Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas

Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio entorno a los polígonos

Memoria para optar al grado de doctora presentada por:

Emma Lizelly Carreño Peña

Fecha de lectura: 31 de mayo de 2021

Bajo la dirección de los doctores:

Nuria Climent Rodríguez

Carlos Miguel Ribeiro

Huelva, 2021

Universidad de Huelva

Programa de Doctorado Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales, Matemáticas y de la Actividad Física y Deportiva

Tesis Doctoral

Conocimiento Geométrico Especializado en Estudiantes para Profesor de Matemáticas de Secundaria. Un Estudio en Torno a los Polígonos

Realizada por:
Emma Lizelly Carreño Peña

Bajo la dirección de los doctores:
Nuria Climent Rodríguez
Carlos Miguel Ribeiro

Huelva, España
2021

UNIVERSIDAD DE HUELVA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS INTEGRADAS

CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO ESPECIALIZADO EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA. UN ESTUDIO EN TORNO A LOS POLÍGONOS

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de la Dra. Nuria Climent Rodríguez del Departamento de Didáctica Integradas de la Universidad de Huelva (España) y del Dr. Carlos Miguel Ribeiro de la Universidad Estatal de Campinas-UNICAMP (Brasil.) que presenta Emma Lizelly Carreño Peña para optar el grado de Doctor en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje con especialidad en Matemáticas.

Fdo.: Emma Lizelly Carreño Peña

VºBº de los Directores

Fdo.: Nuria Climent Rodríguez

Fdo.: Carlos Miguel Ribeiro

Esta tesis representa la culminación de una etapa formativa que pudo realizarse gracias a la cofinanciación de una beca de doctorado entre la Fundación Carolina y la Universidad de Piura. Mi gratitud sincera a ambas instituciones.

Este trabajo ha podido mejorarse gracias las Becas de Movilidad Académica Internacional concedidas por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado (AUIP) en los años 2017 y 2019.

El desarrollo de esta tesis ha tenido como marcos los proyectos de investigación:

“Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789) financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (2010-2013).

“Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas” (EDU2013-44047-P) financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (2014-2017).

“Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado” (RTI2018-096547-B-100) financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (2019-2021).

AGRADECIMIENTOS

A Dios porque me concedió la vida y hoy me permite tener salud para culminar este trabajo. Además, me dio la dicha de crecer en una familia que, amorosamente, me inculcó que el estudio es la única forma de superación.

A mi padre en el cielo y a mi madre cerca de mí, por haberme inculcado el trabajo esforzado, deseos de superación y confianza en mí misma. Me dieron alas para vivir mis aventuras académicas y laborales, aun cuando no las comprendían. A mis hermanos por su cariño, por esperar mis logros y celebrarnos conmigo. A mi madre, ahora, también agradezco su tiempo dedicado en cuidar de mis hijas, sin ella no imagino cómo habría logrado terminar este trabajo.

A mi esposo y a mis hijas por aceptar resignadamente mis ausencias. A Rocío y Mariana les agradezco su recibimiento festivo cuando hacía una pausa. Les debo muchas horas de juego y espero estar a la altura de sus exigencias. A mis suegros y cuñados gracias por recibir a mis hijas para que yo pudiera continuar escribiendo esta memoria.

A mis directores, los doctores Nuria Climent y Miguel Ribeiro, por tanta paciencia con mi dedicación intermitente en el desarrollo de esta tesis. Gracias por no perder la esperanza y la ilusión, por empujarme tantas veces a retomar…y por correr conmigo estas últimas semanas de trabajo intenso. A la Dra. Nuria, en su calidad de tutora, debo agradecer también, la acogida generosa en cada estancia, su corrección delicada y directa de mis avances y su confianza en mí para involucrarme en otros proyectos que, sin duda, me han ayudado a madurar y crecer profesional y personalmente (gracias a Ivonne Sandoval y Marleny Hernández por lo que aprendí trabajando con ustedes, además, me mantuvieron conectada con mi tesis).

A los profesores José Carrillo (que partió al cielo en la etapa de revisión de la tesis) y Luis Carlos Contreras, por la acogida cariñosa en cada estancia, por animar la culminación de mi trabajo e incluso, involucrarse en el desarrollo de este como lo hizo Luis Carlos. Su calidad humana y profesional es imposible de dimensionar. Junto a ellos, agradezco a los miembros del grupo SIDM que compartieron conmigo sesiones de discusión en las que pude aprender a hacer críticas exhaustivas, con optimismo y delicadeza. Una mención especial merece el grupo de doctorandos que encontré en mi última estancia. Fue maravilloso compartir con personas tan cálidas, analíticas y críticas del conocimiento que se iba generando en la construcción del modelo MTSK. Me permitieron experimentar qué era tener compañeros de doctorado y me ayudaron a romper varios de mis esquemas mentales. Muchas gracias: Nielka Rojas, Kike Carmona, Miguel Montes, Álvaro Aguilar, Diana Vasco, Eric Flores y Dinazar Escudero.

Al personal de biblioteca de la Universidad de Huelva y a la Escuela de Doctorado por su acogida y la dedicación con que atendieron mis dudas e inquietudes. Un especial agradecimiento a Isabel Iglesias, por las cálidas conversaciones que teníamos mientras limpiaba los ambientes del departamento de Didácticas Integradas.

A los doctores Pablo Flores y Miguel Wilhelmi por aceptar ser los revisores externos de esta investigación. Sin duda, sus comentarios contribuyeron en la mejora y valoración de este trabajo.

A Pilar Santos, mi mamá española, por acogerme amorosamente en su casa desde que cursé el máster e integrarme con su familia y amigos. Pili, Loli, Pepa, Juanma, Maricamen Perea, Benigno y Maricarmen (la bolilla) son un regalo maravilloso en mi vida.

Al consejo directivo de la Universidad de Piura por impulsar la formación investigadora de sus docentes e involucrarse en el establecimiento de redes que contribuyan a ella. A mis compañeros de la Facultad de Ciencias de la Educación por su aliento constante. Un especial agradecimiento al decano Camilo García y a la vicedecana Milagros Ramos, por reducir mi carga docente en algunos periodos para que pudiera terminar esta tesis y a mis compañeros de la sección de Matemática y Física por asumir esa carga. A las profesoras María del Carmen Barreto y Flor Hau Yon por su aliento constante a la culminación de este trabajo, por abrazarme en los momentos de oscuridad y desilusión investigadora. A Claudia Mezones por presionarme con sus locuras a que cierre esta etapa formativa, a Angela Tejada por su aliento y disposición para traducir documentos que debía leer o presentar. A todos mis amigos UDEP que esperaban con ansias este momento.

A mis estudiantes (ahora egresados) que participaron en esta investigación y a todos los que, a lo largo de su formación docente en estos años, estuvieron pendientes de este trabajo. Gracias por su cariño y por educar con el corazón.

A todos los que me quieren bien, familiares y amigos, porque aún en la distancia, esperan y se alegran con mis logros.

A mis hijas, a quienes espero inspirar amor al estudio, deseos de superación y satisfacción por la obra bien hecha.

Al personal de salud que batalla en esta pandemia, mi admiración y gratitud por su trabajo dedicado y sobrehumano.

A todas las personas que, pese a las adversidades, se esfuerzan por lograr sus sueños.

ÍNDICE

Introducción

El conocimiento del profesor es objeto de estudio desde hace varias décadas. Dada la trascendencia de la educación en la formación de las personas y en el desarrollo de un país, es imprescindible cuestionar la idoneidad del conocimiento del profesor. Esto nos propone varios aspectos a estudiar: el conocimiento del profesor que ejerce la docencia o de quien se está formando para ser profesor, las dimensiones del conocimiento del profesor sobre las cuales debe cuestionarse la idoneidad o cómo estudiamos el conocimiento del profesor, entre otros. En esta memoria nos ocupamos del conocimiento de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria para indagar qué dimensiones lo hacen especializado, cuando abordan los polígonos y cuadriláteros en contextos simulados de práctica docente.

El interés por caracterizar el conocimiento del profesor cobró relevancia con los trabajos de Lee Shulman en 1986. Desde entonces diversos modelos han emergido para estudiar el conocimiento del profesor según la materia de enseñanza. En el campo de la matemática podemos mencionar los modelos: Mathematical Knowledge for Teaching-MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008), Proficiency in teaching mathematics (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), Conocimiento y competencias didáctico-matemáticas para el profesor de matemáticas-CCDM (Godino, et al., 2016) y Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK (Carrillo et al., 2013), entre otros. En nuestro estudio tomamos como referencia el modelo MTSK pues nos sirve de marco teórico y herramienta metodológica. Si bien hay evidencia científica de su pertinencia para el estudio del conocimiento del profesor en distintas ramas de la matemática (p.ej. p. ej. Rojas, 2014; Montes, 2014; Flores-Medrano, 2015; Escudero-Ávila, 2015, Vasco, 2015; Aguilar, 2016; Liñán, 2017; Delgado-Rebolledo, 2020) es importante seguir profundizando en el contenido y estructuración del modelo puesto que aún hay subdominios que no han sido lo suficientemente abordados, por ejemplo, el subdominio Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) aún no tiene una categorización delimitada como los otros subdominios. También sigue pendiente de estudiar el dominio de las creencias. Así mismo hace falta profundizar en el Conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS) y ver la influencia de este en los demás subdominios y en la operativización que hace el profesor del conocimiento que posee.

De la misma manera que hay aspectos pendientes de estudio en el MTSK, también hay áreas de la matemática o temas específicos que requieren ser indagados. Varios estudios dan cuenta, por ejemplo, del escaso conocimiento geométrico que tienen los profesores (Chinnappan y Lason, 2005) y futuros profesores (Ricart, Beltrán-Pellicer y Estrada, 2019), así como de los temas pendientes en esta rama de la matemática (Sinclair et al, 2016).

Los párrafos anteriores evidencian la necesidad de indagar sobre el conocimiento de futuros profesores, respecto de los polígonos y cuadriláteros (diferenciarlos tiene un fin didáctico) para caracterizarlo según el modelo MTSK. Esto permitirá identificar la profundidad de su conocimiento fundamental y, en consecuencia, su potencial para trazar representaciones gráficas, establecer conexiones intraconceptuales e interconceptuales, construir definiciones y clasificaciones de los objetos involucrados en los temas mencionados.

Esta memoria la estructuramos en 5 capítulos. En el primero-Problemática de estudio-abordamos los conceptos involucrados en nuestra investigación (conocimiento matemático en la formación inicial de profesores y el lugar de los polígonos en el currículo peruano), describimos los motivos para desarrollar este estudio, formulamos la pregunta de investigación y según ella, nos planteamos unos objetivos.

En el capítulo 2-Marco teórico-desarrollamos los fundamentos que sustentan nuestro estudio respecto de: la conceptualización del conocimiento del profesor, el aprendizaje de la geometría, los elementos de conocimiento geométrico de futuros profesores, el modelo MTSK y las prácticas matemáticas de definir y clasificar. Si bien esto último forma parte del subdominio Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) del MTSK, lo tratamos en un apartado independiente buscando exhaustividad.

El capítulo 3-Marco metodológico-contiene las decisiones metodológicas tomadas en la realización de esta investigación, desde la selección del paradigma interpretativo hasta desarrollar los criterios de calidad de nuestro estudio. Así pues, describimos las características de nuestra investigación, un estudio de casos instrumental colectivo, desarrollado con tres estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria que cursan la asignatura Práctica Profesional A. En esta, que constituye el contexto de la investigación, recogemos la información mediante las técnicas de encuesta, recogida de artefactos y observación por lo cual, empleamos como instrumentos: un cuestionario de respuesta abierta, un plan de clase y la ejecución de este, que se registra en video para luego ser transcrito. Finalmente, se describe el proceso para realizar el análisis de los datos en función del modelo MTSK y de unos descriptores que emergen del análisis preliminar de los datos y de las consideraciones teóricas en torno al aprendizaje de la geometría.

En el capítulo 4–Resultados y discusión–abordamos las evidencias de conocimiento especializado para cada uno de los tres informantes y según el instrumento de recogida de información. En la descripción de los resultados empleamos los descriptores previamente identificados y el modelo MTSK. Al abordar las evidencias de conocimiento extraídas del cuestionario, diferenciamos el tópico tratado: concepto de polígono y concepto de cuadrilátero y jerarquización. Finalmente, discutimos los resultados en tres apartados: concepto de polígono, conceptualización de los cuadriláteros y su jerarquización y el conocimiento de las Prácticas Matemáticas de definir y clasificar.

El último capítulo–Conclusiones y cuestiones abiertas–contiene los aspectos que consideramos relevantes en la caracterización del conocimiento especializado de nuestros informantes y las preguntas que surgen de ellos, las cuáles podrían investigarse a posteriori.

Capítulo 1.
Problemática de Estudio

En este capítulo se abordan las áreas temáticas involucradas en el estudio que reportamos: el conocimiento matemático en la formación inicial de profesores y los polígonos como contenido matemático propuesto en el currículo escolar peruano. A partir de estas, exponemos la motivación del estudio, formulamos el problema y determinamos los objetivos de investigación.

1.1. Conocimiento matemático en la formación inicial de profesores

La formación de docentes en el ámbito de la matemática ya sea inicial o continua, es desde hace muchos años una preocupación constante, tal como se observa en el recuento de trabajos que mencionan Contreras y Blanco (2001), Llinares (2008) o Fou-Lai y Rowlan (2016). Así pues, se ha indagado sobre el conocimiento de los profesores, sobre todo de primaria, en las distintas ramas de la matemática (Badillo, Azcárate y Font, 2011), de entre las cuales, también la geometría representa un foco de interés de los investigadores (p.ej., Chinnappan y Lawson, 2005; Fujita y Jones, 2007; Murphy, 2012; Sinclair et al, 2016; Somayajulu, 2013). En los trabajos citados, se evidencia la necesidad de revisar la formación inicial de los futuros profesores de matemática, tanto a nivel disciplinar como respecto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, puesto que se han identificado algunos errores que aparecen cuando, a los estudiantes para profesor o profesores en ejercicio[1], se les propone actividades específicas.

La geometría es una rama de la matemática trascendental en la educación escolar, lo cual se refleja en los currículos de educación básica a nivel mundial (p.ej., Currículos de Perú, Brasil, España y Portugal o los estándares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas-NCTM). En el caso de Perú, está vinculada a la competencia *Resuelve problemas de forma, movimiento y localización*, propuesta en el Currículo Nacional de Educación Básica (Ministerio de Educación, 2016). Antes de este, el Diseño Curricular Nacional (Ministerio de Educación, 2009) propuso *Geometría y medición* como uno de los organizadores del área de matemática. Dado que este último documento estaba vigente durante el desarrollo de la investigación, será nuestro referente en este informe.

Pese a la consideración de la Geometría en la política educativa de los distintos países, la importancia formal que se le atribuye no tiene siempre un correlato directo y efectivo con la actividad en aula. Así pues, se observan deficiencias de enseñanza por parte de los profesores (Chinnappan y Lason, 2005) y, por ende, dificultades en su aprendizaje por parte de los estudiantes. Sobre esto último, los resultados de las evaluaciones internacionales (PISA, TIMSS) evidencian tales dificultades (Clements y Sarama, 2011), que son corroboradas en los resultados de la evaluación censal de estudiantes-ECE (Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes, 2018). Si bien las evaluaciones mencionadas no corresponden a la formación inicial de docentes, al ser aplicadas en la educación secundaria, “el alumnado universitario de los Grados de Maestro deberá estar dotado de competencias que muestren que las capacidades adquiridas son empleadas desde su desempeño profesional inicial” (Cámara et al., 2011, p. 57)

En conclusión, se observa en la comunidad de didactas una necesidad de aumentar el conocimiento sobre lo que deben saber los estudiantes para profesor (EPP) para desempeñar adecuadamente la docencia. Ese *conocimiento necesario* supone la reflexión sobre el carácter especializado que posee el conocimiento del profesor de matemáticas.

---

[1]En este trabajo diferenciamos “estudiantes para profesor” (EPP) de “profesores en ejercicio”. De ser necesario, en el primer grupo diferenciaremos “estudiantes para maestro” (EPM) para referirnos a los estudiantes para profesor de educación infantil y primaria; y “estudiantes para profesor” (EPP) para referirnos a los estudiantes para profesor de educación secundaria básica

1.2. Los Polígonos en el Diseño Curricular Peruano

Fundamentar la elección de "los polígonos" como tópico de estudio, nos remite a la consideración del currículo como contexto institucional y fuente de motivación profesional. Como contexto institucional, observamos que en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2008) los "polígonos" son un contenido que está presente durante toda la educación básica, aunque explícitamente podemos encontrarlo desde 4° de primaria hasta 4° de secundaria (Tabla 1). No obstante, en 5° de secundaria, finalización de esta etapa educativa, se propone una ampliación del campo de conocimiento que incluye el estudio de la Geometría Analítica y la Trigonometría[2], así como la promoción y desarrollo de nuevas capacidades específicas:

> El análisis de las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros; comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales (Ministerio de Educación, 2008, p. 318).

En la Tabla 1 mostramos los contenidos y capacidades propuestos, en relación con los polígonos, desde 4° de primaria a 4° de secundaria, grados en los que el estudio de este tópico se explicita como tal.

[2] En este contexto se estudia la Trigonometría en su sentido etimológico (*medida de triángulos*); es decir, no se contempla aquí el estudio de funciones trigonométricas y su desarrollo analítico.

