Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

по разделам высшей математики
«Линейная алгебра»
и «Аналитическая геометрия»
для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Минск 2004

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73
К 65

Составители:
О.А. Феденя, Ж.А. Черняк, Т.С. Степанова

К 65 **Контрольные** работы по разделам высшей математики «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия» для студентов всех специальностей БГУИР дневной формы обучения / Сост. О.А. Феденя, Ж.А. Черняк, Т.С. Степанова. – Мн.: БГУИР, 2004. – 58 с.
ISBN 985-444-631-X

Данное издание содержит контрольные работы по курсу «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», который излагается студентам БГУИР в первом семестре. Может быть использовано для проведения контрольных работ на практических занятиях, для промежуточных экзаменов, коллоквиумов, итоговых контрольных работ по отдельным разделам.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

ISBN 985-444-631-X

Содержание

Контрольная работа
«Векторная алгебра»

Вариант 1

1. Разложить вектор $\overline{c}(1,-7)$ по базису $\overline{a}(4,-2)$ и $\overline{b}(3,5)$.

2. Вычислить работу силы $\overline{F}(3,-2,-5)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2,-3,5)$ в положение $B(3,-2,-1)$.

3. Найти единичный вектор, перпендикулярный одновременно оси абсцисс и вектору $\overline{a}(3,6,8)$.

4. Для каких векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектор $\overline{a}+\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}-\overline{b}$?

5. Может ли вектор $\overline{x}$ образовывать с осями координат углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

Вариант 2

1. Разложить вектор $\overline{c}(19,8)$ по базису $\overline{a}(5,4)$ и $\overline{b}(-3,0)$.

2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$. Вычислить угол между векторами $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$.

3. $\overline{a}(3,-1,-2), \overline{b}(1,2,-1)$. Найти координаты вектора $[2\overline{a}+\overline{b},\ \overline{b}]$.

4. Для каких векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется условие $\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$?

5. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Найти угол с осью Oy.

Вариант 3

1. Разложить вектор $\overline{c}(9,-3)$ по базису $\overline{a}(-6,2)$ и $\overline{b}(4,7)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$. При каком значении α векторы $\overline{a}+\alpha\overline{b}$, $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}(8,4,1)$ и $\overline{b}(2,-2,1)$.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие $\bar{a} = |\bar{a}|\bar{b}$?

5. На оси Ох найти точку *M*, расстояние которой до точки $N(2,-3)$ равно 5.

Вариант 4

1. Разложить вектор $\bar{d}(4,12,-3)$ по базису $\bar{a}(2,3,1)$, $\bar{b}(5,7,0)$, $\bar{c}(3,-2,4)$.

2. Дано: $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$; $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=1$, $|\bar{c}|=4$. Вычислить $\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}$.

3.Вектор $\bar{m}$, перпендикулярный оси аппликат и вектору $\bar{a}=8\bar{i}-15\bar{j}+3\bar{k}$, образует острый угол с осью абсцисс. Зная, что $|\bar{m}|=51$, найти его координаты.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$?

5. Может ли вектор из R^3 составлять с координатными осями следующие углы: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$?

Вариант 5

1. Разложить вектор $\bar{d}(25,-22,16)$ по базису $\bar{a}(5,-2,0)$, $\bar{b}(0,-3,4)$, $\bar{c}(-6,0,1)$.

2. Известно, что вектор $\bar{a}+3\bar{b}$ ортогонален вектору $7\bar{a}-5\bar{b}$; вектор $\bar{a}-4\bar{b}$ ортогонален вектору $7\bar{a}-2\bar{b}$. Найти $(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})$.

3. Вычислить объем тетраэдра *ABCD,* если $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ верно равенство $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|-|\bar{b}|$?

5. На оси Оу найти точку *P* такую, чтобы $\angle MPN = 90^\circ$, если известно, что $M(2,2)$, $N(5,-2)$.

Вариант 6

1. Разложить вектор $\bar{d}(0,20,18)$ по базису $\bar{a}(3,5,6)$, $\bar{b}(2,-7,1)$, $\bar{c}(12,0,6)$.

2. Доказать, что вектор $\bar{d}=\bar{b}-\bar{a}(\bar{a},\bar{b})/|\bar{a}|^2$ ортогонален вектору $\bar{a}$.

3. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$. За основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие: $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$?

5. Вектор $\bar{a} \in R^3$ составляет с осью Ох угол $\alpha = 60^\circ$, с осью Оу угол $\beta = 120^\circ$. Найти его координаты, если $|\bar{a}| = 2$.

Вариант 7

1. $\bar{c} = 16\bar{i} - 15\bar{j} + 12\bar{k}$. Определить разложение по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ вектора $\bar{d}$, противоположно направленного вектору $\bar{c}$, при условии, что $|\bar{d}| = 75$.

2. Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

3.Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, удовлетворяющие условию: $[\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{b}, \bar{c}] + [\bar{c}, \bar{a}] = \bar{0}$, компланарны.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие: $|\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$?

5. Может ли вектор составлять с осями координат углы: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$?

Вариант 8

1. Два вектора приложены к одной точке: $\bar{a}(2, -3, 6)$ и $\bar{b}(-1, 2, -2)$. Определить координаты вектора $\bar{c}$, направленного по биссектрисе угла между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{c}| = 3\sqrt{42}$.

2. Сила $\bar{R}\,(1, -8, -7)$ разложена по трем взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором $\bar{a}\,(2, 2, 1)$. Найти составляющую силы $\bar{R}$ в направлении вектора $\bar{a}$.

3. Доказать, что $|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| \le |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|$. В каком случае имеет место равенство?

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$?

