<-- =K6/(1+$C$15)^K5		
13							94,4045426	<-- =L6/(1+$C$15)^L5	
14									

Tabella 3.13 Caratteristiche tecniche del BTPi (fase 2)

	B	C	D
2	**BUONI DEL TESORO POLIENNALI INDICIZZATI ALL'INFLAZIONE EUROPEA (BTP€i)**		
3	Data di emissione	01/06/12	
4	Data di scadenza/rimborso	01/06/17	
5	Data di acquisto	01/06/12	
6	Prezzo di acquisto/corso secco	100,00	
7	Durata nominale (anni)	5	
8	Livello cedola reale (%)	1,45%	
9	Livello cedole successive (%)	tcr*vcr	
10	Frequenza della cedola (anni)	1	
11	Valore nominale	100,00	
12	Modalità di rimborso	a scadenza	
13	Valore del capitale a scadenza	VN*coeff.ind.	
14	Tasso di inflazione atteso medio	2%	
15	*Tasso di rendimento reale*	1,45%	<-- **0,0144994871862415**
16	*Tasso di rendimento indicizzato*	3,4499%	<-- **=C14+C15**

3.4 Gli indicatori di rischio di tasso di interesse

Il rischio derivante da assunzione di posizioni in titoli obbligazionari è definibile come la possibile variabilità dei risultati ottenibili dall'investitore in relazione al manifestarsi di una serie di eventi pregiudizievoli (*logica ex-ante*).

Oppure come variabilità accertata dei risultati, ovvero come scostamento tra il risultato conseguito e il risultato atteso (*logica ex-post*). In relazione agli eventi pregiudizievoli occorre, principalmente, distinguere tra quelli riconducibili al rischio di credito e al rischio di mercato.

Il primo fa riferimento alla solvibilità dell'emittente, ovvero alla sua capacità di garantire il rimborso del debito; il secondo, invece, a tutte quelle variabili in grado di condizionare i prezzi finanziari, segnatamente il rischio di tasso e il rischio di cambio. Il rischio di tasso interesse è inerente al livello dei tassi ovvero al costo del denaro, mentre il rischio di cambio al tasso di cambio tra valute.

In questa sede si tralascia l'effetto delle altre fattispecie di rischio, in particolare del rischio di controparte, regolamento, liquidità e paese, per soffermarsi unicamente sugli effetti del rischio di tasso di interesse.

3.4.1 Il rischio di tasso d'interesse

Il rischio di tasso di interesse ha per oggetto l'insieme di effetti prodotti su una posizione in titoli obbligazionari a seguito di una variazione del livello dei tassi di interesse. Al fine di comprenderne le conseguenze, occorre scomporre tale tipologia di rischio nelle sue due componenti essenziali, il rischio di volatilità, ovvero la variazione del prezzo dei titoli obbligazionari al variare dei tassi di interesse, e il rischio di reinvestimento, ovvero gli effetti derivanti dall'investimento delle cedole maturate al nuovo livello dei tassi di interesse.

Chiaramente gli effetti derivanti dal manifestarsi del rischio di tasso di interesse sono diversi a seconda della tipologia di strumenti obbligazionari considerati e del periodo di detenzione del titolo (*holding period*).

Nel presente lavoro, con riferimento ai titoli obbligazionari, saranno prese in considerazione solo obbligazioni a cedola fissa.

Per comprendere l'effetto sulla variabilità del prezzo di una obbligazione al variare dei tassi di interesse si prenda in considerazione il seguente esempio (Tab. 3.17) in cui sono riportate le caratteristiche di un'obbligazione generica, tra cui il prezzo (cella C10), calcolato come sommatoria dei flussi di cassa attualizzati al momento di valutazione t_0.

Tabella 3.14 Caratteristiche tecniche di un'obbligazione generica

	B	C	D
3	Livello cedola (%)	5%	
4	Frequenza cedola	1	
5	Valore nominale	100	
6	Modalità di rimborso	a scadenza	
7			
8	Vita residua	5	
9	Livello dei tassi t0 (TRES)	5%	
10	Prezzo in t0	100,000	<-- =G8
11			

Tale risultato è facilmente identificabile costruendo l'ormai noto scadenziario finanziario (Tab. 3.15), in cui sono riportati il valore attuale dei flussi di cassa in ipotesi di stabilità (100,00), rialzo (95,788) e ribasso (104,452) dei tassi.

Come è facile verificare, in ipotesi di un incremento dei tassi di interesse, poiché aumenta la cosiddetta "forza di sconto", il valore attuale dei flussi di cassa è minore rispetto alle ipotesi di stabilità e diminuzione dei tassi di interesse.

Tabella 3.15 Scadenziario finanziario

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	Periodo	t0	t1	t2	t3	t4	t5		
3	Intervalli (anni)		1	2	3	4	5		
4	Flussi		5,0	5,0	5,0	5,0	105,0	<-- =K4+C5	
5									
6									
7									
8	Valore attuale t0	100,000	<-- =H9+I10+J11+L13+K12						
9			4,761905	<-- =H4/(1+$C$9)^H3					
10				4,535147	<-- =I4/(1+$C$9)^I3				
11					4,319188	<-- =J4/(1+$C$9)^J3			
12						4,113512	<-- =K4/(1+$C$9)^K3		
13							82,27025	<-- =L4/(1+$C$9)^L3	
14	Valore attuale (shift +2%)	91,800	<-- =H15+I16+J17+K18+L19						
15			4,672897	<-- =H4/(1+$C$31)^H3					
16				4,367194	<-- =I4/(1+$C$31)^I3				
17					4,081489	<-- =J4/(1+$C$31)^J3			
18						3,8	<-- =K4/(1+$C$31)^K3		
19							74,86355	<-- =L4/(1+$C$31)^L3	
20									
21	Valore attuale (shift -2%)	109,159	<-- =H22+I23+J24+K25+L26						
22			4,854369	<-- =H4/(1+$C$32)^H3					
23				4,71298	<-- =I4/(1+$C$32)^I3				
24					4,575708	<-- =J4/(1+$C$32)^J3			
25						4,442435	<-- =K4/(1+$C$32)^K3		
26							90,57392	<-- =L4/(1+$C$32)^L3	
27									
28	Valore attuale (shift +1%)	95,788	<-- =H29+I30+J31+K32+L33						
29			4,716981	<-- =H4/(1+$C$29)^H3					
30				4,449982	<-- =I4/(1+$C$29)^I3				
31					4,198096	<-- =J4/(1+$C$29)^J3			
32						4,0	<-- =K4/(1+$C$29)^K3		
33							78,46211	<-- =L4/(1+$C$29)^L3	
34									
35	Valore attuale (shift -1%)	104,452	<-- =H36+I37+J38+K39+L40						
36			4,807692	<-- =H4/(1+$C$30)^H3					
37				4,622781	<-- =I4/(1+$C$30)^I3				
38					4,444982	<-- =J4/(1+$C$30)^J3			
39						4,3	<-- =K4/(1+$C$30)^K3		
40							86,30235	<-- =L4/(1+$C$30)^L3	
41									

L'esempio analizzato fa emergere la misura puntuale del rischio di volatilità, rappresentabile sia in termini assoluti sia relativi (Tab. 3.16), permettendo, utilmente, di definire la legge di carattere generale che all'aumentare dei tassi di interesse di mercato, il rischio di volatilità si apprezza in negativo e, specularmente in positivo, al diminuire degli stessi.

Oltre alla componente rischio volatilità occorre considerare la componente rischio di reinvestimento, ovvero il contributo positivo o negativo dato dal reinvestimento delle cedole al nuovo livello dei tassi. Più specificatamente, si ha un apporto positivo al proprio investimento nel caso di rialzo dei tassi di interesse derivante dalla possibilità di investire le cedole maturate al nuovo, maggiore, livello dei tassi. Al contrario, nel caso di ribasso dei tassi di interesse, si registra un contributo minore, dato dalla possibilità di investire le cedole maturate al nuovo, minore, livello dei tassi.
È possibile quindi dettare la regola generale che in presenza di aumento dei tassi di interesse di mercato il rischio di volatilità si manifesta in negativo e il rischio di

reinvestimento in positivo; specularmente, nel caso di una riduzione dei tassi di interesse, il rischio di volatilità in positivo e il rischio di reinvestimento in negativo.

Occorre evidenziare che i contributi di segno opposto non si compensano automaticamente e che, per coprirsi dal rischio di tasso di interesse, occorre sviluppare delle considerazioni sul periodo di detenzione dell'investimento.

In termini pratici, a fronte di un prezzo iniziale del titolo pari a 100 (Tab. 3.15) e di una variazione ipotetica dei tassi pari a ± 1% si registra (Tab. 3.16), nel caso di aumento dei tassi, una variazione assoluta del prezzo del titolo pari a -4,212 (-4,212%) ovvero un prezzo del titolo pari a 95,788 e, nel caso di una variazione in diminuzione dei tassi, una variazione assoluta del titolo pari a 4,452 (4,452%) ovvero un prezzo del titolo pari a 104,452.

Tabella 3.16 Variazioni dei prezzi (assolute e relative)

	B	C	D
12	Nuovo livello dei tassi ipot.si 1	6%	
13	Nuovo livello dei tassi ipot.si 2	4%	
14			
15	Delta 1	1%	<-- =C12-C9
16	Delta 2	-1%	<-- =C13-C9
17			
18	Variazione assoluta 1	-4,212	<-- =G28-G8
19	Variazione relativa 1	-4,212%	<-- =(G28-G8)/G8
20	Nuovo Prezzo (ipotesi 1)	95,788	<-- =C10+C18
21			
22	Variazione assoluta 2	4,452	<-- =G35-G8
23	Variazione relativa 2	4,452%	<-- =(G35-G8)/G8
24	Nuovo Prezzo (ipotesi 2)	104,452	<-- =C10+C22
25			

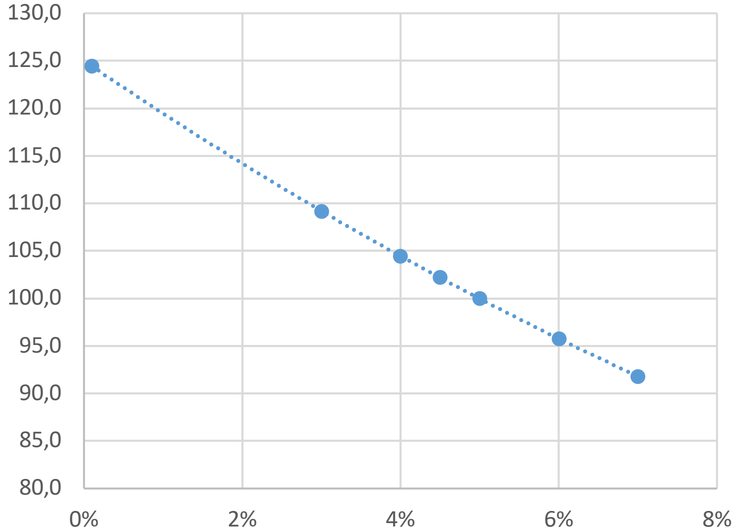
Dal punto di vista grafico, la relazione tra prezzo del titolo e rendimento offerto è descritta da un ramo di iperbole (Fig. 3.8) che dimostra, nel caso del titolo appena esaminato, come all'aumentare del livello dei tassi il prezzo del titolo diminuisca.

La giustificazione matematica si rinviene nella modalità di determinazione del prezzo del titolo precedentemente descritta, ovvero nell'evidenza che la sommatoria dei flussi di cassa attualizzati è, sostanzialmente, pari al prezzo di mercato.

Essendo quest'ultimo dipendente dalla forza di sconto, all'aumentare del livello dei tassi diminuisce il valore attuale dei flussi di cassa prodotti dall'investimento e quindi il prezzo. Dal punto di vista economico, il fatto che il prezzo dell'obbligazione scenda in caso di aumento del livello dei tassi, trova la giustificazione nell'evidenza che i titoli di nuova emissione dovranno essere collocati offrendo un rendimento maggiore, imponendo, per i titoli in circolazione emessi precedentemente, in un periodo in cui i rendimenti offerti erano minori, l'innalzamento del rendimento offerto abbassando il prezzo di vendita.