Tabla 1

Abordaje de los Polígonos en el Diseño Curricular Nacional (2008)

	G	Contenidos	Capacidades
PRIMARIA	4	Polígonos: lados y ángulos.	Grafica polígonos en el plano cartesiano e identifica sus lados y ángulos.
		Superficie de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo y triángulo.	Interpreta y argumenta la relación entre el área y el perímetro de un polígono: cuadrado, rectángulo, triángulo y figuras compuestas.
		Área y perímetro de un polígono.	Resuelve problemas que implican el cálculo de áreas de rectángulos, cuadrados y figuras compuestas.
	5°	Triángulo y cuadriláteros: clases.	Clasifica triángulos y cuadriláteros de acuerdo con sus ángulos y lados.
		Polígonos regulares.	Identifica y caracteriza polígonos regulares.
		Superficie de polígonos: trapecio, pentágono, hexágono.	Interpreta y mide la superficie de polígonos.
		Área y perímetro de un polígono.	
	6°	Área de polígonos regulares simples y compuestos.	Interpreta y mide la superficie de polígonos. Resuelve problemas sobre polígonos.
SECUNDARIA	1°	Polígonos	Clasifica polígonos de acuerdo a sus características.
		Noción de área. Perímetros y áreas de figuras poligonales	Calcula el perímetro y área de figuras poligonales. Estima o calcula exactamente el área de figuras planas utilizando diversos métodos.
		Ángulos internos y externos de un polígono.	Resuelve problemas de contexto matemático que involucra el cálculo de ángulos internos y externos de un polígono.
	2°	Suma de ángulos interiores y exteriores de un triángulo.	Resuelve problemas que involucran suma de ángulos interiores y exteriores de un triángulo.
		Perímetros y áreas de figuras geométricas planas.	Resuelve problemas que implican el cálculo sistemático o con fórmulas del perímetro o del área de figuras geométricas planas.
		Polígonos regulares e irregulares. Líneas notables	Define polígonos regulares e irregulares. Resuelve problemas que implican el cálculo de líneas notables de un polígono regular (lado, apotema).
	3	Área de regiones poligonales y relación entre el área y el perímetro de figuras planas.	Resuelve problemas geométricos que involucran el cálculo de área de regiones poligonales, así como la relación entre el área y el perímetro.
		Convexidad y dilataciones de figuras geométricas.	Explica mediante ejemplos el concepto de convexidad. Aplica dilataciones a figuras geométricas planas.
	4°	Medida de las diagonales y la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.	Resuelve problemas que involucran la medida de las diagonales y la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.

Como puede verse en la Tabla 1 el estudio de los polígonos en el nivel primario está centrado en la identificación de elementos (lados y ángulos, no se indica vértices), la clasificación de triángulos y cuadriláteros, la caracterización de los polígonos regulares y, en consecuencia, su diferenciación dentro de todo el conjunto de polígonos, y finalmente, el cálculo de áreas y perímetros. Posteriormente, en el nivel secundario, se retoma lo abordado en primaria para profundizarlo y ampliarlo. Así, se propone la clasificación de los polígonos en su conjunto, ya no solo de los triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares; aunque se marca la diferenciación entre estos últimos y los polígonos irregulares al proponer definirlos. También, se estudian las relaciones entre área y perímetro de figuras planas, señalando el uso de fórmulas y el desarrollo de la sistematización. Esto proporciona un aspecto diferenciador respecto del nivel primario, porque marca el interés en las propiedades métricas de los polígonos, tales como suma de la medida de los ángulos interiores y el cálculo de la cantidad de diagonales, temas propuestos en el último ciclo de la educación básica (ciclo VII-4° de secundaria)[3] y que, contrariamente a lo que caracteriza al trabajo matemático, se reduce al uso de fórmulas. Finalmente, se introducen dos conceptos nuevos: la convexidad y dilatación[4]. El primero posibilita ampliar las clases de polígonos ya estudiadas y el segundo integra los conceptos de semejanza y proporcionalidad, propiciando el establecimiento de conexiones interconceptuales.

Abordado el contexto institucional, nos referimos a la motivación profesional que emana del currículo. Esta se origina por la creciente complejidad del tópico en cuestión, evidenciada desde la finalización de la educación primaria hasta 4° de secundaria, al menos. La efectiva transición durante esta etapa demanda una formación especializada que permita afrontar las demandas de la educación básica. De hecho, una de esas demandas es que, en muchas escuelas, sobre todo particulares, la enseñanza de la matemática de los últimos

---

[3] La educación básica en Perú diferencia tres niveles: inicial, primaria y secundaria, en los que se desarrolla 7 ciclos de formación. El nivel inicial comprende dos ciclos, el primero, de 0 a 2 años (no es obligatorio) y el ciclo 2 que va de 3 a 5 años. El nivel primario abarca desde los 6 hasta los 12 años, aproximadamente. Está organizado en tres ciclos (III, IV, V) en el que cada uno comprende dos grados. Finalmente, el nivel, secundaria, comprende los ciclos VI (1° y 2°) y VII (3°, 4° y 5°).

[4] "Una dilatación es una transformación geométrica que puede cambiar el tamaño de un objeto y puede cambiar la localización de un objeto. Cada dilatación tiene un centro y una razón" (*Dilatación*. 3 de abril de 2009. En Enciclopedia de Todas las Palabras de la Matemáticas. http://bit.ly/39KMUlc)

grados de Educación Primaria (5° y 6º)[5], recaiga en docentes de secundaria con especialidad de matemáticas. Esta es la razón profesional por la que se elige un tópico básico (polígonos) para analizar las características del conocimiento de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria.

1.3. Motivación y formulación del problema

Las deficiencias de enseñanza y las dificultades de aprendizaje de la geometría, por parte de futuros profesores o profesores, identificados en diversos estudios (Chinnappan y Lason, 2005; Clements y Sarama, 2011), son corroboradas en el ejercicio simulado de la práctica docente, al cursar las asignaturas de Práctica Profesional, como parte del plan de formación inicial de futuros profesores de los niveles Inicial[6], Primaria o Secundaria. Dado que en dichas asignaturas se pone en juego todo lo aprendido durante los siete ciclos anteriores de la carrera[7], es natural cuestionar la idoneidad de la formación de futuros docentes en relación con los comportamientos observados durante la planificación y ejecución de sesiones de enseñanza-aprendizaje simuladas y reales, actividades que son propias de las asignaturas en cuestión.

En el ejercicio de las distintas Prácticas Profesionales (A, B y C)[8] se observa una falta de conocimiento matemático y didáctico en los EPP que suscita un conjunto de

[5] En el Sistema Universitario Peruano, la formación de docentes en Educación Inicial, Primara y Secundaria son especialidades de la Licenciatura en Ciencias de la Educación. De esta forma, no existe en particular restricción normativa que impida que un licenciado en Educación, nivel Secundaria, imparta en Educación Primaria, tal y como sucede en el sistema educativo español, donde para el ejercicio de la docencia en Educación Infantil o Primaria se exige estar en posesión de un título de Maestro (que habilite para el ejercicio de esta profesión regulada).

[6] En el sistema educativo peruano la Educación Inicial se corresponde con la Educación Infantil (0-6 años) en España. En el texto se utilizan pues de manera equivalente ambas expresiones.

[7] Las asignaturas de Práctica Profesional, en nuestro contexto de estudio, se cursan en los ciclos 8, 9 y 10 que forman parte de los dos últimos años de la carrera de Educación.

[8] Las tres asignaturas de Práctica Profesional, que integran el plan de formación inicial de los profesores de la universidad, tienen un marcado propósito de ejercer, gradualmente, la docencia. Así, en la Práctica Profesional A, asignatura en la que desarrollamos la investigación, los EPP realizan clases simuladas en las aulas de la universidad. Esto implica que un EPP asume el rol docente y los demás compañeros, el rol de estudiantes de secundaria. En la Práctica Profesional B, la primera mitad de la asignatura se realiza sesiones de clase simuladas, tal como se hacía en la Práctica Profesional A. Luego, en la segunda mitad, las sesiones de clase se desarrollan en un contexto escolar real. Finalmente, en la Práctica Profesional C

cuestionamientos en torno al conocimiento que se promueve en los EPP, en los distintos momentos de la formación inicial, así como sobre las características de dicho conocimiento en relación con los comportamientos observados cuando desarrollan una sesión de enseñanza-aprendizaje y la potencialidad de los conocimientos disciplinares, pedagógicos y didácticos, impartidos y procurados durante el desarrollo de la carrera, de cara a un desempeño docente adecuado. Responder a los cuestionamientos anteriores, por lo menos en alguna medida, implica, por un lado, la búsqueda de evidencias de lo que los EPP saben, no solo cuando desarrollan una evaluación escrita, sino también cuando preparan y ejecutan una sesión de enseñanza-aprendizaje. Esto es esencial ya que esta competencia sustenta su desempeño profesional desde sus inicios. Por otro lado, esa búsqueda de evidencias del conocimiento de los EPP posibilita extraer algunas conclusiones sobre las características de la formación recibida, aunque no de manera exhaustiva pues no es objeto de esta investigación evaluar el plan de formación.

Debido a la complejidad del problema y a la amplitud de las posibles causas de este, consideramos necesario empezar por indagar el conocimiento de los estudiantes para profesor, con la finalidad de caracterizar exhaustivamente el mismo y su relación con la problemática descrita. Así pues, esta investigación gira en torno a qué conocen los EPP y cómo emplean dicho conocimiento en diversas situaciones[9] diseñadas ex profeso en las que se contemplan aspectos disciplinares y didácticos de su formación inicial.

En este contexto, decidimos centrar la atención en el área de Geometría, en particular, en un conjunto de contenidos relacionados con el tópico de los polígonos puesto que la Geometría es un área considerada en los currículos de educación básica, de distintos países, desde el nivel infantil. Además, en el conocimiento geométrico se revelan diversas dificultades en los distintos niveles de estudio, entre los que se incluye la formación inicial de profesores (p.ej., Climent y Carrillo, 2002; Contreras y Blanco, 2001; Gutiérrez y Jaime, 1996). Con el propósito de indagar y caracterizar exhaustamente el conocimiento de los EPP, tomamos

el ejercicio docente se realiza por completo en el contexto de una escuela. Actualmente, tenemos otro plan de estudios en el que se han contemplado cuatro asignaturas de Práctica Profesional. Las características de las tres primeras coinciden con las que hemos descrito antes.

[9] Estas situaciones se vinculan con los instrumentos de recogida de información: Cuestionario y el plan de clase con su respectivo desarrollo.

como referencia el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2018) pues es un "marco analítico para comprender mejor el conocimiento del profesor de matemáticas (qué conoce, cómo, qué le posibilita, qué necesita)" (Climent et al., 2014, p. 35). En coherencia con lo anterior, formulamos el problema de investigación como sigue:

> *¿Qué conocimiento especializado muestran estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, al abordar situaciones de enseñanza-aprendizaje relativas a los polígonos, en un contexto de simulación de prácticas profesionales?*

1.4. Objetivos de estudio

En coherencia con la pregunta formulada antes, en esta investigación buscamos identificar y describir cualitativamente los atributos del conocimiento especializado en la información recogida de los EPP, según lo que se propone en el marco teórico del MTSK. Así pues, formulamos como *objetivo general* el siguiente:

> *Caracterizar el conocimiento especializado de estudiantes para profesor de matemática de Educación Secundaria Básica, respecto del tema de polígonos.*

El objetivo antes formulado lo dividimos en los siguientes objetivos específicos:

1) Definir descriptores de conocimiento especializado sobre polígonos.
2) Describir el conocimiento evidenciado por los EPP.
3) Describir características del MTSK evidenciado, su estructura y posibles relaciones con los diferentes instrumentos y contextos de recogida de información.

Capítulo 2.
Marco teórico

En este capítulo abordamos los fundamentos teóricos de nuestra investigación, centrados básicamente en: la conceptualización del conocimiento del profesor de matemática, el conocimiento geométrico de estudiantes para profesor, el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas según el modelo "Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (MTSK) y las prácticas matemáticas de definir y clasificar relativas a los tópicos de polígonos y cuadriláteros.

2.1. Conocimiento del profesor

El conocimiento del profesor como objeto de estudio se aborda desde hace décadas. Según Figueras y Sáiz (2019), desde el campo educativo, el estudio de los profesores y de la enseñanza cobra relevancia a partir de los trabajos de Schön (1983), Elbaz (1981) y Shulman (1986). Sin embargo, el reconocimiento como objeto de investigación en educación matemática no llega hasta el 28avo congreso anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME28), en el 2004. Desde entonces, de los 24 dominios de investigación establecidos, uno está centrado en el *conocimiento y práctica del profesor* (Teacher knowledge and practice). De manera similar, la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática, para los congresos bianuales (CERME), tiene definidos entre sus grupos de trabajo temáticos a uno encargado de conocimiento, creencias e identidad de los profesores de matemáticas (Mathematics Teacher Knowledge, Beliefs and Identity). El interés por el conocimiento del profesor, en ambos encuentros académicos, así como en los

Handbook y revistas académicas muestran la relevancia de este objeto de estudio (Fou-Lai y Rowland, 2016).

2.1.1. Conocimiento profesional del profesor: contenido y naturaleza

El conocimiento profesional ha sido estudiado por diversos autores y ha recibido diversas denominaciones desde finales de los 80 del siglo pasado: conocimiento práctico (Elbaz, 1981), conocimiento base (Llinares y Sánchez, 1990), conocimiento profesionalizado del contenido (Martín y Porlán, 1999), y conocimiento o saber práctico profesional (Azcárate, 1999), entre otros. Muchos de estos trabajos se sustentan en el trabajo de Shulman (1986, 1989) el cual marca un hito en las investigaciones sobre el contenido del conocimiento del profesor, puesto que pone el foco en la materia de enseñanza (subject matter) y en el conocimiento que emplea el profesor al transformar dicha materia para que pueda ser enseñada.

Shulman (1986) diferencia, inicialmente, tres categorías de conocimiento: conocimiento de la materia, conocimiento didáctico del contenido (en adelante PCK[10]) y conocimiento curricular. El *conocimiento de la materia* incluye cuatro dimensiones: conocimiento del contenido, conocimiento sintáctico, conocimiento sustantivo y las creencias sobre la materia (Grossman, Wilson y Shulman, 2005). Las tres primeras están estrechamente vinculadas entre sí puesto que: "Cuando comenzamos a preguntarnos qué cuenta como contenido, debemos mirar hacia las estructuras sustantiva y sintáctica de una disciplina desde las cuales el contenido emerge" (p. 10). Por lo tanto, la primera categoría propuesta por Shulman, supone un "modo distinto de conocer la materia" (Climent, 2012, p. 65) que involucra la comprensión profunda de hechos, conceptos y estructuras sustantivas y sintácticas de la materia (Schwab, 1978). Esta comprensión se ve influenciada por las creencias que se tienen sobre la materia, de la misma manera que las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje influyen sobre las prácticas instruccionales. Como consecuencia de lo anterior, es evidente que:

---

[10] Siglas del nombre original: Pedagogical Content Knowledge.

> Los profesores no solo deben ser capaces de definir para los estudiantes las verdades aceptadas en un dominio. También deben ser capaces de explicar por qué una proposición particular se considera justificada, por qué vale la pena saberla, y cómo se relaciona con otras proposiciones, tanto dentro de la disciplina y al exterior de ésta, tanto en teoría como en la práctica. [...] El profesor necesita no solo comprender que algo es así, sino también por qué es así, sobre qué fundamentos se justifica y bajo qué circunstancias nuestra creencia en esa justificación puede ser debilitada e incluso negada (Shulman, 1986, p. 9, la traducción es nuestra).

El *conocimiento didáctico del contenido* es el conocimiento que deja de ser exclusivamente conocimiento de la materia para asociarse con su enseñanza. Constituye una categoría integradora de otros conocimientos puesto que incluye el conjunto de "formas de representar y formular el tema para hacerlo comprensible a los demás" (Shulman, 1986, p. 9) lo cual implica, entre otros aspectos, considerar las concepciones y preconcepciones de los estudiantes en torno a un tema.

Finalmente, el *conocimiento curricular* es el conocimiento de los programas prescritos para cada área del currículo, según el nivel al que van dirigidos; de los materiales de instrucción correspondientes, así como de los lineamientos metodológicos, los recursos y herramientas instruccionales, así como el conocimiento interdisciplinar o lateral (relación de un contenido de un área con contenidos de otras áreas) e intradisciplinar o vertical (conexiones entre los conocimientos anteriores y posteriores, de una misma área, durante una etapa formativa).

En trabajos posteriores (Shulman, 1987) las categorías fueron ampliadas a siete, al añadir a las tres anteriores: el conocimiento pedagógico general, el conocimiento de los aprendices y sus características, el conocimiento de los contextos educativos (políticas educativas, formas de trabajo pedagógico) y el conocimiento de los fines, propósitos y valores educativos. De todas las categorías propuestas, la comunidad de investigadores y formadores de profesores destaca el PCK, pues pone de relieve la necesidad de un conocimiento propio de la enseñanza de una materia específica.

Si bien el trabajo de Shulman contribuye a llamar la atención de los investigadores sobre los focos de interés de las investigaciones anteriores, determinar que la comprensión del contenido representa un conocimiento clave para la profesión de la enseñanza, y propiciar distintas líneas de trabajos entorno al PCK (Ball, Thames, & Phelps, 2008), también se cuestiona el enfoque academicista de su modelo, pues atribuye un peso fundamental al conocimiento disciplinar que se adquiere en los programas de formación., dejando de lado el conocimiento del contenido y didáctico del contenido que se puede aprender de la práctica docente (Bromme, 1994). En este sentido, Climent (2002) sostiene que el modelo de Shulman incide en el conocimiento profesional para la práctica y no desde la práctica, más aún cuando, además de las categorías ya abordadas, se toma en cuenta las fases del Modelo de Razonamiento y Acción Pedagógica[11], calificado por Porlán y Rivero (1998, citado en Climent, 2002) como “academicista y enciclopédico” (p. 64).

Es innegable la trascendencia del trabajo de Shulman puesto que, varias décadas después, sigue reflexionándose sobre el conocimiento del profesor y la especificidad de este (Fou-Lai & Rowland, 2016).

Entendiendo el conocimiento del profesor como la confluencia de saberes y experiencias que posee, adquiere y construye el profesor desde la formación inicial y a lo largo de su carrera profesional, para emplearlos en el desarrollo de su labor docente (Climent, 2002; Muñoz-Catalán, 2009; Ribeiro, 2010), Climent et al., (2014) lo caracterizan como:

- *Personal* puesto que es único e irrepetible en relación con el de otro profesor y se ve influenciado por las concepciones, valores, actitudes y experiencias (vitales y docentes) que dicho profesor tenga.
- *Contextualizado* ya que se genera en entornos profesionales.
- *Dinámico* porque “crece a través de las interacciones con los alumnos, las experiencias profesionales y las propias experiencias personales” (p. 38).

[11] Las fases del modelo de Razonamiento y acción pedagógica son: 1) Comprensión (conocimiento comprensivo de la materia a enseñar), 2) Transformación (que supone la interpretación de los materiales instruccionales, la representación del contenido, la adaptación a las características de los estudiantes y su ajuste), 3) Instrucción (actuación del profesor en el aula); 4) Evaluación (de los alumnos sobre la comprensión del contenido), 5) Reflexión (autoevaluación del profesor sobre su actuación en el aula), y 6) Nueva comprensión (final del ciclo e inicio de uno nuevo).