5. Может ли вектор составлять с осями координат углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

Вариант 9

1. Вершины четырехугольника заданы радиусами-векторами A: $\bar{r}_1 = 5\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$; B: $\bar{r}_2 = \bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$; C: $\bar{r}_3 = -2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$; D: $\bar{r}_4 = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}$. Найти радиусы-векторы вершин, если начало координат перенесено в точку C.

2. $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$, $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$. Вычислить $(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{c}) + (\bar{c}, \bar{a})$.

3. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найти координаты четвертой вершины, если известно, что она лежит на оси Оу.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется условие: $\bar{a} + |\bar{b}|\bar{b} = \bar{0}$?

5. Может ли вектор составлять с координатными осями углы: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

Вариант 10

1. Проверить, служат ли точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ вершинами трапеции.

2. Даны два вектора: $\bar{a}(3,-1,5)$, $\bar{b}(1,2,-3)$. Найти вектор $\bar{x}$, если он ортогонален оси *Oz* и $(\bar{x}, \bar{a}) = 9$, $(\bar{x}, \bar{b}) = -4$.

3. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overline{AB}(0,1,-1)$, $\overline{AC}(2,-1,4)$ определяют основание, а вектор $\overline{AA'}(-3,2,2)$ направлен по боковому ребру. Найти объем и высоту призмы.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вектор $\bar{a} + \bar{b}$ делит угол $\widehat{\bar{a}, \bar{b}}$ пополам?

5. Определить координаты точки *M*, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

Вариант 11

1. $\overline{AB}(2,6,-4)$ и $\overline{AC}(4,2,-2)$ – стороны ΔABC. Определить координаты медиан $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$.

2. Найти проекцию вектора $\bar{S}(4,-3,2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

3. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\bar{a}(2,-3,1)$ и $\bar{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\bar{x}(\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) = 10$.

4. Для каких $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вектор $\bar{a}+\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{a}-\bar{b}$?

5. Доказать, что вектор $\bar{p}=\bar{b}\,(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}\,(\bar{a},\bar{b})$ перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

Вариант 12

1. Определить в пространстве координаты точки *M*, если известно, что ее радиус-вектор составляет с осями координат равные углы и его модуль равен 3.

2. Даны три вектора: $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+5\bar{j}$, $\bar{c}=4\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$. Вычислить $пр_{\bar{c}}(3\bar{a}-2\bar{b})$.

3. Пусть $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$ – вершины ΔABC. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины *B*.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ справедливо неравенство: $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|>\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$?

5. Доказать, что вектор $\bar{p}=\bar{b}-\dfrac{\bar{a}\,(\bar{a},\bar{b})}{\bar{a}^2}$ перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

Вариант 13

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$. Найти четвертую вершину *D* и угол между $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

2. $(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})=45^\circ$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $\left|\bar{a}\right|=\left|\bar{b}\right|=5$.

3. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

4. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ справедливо неравенство: $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|<\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$?

5. Даны три вектора: $\bar{a}=-2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+5\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=4\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$. Вычислить $пр_{\bar{c}}(3\bar{a}-2\bar{b})$.

Контрольная работа
«Аналитическая геометрия»

Вариант 1

1. Найти уравнение перпендикуляра, восстановленного в середине отрезка, соединяющего точки $A(-3,1)$ и $B(1,2)$.

2. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x-5y+1=0$, а боковой стороной – прямая $12x-y-23=0$. Составить уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку (3, 1).

3. Доказать, что прямая $2x-3y+6=0$ не пересекает отрезка, ограниченного точками $M_1(-2,-3)$ и $M_2(1,-2)$.

4. Составить уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $2x-y+3z-1=0$ и $3x-2y-z+5=0$.

5. Доказать, что прямые L_1 и L_2 принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости:

$$L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}, \qquad L_2: \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}.$$

Вариант 2

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5,-1)$ параллельно прямой, отсекающей на положительных полуосях OX и OY отрезки, равные 2 и 3 соответственно.

2. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке (2, 6), его основанием служит прямая $2x+3y=0$, тангенс угла при основании равен $3/2$. Составить уравнение боковых сторон треугольника.

3. Составить уравнение биссектрисы угла, образованного прямыми $x+3y-7=0$ и $2x-6y+15=0$, внутри которого находится точка $M(1,\ 1)$.

4. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+2y-2z+7=0$ и удаленной от точки $A(4,\ 3,-2)$ на расстояние $d=7$.

5. Определить угол между прямой $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точки $A(2,3,-1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,-2,1)$.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC: $A(-2, 1)$, $B(1,-1)$, $C(2, 3)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

2. Составить уравнения сторон квадрата, зная, что точка $A(3,-1)$ является его вершиной и одна из диагоналей лежит на прямой $5x - y - 3 = 0$.

3. Параллельно прямым $2x - 3y + 5 = 0$ и $2x - 3y - 19 = 0$ провести прямую так, чтобы расстояние от нее до первой прямой было в 5 раз меньше расстояния до второй прямой.

4. Составить уравнение плоскости, зная, что точка $A(-1, 2, 1)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

5. Найти проекцию точки $P(1,2,-3)$ на плоскость $6x - y + 3z - 41 = 0$.

Вариант 4

1. Найти координаты точки, симметричной точке $M(10, 10)$, относительно прямой $3x + 4y - 20 = 0$.

2. Через точку пересечения прямых $5x + 6y - 4 = 0$ и $7x - 3y + 2 = 0$ провести прямую так, чтобы она делила отрезок между точками $A(-1,1)$ и $B(7,9)$ в отношении 3 : 5.

3. Найти касательные к окружности с центром (1, 1) и радиусом 3, параллельные прямой $5x - 12y + 2 = 0$.

4. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между плоскостями $4x + y - 2z - 3 = 0$ и $x - 2y + 4z - 1 = 0$, в котором лежит точка $A(3,-1, 2)$.