In altre parole, la perdita di valore del titolo obbligazionario in caso di aumento dei tassi trova una naturale giustificazione nella necessaria compensazione dei rendimenti.

Figura 3.8 Relazione grafica prezzo-rendimento



3.4.2 La durata media finanziaria o duration

La misurazione del rischio di volatilità si può ottenere attraverso l'uso di quattro indicatori complementari. La *Durata media finanziaria* o *Duration* (D), la *Modified Duration*(MD), la *Convexity* (C) e la dispersione delle scadenze dei flussi di cassa rappresentati in valore attuale intorno alla Duration o varianza delle stesse scadenze (M^2).

La Duration, indice di sensibilità, è definita come la media aritmetica ponderata delle scadenze dei flussi di cassa per capitale e interessi, considerando come fattore di ponderazione il valore attuale dei flussi di cassa, ottenuto utilizzando il tasso di rendimento a scadenza (TRES) come tasso di attualizzazione. Analiticamente:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_K * \frac{F_K}{(1+TRES)^{t_k}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{F_K}{(1+TRES)^{t_k}}}$$

ovvero:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_K * \frac{F_K}{(1+TRES)^{t_k}}}{P}$$

La Duration è quindi un numero che permette di discriminare tra due investimenti. Maggiore è tale numero, maggiore è il rischio volatilità associato all'investimento, ovvero maggiore è la possibilità di subire perdite di valore nell'arco temporale di detenzione in relazione alla struttura finanziaria dello strumento.

Più specificatamente la Duration è:

- correlata alla durata residua in quanto a maggior durata residua dell'investimento corrisponde maggior rischio volatilità;
- inversamente correlata con il livello del tasso di rendimento effettivo a scadenza poiché tanto più basso è quest'ultimo tanto è più alto il rischio di volatilità;
- inversamente correlata con il livello delle cedole giacché tanto più basso è quest'ultimo tanto più alto è il rischio volatilità;
- inversamente correlata con la numerosità delle cedole perché tanto più basso è quest'ultimo tanto più alto è il rischio di volatilità.

Derivando la funzione prezzo rispetto al rendimento si ottiene, invece, un nuovo indicatore di rischiosità, la *Modified Duration* (MD), che permette di stimare apprezzabilmente la variazione di prezzo di un'obbligazione in funzione di uno shift del livello dei tassi sufficientemente contenuto. Questo perché la *Modified Duration* è ottenuta indirettamente dalla funzione che lega il Prezzo al rendimento, ovvero dalla sua derivata prima, essendo un'approssimazione lineare di una relazione curvilinea. In questo modo si ottiene un indicatore che permette di stimare le variazioni infinitesimali del prezzo in corrispondenza delle variazioni infinitesimali del rendimento. Analiticamente, poiché

$$\frac{dP}{P} = -\frac{D}{1+r} * dr$$

ovvero:

$$dP = -\frac{D}{1+r} * dr * P$$

semplificando:

$$dP = -MD * dr * P$$

si definisce la Modified Duration:

$$MD = \frac{D}{1 + r}$$

La Modified Duration permette, opportunamente, di stimare la variabilità del prezzo dell'obbligazione noto:

- il valore della stessa;
- lo shift ipotizzato dei tassi di mercato;
- il prezzo dell'obbligazione.

A titolo di esempio si consideri il seguente titolo (Tab. 3.17) e si calcoli la Duration (cella C17) come rapporto tra la sommatoria dei prodotti dei periodi per i flussi di cassa attualizzati prodotti dall'obbligazione (cella E13) e il prezzo, a sua volta individuato dalla sommatoria dei flussi di cassa attualizzati (cella D13). O anche utilmente identificabile attraverso la funzione Excel (cella C15):

- DURATA(liquid; scad; cedola; rend; num_rate; [base]) Restituisce la durata Macauley per un valore nominale presunto di € 100. La durata è definita come la media ponderata del valore corrente dei flussi di cassa e viene utilizzata come misura della risposta del prezzo di un'obbligazione alle variazioni nel rendimento. Dove gli argomenti della sintassi della funzione DURATA sono i seguenti:
    - Liquid, data di liquidazione del titolo, ovvero la data, successiva alla data di emissione, in cui il titolo viene venduto al compratore.
    - Scad, data di scadenza del titolo, ovvero la data in cui il titolo scade.
    - Cedola, tasso di interesse della cedola annuale del titolo.
    - Rend, rendimento annuo del titolo.
    - Num_rate, numero di pagamenti per anno. Se i pagamenti sono annuali, num_rate = 1; se sono semestrali, num_rate = 2; se sono trimestrali, num_rate = 4.
    - Base, tipo di base da utilizzare per il conteggio dei giorni.

La Modified Duration è, quindi, pari al rapporto tra la Duration e (1+TRES) (cella C19) e permette di stimare il valore del titolo obbligazionario a seguito di una variazione ipotetica dei tassi. Nel caso specifico, per una variazione pari a +0,01, si otterrà una stima della variazione pari a -4,45182 a fronte di una variazione effettiva di -4,32948 e un corrispondente prezzo stimato di 95,5482 a fronte di un prezzo effettivo di 95,6705 (Tabb. 3.17 e 3.18).

Tabella 3.17 Esempio di calcolo della Duration e della Modified Duration

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
2	Rimborso	100		Durata	5						
3	TRES	0,040		Prezzo	100,00						
4	Cedola	0,040		Periodicità	1						
5											
6	Perido (t)	Cash Flow	PVCF	txPVCF							
7											
8	1	4,000	3,85	3,85	<-- =D8*B8						
9	2	4,000	3,70	7,40	<-- =D9*B9						
10	3	4,000	3,56	10,67	<-- =D10*B10						
11	4	4,000	3,42	13,68	<-- =D11*B11						
12	5	104,000	85,48	427,40	<-- =D12*B12						
13	Totale	120,00	100,00	462,99	<-- =SOMMA(E8:E12)						
14											
15	Duration (funzione excel)	4,6299	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";C4;C3;1)								
16											
17	Duration	4,6299	<-- =E13/F3								
18											
19	Duration Modifield	4,4518	<-- =C17/(1+C3)		4,451822331	<-- =DURATA.M("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";C4;C3;1)					
20											

Tabella 3.18 Stima della variazione di prezzo attraverso la Modified Duration

	B	C	D	E	F	G	H
22	Shift ipotizzato	**0,01**					
23							
24	Rimborso	100		Durata	5		
25	TRES	0,050		Prezzo	95,67		
26	Cedola	0,040		Periodicità	1		
27							
28	Perido (t)	Cash Flow	PVCF	txPVCF			
29							
30	1	4	3,81	3,81	<-- =D30*B30		
31	2	4	3,63	7,26	<-- =D31*B31		
32	3	4	3,46	10,37	<-- =D32*B32		
33	4	4	3,29	13,16	<-- =D33*B33		
34	5	104	81,49	407,43	<-- =D34*B34		
35	Totale	120,00	95,6705	442,03	<-- =SOMMA(E30:E34)		
36							
37	Duration (funzione excel)	4,6203	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";C26;C25;1)				
38							
39	Duration	4,6203	<-- =E35/F25				
40							
41	Duration Modifield	4,4003	<-- =C39/(1+C25)				
42							
43							
44	Prezzo t0	100,0000					
45	Prezzo effettivo post shift	95,6705					
46	Variazione effettiva	- 4,32948	<-- =C45-C44				
47							
48	Shift ipotizzato	0,010	<-- =C22				
49	Stima var. con DM	**- 4,45182**	<-- =-C19*D13*C48				
50	Stima prezzo	95,5482	<-- =D13+(C49)				
51							

Allo stesso modo, per una variazione ipotetica dei tassi pari a 0,02 si otterrà una stima della variazione pari a -8,90364 per un prezzo di 91,0964 a fronte di una variazione effettiva di -8,42473 per un prezzo di 91,5753.

Tabella 3.19 Stima della variazione di prezzo attraverso la Modified Duration

	B	C	D	E	F	G	H
53	Shift ipotizzato	0,02					
54							
55	Rimborso	100		Durata	5		
56	TRES	0,060		Prezzo	91,58		
57	Cedola	0,040		Periodicità	1		
58							
59	Periodo (t)	Cash Flow	PVCF	txPVCF			
60							
61	1	4	3,77	3,77	<-- =D61*B61		
62	2	4	3,56	7,12	<-- =D62*B62		
63	3	4	3,36	10,08	<-- =D63*B63		
64	4	4	3,17	12,67	<-- =D64*B64		
65	5	104	77,71	388,57	<-- =D65*B65		
66	Totale	120,00	91,5753	422,22	<-- =SOMMA(E61:E65)		
67							
68							
69	Duration (funzione excel)	4,6106	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";C57;C56;1)				
70							
71	Duration	4,6106	<-- =E66/F56				
72							
73	Duration Modifield	4,3496	<-- =C71/(1+C56)				
74							
75	Prezzo t0	100,0000					
76	Prezzo effettivo post shift	91,5753					
77	Variazione effettiva	- 8,42473	<-- =C76-C75				
78							
79	Shift ipotizzato	0,020	<-- =C53				
80	Stima var. con DM	- 8,90364	<-- =-C19*C75*C79				
81	Stima prezzo	91,0964	<-- =C75+(C80)				
82							

Gli esempi rappresentati mostrano come sia possibile addivenire a una stima del valore del titolo. Tuttavia, come anticipato, occorre evidenziare che l'utilizzo di questo indicatore comporta l'assunzione di un errore che, per shift infinitesimali è trascurabile. L'errore si genera per l'evidenza che la Duration approssima linearmente la relazione curvilinea della funzione prezzo, che è una funzione convessa. Quanto affermato trova riscontro nel calcolo dei differenziali (Tab. 3.20) tra il prezzo effettivo e quello stimato attraverso la Modified Duration a fronte di diverse ipotesi di evoluzione dei tassi. Come evidenziato, questi differenziali sono sempre positivi perché i prezzi stimati sono sempre inferiori ai prezzi effettivi, il che permette di affermare che la valutazione del prezzo del titolo effettuata con la Modified Duration incorpora una sovrastima della diminuzione dei prezzi in caso di aumento dei tassi (poiché il prezzo stimato è inferiore al prezzo effettivo) e una sottostima dell'aumento dei prezzi in caso di variazione in diminuzione dei tassi (poiché il prezzo effettivo è superiore al prezzo stimato).

Tabella 3.20 Confronto variazioni effettive e stimate con la Modified Duration

	K	L	M	N	O	P	Q
22			TRES	Prezzo effettivo	Stima Prezzo DM	Delta DM	
23							
24			0,050	95,6705	95,5482		
25							
26			0,0200	109,4269	108,9036	0,5233	
27			0,0300	104,5797	104,4518	0,1279	
28			0,0400	100,0000	100,0000	0,0000	
29			0,0500	95,6705	95,5482	0,1223	
30			0,0600	91,5753	91,0964	0,4789	
31							
32	Alfa	Beta					
33	0,020	0,040	0,0200	113,8040	108,9036	4,9004	
34	0,003	0,010	0,0300	105,6255	104,4518	1,1737	
35	-	-	0,0400	100,0000	100,0000	0,0000	
36	0,003	0,010	0,0500	96,6272	95,5482	1,0791	
37	0,020	0,040	0,0600	95,2383	91,0964	4,1419	
38							

Quanto affermato precedentemente è rinvenibile anche dall'analisi della rappresentazione grafica (Fig. 3.9) dell'evoluzione del prezzo dell'obbligazione in relazione del variare dei tassi di interesse e della sua stima per mezzo della Duration Modified. Per un miglior apprezzamento delle differenze si rimanda alla figura successiva (Fig. 3.10) in cui i prezzi effettivi sono stati moltiplicati per un vettore di fattori (Tabella 3.20, celle L33-L37) opportunamente calibrati.