- *Integrado y complejo* puesto que está constituido por una diversidad de saberes que se acoplan como un sistema.
- *Práctico* "el conocimiento del profesor es un conocimiento para la práctica y que se nutre de la misma" (p. 38).
- *Parcialmente tácito* ya que se desarrolla con la experiencia y se amplía mediante la reflexión consciente, desde y sobre la acción docente.
-

2.1.2. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas

La llamada de atención de Shulman (1986) sobre la especificidad del conocimiento del profesor respecto de la materia a enseñar y la consideración del conocimiento didáctico del contenido tiene eco en distintas disciplinas (Gudmundsdottir y Shulman, 1987; Grossman, 1989), entre las que figura la matemática. Así pues, Bromme (1994) añade especificidad a las categorías propuestas por Shulman, destacando, por un lado, la diferenciación de las matemáticas como disciplina y como materia escolar, puesto que la lógica de la primera no coincide con la de las matemáticas como objeto de enseñanza o de aprendizaje. Por otro lado, a diferencia de la propuesta de Shulman, le otorga relevancia al conocimiento que adquiere de la práctica docente y no solo el que se moviliza en esta.

Por su parte, Ball y su equipo, en sus trabajos iniciales, se centran en el conocimiento de la materia – *subject matter knowledge* – que aporta Shulman (1986, 1987), reconociendo la diferencia del conocimiento sustantivo o *de* matemáticas y conocimiento sintáctico o *sobre* matemáticas (Ball, 1988; Ball y McDiamird, 1990; Ball, 1991). El análisis de la naturaleza del conocimiento sustantivo (a la luz del valor de verdad, legitimidad y conexión, (Ball,1988)) anuncia la consideración de otras dimensiones: las prácticas matemáticas en torno al establecimiento de la corrección de una idea, tanto en la comunidad matemática como en la escolar; la concepción que tiene el profesor sobre las matemáticas, que le llevan a enseñarlas como un conjunto de reglas y procedimientos que hay que saber y repetir o como un conjunto de ideas y conceptos cuyo significado hay que comprender; las conexiones matemáticas entre niveles escolares y entre ideas, aun cuando en el currículo escolar se muestra el conocimiento matemático como compartimentos separados en tiempo y significado.

Posteriormente, al cuestionar el conocimiento necesario para enseñar, Ball (1993) hace referencia a un dominio de *conocimiento especializado*, en el que se incluye "ideas, principios, intuiciones, teorías y maneras de hacer cosas que los profesionales conocen y usan" (s/p) y que, por tanto, no necesariamente las sabe un adulto cualquiera. A este aspecto, que más tarde será el centro del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), se vincula el conocimiento pedagógico, el conocimiento de los estudiantes, las habilidades para desarrollar la enseñanza y la capacidad de aprender a razonar y construir nuevos conocimientos. Así pues, el interés por identificar y medir el conocimiento necesario para enseñar, respecto de la matemática, lleva a diferenciar el conocimiento común del contenido del conocimiento especializado (Ball, Hill y Bass, 2005) y a establecer un modelo de conocimiento específico para el profesor de matemáticas.

El Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008), en adelante MKT, es un modelo definido en función de tareas de enseñanza, que realiza cotidianamente el profesor[12]. En él se diferencian dos dominios: el conocimiento de la materia (SMK[13]) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK) (Figura 1). En el primero se diferencian tres subdominios: conocimiento común del contenido (CCK-Common Content Knowledge), conocimiento especializado del contenido (SCK-Specialized content knowledge) y conocimiento del contenido en el horizonte (HCK-Horizon Content Knowledge) que hacen referencia, respectivamente, al conocimiento del contenido que el profesor comparte con otros usuarios de la matemática, al conocimiento descomprimido[14] que es necesario para la enseñanza y no

---

[12] Las tareas que Ball, Thames y Phelps (2008) proponen son: Presentar ideas matemáticas, responder a los estudiantes sus preguntas "por qué", encontrar un ejemplo para desarrollar un punto matemático específico, reconocer lo que está involucrado en el uso de una representación particular, vincular representaciones a ideas subyacentes y otras representaciones, conectar un tópico de enseñanza con temas de años anteriores o futuros, explicar los objetivos y propósitos matemáticos a los padres, evaluar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto, modificar tareas para hacerlas más fáciles o más difíciles, evaluar la plausibilidad de los reclamos de los estudiantes (a veces rápidamente), dar o evaluar explicaciones matemáticas, elegir o desarrollar definiciones útiles, usar la notación y el lenguaje matemático y criticar su uso, hacer preguntas matemáticas productivas, seleccionar representaciones para propósitos particulares, inspeccionar equivalencias (p. 400, la traducción es nuestra).

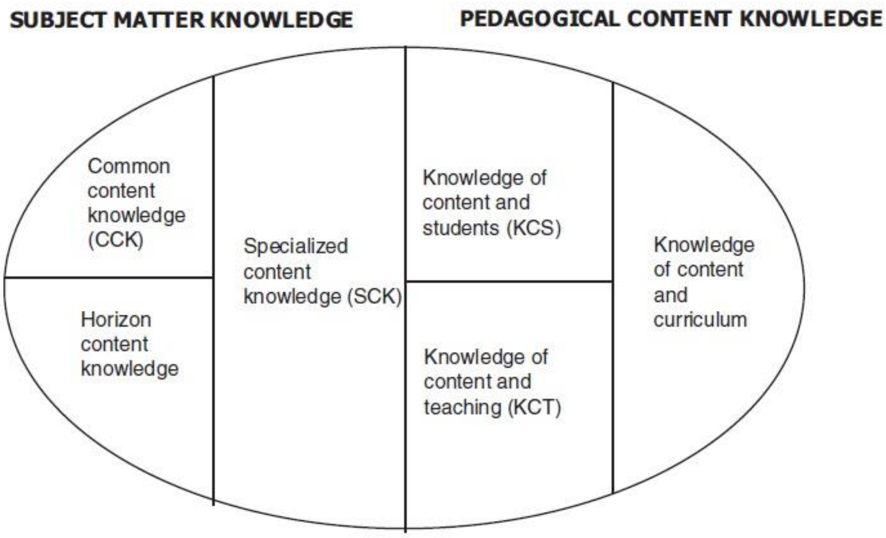
[13] Se indican las siglas del nombre original en inglés: Subject Matter Knowledge (SMK), Pedagogical Content Knowledge (PCK), al igual que para los subdominios de cada uno.

[14] La idea de conocimiento descomprimido se propone en Ball & Bass (2000) para hacer referencia a un tipo especial de conocimiento matemático que solo se necesita en las tareas de enseñanza y no en otros entornos.

para otros entornos, y al conocimiento consciente de los tópicos matemáticos y las relaciones entre estos. En el dominio de conocimiento didáctico del contenido se diferencian tres subdominios: conocimiento del contenido y estudiantes (KCS- Knowledge of content and students), conocimiento del contenido y enseñanza (KCT-Knowledge of content and teaching) y conocimiento del contenido y el curriculum (KCC-Knowledge of content and curriculum). En estos se hace referencia, respectivamente, al conocimiento que permite a los profesores interpretar el pensamiento e interacciones de los estudiantes en relación con la matemática; al conocimiento de los recursos y de estrategias para enseñar un contenido matemático, y al conocimiento de los contenidos matemáticos y logros propuestos para cada nivel, en el currículo.

Figura 1

Representación del modelo Mathematical Knowledge for Teaching-MKT (Ball et al, 2008, p. 403)



Si bien este modelo supone especificidad (respecto de la propuesta de Shulman) al centrarse en el conocimiento matemático, éste es definido- para cada subdominio- en función de conocimiento y la habilidad en uso, es decir, ligado a tareas de enseñanza y no al contenido mismo de dicho conocimiento, razón por la cual se generan ambigüedades en la identificación de la naturaleza del conocimiento involucrado en cada subdominio y en la delimitación de los mismos (Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

Otro modelo, propuesto sin una explícita influencia de Shulman (1986, 1987), es el *Proficiency in teaching mathematics* (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Este tiene su base en las dimensiones de la competencia para la resolución de problemas matemáticos[15] y en las dimensiones de la competencia matemática escolar[16]. La conjunción de todas ellas permite establecer las dimensiones de la competencia profesional del profesor, en la enseñanza de las matemáticas. Estas son:

- *Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud* que supone la estrecha vinculación del conocimiento disciplinar, estructural y curricular, observada al priorizar las grandes ideas de un contenido a abordar.
- *Conocer a los estudiantes como pensadores* que implica saber cómo resuelven problemas, qué conocimientos ponen en juego y las dificultares que les surgen.
- *Conocer a los estudiantes como aprendices que* supone el conocimiento consciente del profesor sobre el modelo de enseñanza y las decisiones metodológicas que toma en función de lo que conoce y debe conocer el estudiante.
- *Crear y gestionar entornos de aprendizaje* en los que se concretice "la generación de comunidades intelectuales en las que los estudiantes participan en la actividad intelectual legítima" (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p.339, la traducción es nuestra).
- *Desarrollar normas para el aula y apoyar el discurso en el aula* de tal forma que se propicie la interacción social y la productividad matemática, orientada a la investigación.
- *Construir relaciones que apoyen el aprendizaje* entre los agentes y elementos de una comunidad de aprendizaje.
- *Reflexionar sobre sus prácticas* como clave de crecimiento profesional, personal y comunitario.

---

[15] Las dimensiones de competencia, que un profesor debe tener si busca comprender a sus estudiantes al momento de resolver problemas son: conocimiento base, estrategias para la solución de problemas, acciones metacognitivas y creencias y prácticas (Schoenfeld, 1985 citado en Schoenfeld y Kilpatrick, 2008).

[16] Las dimensiones de competencia matemática son: *comprensión conceptual (*se extiende a los conceptos matemáticos, operaciones y relaciones), *fluidez procedimental* (habilidad para llevar a cabo los procedimientos de manera flexible, precisa, eficiente y apropiada), *competencia estratégica* (capacidad de formular, representar y resolver problemas matemáticos), *razonamiento adaptativo* (capacidad para el pensamiento lógico, la reflexión, la explicación y la justificación) y *disposición productiva* (inclinación habitual a ver las matemáticas como sensatas, útiles y valiosas, junto con una creencia en el valor de la diligencia y en la propia eficacia) (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001 citado en Schoenfeld y Kilpatrick, 2008).

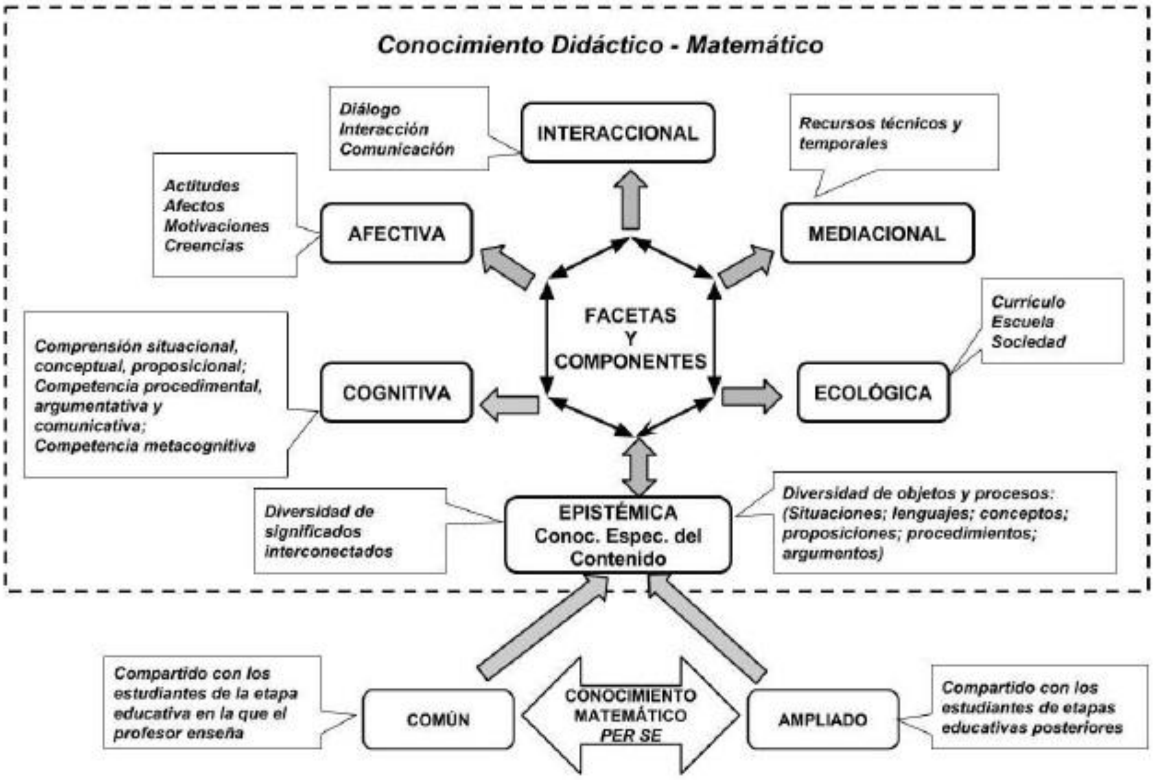
Si bien este modelo propone unas dimensiones que definen la competencia profesional de un profesor de matemáticas, estas abarcan no solo conocimiento disciplinar sino también, otros conocimientos no específicos del profesor de matemáticas, es decir, que puede ser compartido con cualquier profesor de otra materia. Así pues, ante la generalidad de las dimensiones propuestas en los modelos abordados, Godino (2009) manifiesta la necesidad de contar con modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que moviliza el profesor al enseñar matemáticas. En este sentido, dicho autor propone el *modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor*, basado en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2009), y en el que se integra, organiza y extiende lo propuesto en otros modelos con predominio del MKT (Ball, Thames y Pheps, 2008) y del Proficiency in teaching mathematics (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008).

El modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (Godino, 2009) es un sistema complejo de categorías de análisis en el que el conocimiento didáctico incluye al conocimiento matemático, correspondiente a las distintas dimensiones implicadas en la enseñanza y el aprendizaje de un contenido específico. Este modelo, actualmente denominado *modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas para el profesor de matemáticas*-CCDM (Godino, Batanero, Font, y Giacomone, 2016), propone seis dimensiones o facetas que han de tenerse en cuenta en el análisis de los procesos de instrucción matemática y cuatro niveles de análisis que, aunque se diferencian, interactúan entre sí. Las dimensiones definidas son: epistémica (conocimientos matemáticos), cognitiva (conocimientos de los estudiantes), afectiva (creencias, actitudes de los estudiantes en relación con la matemática, su enseñanza y aprendizaje), mediacional (recursos de enseñanza), interaccional (planificación y realización de la enseñanza) y ecológica (relaciones en el entorno que condicionan la instrucción). Por su parte, los niveles de análisis son: prácticas matemáticas y didácticas (descripción de la acción docente), configuraciones (descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen de la acción docente), normas (reglas y hábitos que condicionan y posibilitan la instrucción) e idoneidad (articulación coherente y equilibrada de las dimensiones de análisis).

Si bien este modelo constituye una herramienta para el análisis exhaustivo del conocimiento matemático y didáctico del profesor, llama la atención la reorganización que hace de los subdominios de conocimiento matemático propuestos en el MKT. Así pues, indica solo dos subdominios ligados a la dimensión matemática: el conocimiento común y el conocimiento ampliado[17]. Ambos sustentan al conocimiento especializado del contenido, localizado en la dimensión didáctica-matemática del modelo, específicamente vinculado a la faceta epistémica (Figura 2).

Figura 2

Facetas y componentes del conocimiento del profesor propuestas en el modelo CCDM (Godino, et al., 2016, p.289)



Las facetas propuestas en el modelo CCDM superan a lo propuesto en los modelos de referencia, aunque se establece una relación entre estos. Así pues, tomando como referencia

[17] En aras de especificar el conocimiento matemático del profesor, Pino Fan y Godino (2015) reinterpretan el conocimiento común como el conocimiento compartido por el profesor y los estudiantes, sobre un objeto matemático, suficiente para resolver problemas o tareas correspondientes a una etapa educativa. Por otra parte, el conocimiento ampliado es entendido como el conocimiento posterior a una noción matemática que se está estudiando en un momento determinado, sea del mismo nivel educativo o superior a este.

el MKT, el conocimiento del contenido y los estudiantes está ligado a las facetas afectiva y cognitiva, el conocimiento del contenido y enseñanza a la interaccional y mediacional y el conocimiento del contenido y el currículo a la faceta ecológica.

2.1.3. El conocimiento como objeto de estudio: ¿Qué significa conocer?

Dado que los modelos de conocimiento del profesor no explicitan su posicionamiento epistemológico sobre el término *conocimiento* (Montes, et al., 2014, p. 9), consideramos necesario definir lo que entendemos en este trabajo por dicho término, antes de presentar el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Así pues, aunque el 'conocimiento' se vincula a distintos elementos (p.ej. habilidades, creencias y concepciones), que dificultan definir su naturaleza, asumimos que este es "la información que tiene disponible [un individuo] para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!" (Schoenfeld, 2010, p. 25 citado por Montes, et al., 2014, p. 10). Al hacer un análisis de la definición anterior, tomando como referencia el trabajo de Montes et al. (2014), podemos concluir que:

1) La "información" incluye: acciones, saber aquello que se debe hacer y porqué (comprensión relacional[18]), saber cómo se hace (comprensión instrumental), tener consciencia de la estructura de lo que se hace (comprensión lógica) y conectar los símbolos y la notación con las ideas correspondientes (comprensión simbólica).
2) La "disponibilidad y uso" implica que solo se toma en cuenta la información que se necesita en la tarea concreta de la enseñanza de la matemática, todo el conocimiento matemático adicional que se posee pero que no se pone en juego, no forma parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.
3) La "corrección de la información" no interesa *a priori* sino las características de esta porque permite comprender lo que conoce un profesor.

[18] La comprensión entendida como "la asimilación de diferentes elementos dentro de esquemas" (Montes, et al., 2014, p. 9) es un término estrechamente relacionado con el conocimiento, razón por la cual tomamos en cuenta la diferenciación de tipos de comprensión propuesta por Skemp (1978).

La definición anterior se asume en coherencia con una concepción constructivista del conocimiento matemático, desde la cual este es siempre contextual y le atañe al sujeto que constantemente construye significados extraídos desde la propia experiencia (Montes, et al., 2014).

2.2. Conocimiento geométrico de futuros profesores

El conocimiento matemático que evidencian los estudiantes para profesor así como profesores en ejercicio en una situación de enseñanza-aprendizaje[19], es una preocupación constante de los investigadores (p. ej. Ball, 1991; Godino, 2013; Llinares, 2002; Ma, 2010; Sánchez-Matamoros et al., 2019; Montes et al., 2019), puesto que debería tenerse una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (Ma, 2010) que permita reconocer las ideas base de la matemática, distinguir la complejidad de los tópicos que se proponen en un currículo, establecer conexiones entre ellos y plantear su estudio, desde múltiples perspectivas, teniendo en cuenta dicha complejidad.