5. Доказать, что прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимися. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_2 параллельно L_1:

$$L_1: \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}, \qquad L_2: \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Вариант 5

1. Даны вершины треугольника $A(1,-2)$, $B(5, 4)$ и $C(-2, 0)$. Составить уравнение биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

2. Даны две смежные вершины квадрата $A(0, 3)$ и $B(4, 0)$. Составьте уравнение его сторон.

3. Составить уравнение прямой, параллельной данной прямой $4x+3y-15=0$ и отстоящей от нее на расстоянии $d=2$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$ и $D(0, -7, 8)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ребро *AB* и середину ребра *CD*.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 1, -3)$ и прямую $\begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x+2y+3=0. \end{cases}$

Вариант 6

1. Даны уравнения: $2x-3y+6=0$ – стороны *AB* треугольника *ABC*, $2x+y=2$ – высоты *AD*, $x+3y=12$ – высоты *BE*. Составьте уравнения двух других сторон треугольника *ABC*.

2. Через точку пересечения прямых $9x-2y-5=0$ и $8x+3y-14=0$ провести прямую, образующую угол $\varphi=45^\circ$ с прямой $3x-7y+5=0$.

3. Между прямыми $x-2y+5=0$ и $2x-4y+7=0$ провести параллельную им прямую так, чтобы расстояние от нее до первой прямой было в два раза больше расстояния до второй прямой.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *OY* и образующей с плоскостью $2x-\sqrt{5}y+z-4=0$ угол 60°.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 3, -2)$ и линию пересечения плоскостей $x+y-z-2=0$ и $2x-3y+z-7=0$.

Вариант 7

1. Через точку пересечения прямых $3x-8y+6=0$ и $3x+y-9=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $7x+8y+2=0$.

2. Луч света, направленный по прямой $3x-y+5=0$, отражается от прямой $x+y-1=0$ и проходит затем через точку (2, 3). Составить уравнение отраженного луча и найти косинус угла φ между падающим и отраженным лучами.

3. Отклонения точки M от прямых $5x-12y-13=0$ и $3x-4y-19=0$ равны соответственно –3 и –5. Найдите координаты точки M.

4. Вычислить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $x=3u+3v,\quad y=-2+4u,\quad z=1+u-v$.

5. Доказать, что прямая $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$ и плоскость $2x+y+4z-3=0$ пересекаются. Найти точку их пересечения и угол между ними.

Вариант 8

1. Даны две вершины треугольника $A(-5,2)$, $B(3,-2)$ и точка $H(2,2)$ пересечения его высот. Найдите координаты третьей вершины С.

2. Найти значения a, при которых прямая $3x+ay-4=0$ образует с прямой $2x-y-1=0$ угол 45°.

3. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми $2x-y+3=0$ и $x-2y-5=0$.

4. Составить уравнение плоскости П, параллельной плоскости, проходящей через точки $M_1(1,1,2)$, $M_2(0,-1,2)$, $M_3(3,3,3)$ и удаленной от точки $A(4,1,2)$ на расстояние $d=2$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=1$, $y=2t,\quad z=t-1$ перпендикулярно к плоскости $x+y-z+1=0$.

Вариант 9

1. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(3,-2)$, $B(1,2)$, $C(5,6)$.

2. Зная уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $4x-y+5=0$, $x+4y-3=0$, найдите уравнение его третьей стороны при условии, что она проходит через точку $A(3,2)$.

3. Между прямыми $2x+3y+3=0\,(L_1)$ и $2x+3y-11=0\,(L_2)$ провести параллельную им прямую так, чтобы она делила расстояние между L_1 и L_2 в отношении 2 : 5 (считая от L_1).

4. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M(4,-6,\ 5)$ и параллельной плоскости, проходящей через точки $A(3,-2,\ 2)$, $B(-3,\ 1,\ 2)$ и $C(-1,\ 2,\ 1)$.

5. Найти точку, симметричную точке $P(4,-5,4)$ относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z=0, \\ y=0. \end{cases}$

Вариант 10

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ 2)$ так, что середина ее отрезка, заключенного между параллельными прямыми $2x+y+5=0$ и $2x+y-1=0$, лежит на прямой $x-3y+15=0$.

2. Составьте уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x-y+2=0$ и координаты одной вершины $(5,-2)$.

3. Доказать, что прямая $x-3y+4=0$ пересекает отрезок *AB*, где *A*(4, 1), *B*(–1, 6), и найти отношение, в котором она делит этот отрезок (считая от точки *A*).

4. Найти уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях равные отрезки и образующей с координатными плоскостями пирамиду, объем которой равен $4/3$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{4}.$$

Вариант 11

1. Найти координаты точки *N* пересечения высоты *CH* и медианы *AM* треугольника *ABC* с вершинами $A(4,-3)$, $B(7,\ 3)$, $C(1,10)$.

2. Центр симметрии квадрата находится в точке $P(-1,\ 0)$, уравнение одной из его сторон $x+3y-5=0$. Составьте уравнения трех других сторон.

3. Составьте уравнение биссектрисы угла между прямыми $2x-3y-5=0$ и $6x-4y+7=0$, смежного с углом, содержащим точку $M(2,-1)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,\ 0,-2)$, $M_2(3,\ 0,\ 0)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии 2.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=-5+4t$, $y=2+7t$, $z=1+2t$ параллельно прямой $x=t$, $y=1-2t$, $z=-3t$.

Вариант 12

1. Даны вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(3,1)$ и $C(11,1)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

2. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y+3=0$ под углом 45°.

3. На расстоянии $\rho=3\sqrt{2}$ от точки M (3, 5) провести прямую, отсекающую равные положительные величины на осях координат.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1,-1,2)$ параллельно вектору $\overline{a}\,(3,1,-2)$ и перпендикулярно плоскости $x-2y+4z-5=0$.

5. Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра к прямым $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ и $\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Вариант 13

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ 4)$ и образующей с осями координат треугольник, расположенный в четвертой четверти, площадь которого равна 2 кв.ед.

2. Световой луч, падая из точки с координатами (–1, 3) и отражаясь от прямой $y=x$, проходит затем через точку (1, 5). Составить уравнения падающего и отраженного лучей.

3. Отклонения точки M от прямых $12x+5y-3=0$ и $6x+8y-11=0$ равны соответственно 1 и –2,5. Найдите координаты точки M.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(6,-7,\ 5)$ и ось OX.

5. Через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$, и прямой $\begin{cases} y=1, \\ z+1=0 \end{cases}$ провести прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную данной прямой.

Вариант 14

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(8, 9)$, длина отрезка которой между прямыми $x - 2y + 5 = 0$ и $x - 2y = 0$ равна 5.

2. Луч света направлен по прямой $2x + y - 6 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y - 4 = 0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

3. На расстоянии $\rho = \sqrt{10}/2$ от точки M (–1, 2) провести прямую, отсекающую на положительной полуоси OX отрезок в три раза меньший, чем на положительной полуоси $OУ$.

4. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $A(2, 1, -3)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 2y + z - 5 = 0$ и $x + 4y - 2z + 3 = 0$.

5. Доказать, что прямые $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z = 8 \end{cases}$ параллельны. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

Вариант 15

1. Даны уравнения двух сторон треугольника $3x - 2y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ и уравнение одной из его медиан $2x - y - 1 = 0$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

2. На осях координат найти точки, равноудаленные от прямых $5x - y + 6 = 0$, $5x + y - 3 = 0$.

3. Составить нормальное уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $3x + y + 13 = 0$ и проходящей через точку $M(-4, 1)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -3, 1)$ и $M_2(-1, 6, -2)$ и отсекающей на осях Y и Z отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

5. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, -4, 1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x + 3y - 4z + 11 = 0$ и $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

Контрольная работа
«Матрицы, определители, системы линейных уравнений»

Вариант 1

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, где n – порядок матрицы A.

Вариант 2

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

2. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $Ч\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$.

Вариант 3

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Ч = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Вариант 4

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{Ч} = \text{Ч} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Вариант 5

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5u = 2, \\ 2x + y + 4z + u = -3, \\ 3x - 3y + 8z - 2u = -1, \\ 2x - 2y + 5z - 12u = 4. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $\text{Ч} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.

Вариант 6

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. Решить однородную систему : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix} = Ч \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Вариант 7

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} Ч = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$.

Вариант 8

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

2. Решить однородную систему : $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить $\left|Б^2\right|$, если $Б = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Найти матрицу X из уравнения: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = Ч \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Вариант 9

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

2. Решить однородную систему : $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ -4x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 5x_5 = 0, \\ -6x_1 - x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\left|Б^T Б\right|$, где $|Б| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу *X* из уравнения: $Ч\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $\left|Б^5\right| = |Б|^5$.

Вариант 10

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

2. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\left|ББ^T\right|$, где $|Б| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Найти матрицу *X* из уравнения: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = Ч\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $|\lambda Б| = \lambda |Б|$.

Вариант 11

1. Пусть $A^m = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{m-1}$, если *A* – квадратная матрица, *E* – единичная матрица такого же порядка, что и *A*.

2. Решить однородную систему : $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 6, \\ 7x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 14. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\left| Б^2 \right|$, если $\left| Б \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение: $Ч \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(AB)^2 = A^2 B^2$, где A и B согласованы.

Вариант 12

1. При каком λ СЛАУ имеет решение: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

3. Вычислить определитель Δ при помощи умножения его на определитель δ, где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$, $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot Ч \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

5. Доказать, что если A, B, C – квадратные матрицы и $AB = E$, $AC = E$, то $B = C$.

Вариант 13

1. Пусть $A^2 + A + E = 0$. Доказать, что A невырождена, и найти A^{-1}.

2. Решить СЛАУ при всевозможных значениях параметра t :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = t, \\ tx_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

3. Вычислить квадрат определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение: $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} Ч = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Матрицы A и B перестановочны. Доказать, что A^{-1} и B^{-1} тоже перестановочны.

Вариант 14

1. Найти X из уравнения: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Ч = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Решить однородную систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $|\,Б\,|$ при помощи умножения его на $|\,B\,|$, где

$$|\,Б\,| = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad |\,B\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Найти значение многочлена от матрицы : $f(x) = x^2 + 5x - 2$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Доказать или опровергнуть: $|A + B| = |A| + |B|$.

Вариант 15

1. Найти *X* из уравнения: $Ч \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ +x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\left| ББ^T \right|$, если $Б = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Пусть *А*, *В* – квадратные матрицы. $З = \begin{bmatrix} Б & 0 \\ 0 & В \end{bmatrix}$ – блочно-диагональная матрица. Доказать, что $|З| = |Б| \cdot |В|$.

Вариант 16

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 10 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

5. Доказать или опровергнуть: $|A-B| = |A| - |B|$.

Вариант 17

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$.

5. Доказать или опровергнуть: $(AB)^3 = A^3 B^3$.

Вариант 18

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \qquad = -10, \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 \qquad = 1. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

5. Для каких матриц A определена матрица $A + A^T$?

Вариант 19

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

2. Решить однородную систему: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить уравнение : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, \quad k \ge 2,\ k \in N$.

Вариант 20

1. Решить СЛАУ методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ найти все перестановочные с ней квадратные матрицы.

5. Доказать или опровергнуть: $(ABC)^T = A^T B^T C^T$.

Вариант 21

1. Решить СЛАУ по формулам Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 2. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

4. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ найти все перестановочные с ней квадратные матрицы.

5. Как изменится определитель, если поменять местами его первый и последний столбцы?