Figura 3.9 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e della derivata al primo ordine

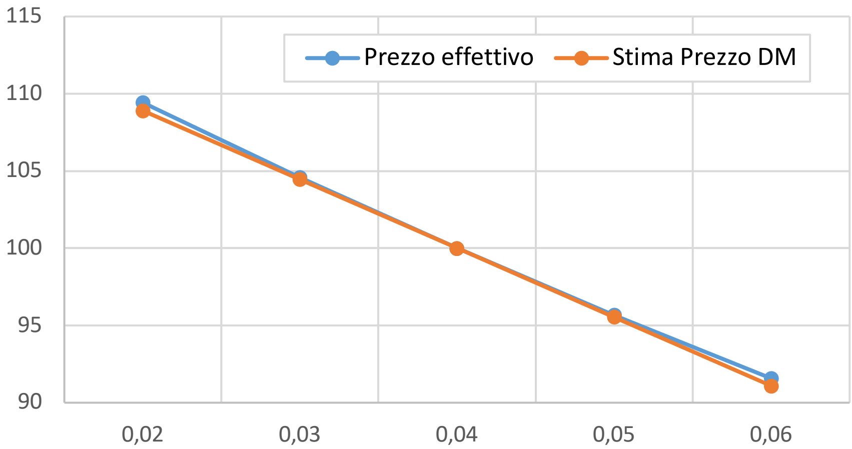
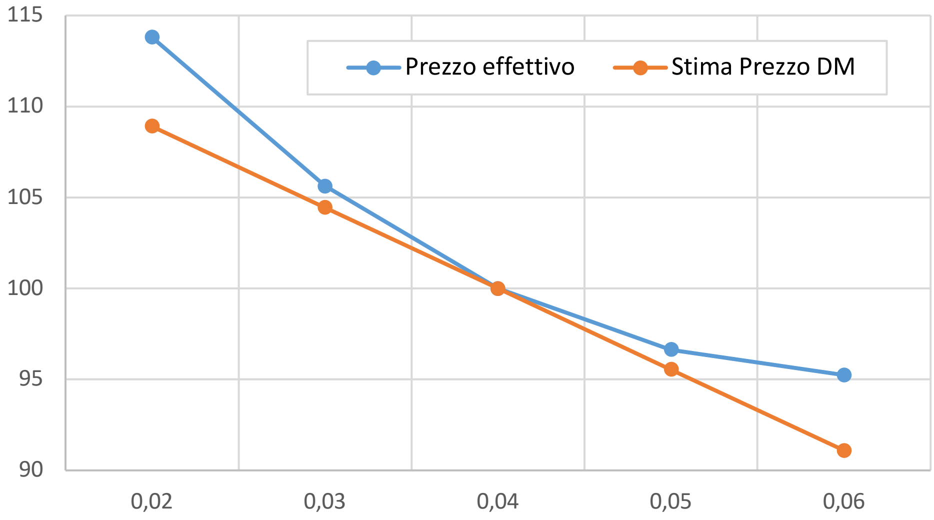


Figura 3.10 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e della sua derivata al primo ordine (con effetti amplificati per un miglior apprezzamento)



3.4.3 La convessità o convexity

La stima del rischio di volatilità può essere ulteriormente affinata attraverso l'indicatore della Convexity. Tale indicatore è rappresentato dalla media aritmetica ponderata della somma delle scadenze dei flussi di cassa e dei quadrati delle stesse scadenze, considerando come fattore di ponderazione i medesimi flussi di cassa espressi in termini di loro valore attuale, calcolato utilizzando come tasso di attualizzazione il tasso di rendimento effettivo a scadenza. Analiticamente:

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{n} (t_K + t_K{}^2) * \frac{F_K}{(1+TRES)^{t_k}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{F_K}{(1+TRES)^{t_k}}}$$

ovvero:

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{n} (t_K + t_K{}^2) * \frac{F_K}{(1+TRES)^{t_k}}}{P}$$

È importante evidenziare che la Convexity, contrariamente alla Duration, non è un indicatore di liquidità naturale, ma un indicatore utilizzabile per approssimare meglio la stima della variabilità del prezzo del titolo obbligazionario al variare dei tassi di interesse. Infatti, attraverso lo sviluppo del differenziale al secondo ordine della funzione prezzo è possibile addivenire alla seguente espressione:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{D}{1+r} * dr + \frac{C}{(1+r)^2} * \frac{dr^2}{2}$$

ovvero:

$$\frac{dP}{P} = -MD * dr + \frac{C}{(1+r)^2} * \frac{dr^2}{2}$$

da cui risulta chiaramente che la stima del rischio di volatilità è ottenibile tenendo conto della Modified Duration e dell'apporto della Convexity. Ne deriva che la Convexity permette di discriminare tra titoli differenti, rendendo preferibili quelli che, a parità di condizioni, mostrano un valore maggiore di tale indicatore. Inoltre, contribuisce a mitigare la discesa dei prezzi dei titoli obbligazionari, nel caso in cui i tassi di interesse di mercato salgano, e ad amplificare il loro innalzamento, nel caso speculare in cui i tassi di interesse scendano.

L'esempio che segue, evoluzione del precedente, mostra, innanzitutto, il valore assunto dalla Convexity (Tab. 3.21), mentre, nelle successive quattro tabelle (Tabb. 3.22, 3.23, 3.24, 3.25), sono rappresentati i valori della stima della variazione attesa del prezzo dell'obbligazione e del prezzo stesso nel caso di quattro scenari diversi di evoluzione dei tassi, rispettivamente ±1% e ±2%.

Tabella 3.21 Valore assunto dalla Convexity

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3									
4	Rimborso			100		Durata		5	
5	TRES			0,040	<-- **0,04**	Prezzo		100,00	
6	Cedola			0,040		Periodicità		1	
7									
8	Perido (t)	t^2	t+t^2	Cash Flow	PVCF	txPVCF	(t+t^2)xPVCF		
9									
10	1	1	2	4	3,85	3,85	7,69	<-- **=D10*F10**	
11	2	4	6	4	3,70	7,40	22,19	<-- **=D11*F11**	
12	3	9	12	4	3,56	10,67	42,67	<-- **=D12*F12**	
13	4	16	20	4	3,42	13,68	68,38	<-- **=D13*F13**	
14	5	25	30	104	85,48	427,40	2.564,41	<-- **=D14*F14**	
15	Totale			120,00	100,00	462,99	2.705,35	<-- **=SOMMA(H10:H14)**	
16									
17	Duration (funzione excel)	4,6299	<-- **=DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";E6;E5;1)**						
18									
19	Duration	4,6299	<-- **=G15/I5**						
20									
21	Duration Modifield	4,4518	<-- **=C19/(1+E5)**						
22									
23	Convexity	27,0535	<-- **=H15/F15**						
24									

Tabella 3.22 Valori stimati scenario 1

	B	C	D	E	F	G	H	I
28	Shift ipotizzato			0,01				
29								
30	Rimborso			100		Durata		5
31	TRES			0,050	<-- =E5+E28	Prezzo		95,6705
32	Cedola			0,040		Periodicità		1
33								
34	Periodo (t)	t^2	t+t^2	Cash Flow	PVCF	txPVCF	(t+t^2)xPVCF	
35								
36	1	1	2	4	3,81	3,81	7,62	<-- =D36*F36
37	2	4	6	4	3,63	7,26	21,77	<-- =D37*F37
38	3	9	12	4	3,46	10,37	41,46	<-- =D38*F38
39	4	16	20	4	3,29	13,16	65,82	<-- =D39*F39
40	5	25	30	104	81,49	407,43	2.444,60	<-- =D40*F40
41	Totale			120,00	95,67	442,03	2.581,27	<-- =SOMMA(H36:H40)
42								
43	Duration (funzione excel)	4,6203	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";E32;E31;1)					
44								
45	Duration	4,6203	<-- =G41/I31					
46								
47	Duration Modifield	4,4003	<-- =C45/(1+E31)					
48								
49	Convexity	26,9808	<-- =H41/F41					
50								
51				Prezzo t0	100,00	<-- =F15		
52				Prezzo effettivo post shift	95,6705	<-- =F41		
53				Variazione effettiva	- 4,3295	<-- =F52-F51		
54								
55				Shift ipotizzato	0,0100	<-- =E28		
56				Stima var. con DM	- 4,4518	<-- =-C21*F15*F55		
57				Stima prezzo	95,5482	<-- =F15+(F56)		
58				Stima della var. con Conv.	- 4,3268	<-- =F56+(C23/((1+E5)^2))*((F55^2)/2)*100		
59				Stima prezzo DM+C	95,6732	<-- =F51+F58		
60								

Tabella 3.23 Valori stimati scenario 2

	B	C	D	E	F	G	H	I
64	Shift ipotizzato			0,02				
65								
66	Rimborso			100		Durata		5
67	TRES			0,060	<-- =E5+E64	Prezzo		91,58
68	Cedola			0,040		Periodicità		1
69								
70	Periodo (t)	t^2	t+t^2	Cash Flow	PVCF	txPVCF	(t+t^2)xPVCF	
71								
72	1	1	2	4	3,77	3,77	7,55	<-- =D72*F72
73	2	4	6	4	3,56	7,12	21,36	<-- =D73*F73
74	3	9	12	4	3,36	10,08	40,30	<-- =D74*F74
75	4	16	20	4	3,17	12,67	63,37	<-- =D75*F75
76	5	25	30	104	77,71	388,57	2.331,45	<-- =D76*F76
77	Totale			120,00	91,58	422,22	2.464,02	<-- =SOMMA(H72:H76)
78								
79	Duration (funzione excel)	4,6106	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";E68;E67;1)					
80								
81	Duration	4,6106	<-- =G77/I67					
82								
83	Duration Modifield	4,3496	<-- =C81/(1+E67)					
84								
85	Convexity	26,9071	<-- =H77/F77					
86								
87								
88				Prezzo t0	100,00			
89				Prezzo effettivo post shift	91,5753	<-- =F77		
90				Variazione effettiva	- 8,4247	<-- =F89-F88		
91								
92				Shift ipotizzato	0,0200	<-- =E64		
93				Stima var. con DM	- 8,9036	<-- =-C21*F88*F92		
94				Stima prezzo	91,0964	<-- =F88+(F93)		
95				Stima della var. con Conv.	- 8,4034	<-- =F93+(C23/((1+E5)^2))*((F92^2)/2)*100		
96				Stima prezzo DM+C	91,5966	<-- =F88+F95		
97								
98				1-	I prezzi stimati sono sempre inferiori ai prezzi effettivi			
99				Caso A	**Sovrastima** della diminuzione dei prezzi in caso di rialzo dei tassi			
100				Caso B	**Sottostima** della diminuzione dei prezzi in caso di diminuzione dei tassi			
101								

Tabella 3.24 Valori stimati scenario 3

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
27	Shift ipotizzato			-0,01					
28									
29	Rimborso			100		Durata		5	
30	TRES			0,030	<-- =E5+E27	Prezzo		104,5797	
31	Cedola			0,040		Periodicità		1	
32									
33	Perido (t)	t^2	t+t^2	Cash Flow	PVCF	txPVCF	(t+t^2)xPVCF		
34									
35	1	1	2	4	3,88	3,88	7,77	<-- =D35*F35	
36	2	4	6	4	3,77	7,54	22,62	<-- =D36*F36	
37	3	9	12	4	3,66	10,98	43,93	<-- =D37*F37	
38	4	16	20	4	3,55	14,22	71,08	<-- =D38*F38	
39	5	25	30	104	89,71	448,56	2.691,34	<-- =D39*F39	
40	Totale			120,00	104,58	485,18	2.836,73	<-- =SOMMA(H35:H39)	
41									
42	Duration (funzione exce	4,6393	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";E31;E30;1)						
43									
44	Duration	4,6393	<-- =G40/I30						
45									
46	Duration Modifield	4,5042	<-- =C44/(1+E30)						
47									
48	Convexity	27,1251	<-- =H40/F40						
49									
50									
51									
52				Prezzo t0	100,00	<-- =F15			
53				Prezzo effettivo post shift	104,5797	<-- =F40			
54				Variazione effettiva	4,5797	<-- =F53-F52			
55									
56				Shift ipotizzato	- 0,0100	<-- =E27			
57				Stima var. con DM	4,4518	<-- =-C21*F15*F56			
58				Stima prezzo	104,4518	<-- =F15+(F57)			
59				Stima della var. con Conv	4,5769	<-- =F57+(C23/((1+E5)^2))*((F56^2)/2)*100			
60				Stima prezzo DM+C	104,5769				
61									