Las investigaciones anteriores, así como las realizadas en el campo de la geometría (p. ej. Ball y Wilson, 1990; Gutiérrez y Jaime, 1996; Baturo y Nason, 1996; Guillén, 2000, 2001; Blanco y Contreras, 2002, 2012; Chinnappan y Lawson, 2005; Carreño y Climent, 2019; Ma, 2010; Clements y Sarama, 2011; Murphy, 2012; Somayajulu, 2013; Escudero-Domínguez y Carrillo, 2014; Aslan-Tutak y Adams, 2015, entre otras), abordan no solo el conocimiento matemático en sí mismo sino que, de cara a la formación de profesores, se interesan por el conocimiento matemático en relación con la enseñanza y el aprendizaje.

Considerando lo anterior y para un mayor orden en el discurso, desarrollamos los antecedentes en dos grupos. En el primero se comentan aquellos trabajos que aportan referencias teóricas sobre el aprendizaje de contenidos geométricos de estudiantes para profesor[20] y que, a su vez, indagan el conocimiento que poseen estos en torno a distintos

---

[19] Llamamos *situación de enseñanza-aprendizaje* al conjunto de tareas específicas, inmersas en contextos hipotéticos o reales, para generar el análisis y operativización de conocimientos y concepciones en relación con la matemática, su enseñanza y aprendizaje, (Llinares, 1996, Blanco y Contreras, 2002, 2012; Climent y Carrillo, 2002).

[20] La mayoría de los trabajos referidos se enfocan en estudiantes para maestro, sin embargo, algunos consideran a profesores en ejercicio (Chinnappan y Lawson, 2005; Ma, 2010), estudiantes para profesor de infantil (Clements y Sarama, 2011) o estudiantes para profesor de secundaria (Somayajulu, 2013; Carreño y Climent, 2019).

contenidos geométricos. En el segundo grupo nos centramos en los estudios que abordan el conocimiento geométrico de estudiantes para profesor y profesores en formación continua, de cara a la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas.

2.2.1. Consideraciones teóricas en torno al aprendizaje de la Geometría en estudiantes para profesor

Los procesos de aprendizaje y razonamiento seguidos por estudiantes para maestro (en adelante EPM) en torno al concepto de "altura de un triángulo" han sido estudiados por Gutiérrez y Jaime (1996), quienes proponen la consideración de la incidencia de los conocimientos previos (subconceptos) en la comprensión de un concepto geométrico nuevo. Estos autores toman como referencia los trabajos de Vinner (1983, 1991) y Vinner y Hershkowitz (1983) quienes diferencian entre *imagen conceptual* y *definición conceptual*, aspectos que le atribuyen una doble naturaleza a los conceptos geométricos (Fischbein, 1993)[21]. Posteriormente, estas nociones son consideradas por Blanco y Contreras (2002), quienes retoman el trabajo de Gutiérrez y Jaime (1996) para proponer a sus EPM actividades relacionadas con las líneas y puntos notables del triángulo que suponen enunciar definiciones y trazar representaciones gráficas de dichos conceptos. De este trabajo destacamos el análisis promovido por el formador, una vez concluido su desarrollo de las actividades, sobre los conceptos y subconceptos[22] involucrados en estas, ya que posibilita que los EPM se hagan conscientes del conocimiento (matemático) que poseen y se ejerciten en una práctica que contribuye a su conocimiento didáctico del contenido puesto que, no solo les obliga a generar y desarrollar conceptos y procesos matemáticos, sino también suponen el reconocimiento de las prácticas de enseñanza con las que aprendieron el contenido en cuestión[23], lo que propicia

---

[21] Fischbeim (1993) propone la Teoría de los Conceptos Figurales en la que concepto expresa una idea de una clase de objetos basada en sus características comunes, mientras que una imagen es la representación sensorial de un objeto o fenómeno.

[22] La idea de subconcepto ya había sido abordada por Gutiérrez y Jaime (1996) quienes, para el concepto de altura, identifican como subconceptos (o variables) los conceptos de: perpendicular, perpendicular desde un punto, vértice opuesto y altura de un triángulo.

[23] Los EPM reconocieron que su enseñanza estuvo basada en ejemplos prototípicos, en la enunciación (memorística) de definiciones, en el desarrollo de actividades estáticas y repetitivas y en la falta de experiencias concretas u otras en las que se emplearan recursos y materiales didácticos.

la toma de decisiones como docentes (en un nivel previo a las práctica de enseñanza). Más tarde, este trabajo es reproducido para analizar el conocimiento matemático de los EPM a la luz del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (Blanco y Contreras, 2012).

Por su parte, Guillén (2000, 2001) considera que estudiar el aprendizaje de los conceptos geométricos supone analizar la incorporación de *objetos mentales* (en el sentido de Freudenthal) en la estructura cognitiva de los EPM, diferenciándolos de los *conceptos*[24]. En relación con esto, tener en cuenta los distractores de orientación y de configuración (Vinner y Hershkowitz 1983), agrupados como distractores visuales (Guillén, 2000)[25], permite comprender la trascendencia de los ejemplos gráficos con los que enseñamos o aprendemos un concepto geométrico. Dichos ejemplos transmiten atributos que pueden ser críticos y no críticos[26], evidenciando la primacía de las imágenes conceptuales que poseen la lista de atributos más grande (no necesariamente críticos), razón por la cual se aprenden primero (*fenómeno prototipo*) y constituyen la base sobre la cual se realizan juicios y razonamientos (*juicios prototípicos*). Además de estos elementos, se considera que en la construcción de conceptos básicos también interviene un orden jerárquico en los ejemplos de dichos conceptos (se empieza por los prototipos y se continúa con otros), puesto que pueden originar ideas erróneas[27] como, por ejemplo, que un triángulo tiene una única altura y esta es vertical a la base.

---

[24] Según Puig (1997) Freudenthal considera que el *objeto mental* es lo que está en la cabeza de las personas como producto del uso que hacen de las matemáticas; mientras que el *concepto* es lo que está en "las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos" (p. 74).

[25] Los distractores visuales incluyen a los *distractores de orientación* y a los *distractores de configuración* puesto que ambos se asocian a la percepción visual de las representaciones físicas y gráficas de los conceptos geométricos (Guillén, 200). Así pues, los *distractores de orientación* se vinculan a la posición de dichas representaciones, ocasionando el establecimiento de prototipos (p. ej. los triángulos suelen trazarse con la base horizontal, paralela al eje de las abscisas). Por su parte, los *distractores de configuración* se asocian a aquellos ejemplos cuya consideración es escasa (p. ej. los triángulos oblicuángulos difícilmente se usan para ejemplificar las líneas y puntos notables del triángulo puesto que en el caso de las alturas dos de ellas caen fuera del triángulo, además de su punto de intersección).

[26] Los atributos críticos o relevantes "son las características que un objeto debe poseer para ser considerado un ejemplo de este concepto" (Wilson, 1990, citado por Blanco y Contreras, 2012, p. 112). Por su parte, los atributos no críticos o relevantes son las características que poseen algunos ejemplos de un concepto (Guillén, 2000).

[27] Hershkowitz (1990) clasifica las ideas erróneas en: 1) ideas erróneas (misconception) que los estudiantes se resisten a abandonar; b) ideas erróneas que los estudiantes corrigen con la adquisición

En la línea de lo anterior, el aprendizaje de los conceptos geométricos también se ve influenciado por el doble estatus de los objetos geométricos (Mesquita, 1992) pues se aprenden objetos generales y abstractos a partir de objetos concretos y particulares, ocasionándose una relación de dependencia entre ambos, que en muchos casos es ambigua y puede ocasionar obstáculos en su aprendizaje (Barrantes y Zapata, 2008). Según lo anterior, resulta relevante la distinción entre objeto geométrico, modelo geométrico y figura geométrica (Laborde, 1996) pues permite comprender que el objeto geométrico se materializa en el conjunto de representaciones físicas (modelo) y gráficas (figura, dibujo). Considerando la Teoría de los Conceptos Figurales de Fischbein, (1993) y lo dicho por Mesquita (1992) la visualización de las propiedades de dicho objeto geométrico juega un rol determinante en el aprendizaje de este.

El último aspecto abordado en el párrafo anterior -las propiedades- constituye un conocimiento imprescindible para clasificar, "actividad fundamental en las matemáticas" (Guillén, 2001, p. 415). En este sentido, la autora citada toma como referencia el aporte de De Villiers (1987) en torno a los tipos de clasificaciones (jerárquica y partición, a priori y a posteriori), interesándose sobre todo en la clasificación jerárquica o inclusiva[28]. Así pues, se encarga del estudio de las relaciones entre familias de prismas que establecen los estudiantes para maestro, a partir de actividades de identificación y enumeración de ejemplos de las clases establecidas, la descripción de las mismas, el establecimiento y justificación de ellas, su expresión de diferentes maneras y la construcción de diagramas (red) de clasificación.

Además de las referencias teóricas, los trabajos de Guillén (2000, 2001) aportan conocimiento metodológico a nuestra investigación, puesto que contemplan como instrumentos y técnicas de recogida de información las producciones escritas de los EPM y la observación de clases, respectivamente. Estos instrumentos resultan potentes para indagar sobre el conocimiento ya que, debido a la distinta naturaleza de ambos, permite complementar la información recogida.

---

del concepto; y c) ideas erróneas que los estudiantes incrementan al desarrollarse el proceso de adquisición del concepto (citado por Guillén, 2000).

[28] La autora usa indistintamente los términos clasificación jerárquica y clasificación inclusiva pues entiende que "los aspectos fundamentales de estas clasificaciones [jerárquicas] son el establecimiento de las clases y las relaciones de inclusión entre ellas" (Guillén, 2005, pp. 117).

Por otro lado, respecto del tópico abordado, encontramos mayor sintonía con el trabajo de Guillén (2001) pues, tal como señala la autora, el estudio de los prismas se vincula a los polígonos y su clasificación:

> También hay que considerar que las clasificaciones de los polígonos surgen inmersas en problemas de clasificación en el mundo de los poliedros. Centrar la atención en la base de los prismas nos lleva a las clasificaciones de los polígonos, o de diferentes tipos de polígonos, que a su vez generalizamos a los prismas; así establecemos los prismas de bases regulares e irregulares; los prismas triangulares, cuadrangulares, etc. (Guillén, 2001, p. 417)

De las investigaciones anteriores, consideramos importante señalar algunos resultados, de cara a los que se obtienen en este estudio. Así pues, los trabajos de Gutiérrez y Jaime (1996) y Blanco y Contreras (2002) coinciden en que en la resolución de problemas de geometría predomina el uso de imágenes conceptuales más no de definiciones formales, las cuales son empleadas cuando no queda más remedio. Esto muestra una falta de correspondencia entre las definiciones y las representaciones de los conceptos abordados, consecuencia de la enseñanza recibida en la Educación Primaria (Blanco y Contreras, 2002; 2012). Más aún, “los estudiantes de Magisterio tienen unas imágenes conceptuales muy próximas a las de los estudiantes de Primaria, abundando las imágenes basadas en las figuras prototípicas más frecuentes en los libros de texto (triángulos apoyados en la base horizontal y con la altura interior)” (Gutiérrez y Jaime, 1996, p. 27).

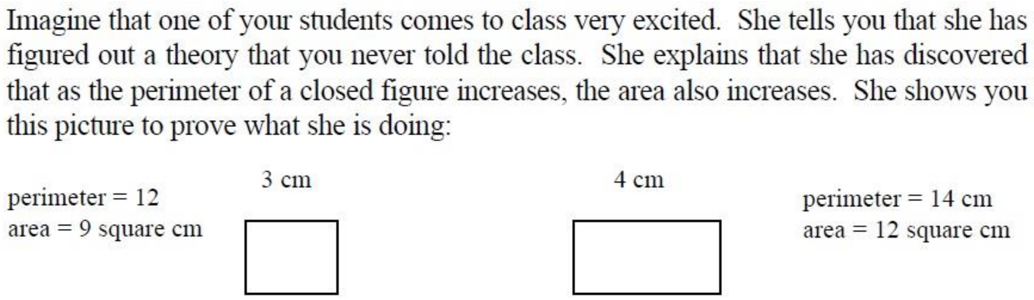
Del trabajo de Guillén destacamos la identificación de la jerarquía en los ejemplos de conceptos relativos a los sólidos, en la cual los prototípicos (p.ej. prismas rectos de base regular con aristas de distinta medida según sean laterales o de la base) se evocan primero (Guillén, 2000), dificultando la diferenciación entre ejemplos generales y particulares (Guillén, 2001). Esto ocasiona, a su vez, que para algunas familias de sólidos se omitan ciertos ejemplos (p. ej. los prismas cuyas bases son trapecios), o bien, se incluyan modelos que no corresponden (p. ej. incluir el cilindro y el cono en la clase de poliedros). Por otro lado, se comprueba una vez más la trascendencia de las representaciones provenientes de la enseñanza recibida, coincidiendo con Gutiérrez y Jaime (1996) y Blanco y Contreras (2002, 2012). Así pues, al identificar los distintos sólidos, los EPM toman en cuenta la posición de las representaciones (p. ej. un prisma se identifica como tal cuando se apoya sobre una de sus bases y no sobre una cara lateral), lo cual constituye un *distractor visual* (Hershkowitz, 1983) que puede originar ideas erróneas. No obstante, estas también pueden originarse por distractores no visuales tales como: problemas de lenguaje (p. ej. se extiende el significado cotidiano de un término al contexto matemático); el proceso de enseñanza que promueve el predominio de clasificaciones particionales (disjuntas) sobre las inclusivas (Guillén, 2000) ocasionando dificultad para establecer relaciones entre conjuntos de conceptos, a partir de propiedades y de ejemplos ; y por una incomprensión de expresiones lógicas (p. ej. "como mucho", "tantos como") y su negación (Guillén, 2001).

2.2.2. Estudios sobre las características y elementos del conocimiento geométrico de estudiantes para profesor de matemáticas

El trabajo de Ball y Wilson (1990) en torno a la relación entre perímetro y área, a partir de una situación de enseñanza-aprendizaje (Figura 3), pone en evidencia el nivel de profundidad del conocimiento de las matemáticas elementales, el aprendizaje memorístico (desprovisto de significado) de reglas y procedimientos matemáticos, así como una formación profesional centrada en encontrar respuestas correctas, aun cuando lo que interesa es lo que comprenden y piensan los profesores *de* y *sobre* las matemáticas ya que según eso organizan su conocimiento sobre esta materia (Ball, 1991). De hecho, sobre estas nociones (conocimiento *de* matemática, conocimiento *sobre* las matemáticas) se construyeron modelos de conocimiento del profesor, tal como se abordó en el apartado 2.1.2. Conocimiento del profesor de matemáticas.

Figura 3

Situación de aprendizaje propuesta por Ball y Wilson (1990, p. 4)


Imagine that one of your students comes to class very excited. She tells you that she has figured out a theory that you never told the class. She explains that she has discovered that as the perimeter of a closed figure increases, the area also increases. She shows you this picture to prove what she is doing:

La situación anterior (Figura 3), también ha sido propuesta por Blanco (1996) y Ma (2010) a estudiantes para maestro (EPM) en España y a profesores de China y Estados Unidos, respectivamente. El estudio de Blanco (1996) se interesó en indagar sobre el conocimiento de los EPM sobre los conceptos de área, perímetro y la relación entre ambos conceptos; el uso del conocimiento matemático para justificar los procesos de generalización; y el razonamiento pedagógico[29] de los EPM. Estos focos de interés son compartidos por Ma (2010) puesto que se interesa en el conocimiento matemático, las características y procesos del trabajo matemático (con predominio de la generalización) y la aculturación a las matemáticas[30].

Los resultados obtenidos en ambos trabajos evidencian la aceptación de la teoría del alumno (Figura 3), aunque en algunos casos la justificación estuvo sustentada en la intuición y la experiencia escolar que tuvieron, mas no en procedimientos matemáticos ni en la formación recibida en los centros de formación inicial (Blanco, 1996). En otros casos, no se justifica la teoría del alumno o se indica la necesidad de recordar cómo se calcula el área y el perímetro de una figura cerrada (Ma, 2010). Del trabajo de Ma (2010) resulta trascendente el establecimiento de niveles de comprensión en quienes dieron soluciones correctas, puesto que supone distintos grados de conocimiento matemático. Dichos niveles diferencian: 1) Desmentir la información a partir de contraejemplos, 2) identificar las posibilidades de relación entre el perímetro y el área; 3) clarificar las condiciones que determinaban las posibles relaciones; y 4) explicar las condiciones identificadas.

Finalmente, el análisis de las respuestas y soluciones dadas por los profesores llevó a Ma (2010) a señalar que el conocimiento disciplinar (identificado en la actitud hacia la posibilidad de resolver un problema –por sí mismo– y en su conocimiento del cálculo del área y perímetro de una figura) determina su disposición y confianza para resolver el problema

---

[29] El razonamiento pedagógico es entendido como el proceso de transformación de la materia para ser enseñada. Esto supone centrar la atención en el nivel y en las características de los estudiantes para, en función de ello, identificar, seleccionar y adaptar las estrategias y recursos a emplear en la enseñanza de la materia (Wilson, Shulman y Richert, 1987; Brown y Borko, 1992 citados por Blanco, 1996, p. 4).

[30] Este término es la traducción al español de ***acculturation*** (Ma, 2010) y hace referencia a la capacidad de los profesores (chinos) para pensar de manera rigurosa, usar términos matemáticos en el discurso y justificar opiniones con argumentos matemáticos, es decir, realizar y promover investigación matemática; aun cuando no han sido formados como matemáticos.

propuesto. Esta conclusión es importante porque se vincula tanto al conocimiento como a las creencias, aspectos que deben contemplarse en la renovación de la formación de profesores (Blanco, 1996) y, por ende, en la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas.

En la línea de las investigaciones anteriores, Baturo y Nason (1996) y Murphy (2012) indagan sobre el conocimiento de estudiantes para maestro en torno al concepto de área, por medio de una entrevista en la que se propone el desarrollo de tareas específicas. Así pues, se aborda el conocimiento sustantivo[31], la naturaleza de la matemática y su discurso, el conocimiento de la aplicación del tópico elegido en la cultura y la sociedad y las actitudes hacia las matemáticas[32] (Baturo y Nason, 1996), así como la influencia del conocimiento del contenido en el enfoque de enseñanza, observado en el plan de clase elaborado por cada EPM (Murphy, 2012).