Вариант 22

1. Решить СЛАУ по формулам Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = (x^2 - 1)^{-1} - (x^2 + 1)^{-1}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Чему равен определитель $\left|Б^9\right|$, если $|Б| = -2$?

Вариант 23

1. Решить СЛАУ по формулам Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Как изменится определитель матрицы A, если в матрице A поменять местами первую и последнюю строки?

Вариант 24

1. Решить СЛАУ по формулам Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

2. Решить однородную систему: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Вариант 25

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2$.

5. Доказать или опровергнуть: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Вариант 26

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 16. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ 5x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 7x_4 = -12. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить $A \cdot B \cdot C$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A + B)^T = B^T - A^T$.

Вариант 27

1. Решить СЛАУ по формулам Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

2. Решить однородную систему: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(\alpha \cdot A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.

Вариант 28

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

4. Для матриц A и B найти $(A + 3B)^2$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $|-A| = -|A|$.

Вариант 29

1. Решить СЛАУ по формулам Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 \qquad - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(-A)^{-1} = A^{-1}$.

Вариант 30

1. Решить СЛАУ матричным методом: $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2, \\ -x_1 + 6x_2 \qquad = -7, \\ 10x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 6. \end{cases}$

2. Решить СЛАУ методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить $AB - BA$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Доказать или опровергнуть: $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^1$.

Контрольная работа
«Линейная алгебра»

Вариант 1

1. Даны два множества, состоящие из матриц:

$$X=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ e & f & g \end{bmatrix},\quad a,b,c,d,e,f,g\in R\right\};$$

$$Y=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & d \\ -b & -d & g \end{bmatrix},\quad a,b,d,g\in R\right\}.$$

Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y\subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\left\{e^x, xe^x, x^2e^x\right\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty;+\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{A,B,C\}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}71 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f:R^3\to R^3$, где f – поворот R^3 на угол $\dfrac{\pi}{3}$ относительно оси Оz в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка
$x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 2

1. Даны два множества X и Y, состоящие из многочленов:

$X=\{\alpha x^6+\beta x^4+\gamma x^2, \quad \alpha,\beta,\gamma\in R\}$;

$Y=\{\alpha x^6-\alpha x^4+\alpha x^2, \quad \alpha\in R\}$.

Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y\subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{x, \quad (1+x)^2, 1+x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty;+\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ пространства многочленов, если $P_1(x)=2x^2$, $P_2(x)=x^3+4$; $P_3(x)=3x-1$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0,\\ x_1+11x_2-12x_3-34x_4-5x_5=0,\\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0.\end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix}0{,}56 & 0{,}1\\ 0{,}25 & 0{,}64\end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3\to R^3$, где f – проектирование R^3 на плоскость Оxz. Найти его матрицу в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 3

1. Даны два множества X и Y, состоящие из матриц:

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \quad a,b,c,d,e,f \in R \right\};$$

$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 2a & e \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad a,b,d,e \in R \right\}.$$

Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{1; tgx; ctgx\}$ на линейную зависимость в промежутке $(0; \pi/2)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}\}$ пространства R^5, если $\bar{x} = (1,2,1,3,4)$, $\bar{y} = (3,4,2,6,8)$, $\bar{z} = (1,2,1,3,4)$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0{,}63 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 2{,}8 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f : R^3 \to R^3$, где f – поворот R^3 относительно оси Оу на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 4

1. Пусть X – множество многочленов от x, степень которых не превосходит 5; Y – множество всех многочленов степени 3. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{1; x; 1/x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(0;1)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ пространства многочленов, если $P_1(x) = x^2 + x + 2$, $P_2(x) = 3x^3 - 2x + 11$; $P_3(x) = 5x^2 + 3x + 12$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 1{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}34 & 0{,}65 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f : R^3 \to R^3$, где f – зеркальное отражение R^3 относительно плоскости Oxz. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 5

1. Пусть $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & a & c \\ -c & -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in R \right\}$; Y – множество таких же матриц с определителем, равным 0. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{1, e^x, e^x + e^{-x}\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов
$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0,\\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0.\end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}4\\ 0{,}51 & 1{,}2\end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – поворот относительно оси Oz на $<\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 6

1. Даны два множества X и Y, состоящие из многочленов: $X=\{\alpha x^2+\beta xy+\alpha y^2, \quad \alpha,\beta\in R\}$; $Y=\{\beta xy, \quad \beta\in R\}$. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{1+x+x^2; \quad 1+2x+x^2; \quad 1+3x+x^2\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\overline{u}_1=(1,2,5)$, $\overline{u}_2=(5,-1,3)$, $\overline{u}_3=(4,2,8)$, $\overline{u}_4=(3,-1,1)$, $\overline{u}_5=(1,0,1)$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0{,}53 & 0{,}15 \\ 0{,}21 & 0{,}65 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f : R^3 \to R^3$, где f – зеркальное отражение R^3 относительно плоскости Oxy . Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка
$x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 7

1. Пусть X – множество всех кососимметричных матриц 3-го порядка с действительными элементами; Y – множество таких же матриц с положительным определителем. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$, состоящей из многочленов $P_1(x) = x^2 - 2x + 4$, $P_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$; $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 14$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений системы.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 2{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}17 & 1{,}2 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – проектирование R^3 на плоскость Oyz. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка
$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 8

1. Пусть X – множество всех непрерывных на [–1; 1] функций; Y – множество всех квадратичных функций, определенных на [–1, 1]. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{\cos x,\ \sin x,\ \sin 2x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{A, D, C, D, F\}$ пространства квадратных матриц 3-го порядка, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + \phantom{x_3 -{}} 2x_4 \phantom{{}+ x_5} = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0{,}68 & 0{,}21 \\ 0{,}19 & 0{,}54 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – поворот относительно оси Ox на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Найти матрицу

оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 9

1.Пусть X – множество всех нечетных и дифференцируемых на отрезке [–1; 1] функций; Y – множество функций из X с условием $y'(0) = 0$. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{1;\ x;\ x^2;\ (1+x)^2\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 1{,}35 & 0{,}4 \\ 0{,}27 & 1 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f : R^3 \to R^3$, где f – проектирование R^3 на ось Оу. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные операторa.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка
$3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 10

1. Пусть X – множество всех непрерывных на отрезке [–1; 1] функций ;

Y – множество всех функций из X с условием $y(0)=1$. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{x, \quad x^2, \ (1+x)^2\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\}$ пространства многочленов, если

$$P_1(x)=3x^5+3x^4+4x^2-2x-5; \quad P_2(x)=8x^5+6x^4+12x^2-x;$$
$$P_3(x)=7x^5+9x^4+8x^2-9x-25; \qquad P_4(x)=x^5+3x^4-5x-15.$$

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-5x_5=0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix} 0{,}66 & 0{,}33 \\ 0{,}22 & 0{,}55 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – зеркальное отражение R^3 относительно плоскости Oyz. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $-4xy-4x+4y+6=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 11

1. Пусть X – множество всех векторов из R^3, выходящих из начала координат, концы которых лежат на плоскости $z=3x-2y$; Y – множество таких векторов из X, длина которых равна 1. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{e^x, \quad e^{2x}, \quad e^{3x}\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{A, B, C, D\}$ пространства матриц, если

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} -5 & 9 & -3 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix} 0,9 & 0,42 \\ 0,31 & 3,18 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – проектирование R^3 на ось Oz. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 12

1. Даны два множества *X* и *Y*, состоящие из многочленов: $X = \{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2,\quad \alpha, \beta, \gamma \in R\}$; *Y* состоит из тех многочленов из *X*, которые имеют корни $x = 0$ и $x = 1$. Образует ли множество *X* линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в *X*? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{1;\quad x;\quad \sin x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\bar{a}_1 = (0,4,10,1)$, $\bar{a}_2 = (4,8,18,7)$, $\bar{a}_3 = (10,18,40,17)$, $\bar{a}_4 = (1,7,17,3)$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}56 \\ 0{,}28 & 0{,}25 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – проектирование R^3 на плоскость $z = 0$. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 13

1. Даны два множества X и Y, состоящие из квадратных матриц 3-го порядка: $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in R \right\}$; $Y = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{bmatrix}, \quad a \in R \right\}$.

Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{2, \sin x, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), P_5(x)\}$ пространства многочленов, если

$P_1(x) = 14x^3 + 6x^2 + 7x + 35$; $P_2(x) = 12x^3 + 104x^2 + 6x + 30$;

$P_3(x) = 6x^3 + 21x^2 + 3x + 15$; $P_4(x) = 8x^3 + 9x^2 + 4x + 20$;

$P_5(x) = 2x^3 + 17x^2 + x + 5$.

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix} 2{,}84 & 0{,}5 \\ 0{,}43 & 0{,}17 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – проектирование R^3 на ось Ох. Найти матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка
$-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 14

1. Пусть X – множество всех функций, непрерывных на отрезке $[0; 1]$; Y – множество линейных функций из X. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями $\oplus$ и $\otimes$ на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{\sin x, \cos x, tgx\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$.

3. Определить ранг системы векторов $\{A, B, C, D, F, G\}$ пространства матриц 2-го порядка, если

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Определить размерность линейного пространства решений.

5. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{bmatrix} 0{,}16 & 0{,}24 \\ 0{,}38 & 0{,}18 \end{bmatrix}$ продуктивной.

6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \to R^3$, где f – поворот R^3 относительно оси Oz на угол $\dfrac{\pi}{4}$ в положительном направлении. Найти мат-

рицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.

7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Контрольная работа
«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»

Вариант 1

1. Найти вектор, коллинеарный биссектрисе угла при вершине A в Δ ABC, если $\overline{AB}(4,0,3)$, $\overline{AC}(1,2,2)$.

2. Найти площадь треугольника, уравнения сторон которого $2x + 3y - 13 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$, $x + y - 5 = 0$.

3. Найти проекцию прямой $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

6. Найти собственный вектор оператора A, соответствующий минимальному собственному значению, если $A : R^3 \to R^3$ и $A\ \bar{x} = (x_1 + 2x_2 - 2x_3,\ x_1 + 3x_3,\ x_1 + 3x_2)$.

7. Пусть оператор $A : R^2 \to R^2$ в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Верно ли в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ равенство $A^T = A$, если $\bar{u}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{u}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ и A – матрица оператора A в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$?

Вариант 2

1. Даны два вектора: $\overline{a}(2,-1,5)$ и $\overline{b}(3,1,1)$. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям $(\overline{x},\overline{k})=0$, $(\overline{x},\overline{a})=1$, $(\overline{x},\overline{b})=4$.

2. Дан треугольник $A(1,2)$, $B(3,7)$, $C(5,-13)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

3. Найти расстояние между прямыми $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$.

6. Найти собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению, если $A: R^3 \to R^3$ и является зеркальным отражением относительно плоскости Oxy.

7. Пусть оператор $A: R^2 \to R^2$ в базисе $B_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Является ли она симметричной в базисе $B_2(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$, если $\overline{u}_1=\overline{e}_1+\overline{e}_2$, $\overline{u}_2=\overline{e}_1-\overline{e}_2$?

Вариант 3

1. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он ортогонален векторам $\overline{a}=(2,3,-1)$ и $\overline{b}=(1,-1,3)$ и удовлетворяет уравнению $(\overline{x}, 2\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{k})=51$.

2. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $2x-9y+18=0$ и $6x+7y-21=0$.

3. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+116=0$.