Tabella 3.25 Valori stimati scenario 4

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
64	Shift ipotizzato			-0,02					
65									
66	Rimborso			100		Durata		5	
67	TRES			0,020	<-- =E5+E64	Prezzo		109,43	
68	Cedola			0,040		Periodicità		1	
69									
70	Perido (t)	t^2	t+t^2	Cash Flow	PVCF	txPVCF	(t+t^2)xPVCF		
71									
72	1	1	2	4	3,92	3,92	7,84	<-- =D72*F72	
73	2	4	6	4	3,84	7,69	23,07	<-- =D73*F73	
74	3	9	12	4	3,77	11,31	45,23	<-- =D74*F74	
75	4	16	20	4	3,70	14,78	73,91	<-- =D75*F75	
76	5	25	30	104	94,20	470,98	2.825,88	<-- =D76*F76	
77	Totale			120,00	109,43	508,68	2.975,93	<-- =SOMMA(H72:H76)	
78									
79	Duration (funzione exce	4,6486	<-- =DURATA("1 gennaio 2000";"1 gennaio 2005";E68;E67;1)						
80									
81	Duration	4,6486	<-- =G77/I67						
82									
83	Duration Modifield	4,5574	<-- =C81/(1+E67)						
84									
85	Convexity	27,1956	<-- =H77/F77						
86									
87				Prezzo t0	100,00				
88				Prezzo effettivo post shift	109,4269	<-- =F77			
89				Variazione effettiva	9,4269	<-- =F88-F87			
90									
91				Shift ipotizzato	- 0,0200	<-- =E64			
92				Stima var. con DM	8,9036	<-- =-C21*F87*F91			
93				Stima prezzo	108,9036	<-- =F87+(F92)			
94				Stima della var. con Conv	9,4039	<-- =F92+(C23/((1+E5)^2))*((F91^2)/2)*100			
95				Stima prezzo DM+C	109,4039				
96									

Come si potrà notare dalla successiva tabella riassuntiva (Tab. 3.26), nelle diverse ipotesi di shift (celle L7:L11) la stima della variazione del prezzo, e del prezzo stesso, con l'apporto della Convexity restituisce sempre valori più vicini a quelli effettivi (celle N7:N11 vs O7:011 vs P7:P11).

Ciò è anche evidenziato dalle differenze calcolate tra il prezzo effettivo e il prezzo stimato con la Duration Modified e con la Convexity. Infatti, i differenziali tra i prezzi (celle Q7:Q11 e R7:R11) sono decisamente trascurabili, o comunque inferiori, nella stima compiuta utilizzando la Convexity (celle R7:R11).

Tabella 3.26 Tabella riassuntiva

	K	L	M	N	O	P	Q	R
3		Shift	TRES	Prezzo effettivo	Stima Prezzo DM	Stima prezzo DM+C	Delta DM	Delta C
4								
5								
6								
7		- 0,020	0,020	109,4269	108,9036	109,4039	0,5233	0,0230
8		- 0,010	0,030	104,5797	104,4518	104,5769	0,1279	0,0028
9		-	0,040	100,0000	100,0000	100,0000	0,0000	0,0000
10		0,010	0,050	95,6705	95,5482	95,6732	0,1223	-0,0027
11		0,020	0,060	91,5753	91,0964	91,5966	0,4789	-0,0213
12								
13	Alfa	Beta						
14	0,020	0,040	0,0200	113,8040	108,9036	111,5920	4,9004	2,2120
15	0,003	0,010	0,0300	105,6255	104,4518	104,8906	1,1737	0,7349
16	-	-	0,0400	100,0000	100,0000	100,0000	0,0000	0,0000
17	0,010	0,003	0,0500	95,9575	95,5482	96,6300	0,4094	-0,6724
18	0,040	0,020	0,0600	93,4068	91,0964	95,2605	2,3104	-1,8537

La rappresentazione grafica (Fig. 3.11) della funzione prezzo rispetto al rendimento e delle sue derivate al primo e secondo ordine mostra le differenze analizzate precedentemente, anche se, per un miglior apprezzamento delle stesse, si rimanda alla figura successiva (Fig. 3.12), in cui i prezzi effettivi e i prezzi stimati con la Convexity sono stati moltiplicati, rispettivamente, per uno specifico vettore di fattori (Tab. 3.26, celle L14:L18 e K14-K18).

Figura 3.11 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e delle sue derivate al primo e secondo ordine

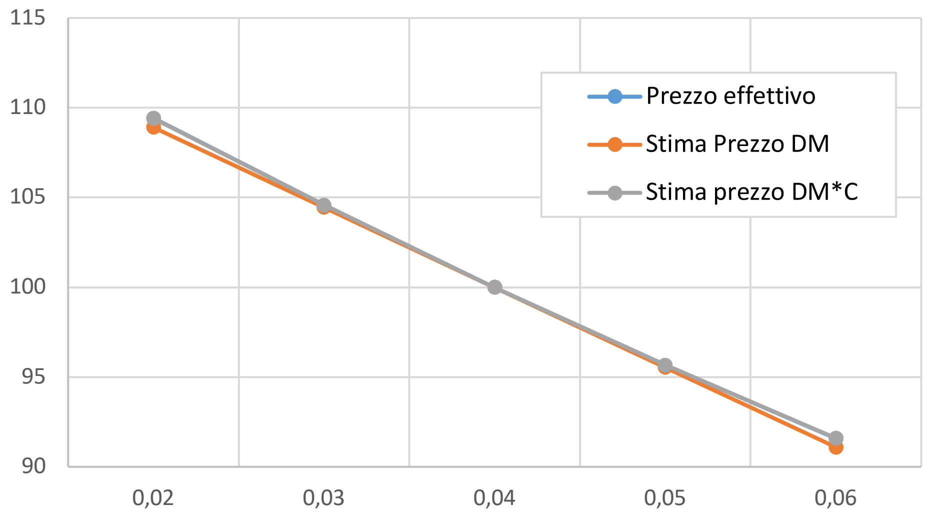
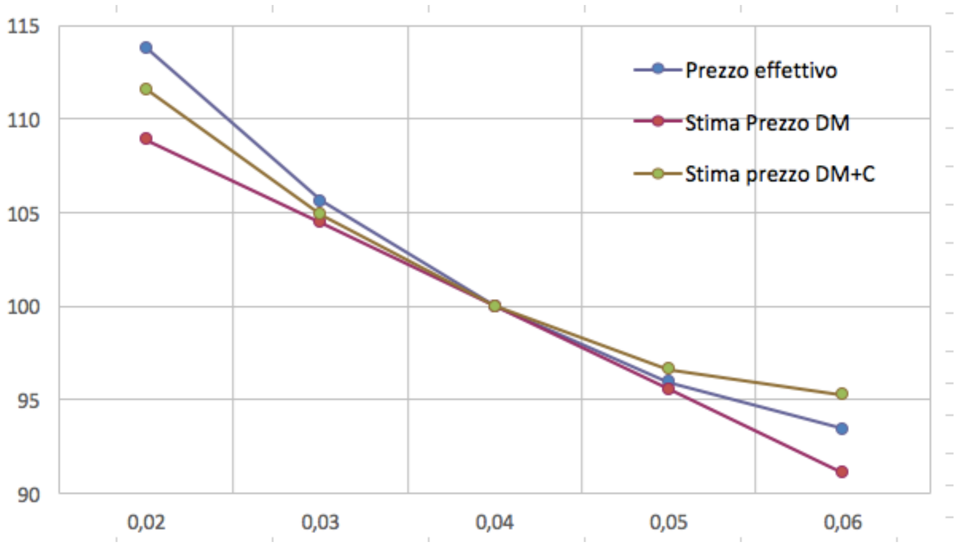


Figura 3.12 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e delle sue derivate al primo e secondo ordine con amplificazione degli effetti per esigenze di rappresentazione (con coefficienti simmetrici)



In conclusione, la Convexity permette, in aggiunta alla Duration Modified, un miglior apprezzamento del rischio di volatilità e non si traduce in una misura puntuale dello stesso ma in una miglior approssimazione. L'errore dovuto a tale approssimazione tende a zero per shift contenuti. Si rimanda alla sezione 3.5 per un approfondimento e meglio apprezzare i valori di stima.

3.4.4 La sterilizzazione del rischio di tasso di interesse: il teorema dell'immunizzazione

Gli investimenti in obbligazioni comportano l'assunzione del rischio di volatilità e del rischio di reinvestimento. La Duration, oltre a essere un indicatore del rischio di tasso di interesse e della liquidità di un titolo obbligazionario permette di gestire congiuntamente, sotto determinate condizioni, le due componenti del rischio di tasso di interesse.

Si dimostra, infatti, che è possibile proteggersi dal rischio di tasso di interesse e dal rischio di reinvestimento in un titolo obbligazionario con cedola fissa non detenuto sino alla scadenza, ottenendo un rendimento alla fine dell'investimento pari a quello stimato all'inizio del citato investimento. Per far ciò l'investitore deve scegliere un titolo che abbia una Duration pari all'*holding period* desiderato.

Preliminarmente occorre identificare una misura di rendimento che permetta di quantificare il risultato dell'investimento alla fine del periodo di detenzione dell'obbligazione. Più specificatamente quel tasso periodale rappresentativo del montante dell'investimento a uno specifico periodo.

Analiticamente:

$$P_0(1+r)^{hp} = \sum_{k=1}^{h} F_k(1+r)^{hp-t_k} + P_{hp}$$

o anche:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{h} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}} + \frac{P_{hp}}{(1+r)^{hp}}$$

con $t_k \leq hp$ e rammentando che:

P_0 = prezzo del titolo obbligazionario al momento dell'acquisto
P_{hp} = prezzo del titolo obbligazionario alla fine dell'*holding period*
F_k = flussi di cassa prodotti dall'obbligazione
t_k = periodo di detenzione

Ne deriva che il tasso periodale è influenzato da i frutti intermedi, dal tasso al quale sono reinvestiti tali frutti e dal prezzo alla fine dell'*holding period*. In sintesi il tasso periodale è un tasso che cattura adeguatamente gli effetti della componente rischio di volatilità e di reinvestimento.

Prima di procedere occorre definire i limiti di tale modello e, specificatamente, evidenziare che si ipotizza la stabilità dei tassi di interesse di mercato e un aumento/diminuzione istantanea rispetto al livello iniziale al momento dell'acquisto del titolo.

Si prendano, quindi, in considerazione le seguenti caratteristiche del titolo (Tab. 3.27) e i primi risultati utili all'analisi (Metodo 1), segnatamente:

- il prezzo del titolo come valore attuale dei flussi di cassa (cella F35);
- il numeratore della Duration (cella G35) e della Convexity (cella H35);
- gli intervalli temporali tra la data di stacco di ogni flusso e la Duration (Tab. 3.28) espressa in semestri (celle I28:I33 e J14:J27) avendo scelto di indicare i periodi come interi e non frazioni (ricordiamo che nel caso in esame lo stacco della cedola è previsto semestralmente).