Como resultado, Baturo y Nason (1996) identifican que *el conocimiento sustantivo* de los EPM carece de conexión entre el conocimiento concreto y las representaciones abstractas, por ello emplean fórmulas desprovistas de significado. Esto se hace visible, además, en la reproducción de un enfoque de enseñanza centrado en la aplicación de fórmulas, en lugar de desarrollar la Matemática como actividad humana y de investigación (en el sentido de Freudenthal), en el que se realice la medición de áreas a partir del llenado de espacios y considerando la dimensión estática y dinámica de este concepto (Murphy, 2012).

Por otro lado, al igual que en Blanco (1996) y Ma (2010), los EPM evitan comprobar, por iniciativa propia, las respuestas numéricas obtenidas, más aún, empleando métodos

---

[31] Baturo y Nason (1996) se refieren al conocimiento sustantivo como aquél que incluye el conocimiento de los significados matemáticos de los conceptos y procesos, con sus correspondientes conexiones. Esta noción tiene como antecedentes de referencia a Ball (1990) y a Schwab (1961/1978) y su contenido es incluido en lo que se conoce como "subject matter knowledge". El conocimiento sustantivo es analizado por Baturo y Nason (1996) según los tipos de conocimiento propuestos por Leinhardt (1988): conocimiento concreto, computacional y de principios.

[32] Las dimensiones abordadas, además del *conocimiento sustantivo*, son: el *conocimiento sobre la naturaleza de la matemática y su discurso* implica saber qué es una respuesta en matemática, cómo se establece el razonamiento y la justificación empleando los convenios establecidos, así como evaluar patrones, formular generalizaciones y construir pruebas. El *conocimiento sobre matemáticas en la cultura y la sociedad* que incluye conocer la evolución de esta ciencia, así como sus funciones y aplicaciones en la sociedad. Finalmente, *la actitud hacia las matemáticas* que involucra la implicación del estudiante con los temas y actividades matemáticas que propone el profesor (Baturo y Nason, 1996).

alternativos. Esto evidencia que “ninguno de los estudiantes había desarrollado un repertorio adecuado de conceptos matemáticos, procesos y principios que les permitiera ser capaces de examinar sistemáticamente los patrones y, formular y probar generalizaciones dentro del dominio de medición de áreas” (Baturo y Nason, 1996, p.259). Lo anterior, muestra que el conocimiento de los EPM sobre la naturaleza de la matemática y su discurso está centrado en procedimientos y cálculos, y como consecuencia, su actitud hacia las matemáticas se sustenta en la creencia de que la matemática es “una colección arbitraria de hechos y reglas” (p. 262), lo que justifica la escasa relación entre el conocimiento de los EPM y la aplicación de este (medición de áreas) en la cultura y la sociedad, así como en el desconocimiento de los antecedentes históricos de las unidades de medida y su respectiva generación, por ejemplo.

Además de la medición de áreas, se ha considerado otros temas geométricos para analizar el conocimiento de profesores y estudiantes para profesor de matemáticas. Así pues, Chinnapan y Lawson (2005) se interesan en caracterizar sistemáticamente la calidad del conocimiento que tienen dos profesores expertos, en torno a los cuadriláteros, mediante el uso de mapas conceptuales en los que la unidad básica de organización son los esquemas, no los conceptos. En estos mapas se representa el conocimiento geométrico y conocimiento de la enseñanza de la Geometría que resulta: de cuestionar (a los profesores) el conocimiento sobre los cuadriláteros y cómo enseñar este tema a los estudiantes; y de resolver, en voz alta, cuatro problemas relacionados con dicho tema y de reflexionar sobre el abordaje que harían los estudiantes de dichos problemas y las dificultades que tendrían al resolverlos. La información, recogida en tres sesiones de entrevista, es organizada en cuatro focos-esquema: definición de características necesarias (p. ej. lados iguales, ángulos iguales y lados opuestos paralelos), características relacionadas con propiedades definitorias (p. ej. la fórmula para determinar el área del cuadrado), aplicaciones del foco-esquema (p. ej. las baldosas del suelo como ejemplo real de cuadrado) y relaciones del foco-esquema con otros focos-esquemas (p. ej. la conexión entre cuadrado y rombo). Si bien “las cuatro dimensiones de nuestro marco describen aspectos de conocimiento geométrico, es la calidad de elaboración en cada una lo que califica como conocimiento de la enseñanza de la Geometría” (p. 213).

Como puede verse, el interés de Chinnappan y Lawson (2005) está puesto en el conocimiento base del profesor[33] (Shulman, 1986), en la forma de acceder a él y en lo que dicho profesor moviliza matemáticamente cuando enseña (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001). Esto último, supone deconstruir (unpacking) el conocimiento del contenido para hacer conexiones (Ball, 2000)[34]. Estos elementos, analizados en función del número de nodos y vínculos (análisis cuantitativo), así como de la integridad y vinculación (análisis cualitativo)[35] de los esquemas, informan sobre la calidad del conocimiento del profesor. De allí que Chinnappan y Lawson (2005) concluyan: “la ausencia de integración entre las diferentes ramas del esquema de conocimiento de los profesores podría impactar sobre su enseñanza, en la que ellos y sus estudiantes no puedan extraer importantes diferencias y similitudes entre esquemas de conocimiento clave, durante la interacción en el aula” (pp.217-218). Lo anterior, refuerza la consideración de la influencia del conocimiento del contenido en la enseñanza, puesto que en la medida que se posea un conocimiento profundo del tema, este será enseñado con un enfoque investigativo (Murphy, 2012).

Los anteriores focos de interés son retomados por Clements y Sarama (2011) quienes centran su atención en el conocimiento geométrico que movilizan futuros profesores de infantil, al construir trayectorias de aprendizaje[36], como parte de una propuesta formativa de

---

[33] El conocimiento base del profesor está compuesto por: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico y conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986).

[34] El establecimiento de estas, a su vez, requiere la identificación de coincidencias (y diferencias) entre dos conceptos e incluso, su jerarquización en muchos casos. En esto último, interviene la naturaleza de los conceptos geométricos, es decir, imagen conceptual y definición conceptual (Vinner y Dreyfrus, 1989)

[35] El análisis cualitativo que hacen Chinnappan y Lawson (2005) sobre los mapas conceptuales, está determinado por la consideración de dos dimensiones: Integridad y vinculación. La primera se analiza en términos de exhaustividad (p. ej. mencionar todas las características definitorias del foco esquema) y corrección (p. ej. diferenciar los ejes de simetría de un cuadrado y de un rombo). Por su parte, la vinculación, se analizar según la profundidad (conexiones verticales en el esquema), ramificación (conexiones horizontales entre secciones del mapa), entrecruzamiento (enlaces cruzados dentro del esquema o con otros esquemas) y complejidad de las relaciones (grado de elaboración, bidireccionalidad).

[36] “Son descripciones hipotéticas de pensamiento de los niños, de cómo ellos aprenden a lograr objetivos específicos en un dominio matemático y una relación, conjeturando una ruta a través de un conjunto de tareas instruccionales diseñadas para generar los procesos mentales o acciones hipotéticas que mueven a los niños hacia un desarrollo progresivo en los niveles de pensamiento” (Clements y Sarama, 2004, p.83, la traducción es nuestra).

desarrollo profesional[37] que busca mejorar sus competencias y a través de ellos, las de los estudiantes. Este trabajo llama la atención sobre el escaso interés en el dominio geométrico y el razonamiento espacial en todos los niveles de formación, justificando en este los desfavorables resultados de los estudios internacionales en torno al conocimiento geométrico de los estudiantes y el bajo nivel de razonamiento geométrico de los futuros profesores, quienes solo reconocen y categorizan las formas por su similitud física con los prototipos (nivel 1 del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele).

La elaboración de trayectorias de aprendizaje supone: 1) Determinar el contenido matemático que deben aprender los estudiantes, 2) Establecer el desarrollo progresivo del pensamiento y aprendizaje de los estudiantes, y 3) Diseñar tareas y estrategias instruccionales para ayudar a los estudiantes en dicha progresión. Cada una de estas etapas representa una oportunidad de desarrollo profesional puesto que, bajo la orientación de los formadores, los futuros profesores observan, reaccionan y ponen a prueba su conocimiento al estar en contacto con prácticas de aula. Esto permite que evidencien las lagunas y errores de su conocimiento geométrico, diferencien los atributos definitorios, accesorios y propiedades de un objeto, así como que desarrollen las dimensiones de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) propuestas por Ball, et al. (2008). Este modelo (MKT) también es considerado en los trabajos de Carreño y Climent (2009), Blanco y Contreras (2012), Somayajulu (2013), Aslan-Tutak y Adams (2015), entre otros, para caracterizar el conocimiento geométrico de estudiantes para profesor.

Carreño y Climent (2009) parten de una investigación más amplia[38] para analizar algunos de los resultados obtenidos, a la luz del *Mathematical Knowledge for Teaching*-MKT (Ball, et al., 2008), restringiendo su interés en las evidencias de conocimiento común del

---

[37] La propuesta formativa incluye la estructura teórica TRIAD (Technology-enhanced, Research-based, Instruction, Assessment, and profesional Development) basada en extensas revisiones teóricas e investigaciones para apoyar a los profesores en la secuencia de las sesiones, el entrenamiento para su ejecución, lo que incluye las interacciones entre tres grupos de participantes: profesores, directivos y niños, padres y comunidades, para que los profesores se centren en las matemáticas, las metas educativa y el trabajo de los niños (Sarama, et al., 2008).

[38] Esta investigación es el trabajo fin de máster realizado por Carreño en el año 2007 bajo la dirección de Climent. Dicho estudio lleva por título: Análisis del Conocimiento Geométrico en Estudiantes para profesor de Matemáticas. Capacidades y destrezas matemáticas que lo evidencian.

contenido (CCK)[39] y conocimiento especializado del contenido (SCK). Dicho análisis se sistematiza empleando cinco categorías[40], elaboradas a partir de la revisión teórica de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, el diseño curricular nacional peruano, las capacidades y destrezas propuestas por Román y Diez (2004)[41] para el área de matemática y las consideraciones sobre el aprendizaje de conceptos geométricos, las mismas que se han desarrollado en el apartado 2.2.1. (p. ej. Vinner y Hershkowitz, 1983; Fischbein, 1993; Scaglia y Moriena, 2005). De su estudio, Carreño y Climent (2009) concluyen que "el conocimiento geométrico de los estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria (EPP), en general, es limitado conceptualmente y por ello, carente de redes matemáticas complejas" (p. 193). En este sentido, las definiciones dadas por los EPP se vinculan a prototipos y no a la diferenciación entre características necesarias y suficientes (Guillén, 2000; Chinnappan y Lawson, 2005); además, el trabajo matemático que realizan es eminentemente intuitivo y carente del rigor que es propio de un razonamiento formal (Blanco, 1996, Ma, 2010). Esto, desde el modelo de Van Hiele, sitúa a los EPM en los dos primeros niveles de razonamiento geométrico, lo que coincide con los resultados de Clements y Sarama (2011).

Aunque estos resultados no aportan evidencias de conocimiento especializado del contenido, este trabajo resulta relevante para el estudio que presentamos, pues da cuenta del interés en profundizar en el conocimiento de estudiantes para profesor de matemáticas, en torno a los polígonos, desde distintos marcos teóricos (Van Hiele, MKT y MTSK). Este mismo interés, es manifestado por Blanco y Contreras (2012) al retomar un trabajo anterior (Blanco y Contreras, 2002), centrado en los conceptos de altura y ortocentro de un triángulo, para aproximarse a los subdominios del MKT, analizando aquellos resultados, a la luz de este modelo.

---

[39] Se usan las siglas del nombre en inglés de cada subdominio: Common content knowledge y Specialized content knowledge, respectivamente

[40] Percepción de la figura (PF), descripción de la figura (DF), definición matemática (DM), razonamiento matemático (RM) y demostración matemática (DMM).

[41] La categoría *Percepción de la figura*, por ejemplo, se analiza con las destrezas: *representación mental, identificar elementos reales y matemáticos y observación directa e indirecta*. Estas se hacen visibles por medio de indicadores como: *diferencia los ángulos cóncavos de los convexos o clasifica los triángulos según sus lados en equiláteros, isósceles y escalenos*, por ejemplo (Carreño, 2007).

Blanco y Contreras (2012) insisten en la importancia de las tareas en la formación inicial[42], puesto que generan espacios de acción-reflexión dentro de los cuales es posible construir y reconstruir el conocimiento matemático que un profesor necesita para enseñar. Este conocimiento involucra *conocimiento especializado del contenido* (SCK) para analizar los conceptos previos (subconceptos) y procesos implicados en la construcción de un concepto, *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS) para identificar las condiciones[43] que se han conseguido o no durante el proceso de adquisición del concepto, *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT) que permite analizar las distintas representaciones que se proponen en un libro de texto de un concepto, así como identificar en este o en situaciones de enseñanza, elementos que responden a prácticas poco adecuadas[44]. Todos estos subdominios, están sujetos a un "profundo" conocimiento matemático común (CCK) pues posibilita "encontrar semejanzas y diferencias o relaciones de inclusión entre conceptos geométricos (horizonte matemático)" (Blanco y Contreras, 2012, p. 118), imprescindibles para elaborar clasificaciones; así como construir una nueva forma de entender y realizar el trabajo matemático.

En sintonía con los trabajos anteriores, Aslan-Tutak y Adams (2015) desarrollan un estudio en torno a la formación matemática de futuros maestros respecto del conocimiento

---

42 Estos autores las denominan "tareas didácticas contextualizadas y personalizadas" (Blanco y Contreras, 2012, p.109). No obstante, en la revisión de la literatura que hacen identifican otras denominaciones: *situación matemática para la formación inicial* (Climent y Carrillo, 2002), *situaciones prácticas de enseñanza* (Dossey y otros, 1994). Estas situaciones, al estar inmersas en entornos de aprendizaje concretos (García y Sánchez, 2002) o ámbitos de investigación profesional (Cardeñoso y Azcárate, 2002), se caracterizan por situarse en contextos de enseñanza, provocar la reacción de los estudiantes para profesor, quienes deben asumir el rol de docente; posibilitar la construcción o reconstrucción de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (en sus diversas dimensiones, según el modelo de referencia), permitir la toma de conciencia de los conceptos erróneos, así como de las concepciones y creencias en torno a la matemática, su enseñanza y aprendizaje; y ayudar a la comprensión de directrices curriculares provenientes de las reformas educativas y que atañen a la educación matemática (Blanco y Contreras 2002).

43 Blanco y contreras (2012) establecen condiciones para asegurar que un concepto ha sido adquirido: 1) Capacidad de reconocer las condiciones y propiedades que lo determinan, 2) Identificar ejemplos válidos y no válidos, 3) Reconocer distintos significados, 4) Aplicarlos a situaciones que así lo requieran, 5) Conectarlos con otros conceptos (p.112).

44 Algunos elementos de una enseñanza inadecuada de la geometría escolar son: uso de ejemplos prototípicos y problemas "tipo", énfasis en la definición sin contemplar el análisis de los subconceptos, ausencia de experiencias concretas y escasez de recursos materiales y tecnológicos (Blanco y Contreras, 2012).

del contenido geométrico, la integración de este con la enseñanza y el uso de las producciones de los estudiantes. Para ello, emplean una metodología mixta, en la que contemplan tres fases: una investigación cualitativa, el desarrollo de actividades de aprendizaje para la enseñanza y una investigación cuantitativa. La *investigación cualitativa* se realiza recogiendo información mediante entrevistas personales (sobre sus experiencias de aprendizaje y sus perspectivas de cómo mejorar su conocimiento geométrico), observación de sesiones de clase de geometría y la recopilación de los materiales empleados en estas, así como las producciones de los informantes. Esta información fue sistematizada en narraciones, de las cuales se realiza un análisis narrativo y un análisis temático. Por su parte, en el *desarrollo de actividades de aprendizaje para la enseñanza*, se diferencian actividades de geometría y actividades didácticas. En las primeras se propuso trabajar, en parejas, la clasificación de polígonos según las indicaciones dadas; la discriminación de figuras agrupadas según sus características comunes y la representación de relaciones entre polígonos, según el esquema dado. Además, individualmente, debían construir la definición de algunos términos geométricos. En las actividades didácticas se propuso analizar, en parejas, el trabajo de estudiantes de primaria para identificar el conocimiento y conceptos erróneos que tienen y lo que harían para enseñar los conceptos involucrados. Finalmente, la *investigación cuantitativa* se realiza para estudiar el aprendizaje geométrico adquirido durante el desarrollo de una asignatura, diferenciando dos grupos control y dos grupos experimentales. Dicho aprendizaje se comprobó aplicando la sección de Geometría del cuestionario para medir el conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por la Universidad de Michigan[45], como pre y post test.

En su interés por mejorar la formación del profesorado de matemáticas, Aslan-Tutak y Adams (2015) hacen una revisión teórica de diversos trabajos centrados en el conocimiento del profesor, destacando los aportes de Shulman (1986, 1987), Ball et at., 2008 y Carrillo, et al., 2013). De estos resalta: la importancia del conocimiento del contenido para una efectiva formación y actuación didáctica; la especificidad del conocimiento matemático del profesor y la consideración del MKT en el Teacher Education and Development Study in Mathematics

[45] En el marco del Learning Mathematics for Teaching Project (LMT).

(TEDS-M[46]); y la potencialidad del modelo Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)[47] para fortalecer la conexión del conocimiento del profesor con las prácticas de enseñanza, respectivamente. Además, toma de referencia trabajos en los que se destaca el uso de las producciones de estudiantes, en programas de formación de profesores, para mejorar el aprendizaje de la materia y las prácticas de instrucción (p. ej. Lampert y Ball, 1998; Franke y Kasemi, 2001).

De los resultados de este estudio, se concluye que el conocimiento del contenido geométrico es limitado y por ello se hace necesario su estudio y profundización (Clements y Sarama, 2011), centrado en el carácter especializado que se necesita para enseñar y no solo en el dominio procedimental (Ma, 2010, Ball et al, 2008, Carrillo et al., 2013) y que contemple los contextos de enseñanza (Blanco y Contreras, 2012), en los que se incluye las producciones de los estudiantes.

El trabajo de Escudero-Domínguez y Carrillo (2014), corrobora los resultados de las investigaciones anteriores, como: el escaso dominio del conocimiento matemático en los estudiantes para profesor (Clements y Sarama, 2011; Aslan-Tutak y Adams, 2015). Este se evidencia en las definiciones que recitan, producto de la memoria y de la falta de discriminación entre características críticas y no críticas, necesarias y suficientes (Gutiérrez y Jaime, 1996; Blanco y Contreras, Guillén, 2000, Chinnappan y Lawson, 2005). Lo anterior redunda en representaciones prototípicas, en clasificaciones disjuntas y conceptos erróneos (Guillén, 2000; Carreño y Climent, 2009) en torno a los cuadriláteros.