6. Найти собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению оператора, если $\boldsymbol{A}\,\overline{x}=(\overline{a},\overline{x})\cdot\overline{b}$, где $\overline{a}(1,2,-1)$, $\overline{b}(0,2,3)$.

7. Пусть $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ матрица оператора $\boldsymbol{A}:R^2\to R^2$ в базисе $\mathrm{B}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ и $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ матрица оператора $\boldsymbol{Д}:R^2\to R^2$ в базисе $\mathrm{B}_2(\overline{v}_1,\overline{v}_2)$. Найти матрицу оператора $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{Д}$ в базисе B_2, если $\overline{v}_1=2\overline{u}_1-\overline{u}_2$, $\overline{v}_2=-3\overline{u}_1+2\overline{u}_2$.

Вариант 4

1. Компланарны ли векторы $\overline{a}=(2,3,-1)$, $\overline{b}=(1,-1,3)$, $\overline{c}=(1,9,-11)$? Найти $\sin(\overline{a},\hat{\ }\overline{b})$.

2. Через точку $A(3,1)$ провести прямые, наклоненные к прямой $2x+3y-1=0$ под углом 45°.

3. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и плоскости $3x-3y+2z-5=0$.

4. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

6. Найти собственный вектор, соответствующий любому собственному значению оператора $A : R^3 \to R^3$, если $A\,\bar{x} = [\bar{x}, \bar{a}]$, где $\bar{a}(-1,2,1)$.

7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -10/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ матрица оператора $A : R^2 \to R^2$ в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Является ли она ортогональной в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, если $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$, $\bar{u}_2 = \bar{e}_2$ и B_1 ортонормирован?

Вариант 5

1. Даны точки $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,1,1)$. Найти $\left\lfloor(\overline{BC} - 2\overline{CA}), \overline{CB}\right\rfloor$.

2. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $M(1,3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(5,8)$?

3. Найти расстояние от точки $P(7,9,7)$ до прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

6. Найти собственный вектор, соответствующий какому-нибудь собственному значению оператора $A : R^3 \to R^3$, если он осуществляет поворот системы координат вокруг оси Oz на угол $\pi/4$ в положительном направлении (против часовой стрелки).

7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ матрица оператора A в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. Найти матрицу оператора -2A в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, если $\bar{v}_1 = \bar{u}_2 - 2\bar{u}_1$, $\bar{v}_2 = 2\bar{u}_1 - 4\bar{u}_2$.

Вариант 6

1. Доказать, что точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

2. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину прямого угла $C(4,-1)$.

3. Вычислить расстояние между прямыми $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$ и $\dfrac{x-4}{8} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+7}{3}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 20 = 0$.

6. Найти собственный вектор оператора $A : R^3 \to R^3$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 : \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, если $A\,\bar{x} = (x_1 + 2x_3, 3x_2, 0)$.

7. Пусть оператор A имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, а оператор Д – матрицу $D = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. Найти матрицу оператора A–Д в базисе B_1. Известно, что $\bar{v}_1 = 3\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2$, $\bar{v}_2 = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2$.

Вариант 7

1. Вычислить расстояние между параллельными сторонами параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB}(6,0,2)$, $\overline{AC}(1{,}5;2;1)$.

2. Через начало координат провести прямые, образующие с прямой $5x - 6y + 2 = 0$ углы, тангенсы которых равны $\pm 7/6$.

3. Найти проекцию точки $A(4,-3,1)$ на плоскость $x + 2y - z - 3 = 0$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$16y^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$.

6. Найти собственный вектор, соответствующий любому из собственных значений оператора поворота системы координат в R^3 вокруг оси Ох на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

7. Пусть оператор A имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. Будет ли эта матрица симметричной в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, если $\bar{u}_1 = 3\bar{v}_1 - \bar{v}_2$, $\bar{u}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$?

Вариант 8

1. Найти объем треугольной пирамиды ABCD, если $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.

2. Найти одну из высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - 4y - 3 = 0$, $5x + 12y + 2 = 0$, $3x + 4y + 390 = 0$.

3. Найти точку, симметричную точке $A(2,7,1)$ относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

6. Найти собственный вектор оператора, соответствующий максимальному собственному значению, если
$$A\,\bar{x} = (x_1 + x_2 + 8x_3, 2x_2, x_1 - x_3),$$
где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

7. Пусть $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ матрица оператора A в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$, $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ матрица оператора Д в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$. Найти матрицу оператора Д–3A в базисе B_1, если $\bar{v}_1=2\bar{u}_1+\bar{u}_2$, $\bar{v}_2=-3\bar{u}_1-\bar{u}_2$.

Вариант 9

1. Упростить выражение $\left[2\bar{a}+\bar{b},\ \bar{c}-\bar{a}\right]+\left[\bar{b}+\bar{c},\ \bar{a}+\bar{b}\right]$.

2. На прямой $x-2y=0$ найти точки, отстоящие от прямой $2x+4y+1=0$ на расстоянии $\sqrt{5}$.

3. Найти точку, симметричную точке $M(4,3,10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-4x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=1,\\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+3x_5=0.\end{cases}$$

5. Исследовать уравнение кривой 2-го порядка
$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0.$$

6. Найти собственный вектор оператора $A: R^3\to R^3$, соответствующий наименьшему собственному значению, если A – зеркальное отражение относительно плоскости $x-y=0$.

7. Пусть $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ матрица оператора A в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$. Найти эту матрицу в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$, если $\bar{u}_1=\bar{v}_1+\bar{v}_2$, $\bar{u}_2=2\bar{v}_1$.

Вариант 10

1. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}(2,1,0)$, $\bar{b}(0,-1,1)$.

2. Найти точку, симметричную точке $M(-2,9)$ относительно прямой $2x-3y+18=0$.