Tabella 3.27 Caratteristiche del titolo

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
4	Rimborso			100		Durata	10				
5	TRES sem.			0,036		Prezzo Emis.	100				
6	Cedola			0,036		Periodicità	2				
7	Data di vendita			18/04/08							
8	Data emissione			01/01/01							
9											
10	Metodo 1										
11											
12	Perido (t)	t^2	t+t^2	Cash Flow	PVCF	txPVCF	(t+t^2)xPVCF	t*	t**		
13				-100							
14	1	1	2	3,6	3,47	3,47	6,95		13,592	<-- =$O$43-B14	
15	2	4	6	3,6	3,35	6,71	20,12		12,592		
16	3	9	12	3,6	3,24	9,71	38,85		11,592		
17	4	16	20	3,6	3,13	12,50	62,50		10,592		
18	5	25	30	3,6	3,02	15,08	90,50		9,592		
19	6	36	42	3,6	2,91	17,47	122,29		8,592		
20	7	49	56	3,6	2,81	19,67	157,39		7,592		
21	8	64	72	3,6	2,71	21,70	195,32		6,592		
22	9	81	90	3,6	2,62	23,57	235,67		5,592		
23	10	100	110	3,6	2,53	25,28	278,03		4,592		
24	11	121	132	3,6	2,44	26,84	322,05		3,592		
25	12	144	156	3,6	2,35	28,26	367,38		2,592		
26	13	169	182	3,6	2,27	29,55	413,71		1,592		
27	14	196	210	3,6	2,19	30,72	460,77		0,592		
28	15	225	240	3,6	2,12	31,77	508,30	0,408	<-- =B28-$O$43		
29	16	256	272	3,6	2,04	32,71	556,05	1,408			
30	17	289	306	3,6	1,97	33,55	603,82	2,408			
31	18	324	342	3,6	1,90	34,28	651,41	3,408			
32	19	361	380	3,6	1,84	34,93	698,64	4,408			
33	20	400	420	103,6	51,07	1.021,40	21.449,34	5,408			
34											
35	Totale			172,00	100,00	1.459,17	27.239,09	<-- =SOMMA(H14:H33)			
36											

In questo modo è possibile calcolare (Tab. 3.28) il valore della Duration (cella O49), la Duration Modified (cella O51), e la Convexity (cella O53) avendo cura di dividere per i rispettivi indicatori per due avendo utilizzato numeri interi e non frazioni nel calcolo degli intervalli temporali. La data di smobilizzo è individuabile attraverso la Duration del titolo utilizzando la funzione:

- FISSO (num; [decimali]; [nessun_separatore]) dove Num è il Numero che si desidera arrotondare e convertire in testo; Decimali il Numero di cifre a destra della virgola decimale e Nessun_separatore un valore logico che, se VERO, non consente a FISSO di includere i separatori delle migliaia nel testo restituito.

Specificatamente, =FISSO(O49;0) per ottenere il numero (7) intero (cella R50) e =FISSO((O49-R50)*365;0) per ottenere (cella S51) il numero di giorni (108) da un valore espresso in anni.

Tabella 3.28 Valore della Duration, Duration Modified e Convexity del titolo

	N	O	P	Q	R	S	T	U
41								
42								
43	D. sem.	14,592	<-- =G35/F35		Periodo di detenzione per applicare il teorema dell'immunizzazione (cosiderare l'arrotondamento nel confronto con la variante)			
44								
45	D.M. sem.	14,085	<-- =O43/(1+E5)					
46								
47	C. sem.	272,391	<-- =H35/F35					
48								
49	D.	7,296	<-- =O43/2		Anni	Giorni		
50					7	<-- =FISSO(O49;0)		
51	D.M.	7,042	<-- =O45/2			108	<-- =FISSO((O49-R50)*365;0)	
52								
53	C.	136,195	<-- =O47/2					
54					18/04/2008	-- =DATA(2001+7;1;1+0,296*365)		
55								
56					108,04	<-- =0,296*365		
57								

A questo punto è possibile stimare (Tab. 3.29) il valore dell'investimento (celle P35, Q35, R35) nel momento temporale specifico t_k, ovvero alla data di smobilizzo 7 anni e 108 giorni dopo l'acquisto (celle R50 e S51), come sommatoria dei frutti di cassa maturati e capitalizzati (celle P14:P27; Q14:Q27; R14:R27;) a tale data; inoltre, è possibile determinare il valore del titolo in quello specifico momento come sommatoria dei flussi di cassa residui non ancora maturati attualizzati (celle K28:K33; L28:L33; M28:M33) nei tre scenari di evoluzione dei tassi (2,5%; 3,5%; 1,5%) considerati. I risultati nelle tre ipotesi considerate sono tre valori sostanzialmente identici (167,963; 167,546; 169,068), trascurando un piccolo errore marginale (delta pari a -0,417 e 1,105 dal valore centrale). Tutto ciò a dimostrazione che il valore dell'investimento non cambia se si decide di smobilizzare un titolo obbligazionario a cedola fissa nel momento temporale coincidente con la Duration del titolo stesso.

Tabella 3.29 Stima del valore dell'investimento

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
9	IPOTESI TASSI					IPOTESI TASSI				
10	TRES	TRES	TRES			TRES	TRES	TRES		
11	2,5%	3,5%	1,5%			2,5%	3,5%	1,5%		
12	Cedole & Frutti (attualizzati)					Cedole & Frutti (capitalizzati)				
13										
14	<-- =$O$43-B14					5,0357	5,7460	4,4074	<--	=$E14*(1+R$11)^$J14
15						4,9129	5,5517	4,3423		
16						4,7930	5,3640	4,2781		
17						4,6761	5,1826	4,2149		
18						4,5621	5,0073	4,1526		
19						4,4508	4,8380	4,0913		
20						4,3423	4,6744	4,0308		
21						4,2363	4,5163	3,9712		
22						4,1330	4,3636	3,9125		
23						4,0322	4,2160	3,8547		
24						3,9339	4,0735	3,7978		
25						3,8379	3,9357	3,7416		
26						3,7443	3,8026	3,6863		
27						3,6530	3,6740	3,6319		
28	3,564	3,550	3,578	<--	=($E28)/(1+M$11)^$I28					
29	3,477	3,430	3,525							
30	3,392	3,314	3,473							
31	3,309	3,202	3,422							
32	3,229	3,093	3,371							
33	90,649	86,012	95,585							
34										
35	107,620	102,600	112,955	<--	=SOMMA(M28:M33)	60,343	64,946	56,114	<--	=SOMMA(R14:R27)
36										
37										
38					Tot.	**167,963**	**167,546**	**169,068**	<--	=R35+$M$35
39						Delta	- 0,417	1,105	<--	=R38-P38

Alternativamente, è possibile giungere alla stessa conclusione (Metodo 2) nota la data di vendita 18/04/08, utilizzando però tassi annuali. Infatti, calcolando (Tab.3.30) gli intervalli temporali intercorrenti tra lo stacco di ogni flusso e la data di vendita con la funzione:

- FRAZIONE.ANNO(data_iniziale; data_finale; [base]) restituisce la frazione dell'anno corrispondente al numero dei giorni complessivi compresi tra due date, data_iniziale e data_finale dove Data_iniziale è la Data che rappresenta la data di inizio; Data_finale la Data che rappresenta la data finale e Base il Tipo di base da utilizzare per il conteggio dei giorni

si può agevolmente determinare la somma del valore attuale, alla data di smobilizzo, dei flussi di cassa non ancora maturati (I89:I94; J89:J94; K89:K94) e il montante dei flussi di cassa maturati (L72:L85; M72:M85; N72:N85) nelle tre ipotesi di evoluzione dei tassi considerate (2,5%; 3,5% e 1,5%), che convertiti in tassi annuali diventano, rispettivamente, (5,062%; 7,122%; 3,022%). Il risultato è, sostanzialmente, identico (Tab. 3.30) al precedente (169,975; 167,562; 169,075) e mostra un delta trascurabile (pari a -0,413 e 1,100 dal valore centrale).

Tabella 3.30 Stima del valore dell’investimento (metodo alternativo)

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
65				TASSI ANNUALI									
66	Metodo 2				Cedole & Frutti (attualizzati)			Cedole & Frutti (capitalizzati)					
67					IPOTESI TASSI			IPOTESI TASSI					
68					TRES	TRES	TRES	TRES	TRES	TRES	Duration semestrale		
69	Cash Flow	Data	Anni		5,062%	7,122%	3,022%	5,062%	7,122%	3,022%	t*	t**	
70													
71	-100	01/01/01	7,297	<-- =FRAZIONE.ANNO($F$87;F71)								14,594	<-- =G71*2
72	3,6	01/07/01	6,797	<-- =FRAZIONE.ANNO($F$87;F72)				5,036	5,747	4,408	<-- =E72*(1+$N$69)^G72	13,594	<-- =G72*2
73	3,6	01/01/02	6,297	<-- =FRAZIONE.ANNO($F$87;F73)				4,913	5,552	4,342	<-- =E73*(1+$N$69)^G73	12,594	<-- =G73*2
74	3,6	01/07/02	5,797					4,793	5,364	4,278	<-- =E74*(1+$N$69)^G74	11,594	
75	3,6	01/01/03	5,297					4,676	5,183	4,215		10,594	
76	3,6	01/07/03	4,797					4,562	5,008	4,153		9,594	
77	3,6	01/01/04	4,297					4,451	4,838	4,091		8,594	
78	3,6	01/07/04	3,797					4,343	4,675	4,031		7,594	
79	3,6	01/01/05	3,297					4,237	4,517	3,971		6,594	
80	3,6	01/07/05	2,797					4,133	4,364	3,913		5,594	
81	3,6	01/01/06	2,297					4,032	4,216	3,855		4,594	
82	3,6	01/07/06	1,797					3,934	4,074	3,798		3,594	
83	3,6	01/01/07	1,297					3,838	3,936	3,742		2,594	
84	3,6	01/07/07	0,797					3,745	3,803	3,686		1,594	
85	3,6	01/01/08	0,297					3,653	3,674	3,632		0,594	
86													
87		18/04/08											
88													
89	3,6	01/07/08	0,203		3,564	3,550	3,578	<-- =$E89/(1+K$69)^$G89			0,406	<-- =G89*2	
90	3,6	01/01/09	0,703		3,477	3,430	3,525				1,406		
91	3,6	01/07/09	1,203		3,392	3,314	3,473				2,406		
92	3,6	01/01/10	1,703		3,310	3,202	3,422				3,406		
93	3,6	01/07/10	2,203		3,229	3,094	3,371				4,406		
94	103,6	01/01/11	2,703		90,655	86,020	95,589				5,406		
95													
96					107,627	102,610	112,959	60,348	64,952	56,116	<-- =SOMMA(N72:N85)		
97													
98													
99							Tot.	167,975	167,562	169,075	<-- =K96+N96		
100								Delta	- 0,413	1,100	<-- =N99-L99		

3.5 Analisi dell'andamento della curva di stima del prezzo mediante la Convexity: un caso empirico (di Pina Murè)

Per studiare l'andamento della curva al variare dei tassi di interesse, occorre partire dall'analizzare la derivata prima della Funzione Prezzo che rappresenta i flussi finanziari futuri attualizzati.

$$P = \sum_{k=1}^{n} FC_k * (1+r)^{-t_k}$$

La derivata prima è data da:

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{k=1}^{n} -t_k * FC_k * (1+r)^{-t_k-1} =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k+1}} =$$
$$= \frac{1}{(1+r)} * \left[-\sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}} \right]$$

Riportando la formula per il calcolo della *Duration* (D):

$$D = \sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{\frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}}}{P}$$

è facile constatare che:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}} = D * P$$

Ne consegue che si può ottenere:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{(1+r)} * (D * P)$$

da cui è possibile pervenire all'espressione finale:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{D}{(1+r)} * dr$$

Nella realtà, tuttavia, la relazione tra rendimento e prezzo è convessa. Utilizzando, per la valutazione, un'approssimazione lineare, si commette un errore di stima tanto più ampio quanto più la variazione nei tassi è pronunciata.

Gli errori di approssimazione sono diversi a seconda della dinamica dei tassi di interesse; nello specifico:

- in presenza di un aumento dei rendimenti, l'uso della MD porta ad una sovrastima dell'effettiva variazione negativa di prezzo ossia ad una sovrastima della riduzione del prezzo

  dr > 0 → Prezzo Stimato < Prezzo Effettivo

- in presenza di una diminuzione dei rendimenti, l'uso della MD porta ad una sottostima dell'effettiva variazione positiva di prezzo ossia ad una sottostima dell'incremento del prezzo

  dr < 0 → Prezzo Stimato > Prezzo Effettivo

Per catturare la non linearità della Funzione Rendimento/Prezzo è quindi opportuno ricorrere al calcolo della derivata seconda della Funzione Prezzo in modo da misurare il grado di curvatura della funzione stessa attraverso l'indicatore della convessità. Sotto questo profilo si ricorre al calcolo differenziale e, in particolare, alla serie di Taylor.
Il differenziale di una funzione è il prodotto della derivata di una funzione per l'incremento arbitrario della variabile indipendente:

$$df\ (x) = f'(x) * \Delta x$$

Dal punto di vista geometrico, esso esprime la variazione dell'ordinata sulla tangente alla curva, quando si passa dal valore dell'ascissa nel punto di contatto (x) al valore $x + \Delta x$. Noti i differenziali, la serie di Taylor permette di ricostruire le variazioni della variabile dipendente, sommando i differenziali di ordine progressivamente crescente:

$$f(x_1) = f(x_o) + \frac{1}{1!} * f'(x_o) * (x_1 - x_o) + \frac{1}{2!} * f''(x_o) * (x_1 - x_o)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^n(x_0) * (x_1 - x_o)^n$$

dove $(x_1 - x_o) = \Delta x$.