El estudio de Escudero-Domínguez y Carrillo (2014) forma parte de un conjunto de investigaciones (p. ej. Rojas, 2014; Montes, 2014; Flores-Medrano, 2015; Escudero-Ávila, 2015, Vasco, 2015; Aguilar, 2016; Liñán, 2017; Delgado-Rebolledo, 2020), en las que se incluye la nuestra, que indagan el conocimiento del profesor de matemática en distintos ámbitos de la Matemática (p. ej. Aritmética, Álgebra Lineal, Geometría), empleando el modelo Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas-MTSK. De estos, destacamos el trabajo de Aguilar (2016) por poner atención al conocimiento especializado que evidencia una

[46] Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del profesorado de Matemáticas realizado por la Asociación internacional para la evaluación del Rendimiento Educativo (IEA).
[47] Siglas del nombre en inglés: Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Este modelo se aborda en el siguiente apartado

maestra de primaria en torno a la enseñanza de los polígonos, involucrando en ello la clasificación de figuras planas. Por su parte, Liñán (2017) indaga el conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5° de primaria, lo cual le permite abordar, entre otros temas, los elementos de polígono y la clasificación de este, así como las clases de cuadriláteros. Por otra parte, si bien el trabajo de Delgado-Rebolledo (2020) no aborda un conocimiento geométrico, el hecho estudiar la práctica matemática de definir, entre otras, hace que sea un referente para nuestra investigación pues coincide con uno de nuestros focos de interés. Estos tres trabajos, además del de Pascual et al., (2019) que estudia la definición de polígono en estudiantes para maestro, son relevantes para nuestro estudio y por ello, los tomamos de referencia en la discusión de nuestros resultados.

2.3. El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK*)

El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en adelante MTSK, surge del análisis de las dificultades identificadas al diferenciar y delimitar subdominios del MKT, presentados en Ball et al (2008): Conocimiento común (CCK) y conocimiento especializado (SCK), conocimiento especializado (SCK) y conocimiento del horizonte matemático (HCK); y conocimiento especializado (SCK) y conocimiento del contenido y estudiantes (KCS) (Carrillo, et al., 2013). No obstante, además de las dificultades, también se toma en cuenta el aporte que hace a la conceptualización del conocimiento del profesor[48] (Muñoz-Catalán, et al., 2015) y su potencialidad para ser usado como herramienta de análisis y caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas, así como para orientar la formación del profesores (Climent, et al., 2014).

Afrontar las dificultades identificadas en el MKT obliga a realizar una mirada exhaustiva al dominio matemático de dicho modelo. Como consecuencia de ello, se determina que lo especializado no puede reducirse a un subdominio (Escudero-Ávila, Flores-Medrano y

[48] Dicho aporte consiste en: el refinamiento de las ideas del Shulman (1986) sobre el conocimiento didáctico del contenido (PCK), la incidencia en la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas que le dota de exclusividad, diferenciándolo de otros profesionales, y en la asociación de una visión transversal de la matemática escolar (Muñoz-Catalán, et al, 2015).

Carrillo, 2012), por lo que el conocimiento especializado del contenido (SCK) se torna innecesario y el enfoque del conocimiento del profesor se altera. Además, se extiende el alcance del conocimiento del horizonte matemático (HCK), se reinterpretan los subdominios del conocimiento didáctico del contenido (PCK) y "se elimina cualquier referencia a un núcleo común de conocimiento compartido con otros que hacen uso de las matemáticas" (Carrillo, et al., 2013, p. 2991). Así pues, se concluye que el conocimiento profesional de un profesor de matemáticas incluye al conocimiento especializado de esta materia. En este sentido, dicha especificidad y especialización (del conocimiento matemático) debe permitir diferenciarlo de otros conocimientos del profesor de matemáticas (p. ej. conocimiento pedagógico general), del conocimiento especializado de profesores de otras disciplinas y del conocimiento especializado de otros profesionales de las Matemáticas (Carrillo, et al., 2013).

En resumen, el modelo MTSK es, a la vez, un marco teórico y una herramienta metodológica puesto que permite "estudiar, de forma analítica, el conocimiento del profesor de matemática" (Flores, Escudero y Aguilar, 2013, p. 276). En este sentido, posibilita modelar el conocimiento matemático núcleo del profesor, luego de analizar este según el conjunto de categorías que constituyen cada subdominio (Flores-Medrano, et al., 2014). En el ámbito de la formación de profesores, inicial y continua, proporciona elementos para organizar la reflexión (colectiva o individual) sobre el conocimiento requerido para enseñar matemáticas, permitiendo explicitar el conocimiento que se posee el profesor y del que carece, así como adquirir éste mediante la ejecución y el diseño de tareas[49] (Climent, et al., 2014).

En el MTSK se diferencian dos grandes dominios: el conocimiento matemático (*mathematical knowledge*-MK) y el conocimiento didáctico del contenido (*pedagogical content knowledge*-PCK). El primero está ligado a la matemática como disciplina científica en un contexto escolar (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014), razón por la cual necesita ser conocida por el profesor para enseñar un contenido determinado. Por su parte, el PCK se enfoca en el conocimiento matemático en tanto objeto de enseñanza-aprendizaje y por ende, vinculado a las metas de aprendizaje del sistema educativo de un

[49] Las tareas, según el *Profesional Learning Tasks*-PLT (Wilson Sztajn y Edgington, 2013) se entienden como descripciones del pensamiento y aprendizaje de los estudiantes, en un tema matemático específico, diseñadas para promover aprendizaje en los profesores e investigar sobre el conocimiento matemático que poseen.

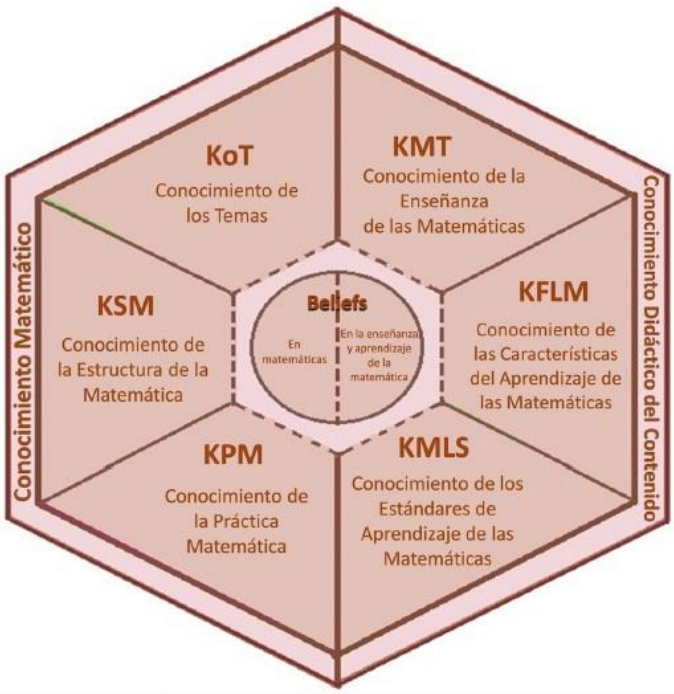
país. Así pues, el conocimiento didáctico del contenido consiste en "mirar el conocimiento didáctico a través de la lente del conocimiento disciplinar" (Carrillo, Contreras y Flores, 2013, p. 194), lo cual se corresponde con la idea de Shulman (1986) en torno al PCK y a su vez, explica por qué los autores señalan que en el MTSK la Matemática es el punto de partida para conocer la naturaleza del conocimiento especializado del profesor. En este sentido Muñoz-Catalán, et al., (2015) sostienen:

> Por ello, nos interesan, entre otras cosas, el conocimiento del profesor sobre los temas que ha de enseñar, sobre las relaciones entre objetos matemáticos, o sobre la forma de hacer matemáticas, así como sobre estrategias y recursos para enseñar matemáticas, sobre las dificultades de aprendizaje de los alumnos o sus errores habituales, y sobre lo que puede esperarse que aprendan los alumnos en un nivel determinado (p. 591).

En la Figura 4 queda representada la estructura del modelo MTSK. Como puede verse, se conservan los dos dominios establecidos por Shulman (1986) y definidos por Ball et al. (2008) pero, además, "se incluye el dominio de las creencias y concepciones, como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento" (Muñoz-Catalán, et al., 2015, p. 595).

Figura 4

Representación del MTSK (Muñoz-Catalán, et al., 2015, p. 596)



A continuación, se describe el contenido de cada subdominio incluido en los dominios conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK).

2.3.1. Dominio del Conocimiento Matemático (Mathematical Knowledge-MK)

El conocimiento matemático (MK) incluye el conocimiento profundo de afirmaciones, proposiciones, postulados y principios fundamentales de la Matemática conectados mediante la lógica natural y formal constituyendo un todo coherente (Liñan, Contreras y Barrera, 2016). Está integrado por tres subdominios: conocimiento de los temas (Knowledge of topics-KoT), conocimiento de la estructura de la Matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics-KSM) y conocimiento de la Práctica Matemática (Knowledge of Practices in Mathematics-KPM).

2.3.1.1. Conocimiento de los Temas (Knowledge of Topics- KoT)

Es el conocimiento de los conceptos, proposiciones[50], propiedades, procedimientos (estándar y alternativos), clasificaciones, definiciones, fórmulas y algoritmos, con sus respectivos significados y demostraciones, así como las distintas formas de representación conceptual y las conexiones intraconceptuales debido a su proximidad con un concepto matemático específico (Climent, Carreño y Ribeiro, 2014).

Este subdominio se vincula al conocimiento *de* matemáticas (Ball & McDiamird, 1990) dado que este "incluye conceptos específicos, definiciones, convenios y procedimientos (p. ej. qué es un rectángulo, cómo encontramos el valor máximo de una función)" (p. 8). Respecto del MKT, el KoT se aleja del conocimiento común del contenido (CCK) porque se desliga de un referente hipotético con el que puede o no compartir el conocimiento en cuestión. Sin embargo, se espera que sea, al menos, igual que el que aprenderán sus alumnos, pero dotado de mayor profundidad y formalismo (Carrillo, et al., 2013). Para caracterizar este subdominio se proponen cuatro categorías: (i) Fenomenología y aplicaciones; (ii) definiciones, propiedades y sus fundamentos; (iii) registros de representación; (iv) procedimientos (Carrillo-Yañez et al., 2018).

[50] Inclúyase los teoremas, corolarios, axiomas y principios.

(i) Fenomenología y aplicaciones

La fenomenología se entiende en el sentido de Freudenthal como un “método de análisis de los contenidos matemáticos” (Puig, 1997, p. 62). Este análisis contempla dos perspectivas: los modelos (fenómenos) atribuibles a un tema, que posibilitan generar conocimiento matemático (p. ej. los polígonos como objetos geométricos organizan un conjunto de fenómenos tales como: formas arquitectónicas, urbanismo, superficies que limitan un recinto y el modo de cubrirlas, (empapelado, embaldosado)); y los usos y aplicaciones de un tema (p. ej. la extensión de las clases de polígonos a los poliedros).

(ii) Definiciones, propiedades y sus fundamentos

“Definir es enunciar un conjunto mínimo de propiedades que delimitan un objeto geométrico, diferenciándolo de los demás objetos” (Bolea, et al., 2008, p. 26). Esta delimitación exige en la geometría el “desprendimiento” de las propiedades sensibles:

> “Los objetos geométricos, como conceptos, se elaboran a partir de los objetos mentales constituidos como medios de organización de las figuras ‘geométricas’ observadas o trazadas en la tierra, para lo que sus definiciones han de desprenderse de las propiedades sensibles de esas figuras que pretenden organizar” (Puig, 1997, p.87).

Lo anterior muestra la estrecha vinculación entre la definición de un objeto y las propiedades atribuibles al mismo. Éstas constituyen atributos, de dicho objeto, que se explicitan mediante enunciados y proposiciones (Godino, 2002).

Además de las definiciones y propiedades, en esta categoría se incluyen las relaciones o fundamentos intraconceptuales (p. ej. los ángulos adyacentes de un paralelogramo son suplementarios porque se forman por la intercepción de dos lados paralelos y un lado común) y el enunciado de fórmulas, teoremas, axiomas y postulados (p. ej. la cantidad total de diagonales de un polígono es igual al semiproducto del número de lados de este por dicha cantidad disminuida en tres).

(iii) Registros de representación

La representación se entiende como un sistema semiótico que incluye distintas formas (numérica, gráfica, verbal analítica, etc.) y elementos de lenguaje que el profesor utiliza al comunicar conocimiento (matemático). Tomando en cuenta las parejas de registro propuestas por Duval (2006), se ha de decir que en geometría es imprescindible la coordinación entre: lenguaje→notaciones simbólicas (perpendicular, $\perp$), lenguaje→diagramas (la organización, diagrama o esquema de la clasificación de los cuadriláteros), lenguaje→figura (palabra polígono, dibujo de un polígono, equiparable con significante y significado en la visión de Saussure), representaciones gráficas→notaciones algebraicas de relaciones (diagonales trazadas desde un vértice de un polígono, se concluye que se trazan n–3 diagonales).

(iv) Procedimientos

Se entiende por *procedimiento* el conjunto de acciones ordenadas, de principio a fin, para la consecución de una meta" (Monereo, 1999). Centrados en la tarea matemática, dichas acciones se vinculan a algoritmos (convencionales y alternativos), a estrategias y condiciones para proceder y a operaciones (Flores-Medrano, et al., 2014).

Así pues, en esta categoría se incluye por ejemplo, la triangulación de un polígono para inferir la fórmula que permita calcular la cantidad de diagonales; el cálculo del área de un triángulo dibujado en una trama de puntos (podría usarse la fórmula $(b \times h)/2$, cuadrangular el triángulo de tal forma que se consiga triángulos rectángulos para restarlos del área total, aplicar el teorema de Pitágoras, etc.). Este último ejemplo, muestra la diversidad de procedimientos que podrían aplicarse, pero también, la necesidad de saber qué procedimiento es el más conveniente dadas ciertas circunstancias.

2.3.1.2. Conocimiento de la Estructura de la Matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics-KSM)

Es el conocimiento de las conexiones entre elementos matemáticos, que según un criterio de temporalidad de secuenciación (no curricular) de la matemática permiten diferenciar conexiones interconceptuales de (i) complejización o (ii) simplificación. Además, según un criterio de demarcación del objeto matemático permite diferenciar, conexiones interconceptuales (iii) transversales y (iv) auxiliares (Carrillo-Yañez et al., 2018).

i) Categoría: conexiones de complejización

Se refiere al conocimiento que tiene un profesor sobre las redes que se establecen en torno a un concepto, desde una perspectiva más avanzada que la que corresponde al contexto escolar[51] en el que se sitúa (Montes y Climent, 2016). Por ejemplo, el concepto de simetría axial es la complejización de la actividad de completar el trazo de figuras, en la educación infantil.

ii) Categoría: conexiones de simplificación

Se refiere al conocimiento que tiene un profesor sobre ¿las redes que emergen de la reflexión o uso de un concepto desde una perspectiva más simple que la que corresponde al contexto escolar en el que se encuentra (Montes y Climent, 2016). Por ejemplo, ver un cilindro como la descomposición de este en las figuras planas círculo y paralelogramo y considerar dicha descomposición en el cálculo del área del cilindro constituye una simplificación. Así mismo, el establecimiento de una serie de razones iguales $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k\right)$ es la simplificación de la ley de senos $\left(\frac{a}{sen(A)}=\frac{b}{sen(B)}=\frac{c}{sen(C)}\right)$.

iii) Categoría: conexiones transversales

Son redes que establece un profesor entre un concepto y otros que, debido a su naturaleza, aparecen a lo largo de toda la matemática escolar (Montes y Climent, 2016). Por ejemplo, el concepto de área se trabaja en las figuras planas, en objetos tridimensionales; al hallar integrales usando el área bajo la curva e incluso en física, en el cálculo de los descriptores del movimiento de un móvil.

iv) Categoría: conexiones auxiliares

Son redes que establece el profesor entre el concepto que aborda y otros que no son propios de este, para complementar su estudio, sin alterar el foco de la actividad matemática (Montes y Climent, 2016). Por ejemplo, el uso de ecuaciones de segundo grado, permiten el cálculo de área y volúmenes, así como de cantidad de diagonales de un polígono.

Finalmente, además de las conexiones interconceptuales, en el KSM queda pendiente profundizar en el conocimiento que trasciende las conexiones entre los temas (conocimiento

---

[51] Se emplea la expresión "contexto escolar" para aludir al carácter temporal desde una visión secuenciadora, en lugar de visión curricular, lo cual resulta un cambio acertado pues deja de lado la consideración de contenido anteriores y posteriores al currículo (Montes y Climent, 2016). No obstante, la realidad temporal de los objetos matemáticos y sus contextos de uso puede modificar su carácter. Por ejemplo, la definición "ε–δ" de función continua pasa a ser una caracterización en el contexto universitario cuando esta noción es definida por sucesiones (Lacasta, et al., 2005). Así, en general, el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) debe observar la dimensión institucional y funcional de los objetos: dónde y para qué son utilizados.

desde una perspectiva superior) para establecer una visión global de las matemáticas escolares, lo cual se correspondería literalmente, con el nombre del subdominio (Montes y Climent, 2016).

2.3.1.3. Conocimiento de la Práctica Matemática (Knowledge of Practices in Mathematics-KPM)

Considerando como práctica matemática a toda "actividad matemática cuyo uso constituye un pilar en la creación matemática y que tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas para esta" (Flores-Medrano, 2016, p. 30), definimos este subdominio como el conocimiento de las formas de proceder en Matemática y de las características del trabajo matemático (Flores-Medrano, et al., 2014). Así pues, es, por un lado, el conocimiento de cómo se hace matemática (p. ej. cómo se elaboran definiciones o demostraciones, cómo se establecen relaciones, cómo se argumenta y generaliza) y, por otro lado, el conocimiento de la sintaxis propia de las matemáticas, que incluye el establecimiento de convenios y el uso de la lógica proposicional.