3. Установить взаимное расположение прямых $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ и $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3 \qquad =2. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

6. Найти собственный вектор оператора $A : R^3 \to R^3$, соответствующий наибольшему собственному значению, если A – оператор проектирования на ось Oz.

7. Пусть оператор A в базисе $B_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а оператор Д в базисе $B_2(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ имеет матрицу $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A –2Д в базисе B_2, если $\bar{v}_1=\bar{u}_1+\bar{u}_2$, $\bar{v}_2=\bar{u}_1+2\bar{u}_2$.

Вариант 11

1. Показать, что векторы $\bar{a}(1,1,m)$, $\bar{b}(1,1,m+1)$, $\bar{c}(1,-1,m)$ ни при каком m не могут быть компланарны.

2. Через точку $M(4,-3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3.

3. Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ на плоскости $4x+3y-z+3=0$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ x_1+8x_2-7x_3=12. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

6. Найти собственные векторы оператора проектирования на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$.

7. Пусть оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $B_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а оператор Д в базисе $B_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ имеет матрицу $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A} \circ$ Д в базисе B_1, если $\bar{v}_1 = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2$, $\bar{v}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$.

Вариант 12

1. Найти площадь треугольника ΔABC, если $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,2,1)$.

2. Луч света направлен по прямой $2x - 3y - 12 = 0$. Дойдя до оси абсцисс, он от нее отразился. Определить точку встречи луча с осью абсцисс и уравнение отраженного луча.

3. Установить взаимное расположение прямых и найти расстояние между ними $l_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$; $l_2: \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 152 = 0$.

6. Найти собственный вектор оператора
$\mathcal{A}\bar{x} = (x_1 - 2x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$, соответствующий наименьшему собственному значению.

7. Пусть оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $B_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Верно ли в базисе $B_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ утверждение $A^{-1} = 2A$, если $\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$, $\bar{u}_2 = 2\bar{v}_1$?

Вариант 13

1. Вектор $\bar{x}$, ортогональный векторам $\bar{a}(2,3,-1)$ и $\bar{b}(1,-1,3)$, образует с вектором $\bar{i}$ тупой угол. Зная, что $|\bar{x}| = \sqrt{138}$, найти его координаты.

2. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x - 2y = 0$, а одной из его боковых сторон – прямая $x + y - 3 = 0$. Составить уравнение другой боковой стороны, зная, что она проходит через точку (1, -1).

3. Найти расстояние между двумя прямыми

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка

$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

6. Пусть $A : R^3 \to R^3$ – оператор проектирования на плоскость $x - y = 0$. Найти его собственные векторы, соответствующие наименьшему собственному значению.

7. Пусть оператор A имеет в базисе $B_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти определитель его матрицы в базисе $B_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, если $\bar{v}_1 = 3\bar{u}_1 - \bar{u}_2$, $\bar{v}_2 = 2\bar{u}_2 + \bar{u}_1$. Какова эта матрица в B_2 и чему равна A^{-1} в B_2?

Вариант 14

1. Вычислить площадь параллелограмма, диагонали которого определяют векторы $\bar{p} = 3\bar{m} + \bar{n}$ и $\bar{q} = \bar{m} - 5\bar{n}$, если $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, $(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = 45^\circ$.

2. Составить уравнения прямых, перпендикулярных прямой $2x + 6y - 3 = 0$ и отстоящих от точки $(5,4)$ на расстоянии $\sqrt{10}$.

3. Показать, что прямые

$$l_1:\begin{cases} x+y+z-1=0,\\ y+4z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2:\begin{cases} 2x+3y+6z-6=0,\\ 3x+4y+7z=0 \end{cases}$$

параллельны и записать уравнение плоскости, в которой они расположены.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=7,\\ x_1+2x_2-3x_3=0,\\ 7x_1+10x_2-5x_3=2. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка
$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

6. Пусть $A: R^3 \to R^3$ оператор поворота относительно оси Oy на угол π против часовой стрелки. Найти его собственные векторы, соответствующие наименьшему собственному значению.

7. Пусть оператор A в базисе $B_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, а оператор Д в базисе $B_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ имеет матрицу $D=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A–Д в базисе B_1, если $\bar{v}_1=\bar{u}_1+\bar{u}_2$, $\bar{v}_2=-\bar{u}_1$.

Вариант 15

1. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах
$\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=8\bar{i}+6\bar{j}+4\bar{k}$. Какова ориентация этой тройки?

2. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $x-y-1=0$, $x-2y=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,-1)$. Написать уравнения двух других его сторон.

3. Установить взаимное расположение прямой $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0,\\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$ и плоскости $5x-z-4=0$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Исследовать общее уравнение кривой 2-го порядка

$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}\,x + 20 = 0$.

6. Пусть оператор $A : R^3 \to R^3$ имеет вид

$A\bar{x} = (x_1 + 2x_2 + 5x_3, 2x_2 + 4x_3, x_1 + x_3)$.

Найти его собственные векторы, соответствующие наименьшему собственному значению.

7. Пусть оператор A имеет в базисе $\mathrm{B}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Является ли эта матрица вырожденной в базисе $\mathrm{B}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, если

$\bar{v}_1 = 3\bar{u}_1 + \bar{u}_2$, $\bar{v}_2 = -\bar{u}_2 + \bar{u}_1$? Если нет, то найти A^{-1} в B_2.

Св. план 2003, резерв

Учебное издание

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
по разделам высшей математики
«Линейная алгебра»
и «Аналитическая геометрия»
для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

С о с т а в и т е л и:
Феденя Ольга Александровна,
Черняк Жанна Альбертовна,
Степанова Татьяна Сергеевна

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 17.03.04. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая. Усл.печ.л. 3,6.
Уч.-изд.л. 2,2. Тираж 200 экз. Заказ 542.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП №156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6