Applicando la serie di Taylor alla Funzione Prezzo, si ricava:

$$\Delta P = f(r_1) - f(r_o) = \frac{dP}{dr} * \Delta r + \frac{d'P}{dr} * \frac{\Delta r^2}{2!} + \cdots + \frac{d^{(n-1)}P}{dr} * \frac{\Delta r^n}{n!}$$

Interrompendo la serie al primo termine $\Delta P = \frac{dP}{dr} * \Delta r$, la variazione del prezzo stimata è quella che si ottiene ipotizzando una relazione lineare tra prezzo e rendimento; in questo caso la MD rappresenta l'unico indicatore mediante il quale cogliere la sensibilità del prezzo alle variazioni dei tassi di interesse. Dato che la derivata prima della Funzione Prezzo è pari a:

$$\frac{dP}{dr} = -\sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k+1}}$$

la variazione assoluta del prezzo può essere espressa come:

$$\Delta P = -\sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k+1}} * \Delta r =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}} * \frac{1}{1+r} * \Delta r =$$

$$= -\frac{D * P}{(1+r)} * \Delta r = -MD * P * \Delta r$$

Interrompendo la serie di Taylor al secondo termine, è possibile valutare l'effetto convessità. Pertanto, in termini matematici, mentre con il calcolo della MD si giunge allo sviluppo della serie di Taylor sino al primo ordine, con il calcolo della convessità lo sviluppo si spinge fino al secondo ordine.

In tal caso si ottiene:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr} * \Delta r + \frac{d'P}{dr} * \frac{\Delta r^2}{2!} = -MD * P * \Delta r + \frac{d'P}{dr} * \frac{\Delta r^2}{2!}$$

Questo ulteriore sviluppo richiede il calcolo della derivata seconda della Funzione Prezzo:

$$P = \sum_{k=1}^{n} FC_k * (1+r)^{-t_k}$$

La derivata seconda è:

$$\frac{d'P}{dr} = -\sum_{k=1}^{n} (-t_k - 1) * t_k * FC_k * (1+r)^{(-t_k-2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (t_k + 1) * t_k * \frac{FC_k}{(1+r)^{(t_k+2)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (t_k + t_k^2) * \frac{FC_k}{(1+r)^{(t_k+2)}} =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^2} * \sum_{k=1}^{n} \left(t_k + t_k^2\right) * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}}$$

Evidenziando poi la formula analitica della convessità:

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(t_k + t_k^2\right) * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}}}{P}$$

e moltiplicando entrambi i membri per P, si ottiene:

$$C * P = \sum_{k=1}^{n} \left(t_k + t_k^2\right) * \frac{FC_k}{(1+r)^{t_k}}$$

da cui segue l'espressione:

$$\frac{d'P}{dr} = \frac{1}{(1+r)^2} * (C * P)$$

che, a sua volta, consente di evidenziare l'espressione:

$$\Delta P = -MD * P * \Delta r + \frac{d'P}{dr} * \frac{\Delta r^2}{2!} =$$

$$= -MD * P * \Delta r + \frac{1}{(1+r)^2} * (C * P) * \frac{\Delta r^2}{2!} =$$

$$= P * \left\{(-MD * \Delta r) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2!}\right]\right\}$$

La formulazione finale è:

$$\frac{\Delta P}{P} = -MD * \Delta r + \frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2}$$

Definendo $\Delta P = P_1 - P_0$ e moltiplicando il primo e il secondo membro per P, si ottiene:

$$P_1 - P_0 = P_0 * \left\{(-MD * \Delta r) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2}\right]\right\}$$

$$P_1 = P_0 + P_0 * \left\{(-MD * \Delta r) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2}\right]\right\}$$

Quindi, partendo dal polinomio di Taylor, è possibile studiare l'andamento della funzione e si può notare che:

- con *shift* > 0 → *Prezzo Effettivo* < *Prezzo Stimato MD* + *C*.
- con *shift* < 0 → *Prezzo Effettivo* > *Prezzo Stimato MD* + *C*;

L'asimmetria dell'errore della stima deriva pertanto dal fatto che, mentre il primo addendo $(-DM * \Delta r)$ assume segno negativo per *shift* positivi e segno positivo per *shift* negativi, il secondo $\left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2}\right]$ assume, invece, sempre segno positivo poiché la variazione del tasso è elevata al quadrato.

Di conseguenza, per un determinato *shift* < 0, la stima di variazione di prezzo con *convexity* sarà, in valore assoluto, maggiore di quella per lo stesso *shift* > 0.

Riprendendo l'equazione:

$$P_1 = P_0 + P_0 * \left\{(-MD * \Delta r) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2}\right]\right\}$$

per *shift* < 0 avremmo:

$$\sum_{k=1}^{n} FC_k * [1 + (r - \varDelta r)]^{-t_k} > P_0 + P_0 * \left\{[-MD * (-\varDelta r)] + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{(-\varDelta r)^2}{2}\right]\right\}$$

Considerando il comportamento del primo membro della disuguaglianza (Funzione Prezzo), è possibile notare che, per $\varDelta r$ incognito, la funzione è un'iperbole con asintoto verticale in -1[1]. Considerando invece il comportamento del Secondo membro della disuguaglianza (il polinomio di Taylor della Funzione Prezzo), è possibile notare che, per $\varDelta r$ incognito, la funzione è una parabola. Analiticamente, per far tendere le due funzioni a -1, occorre considerare uno *shift* pari a $\varDelta r = r + 1$.

$$\lim_{\varDelta r \to r+1} \sum_{k=1}^{n} FC_k * [1 + (r - (r+1))]^{-t_k} = +\infty$$

$$\lim_{\varDelta r \to r+1} P_0 + P_0 * \left\{(-MD * (-\varDelta r)) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{(-\varDelta r)^2}{2}\right]\right\} =$$
$$= \lim_{\varDelta r \to r+1} P_0 + P_0 * \left\{(-\frac{D}{(1+r)} * [-(r+1)]) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{[-(r+1)]^2}{2}\right]\right\} =$$
$$= P_0 + P_0 * D + \frac{P_0}{2} * C$$

Quindi, in caso di analisi congiunta delle componenti inclinazione e grado di curvatura, si può ottenere un miglioramento delle stime di variazione del prezzo. L'utilizzo della convessità porta, sia in caso di aumento sia in caso di riduzione dei tassi di rendimento, ad una stima del prezzo superiore a quella ottenuta calcolando il solo effetto pendenza della curva. L'effetto curvatura assume dunque un valore sistematicamente positivo e ciò grazie all'elevamento al quadrato di $\varDelta r$. In definitiva, si può affermare come la convessità contribuisca, da un lato, ad attenuare i ribassi dei prezzi e, dall'altro, ad accentuare i rialzi.

[1] La Funzione Prezzo ha un andamento iperbolico in quanto per un tasso $r = -1$ si ha la distruzione completa del capitale.

Per una migliore illustrazione grafica di quanto sopra esposto, si considerino due fattori moltiplicativi α e β. In particolare:

- α < β per *shift* negativi;
- α > β per *shift* positivi.

Successivamente si moltiplichi il prezzo effettivo per β e la stima del Prezzo DM + C per α.

Tabella 3.31 Tabella Riassuntiva con α e β

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
5									
6		Shift	TRES	Prezzo effettivo	Stima Prezzo DM	Stima prezzo DM+C	Delta DM	Delta C	
7		- 0,020	0,020	109,4269	108,9036	109,4039	0,5233	0,0230	In assenza di coefficienti
8		- 0,010	0,030	104,5797	104,4518	104,5769	0,1279	0,0028	
9		-	0,040	100,0000	100,000	100,0000	0,0000	0,0000	
10		0,010	0,050	95,6705	95,5482	95,6732	0,1223	-0,0027	
11		0,020	0,060	91,5753	91,0964	91,5966	0,4789	-0,0213	
12									
13	Alfa	Beta	TRES	Prezzo effettivo	Stima Prezzo DM	Stima prezzo DM+C	Delta DM	Delta C	
14	0,020	0,040	0,020	113,8040	108,9036	111,5920	4,9004	2,2120	Con coefficienti simmetrici
15	0,003	0,010	0,030	105,6255	104,4518	104,8906	1,1737	0,7349	
16	-	-	0,040	100,0000	100,000	100,0000	0,0000	0,0000	
17	0,003	0,010	0,050	96,6272	95,5482	95,9603	1,0791	0,6670	
18	0,020	0,040	0,060	95,2383	91,0964	93,4285	4,1419	1,8097	
19									
20									
21	Alfa	Beta	TRES	Prezzo effettivo	Stima Prezzo DM	Stima prezzo DM+C	Delta DM	Delta C	
22	0,020	0,040	0,020	113,8040	108,9036	111,5920	4,9004	2,2120	Con coefficienti invertiti
23	0,003	0,010	0,030	105,6255	104,4518	104,8906	1,1737	0,7349	
24	-	-	0,040	100,0000	100,000	100,0000	0,0000	0,0000	
25	0,010	0,003	0,050	95,9575	95,5482	96,6300	0,4094	-0,6724	
26	0,040	0,020	0,060	93,4068	91,0964	95,2605	2,3104	-1,8537	

Figura 3.13 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e delle sue derivate al primo e secondo ordine in assenza di coefficienti

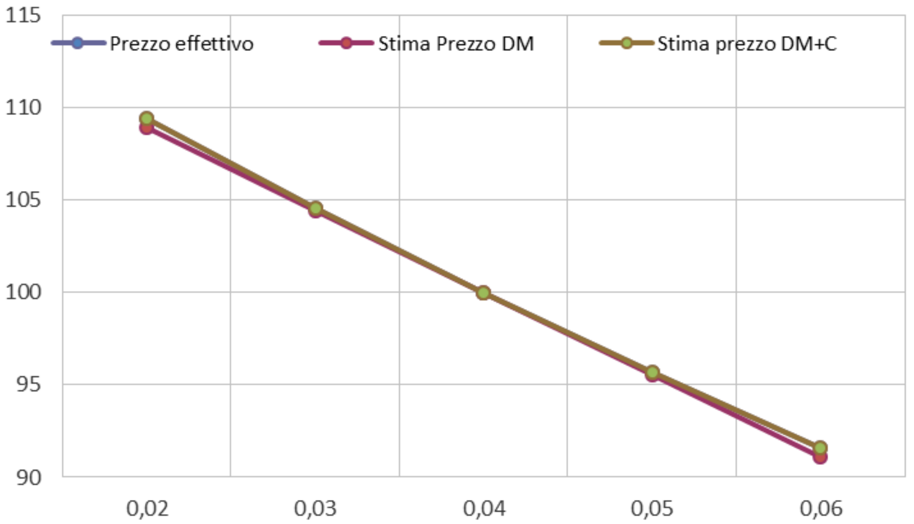


Figura 3.14 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e delle sue derivate al primo e secondo ordine con amplificazione degli effetti per esigenze di rappresentazione (con coefficienti simmetrici)