Aunque la génesis de este subdominio se asocia con la estructura sintáctica (Schwab 1978, citado en Shulman, 1986) y con el conocimiento *sobre* matemáticas (Ball y McDiamird, 1990), aun no se ha logrado establecer categorías como para los demás subdominios. Lo que se tiene definido hasta ahora es dos perspectivas de conocimiento de las prácticas matemáticas, una general y otra específica (Carrillo-Yañez et al., 2018)[52]. En la primera se

---

[52] Si bien esta es la última caracterización del Conocimiento de la Práctica Matemáticas, en nuestra investigación hemos tomado como referencia un documento de trabajo, posterior a Flores-Medrano (2016) en el que se proponen los siguientes descriptores para este subdominio: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación) y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. Aunque no se explicita una asociación a una práctica general o particular, sí puede inferirse qué descriptor se vincula a una perspectiva general o particular del quehacer matemático. Posteriormente, en Campos-Cano y Flores-Medrano (2019) se propone un avance en la caracterización del KPM considerando que cada práctica se convierta en una categoría. En dicho documento se pone la atención sobre las prácticas de demostrar y definir para las cuales se definen subcategorías. En la línea de Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), el trabajo de Delgado-Rebolledo (2020) diferencia las prácticas de demostrar, definir, resolver problemas y el papel del lenguaje matemático como categorías y para ellas propone subcategorías y descriptores.

incluye el conocimiento de cómo se desarrollan las matemáticas más allá de cualquier concepto en particular, por ejemplo, el significado de las condiciones necesarias y suficientes al definir, el tipo de prueba y la forma de aplicar una demostración, el uso de heurísticos en la resolución de problemas o de los ejemplos y contraejemplos, desligados de un uso didáctico (Flores-Medrano, 2016). En el KPM específico se aplica el KPM general a las particularidades de un determinado tema.

Un ejemplo de esta perspectiva puede ser usar la inducción (KPM general) para probar la fórmula de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono o de la cantidad total de diagonales. Otro ejemplo sería, el trazado de segmentos auxiliares (construcción geométrica) para demostrar la propiedad de la medida del ángulo exterior de un triángulo o de la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo.

2.3.2. Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge-PCK)

Entendemos el conocimiento didáctico del contenido (PCK) con un dominio complementario al dominio matemático que, en conjunto, dota de un carácter especializado al conocimiento del profesor de matemáticas. En este sentido, “es un conocimiento distinto [del conocimiento matemático], con entidad propia y referentes diferentes (…) puesto que está dirigido a la enseñanza de las matemáticas” (Escudero-Ávila, 2015, p.35).

En el MTSK se considera el PCK formado por tres subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

2.3.2.1. Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Teaching-KMT)

Es el conocimiento que resulta de cuestionar los fundamentos matemáticos que sustentan o se vinculan a las actividades de enseñanza. En este sentido, se contempla solo “aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza”

(Escudero-Ávila, Contreras y Vasco, 2016, p. 35). Así pues, se incluye el conocimiento de recursos, formas de enseñar, estrategias y teorías de enseñanza de las matemáticas.

En este subdominio se diferencian tres categorías: (i) teorías de enseñanza; (ii) recursos materiales y virtuales; y (iii) estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

(i) Teorías de enseñanza

Es el conocimiento de teorías, modelos o propuestas específicas de enseñanza que son resultados de la investigación en Educación matemática o que se incluyen en las sugerencias metodológicas del currículo, así como las que emergen de la observación y reflexión sobre la actividad matemática en el aula (Escudero-Ávila, 2015). Estas fuentes de origen dotan a dichas teorías de un carácter institucional y personal, correspondientemente. Por ejemplo, *las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele* (1957) [información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre, integración] son sugerencias institucionalizadas para organizar las actividades que se proponen en una sesión de enseñanza-aprendizaje de geometría, así como la *teoría de situaciones didácticas* de Brousseau (1986) [acción, formulación, validación e institucionalización].

(ii) Recursos de enseñanza (materiales y virtuales)

En esta categoría se considera el conocimiento matemático del profesor sobre los recursos que puede emplear para enseñar un tema matemático. Este conocimiento incluye las limitaciones u oportunidades que proporcionan dichos recursos en referencia a ese tema matemático. Así, por ejemplo, no basta conocer el geoplano o la trama de puntos como recurso didáctico, sino que estos recursos no permiten trazar triángulos equiláteros ni ningún polígono regular mayor a cuatro lados, por ejemplo.

(iii) Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Se refiere al contenido del conocimiento del profesor, sobre las potencialidades y limitaciones matemáticas, de actividades, estrategias y técnicas que son empleadas para enseñar cada uno de los contenidos matemáticos. Se incluye también el conocimiento de ejemplos, metáforas, situaciones y explicaciones que se emplean para representar un contenido matemático. Por ejemplo, la metáfora de “pedir prestado”[53] es empleada para desarrollar la resta con llevada así como, alternativamente, lo es el “reagrupamiento” de unidades (Ma, 2010). También sirve de ejemplo de esta categoría el proponer la situación de los carpinteros[54] que hace parte de los cuestionariso empleados en esta investigación (vease epígrafe seguinte) para promover la aplicación de los conocimientos sobre los cuadriláteros, lo que podría asociarse, además, a la fase de orientación libre del modelo de Van Hiele.

2.3.2.2. Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics-KFLM)

De manera similar al subdominio anterior, el conocimiento matemático se mira como objeto de aprendizaje y por ello se analiza la interacción entre el conocimiento matemático y el aprendiz y no de este último en sí mismo. Así pues, interesa saber cuáles son los fundamentos matemáticos que sustentan el aprendizaje de los alumnos tales como, por ejemplo: el origen matemático de los errores de los alumnos (p. ej. al establecer relaciones entre cuadrado y rombo), o qué conceptos o procedimiento matemáticos generan dificultad para comprender un concepto nuevo o distinto de los anteriores (p. ej. al estudiar la adición en sistemas de numeración de distinta base a la decimal).

Dado que el KFLM se refiere a cómo las matemáticas son aprendidas, se diferencian cuatro categorías en este subdominio: (i) teorías de aprendizaje, (ii) fortalezas y dificultades, (iii) formas de interacción con un contenido matemático y (iv) intereses y expectativas.

---

[53] Hay que notar que esta metáfora tiene asociados procedimientos que tienen implicaciones para un aprendizaje matemático adecuado de los alumnos.

[54] Tres carpinteros A, B y C quieren cortar cuadrados de madera y después de cortar cuadriláteros convexos hacen las siguientes comprobaciones:

- A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido.
- B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido.
- C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado.

¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Si considera que alguno(s) no consiguió cortar un cuadrado, indique qué cuadrilátero construyó. Justifique para cada construcción realizada.

(Extraído de http://www.semcv.org/mauriciocontreras/G1.pdf)

(i) Categoría: Teorías de aprendizaje

Considera el "conocimiento que muestra el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiante" (Escudero-Ávila, 2015, p. 44). Este involucra tanto al aprendizaje de la matemática en general como al de un contenido particular. Por ejemplo, el conocimiento de los *niveles de razonamiento geométrico* propuesto en el modelo Van Hiele (reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor) permiten justificar el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de un tema geométrico específico debido al carácter local de dichos niveles, es decir, que en un tema A, un estudiante puede mostrar un nivel de razonamiento distinto al evidenciado en un tema B.[55]

(ii) Categoría: Fortalezas y dificultades

En esta categoría se "engloba conocimiento sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos" (Flores-Medrano, et al., 2014, p. 64). Por ejemplo, es parte del conocimiento del profesor que una dificultad de los estudiantes es considerar que la posición de las figuras geométricas es un factor determinante para discriminar las mismas. Así, un rombo es un cuadrilátero de lados iguales que se encuentra en una posición particular como estar apoyado en uno de sus vértices.

(iii) Categoría: Formas de interacción con un contenido matemático

Se incluye el conocimiento del profesor sobre los procesos, estrategias y algoritmos que realizan los estudiantes, así como el lenguaje o vocabulario que emplean en las distintas tareas matemáticas. Hace parte de esta categoria un conocimiento relativo a, por ejemplo, conocer que al pedirle a un estudiante que dibuje un triángulo, este trazará probablemente el triángulo con un lado (la base) en la horizontal, y casi siempre será isósceles o equilátero.

---

[55] Los elementos que componen el modelo de Van Hiele, las fases de enseñanza y los niveles de razonamiento geométrico, permiten ejemplificar con dicho modelo dos categorías de subdominios distintos. Así pues, dado que las fases de enseñanza (información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración) indican el rol que ha de asumir el docente y el aprendizaje que ha de promoverse, en correspondencia con cada nivel de razonamiento geométrico, estas las hemos vinculado la categoría Teorías de enseñanza (KMT). Por su parte, los niveles de razonamiento geométrico permiten comprender cómo es el aprendizaje de conceptos que tienen los estudiantes en un momento determinado. De allí que asociemos los niveles de razonamiento a las Teorías de Aprendizaje (KFLM).

(iv) Categoría: Intereses y expectativas

En esta categoría se incluye el conocimiento del profesor sobre la ansiedad que puede generar las matemáticas a los estudiantes, así como también, de las ideas, creencias, expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre la idea que tienen los alumnos de que para calcular áreas necesitan memorizar un listado de fórmulas.

2.3.2.3. Conocimiento de los estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards-KMLS)

Este subdominio tiene una naturaleza distinta a las dos anteriores pues se cuestiona el contenido matemático que se propone enseñar o aprender, así como los materiales y recursos que se sugieren en las normativas curriculares oficiales y no oficiales como son las asociaciones profesionales (p. ej. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y grupos de investigación en Educación Matemática, así como las que proceden de la experiencia del profesor. Esto último añade “un elemento de juicio y crítica en relación con los prescrito por la administración educativa” (Escudero-Ávila, 2015, p. 51). Así pues, interesa considerar el conocimiento que un profesor tiene acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante, el nivel conceptual con el que se espera que lo aprenda y los materiales y recursos que se proponen para dicho aprendizaje, en un determinado momento escolar (Flores-Medrano, et al., 2014; Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016).

Como puede inferirse de lo último, en este subdominio se considera la ubicación temporal de los contenidos matemáticos, mas no de las conexiones interconceptuales como se hace en el subdominio de Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM). Por ello, resulta trascendente la consideración de los estándares de aprendizaje pues indican “el nivel de capacidad -atribuible a los estudiantes en un determinar momento escolar- para entender, construir y saber matemáticas” (Flores-Medrano, et al., 2014, p. 66).

En el KMLS se diferencian tres categorías de análisis, aun cuando se reconoce que “es el subdominio menos analizado hasta el momento” (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016, p.50). Dichas categorías son: (i) expectativas de aprendizaje; (ii) nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y (iii) secuenciación con temas anteriores y posteriores.

(i) Expectativas de aprendizaje

Se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre los temas que debe enseñar a los estudiantes, en el grado escolar en el que imparte clases, para conseguir los propósitos planteados en la educación matemática. Dichos temas son extraídos del currículo oficial[56] y complementados con las propuestas del NCTM y de países tomados como referencia. Por ejemplo, según la Tabla 1 (capítulo 1), el profesor tiene conocimiento de que, en el Diseño Curricular Nacional, en 4° de primaria se pone atención sobre los lados y ángulos de polígono, en 5° se estudia a los polígonos regulares y en 1° de secundaria se pone atención a los polígonos en general.

(ii) Categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado

Considera la profundidad, extensión o rigor con que debe ser tratado un tema matemático, según el grado escolar en que se encuentre el estudiante. Por ejemplo, las Rutas del Aprendizaje (2015)[57], que corresponden al último ciclo de educación secundaria, propone los indicadores de desempeño mostrados (Tabla 2)que dejan ver cierta complejidad entre lo conceptual de un grado de estudios y otro.

---

[56] La Tabla 1 contiene los temas, relacionados con polígonos, que se proponen en el Diseño Curricular Nacional (2008) para la Educación Básica peruana. Si bien este documento es el referente en el desarrollo de esta investigación, el año 2016 se promulgó en nuevo Currículo Nacional de Educación Básica. En este documento se han definido cuatro competencias matemáticas (Resuelve problemas de cantidad; resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre y resuelve problemas de forma, movimiento y localización), capacidades y estándares de aprendizaje para cada una, mas no contenidos temáticos. Estos deben inferirse de la descripción de los niveles de desarrollo de la competencia. Por ejemplo, al término de la educación básica, el nivel destacado de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización indica: (…) Expresa su comprensión de las relaciones métricas entre los elementos de la circunferencia y elementos de los polígonos inscritos; así como la trayectoria de objetos usando la ecuación de la elipse, usando diversas representaciones (Ministerio de Educación, 2016, p. 155).

[57] Durante el proceso de transición entre el Diseño Curricular Nacional (2008) y el Currículo Nacional de Educación Básica (2016), las Rutas de Aprendizaje (2015) fue un documento normativo para desarrollar la Educación Básica Peruana. Pese a que ya no está vigente, sirve para ejemplificar el sentido de la categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado.

Tabla 2

Indicadores de desempeño para el dominio Geométrico (Ministerio de Educación, 2015)

Capacidad: "Matematiza situaciones"-VII ciclo		
3°	4°	5°
Organiza datos de medidas en situaciones y los expresa por medio de un plano o mapa a escala. Reconoce la pertinencia de los planos o mapas a escala que expresan las relaciones de medidas y posición al plantear y resolver problemas.	Discrimina información y organiza datos en situaciones de desplazamientos, altitud y relieves para expresar un mapa o plano a escala. Contrasta mapas o planos al vincularlo a situaciones que involucra decidir rutas.	Usa un mapa o plano en problemas de medida, desplazamiento, altitud y relieve. Reconoce las limitaciones de tramos o rutas a partir de la interpretación de mapas o planos.

(iii) Categoría: Secuenciación con temas anteriores y posteriores

Se refiere al conocimiento que debe tener el profesor sobre los contenidos matemáticos abordados en un momento determinado, en relación con los anteriores y posteriores a él propuestos en el currículo. Este conocimiento ha de influir en las tareas o actividades matemáticas propuestas a los estudiantes, de tal forma que se promueva la construcción de un conocimiento sólido y conectado. Por ejemplo, en la Tabla 1 se observa la secuencia de los temas en torno a los polígonos. Así, en cuarto grado de primaria se estudia "Polígonos: lados y ángulos", en quinto grado se diferencia "triángulos y cuadriláteros: clases" y "polígonos regulares", en sexto grado se estudia el "área de polígonos regulares simples y compuestos", posteriormente en primero de secundaria se hace el estudio de las características de los "polígonos" para clasificarlos.

2.3.3. El lugar de las creencias en el MTSK

Si bien desde la génesis del MTSK se ha considerado que las creencias y concepciones son elementos que permean y definen la organización y uso del conocimiento (Muñoz-Catalán, et al., 2015), este es un dominio que aún requiere mayor investigación ha sido poco investigado, en relación con el modelo[58], derivando así "carencias en su conceptualización,

[58] En la trayectoria del grupo SIDM sí se han realizado estudios de las concepciones del profesor de matemáticas. De hecho, en sus tesis doctorales, Carrillo (1996) y Contreras (1998) se ocuparon de estudiar los modos de resolver problemas y las concepciones sobre la Matemática y su enseñanza de profesores de Matemática. Posteriormente, se han realizado otros trabajos en los que se ha estudiado las concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática (Vicario y Carillo, 2005),

caracterización y dotación de contenido" (Montes, 2016, p. 56). Así pues, se ve la necesidad de profundizar en dicho dominio "para determinar si se considerará o no el plano afectivo, las actitudes, y/o las creencias matemáticas de los profesores. (…) Si las creencias son parte del MTSK, lo natural creemos que debería ser tender a incorporarlas al análisis del profesor" (Correa y Montes, 2016, p. 96).

En este dominio del MTSK se contemplan las creencias acerca de la naturaleza de la matemática y las creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Montes, 2016). A partir del trabajo de Carrillo (1998), las creencias acerca de la naturaleza de la matemática se diferencian en tres tipos: platónica, instrumentalista y ligada a la resolución de problema[59]. Por su parte, las creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se diferencian en tendencias: tradicional, espontaneísta, tecnológica e investigativa[60].

Además de lo anterior, se contempla la posibilidad de incluir, en este dominio: la filosofía de la matemática escolar (en el sentido de Bromme, 1994), las concepciones acerca de los conceptos, las actitudes hacia las matemáticas (y sus conceptos) y los afectos hacia las matemáticas (Montes, 2016). No obstante, la inclusión o no de estos u otros aspectos, dependerá de las futuras investigaciones que se realicen en este campo.

---

el vínculo entre el dominio de las creencias, concepciones y conocimiento (Flores-Medrano y Carrillo, 2014), entre otros. La convicción de que la caracterización de este subdominio requiere una profundización ha llevado a que se plantee un proyecto colaborativo, en el marco de la Red Iberoamericana sobre Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (Red MTSK), para la identificación y caracterización de las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Educación Infantil (Muñoz-Catalán, et al., 2019).

[59] Desde la tendencia *instrumentalista* la matemática se concibe como un conjunto de hechos no relacionados en donde el conocimiento matemático se traduce en eficiencia procedimental memorística. Por su parte, la tendencia platónica lleva a considerar la matemática como un cuerpo estático de conocimientos que no se crea sino que se descubre. Finalmente, desde la tendencia de resolución de problemas, la matemática es concebida como creación del hombre y por ende, un campo dinámico y en expansión puesto que, es un sistema complejo de conceptos, procedimientos y representaciones interconectadas (Escudero-Ávila, 2015).

[60] En este segundo grupo se tiene que: la tendencia tradicional supone aprendizaje memorístico acumulativo y trasmisión de conocimientos, la tendencia tecnológica se asocia a aprendizaje secuencial y transmisión por procesos tecnológicos, la tendencia espontaneísta implica aprendizaje significativo aleatorio e inducción y promoción de conocimientos, finalmente, la tendencia investigativa concibe el aprendizaje como redes semánticas establecidas en y sobre la acción (Escudero-Ávila, 2015).

2.4. Definición y clasificación como prácticas matemáticas en torno a los polígonos y cuadriláteros[61]

La adquisición de un concepto matemático supone construir un esquema que integra la imagen conceptual (representaciones visuales, impresiones y experiencias asociadas con el nombre del concepto que pueden trasladarse, posteriormente, a formas verbales) y la definición conceptual (enunciado verbal- memorizado o no- que explica el significado de dicho concepto) (Vinner 1991). Si bien la primera ejerce supremacía porque el pensamiento evoca imágenes conceptuales mientras que las definiciones permanecen inactivas o se olvidan, el autor citado considera necesario que quienes se preparan para ser profesores sean entrenados en el uso y construcción de definiciones, luego de analizar ejemplos y contraejemplos que propicien la emergencia de conflictos entre las imágenes conceptuales y las definiciones formales de un concepto. En dicho entrenamiento ha de tenerse en cuenta la existencia del fenómeno prototipo (Herskowitz, 1990) que consiste en centrar la atención en los ejemplos visualmente potentes, debido a que incluyen la lista más larga de atributos, sean críticos o no críticos, tales como: posición horizontal, lados y ángulos iguales, y diagonales y alturas interiores.