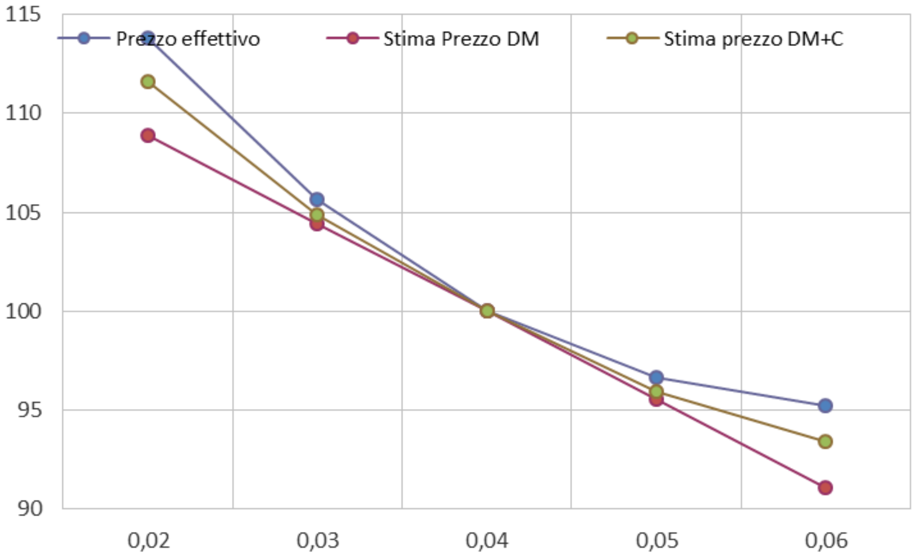
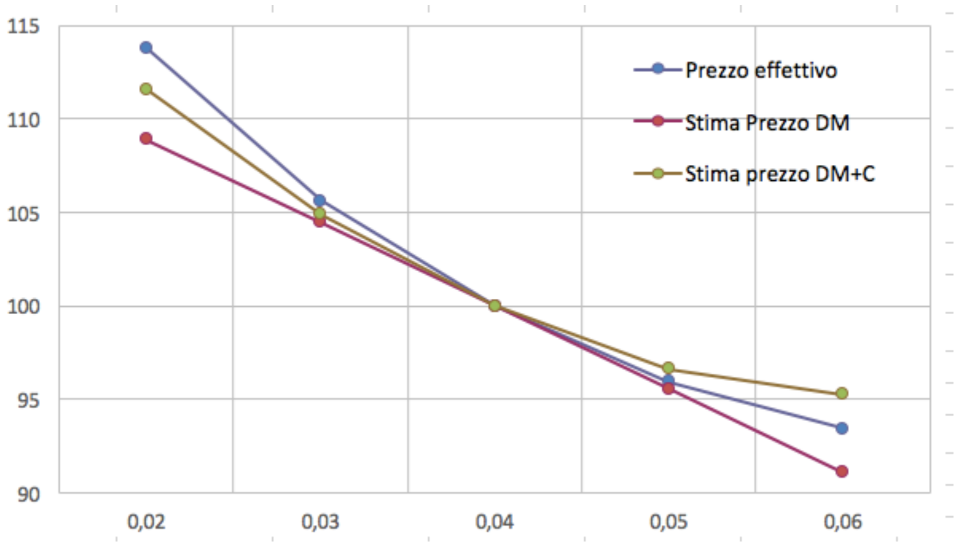


Figura 3.15 Rappresentazione grafica della funzione prezzo rispetto al rendimento e delle sue derivate al primo e secondo ordine con amplificazione degli effetti per esigenze di rappresentazione (con coefficienti invertiti)



Dunque, è possibile affermare che, se la *duration* può essere definita in termini di baricentro finanziario del titolo, cioè il fulcro in corrispondenza del quale si realizza l'equilibrio tra i pesi dei flussi attualizzati, la convessità misura la distribuzione temporale dei flussi intorno al baricentro. In particolare, una maggiore dispersione dei flussi intorno alla *duration* corrisponde a elevati livelli di convessità, mentre una bassa dispersione dei flussi intorno alla *duration* corrisponde a ridotti livelli di convessità.

3.5.1 Approfondimento: il Resto di Lagrange

Un ulteriore metodo per studiare l'andamento della curva al variare dei tassi di interesse è considerare il Resto di Lagrange. Per definirlo, occorre considerare la formula di Taylor con il Resto di Lagrange: dall'analisi precedente è possibile affermare che, approssimando la Funzione Prezzo con il polinomio di Taylor di secondo ordine, si commette un errore; è possibile, allora, andare a "correggere" il presente errore aggiungendo al polinomio di Taylor una determinata quantità, che definiamo "Resto". Più semplicemente, il Resto di Lagrange è una determinazione quantitativa dell'errore che si commette andando ad approssimare una generica funzione con il suo polinomio di Taylor di grado n:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

dove $T_n(x)$ rappresenta il polinomio di Taylor mentre $R_n(x)$ il Resto di Lagrange.

Nel nostro caso, è possibile scrivere:

$$P(r) = T_2(r) + R_2(r) = P_0 + P_0 * \left\{(-MD * \Delta r) + \left[\frac{C}{(1+r)^2} * \frac{\Delta r^2}{2}\right]\right\} + R_2(r)$$

Questa espressione ci permette, allora, di intuire che:

- per $R_2(r) = 0 \ \rightarrow P(r) = T_2(r)$
- per $R_2(r) > 0 \ \rightarrow P(r) > T_2(r)$
- per $R_2(r) < 0 \ \rightarrow P(r) < T_2(r)$

Grazie al Teorema di Lagrange è stato possibile stimare la quantità $R_n(x)$ nel seguente modo:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \times (x - x_0)^{(n+1)}$$

Pertanto

$$R_2(r) = \frac{P^{(2+1)}(c)}{(2+1)!} \times (r - r_0)^{(r+1)} = \frac{P^{(3)}(c)}{3!} \times (r - r_0)^3$$

dove "c" è un numero compreso nell'intervallo: $(x\ ;\ x_0)$ se $x < x_0$ o $(x_0\ ; x)$ se $x > x_0$ [naturalmente, nel nostro caso, gli intervalli saranno $(r\ ;\ r_0)$ se $r < r_0$ e $(r_0\ ; r)$ se $r > r_0$]. Nello specifico, quello che interessa, è andare a vedere per quali valori di r la Funzione Prezzo $P(r)$ sia maggiore, uguale o inferiore alla sua approssimazione data dal polinomio di Taylor di secondo grado $T_2(r)$ andando a studiare il segno della funzione $R_2(r)$.

Per farlo occorre: 1) calcolare la derivata terza della Funzione Prezzo (in quanto significativa la determinazione del valore di $R_2(r)$) e studiarne il segno; 2) studiare il segno della funzione $R_2(r)$.

1) La derivata terza della Funzione Prezzo, $P^{(3)}$ è data da:

$$\frac{d^3P}{dr^3} = -\frac{\sum_{t_k=1}^{n} t_k(t_k+1)(t_k+2)(1+r)^{-t_k}}{(1+r)^3}$$

che, calcolata nel punto c, è pari a:

$$\frac{d^3P}{dc^3} = -\frac{\sum_{t_k=1}^{n} t_k(t_k+1)(t_k+2)(1+c)^{-t_k}}{(1+c)^3}$$

Queste funzioni sono negative per ogni c assunto; infatti r può variare in un intervallo (-1;+∞).

Pertanto, se ponessimo per semplicità $Z = \frac{\sum_{t_k=1}^{n} t_k(t_k+1)(t_k+2)(1+r)^{-t_k}}{(1+r)^3}$, questa quantità risulterebbe sempre positiva per ogni r e -Z sarebbe sempre negativa; essendo c un punto compreso tra r e r_0, avrà lo stesso insieme di definizione di r e si può giungere alla stessa conclusione se considerassimo c come variabile.

2) Si procede ora allo studio del segno di

$$R_2(r) = \frac{P^{(3)}(c)}{3!} \times (r - r_0)^3$$

- per *shift* positivi → $\Delta r > 0 \rightarrow R_2(r) < 0$

  Ciò significa che $P(r) < T_2(r)$

- per *shift* negativi → $\Delta r < 0 \rightarrow R_2(r) > 0$

  Ciò significa che $P(r) > T_2(r)$

- Se non vi è uno *shift* , ossia $\Delta r = 0$, le funzioni coincidono $P(r) = T_2(r)$

Graficamente è possibile visualizzare che: nel punto r_0 le curve (Funzione Prezzo e funzione di approssimazione con *convexity*) si intersecano; per $r > r_0$ (ossia $\Delta r > 0$) la Funzione Prezzo si posizionerà al di sotto della Funzione Prezzo approssimata con DM+C; per $r < r_0$ (ossia $\Delta r < 0$) la Funzione Prezzo si posizionerà al di sopra della Funzione Prezzo approssimata con DM+C.

3.5.2 EffeDiX: un approfondimento grafico

Per affinare ulteriormente l'analisi grafica delle funzioni di cui si tratta è possibile utilizzare il calcolatore EffeDiX, gratuitamente scaricabile online per l'ambiente windows, oppure Grapher disponibile nell'ambiente MacOS. Le sue funzionalità consentono di studiare le curve di stima del prezzo in maniera 'continua', potendo estrapolare da esse qualsiasi informazione con un elevato livello di precisione.

Sostituendo i dati del problema nelle funzioni (1) , (2) e (3) si ottiene:

$$P = \frac{4}{(1+r)} + \frac{4}{(1+r)^2} + \frac{4}{(1+r)^3} + \frac{4}{(1+r)^4} + \frac{104}{(1+r)^5} \qquad (1)$$

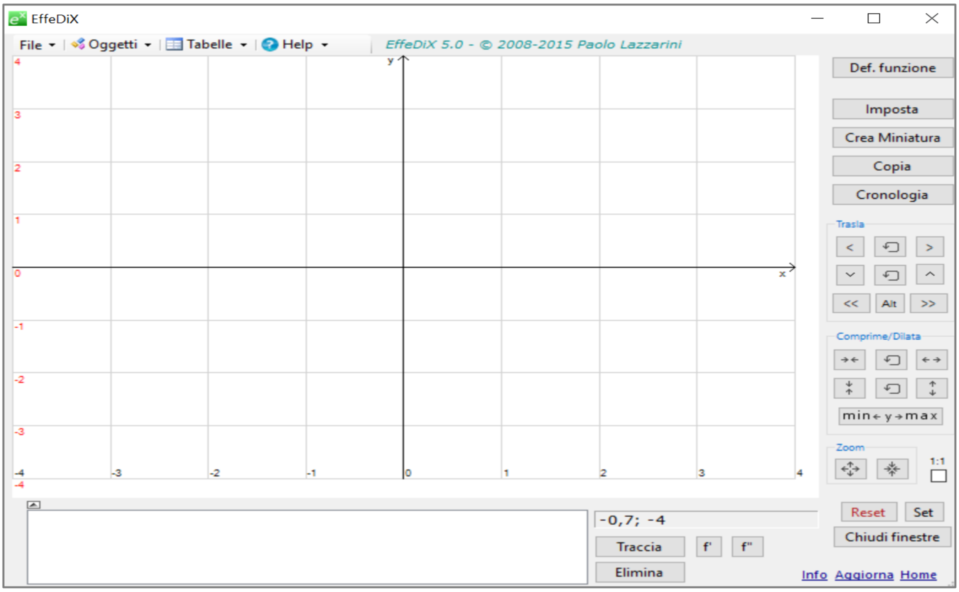
$$P_1 = 100 - 4{,}4518 * 100\,(r - 0{,}04) \qquad (2)$$

$$P_1 = 100 - 4{,}4518 * 100\,(r - 0{,}04) + 100 \cdot \frac{27{,}0535}{(1+0{,}04)^2} \cdot \frac{(r-0{,}04)^2}{2} \qquad (3)$$

Nelle ultime due equazioni si è utilizzato uno *shift* $\Delta r = r - 0{,}04$: in tal caso 0,04 rappresenta semplicemente il TRES iniziale del titolo oggetto d'analisi ed r il tasso di interesse successivo allo *shift*.

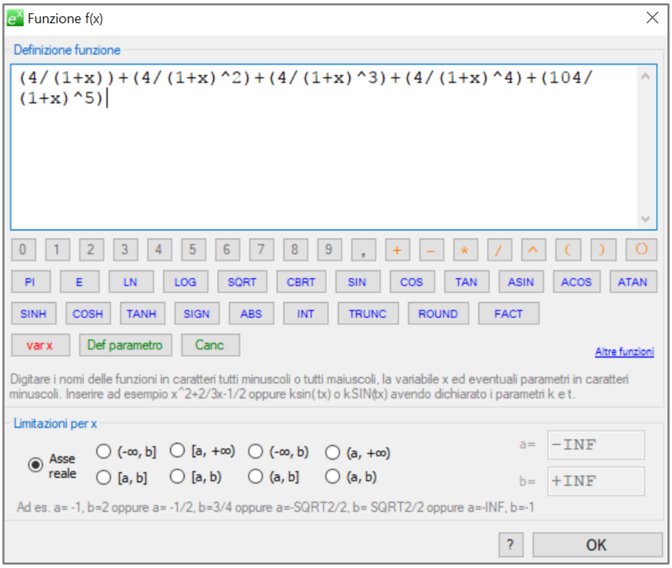
In questo modo, non alterando in nessuna maniera la validità delle formule, si è in grado di utilizzare la stessa variabile (r) in tutti e tre i casi: solo attraverso tale accorgimento è infatti possibile ottenere dei grafici corretti rappresentati sullo stesso piano di riferimento. Con riferimento alla versione 5.0 di EffeDiX si procede come segue.

Figura 3.16 Schermata EffeDiX



Utilizzando *"Def.funzione"* si procede con la scrittura delle funzioni facendo attenzione a scegliere x come variabile indipendente, l'unica riconosciuta dal programma: in EffeDiX questa andrà semplicemente a sostituire la notazione fin ora utilizzata per il tasso di interesse (r).

Figura 3.17 Inserimento funzione



La funzione in questione, una volta premuto *'OK'*, verrà riportata nel menù situato nella parte inferiore della schermata e solo utilizzando *'Traccia'* verrà effettivamente disegnata.

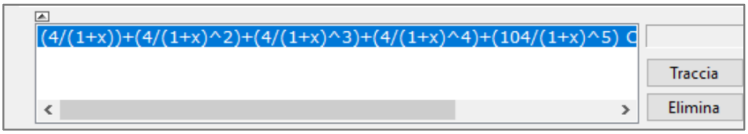
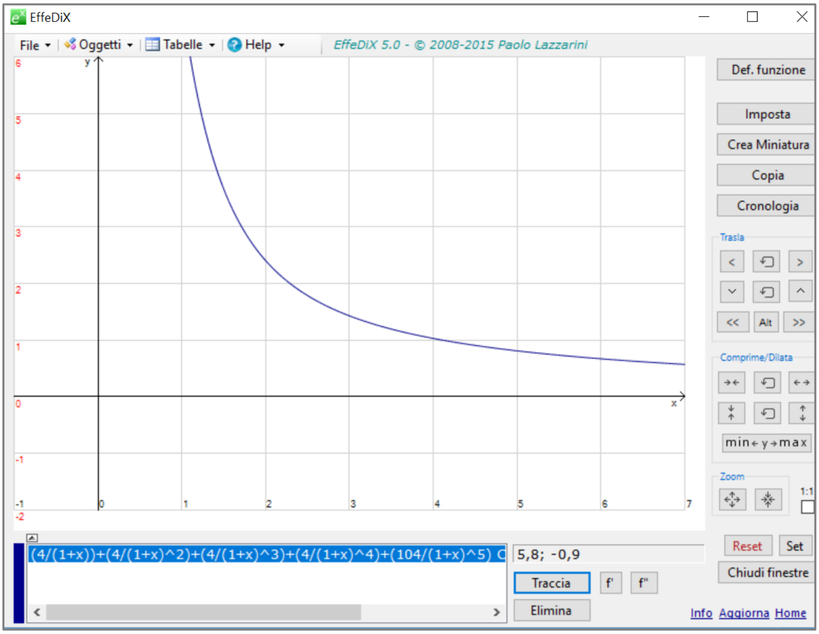


Figura 3.18 Grafico funzione prezzo

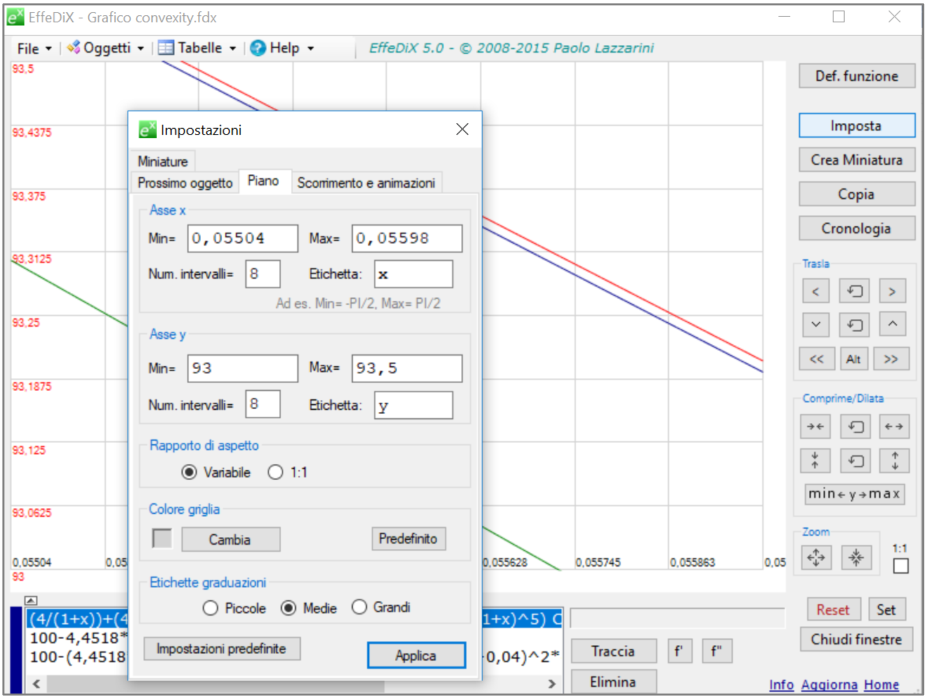


Gli stessi passaggi dovranno poi essere ripetuti per ottenere un grafico comprensivo di tutte le funzioni. Per impostare il colore della curva sarà sufficiente selezionare la funzione nel riquadro inferiore e scegliere "colore oggetto". Nell'esemplificazione in questione in ***blu*** è rappresentata la curva del prezzo effettivo (funzione 1), in ***verde*** la curva di stima del prezzo che utilizza la *duration modified* (funzione 2) ed in ***rosso*** la curva di stima del prezzo che utilizza la *convexity* (funzione 3).

Figura 3.19 Rappresentazione grafica delle tre funzioni

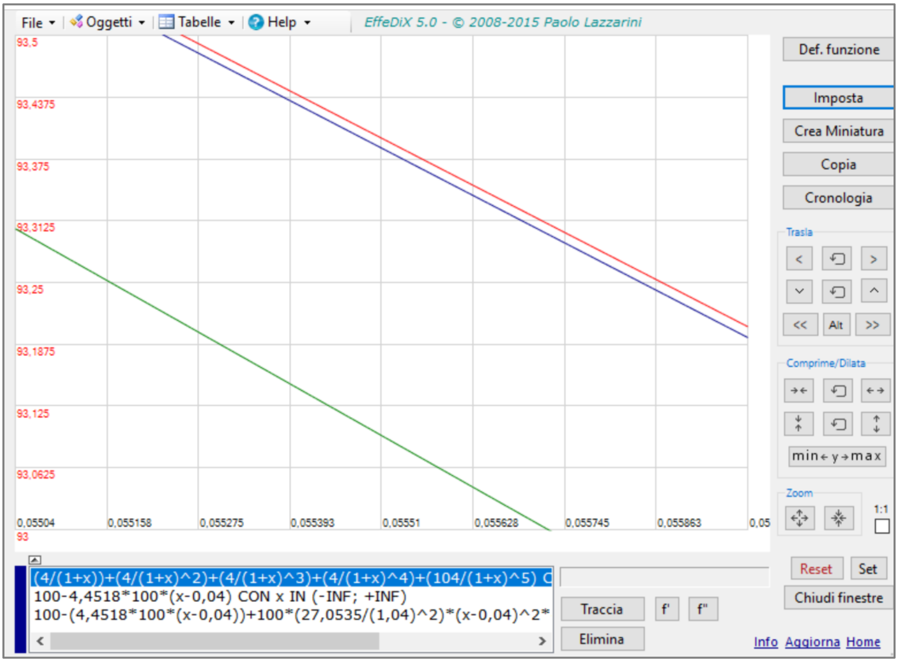
EffeDiX , come già anticipato, consente uno studio puntuale delle tre funzioni. Per poter attuare ciò è sufficiente utilizzare la funzione "Imposta" presente nel menù:

Figura 3.20 Dettaglio



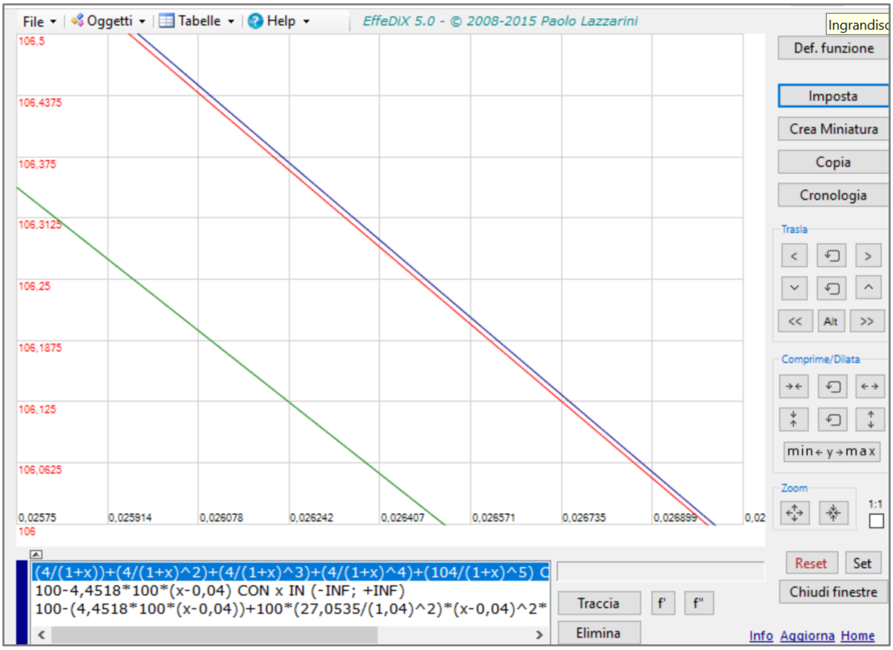
Settando dei parametri di minimo e di massimo per i valori sull'asse Y (prezzi) e sull'asse X (tassi di interesse) sarà possibile analizzare nel dettaglio l'andamento congiunto delle tre funzioni, astraendo le conclusioni del caso con riferimento all'accuratezza delle diverse stime. Nell'esempio qui riportato si analizza l'andamento delle curve in un intervallo di tassi di interesse che va dal 5,504% al 5,598%: considerando un TRES iniziale del 4% trattiamo quindi uno *shift* tra l'1,504% e l'1,598%.

Figura 3.21 Dettaglio



Ciò che si può agevolmente notare è che, anche per variazioni contenute dei tassi di interesse, la stima di prezzo ottenuta grazie alla *duration modified* tende ad essere molto imprecisa rispetto a quanto ottenuto grazie alla *convexity*: quest'ultima stima tende infatti a fornire un'approssimazione del prezzo praticamente coincidente con il prezzo stesso. La stessa analisi può effettuarsi per variazioni negative dei tassi di interesse.

Figura 3.22 Dettaglio



In tal caso si osserva l'andamento delle tre curve per valori del tasso di interesse compresi tra il 2,575% e il 2,7%, cui corrispondono delle variazioni tra -1,425% e -1,3% rispetto al TRES iniziale. Anche in tal caso si ottengono dei valori di prezzo effettivo e di prezzo stimato attraverso la *Convexity* quasi coincidenti: al contrario, nuovamente, la stima di prezzo ottenuta utilizzando la *Modified Duration* presenta un errore non trascurabile.