En relación con lo anterior, Shir y Zaslavsky (2001) sostienen que la construcción de una definición necesita, previamente, del reconocimiento y clasificación de ejemplos y no ejemplos lo que involucra un proceso dialéctico en el que interaccionan los aspectos figurativos y conceptuales de un concepto. Este proceso implica la observación e identificación de características del concepto, el establecimiento de propiedades a partir de dichas características y la verificación de la definición con respecto a las características y propiedades observadas del concepto (Mariotti y Fischbein, 1997). Si bien enunciar una definición no asegura la comprensión del concepto (Vinner 1991, Gutiérrez y Jaime, 1999), las tareas que promueven su construcción o el análisis de definiciones dadas posibilitan encontrar evidencias de lo que se entiende por un concepto específico. En tal sentido, “las definiciones de los conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes a estas y el proceso de definición

[61] Este apartado se desarrolla en base al artículo: Conocimiento especializado de futuros profesores de matemática de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros, escrito por Carreño y Climent en el 2019 y publicado en la revista PNA 14(1).

son componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemática" (Zazkis y Leikin, 2008, p. 133).

Definir supone abstraer de unos casos particulares unas características comunes que permiten caracterizar (y por lo tanto discriminar) un tipo de objeto dentro de un conjunto universo. Esta abstracción supone de facto la construcción de un objeto nuevo que, en cierta forma, trasciende los casos particulares y genera condiciones para el desarrollo del sistema deductivo-formal en el que progresivamente va constituyéndose las matemáticas. Así pues:

> Una definición no sirve simplemente para explicar a la gente lo que significa un término, sino que, cuando consideramos las actividades matemáticas mediante las cuales se organizan sistemas deductivos, las definiciones –usando una expresión de Freudenthal– son eslabones en cadenas deductivas.
>
> El proceso de definir es, entonces, un medio de organización deductiva de las propiedades de un objeto matemático, que pone en primer plano las que se juzga que permiten constituir un sistema deductivo, local o global, en el que ese objeto matemático esté incorporado. (...) este proceso de definir crea también nuevos conceptos" (Puig, 1997, pp. 73-74).

La construcción (consciente) de una definición supone contemplar las características que ha de cumplir esta. Así pues, tomando como referencia a Bolea et al. (2008) y a Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014), coincidimos en que una definición matemática debe: 1) ser precisa en la terminología y jerarquización; 2) ser lo más concisa posible, es decir, no incluir propiedades que puedan deducirse a partir de otras que ya figuren en la definición (evitar la circularidad y redundancias); 3) no contener contradicciones; 4) no contener únicamente enunciados negativos; 5) no contener ambigüedades; 6) ser invariante ante los cambios de representación; y 6) usar los conceptos generales más básicos. En sintonía con lo anterior, Pascual et al., (2019) establecen como criterios para analizar las definiciones de polígono construidas por EPM: ser no contradictoria, ser no ambigua desde la perspectiva escolar, ser no ambigua desde la perspectiva formal y ser mínima (incluir condiciones necesarias y suficientes).

Los estudios realizados en torno a la definición de conceptos geométricos han puesto en evidencia las concepciones que sobre esta se tienen (Shir y Zaslavsky, 2001), han permitido establecer tipos de definiciones y mostrar el rol que atañe a la definición en la educación matemática (De Villiers, 1998; De Villiers et al., 2009). También han confirmado la estrecha relación entre definición y clasificación, puesto que ambos procesos requieren de un razonamiento lógico basado en las interacciones entre el concepto y las imágenes conceptuales (Ulger y Broutin, 2017). De hecho, Mariotti y Fischbein (1997) sostienen que:

> Una tarea de clasificación consiste en establecer una equivalencia entre objetos similares, pero figuradamente diferentes, hacia una generalización. Eso significa superar el caso particular y considerar este caso particular como una instancia de una clase general. En otros términos, el proceso de clasificación consiste en identificar, pertinentemente, las propiedades comunes que determinan una categoría (p. 244 la traducción es nuestra).

Considerando lo anterior, es evidente que definir conceptos de determinada manera implica, automáticamente, su clasificación y, a su vez, clasificar un conjunto de conceptos supone definirlos (De Villiers et al., 2009). En base a esto, De Villiers (1994) diferencia clasificaciones particionales y jerárquicas que a su vez pueden ser descriptivas (a posteriori) o constructivas (a priori). Según Brunheira y Ponte (2018):

> Realizamos clasificaciones a posteriori cuando ya hemos estudiado las propiedades de las figuras y tenemos objetos organizados con respecto a esas propiedades. En las clasificaciones a priori partimos de un objeto y construimos todas las relaciones a partir de procesos de generalización o especialización. Por ejemplo, comenzando con un cuadrilátero en particular, el cuadrado, construimos otros conceptos más generales “borrando” algunas de las propiedades o reemplazándolas con otras más generales; de lo contrario, podemos comenzar con un concepto más general, como el paralelogramo, y agregar propiedades o reemplazar algunas propiedades por otras más específicas. La función principal de la clasificación a priori es la construcción de nuevos conceptos (p. 67).

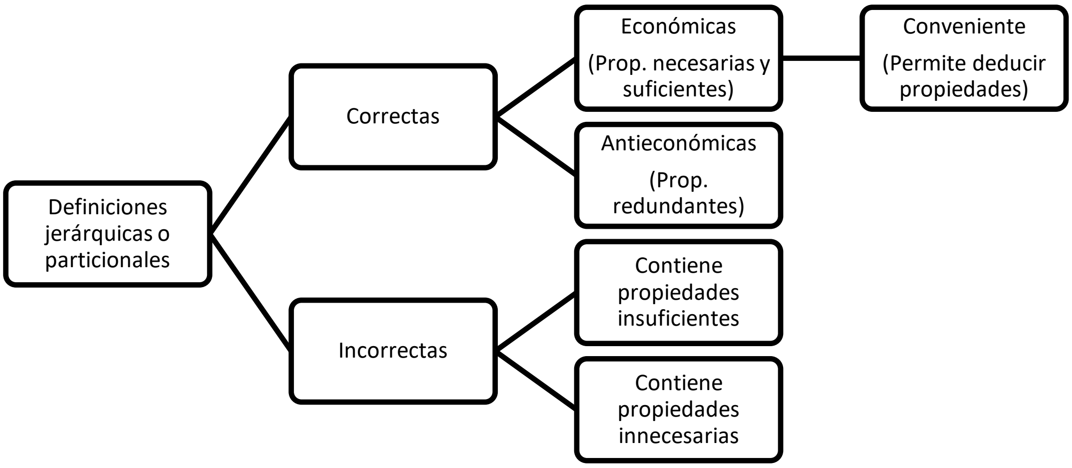
En coherencia con lo dicho sobre la clasificación, la consideración de la definición como proceso permite diferenciar, matemáticamente, entre definiciones descriptivas y constructivas (Sinclair et al., 2016, De Villiers, 1998). Las definiciones descriptivas tienen como punto de partida la imagen conceptual que posibilita identificar un listado de propiedades que, al analizarse, permiten distinguir entre necesarias y suficientes de otras que podrían deducirse de las primeras. Esta diferenciación posibilita construir una definición conceptual que a su vez puede ser: correcta, económica y/o jerárquica, con sus respectivos contrapuestos. Las definiciones constructivas parten de una definición conceptual de la que se identifican propiedades para que al variarlas- excluyendo, generalizando, especificando, reemplazando o añadiendo alguna- se construya una nueva definición que posibilite establecer una imagen conceptual. Así pues, mientras la definición constructiva tiene como función la producción de un nuevo conocimiento, la definición descriptiva busca la sistematización del conocimiento existente.

La tipología anterior, asociada a una postura constructivista de la enseñanza-aprendizaje de la matemática y al modelo de Van Hiele, permite diferenciar tres tipos de definiciones, correspondientes con los niveles de razonamiento geométrico: visuales, no económicas y, correctas y económicas (De Villiers, 1998). Las definiciones visuales se basan en objetos que tienen la forma de la representación gráfica del concepto (rectángulo-puerta). Las definiciones no económicas incluyen un listado de “todas” las propiedades que se conocen del concepto. Las definiciones correctas y económicas contemplan solo las propiedades necesarias y suficientes del concepto. A su vez, estos niveles de definición permiten diferenciar dos tipos: definiciones particionales y definiciones jerárquicas. Las primeras contienen un listado de propiedades adicionales para garantizar la exclusión de casos especiales de un concepto. Por su parte, las definiciones jerárquicas presentan las características necesarias y suficientes del concepto de tal forma que los teoremas probados para este se apliquen automáticamente a sus casos especiales.

Reafirmando la diferenciación de definiciones particionales y jerárquicas, De Villiers et al. (2009) proponen ciertas características que permiten distinguir definiciones correctas e incorrectas (Figura 5). Las primeras están compuestas de propiedades correctas que pueden ser necesarias y/o suficientes dando origen a definiciones económicas y antieconómicas, las primeras de estas constituyen definiciones convenientes. Por su parte, una definición incorrecta contiene propiedades insuficientes o innecesarias.

Figura 5

Clasificación según el contenido de la definición



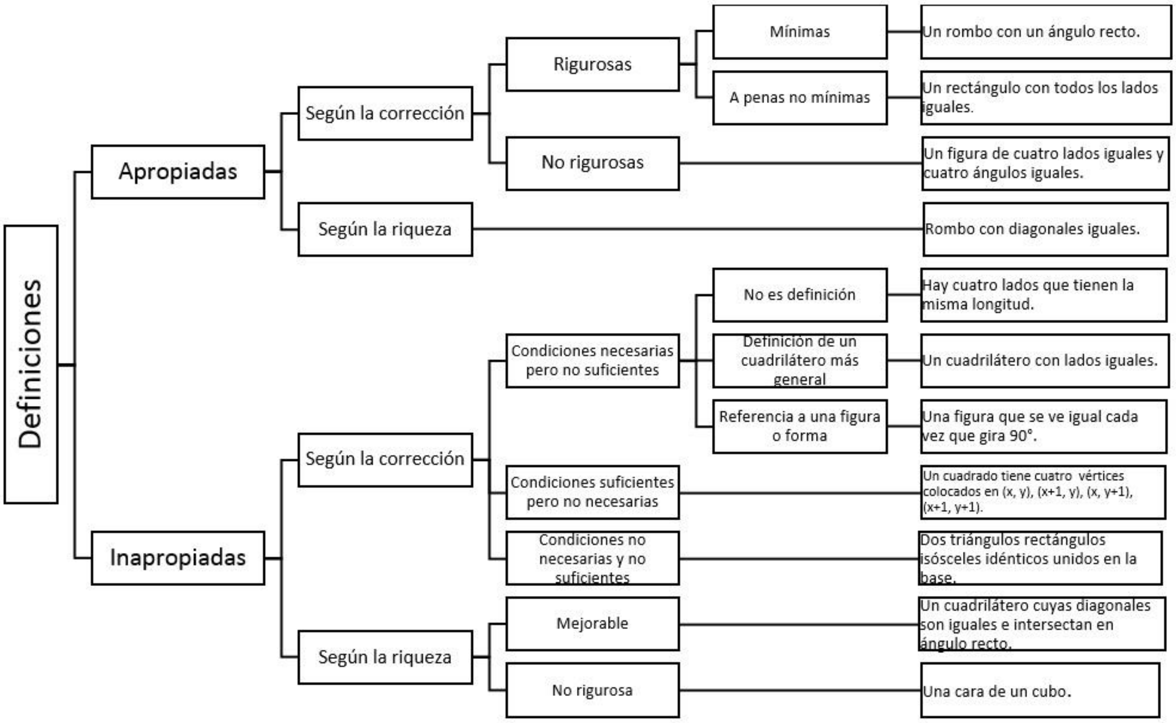
Fuente: Elaborado a partir de De Villiers et al. (2009)

Por su parte, Shir y Zaslavsky (2001) abordan las concepciones de una definición matemática, a partir del cuadrado. Estas involucran las características de una "buena" definición (jerarquía, existencia, no circularidad, no contradicción, inequívoca e independiente de la representación) que dan origen a diferenciar definiciones jerárquicas, procesuales o estructurales. Las primeras ya han sido abordadas en los párrafos anteriores, sin embargo, destacamos la distinción de niveles de jerarquía en dicho tipo de definiciones (p.ej. cuatro niveles para definir cuadrado en función de un concepto más general: polígono, cuadrilátero, paralelogramo y rombo o rectángulo). Las *definiciones procesuales* contienen una secuencia de pasos para construir su representación gráfica, razón por la cual, muchos no consideran como definición estos enunciados. Las definiciones estructurales se basan en las propiedades y elementos constituyentes del concepto.

Finalmente, Zazkis y Leikin (2008) diferencian definiciones apropiadas e inapropiadas a partir de las categorías 'corrección' y 'riqueza'. La primera está en función del uso de características necesarias y suficientes mediadas por el rigor, mientras que la riqueza depende del uso de elementos no tradicionales, aunque esto no asegura su corrección (Figura 6). Si bien ambas categorías son un lente organizativo en el análisis de definiciones, Zazkis y Leikin (2007, 2008) proponen, además, la 'accesibilidad' y 'generalidad' como categorías para analizar el espacio de ejemplos. Sin embargo, la visualización de la primera depende del diseño metodológico, mientras que la generalidad se considera intrínseca a la definición en sí misma. Este trabajo retoma las consideraciones pedagógicas y matemáticas (Winicki-Ladman y Leikin, 2000) para analizar las implicancias de una definición matemática y pone de relieve el potencial de generar definiciones puesto que, por un lado, permite evidenciar la comprensión de lo que implica una definición matemática y, por otro lado, manifestar la comprensión de los conceptos involucrados.

Figura 6

Tipos de definiciones y ejemplos de definiciones de cuadrado



Fuente: Elaborado a partir de Zazkis y Leikin (2008)

La revisión de los trabajos anteriores evidencia coincidencias en la diferenciación de definiciones descriptivas y constructivas, siendo las primeras el foco de atención de la mayoría de las investigaciones en educación matemática en torno al proceso de definición (Sinclair et al, 2016). Las definiciones descriptivas en relación con propiedades necesarias y suficientes de un concepto y mediadas por criterios de corrección, economía y jerarquía permiten diferenciar definiciones particionales y jerárquicas y dentro de estas, correctas (económicas o no) e incorrectas (De Villiers, Govenders y Pattersn, 2009), además de apropiadas e inapropiadas (Zazkis y Leikin, 2008). Las relaciones de inclusión, a su vez, posibilitan establecer niveles de jerarquía al construir una definición (Shir y Zaslavsky, 2001).

Capítulo 3
Marco Metodológico

En este capítulo abordamos las decisiones metodológicas asumidas en el progreso de la investigación: situarnos en el paradigma interpretativo para desarrollar, como diseño de investigación, un estudio de caso instrumental con tres futuros profesores de matemática de secundaria. Estos informantes cursan la asignatura Práctica Profesional A, la cual constituye el contexto en el que se desarrolla el estudio. En este se emplea la encuesta, la recogida de artefactos y la observación como técnicas para recoger información, mediante un cuestionario, plan de clase y ejecución de una sesión de clase, respectivamente. También, señalamos al análisis de contenido como técnica para analizar la información. Este proceso se realiza empleando los subdominios y categorías del MTSK, a los que integramos unos descriptores que sitúan el análisis sobre el conocimiento especializado en relación con los conceptos de polígono y cuadrilátero y con las prácticas matemáticas de definir y clasificar. Así, pretendemos responder a la pregunta de investigación: *¿Qué conocimiento especializado muestran estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, al abordar situaciones de enseñanza-aprendizaje relativas a los polígonos, en un contexto de simulación de prácticas profesionales?* Finalmente, nos referimos a criterios de valoración de la calidad de esta investigación.

3.1. Paradigma y características de la investigación

La selección del paradigma de investigación precisa, inicialmente, tener un claro significado de dicho término. En consecuencia, tomamos como referencia el trabajo de Muñoz-Catalán (2010) quien sostiene: “El paradigma es un esquema teórico, un modo de percibir y comprender el mundo, que nos lleva a identificar determinadas áreas problemáticas e implica también una determinada forma de acercarse a ella [la realidad], para analizarla e interpretarla" (p. 149). Así pues, situarse en un paradigma de investigación implica adoptar una postura frente al modo de ver y entender la realidad (posición ontológica) así como de acercarse a ella (posición epistemológica), empleando unos métodos coherentes con dichas posturas (posición metodológica) ya que el paradigma de investigación es definido según la naturaleza de los datos y el tratamiento que se hace de ellos en una investigación (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011).

Considerando la clasificación tradicional de paradigmas (Latorre, Del Rincón y Arnal, 1996), situamos nuestra investigación en el *paradigma interpretativo*, también llamado naturalista o cualitativo, hermenéutico, interpretativo-simbólico o fenomenológico (Pérez Serrano, 2008). Esta decisión se sustenta en que desarrollamos un estudio a partir de datos cualitativos, que se constituyen "elaboraciones de naturaleza descriptiva que recogen una amplia y diversa gama de información, ricos y densos en significados, polisémicos, difícilmente reproducibles dada su vinculación a contextos y momentos determinados" (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 200).

En coherencia con lo anterior, desarrollamos una investigación que toma en cuenta las características del paradigma naturalista o cualitativo propuestas por Pérez Serrano (2008):

1) *La teoría constituye una reflexión en y desde la praxis.* El conocimiento especializado permite la gestión de procesos de enseñanza y aprendizaje; por ello, comprender su naturaleza y características contribuye en la formación de profesores. En este sentido, analizamos las implicancias del conocimiento especializado sobre "polígonos y cuadriláteros" en futuros profesores de matemáticas de secundaria, cuando abordan un rol docente en distintos contextos formativos. Así, la comprensión del conocimiento movilizado por dichos informantes en las situaciones concretas propuestas posibilita la construcción de un corpus teórico que pueda ser reutilizado en otras situaciones prácticas, contribuye a la investigación sobre conocimiento especializado del profesor (de matemática) y aporta conocimiento a la formación de profesores

2) *Intenta comprender la realidad.* Partimos de una postura relativista, basada en el idealismo (Snape y Spencer, 2003). Según esta, quien busca comprender la realidad lo hace influido por sus creencias, teniendo en cuenta que esta solo se puede conocer a través de significados socialmente construidos. En este sentido, dado que el conocimiento especializado (en nuestro estudio) está sujeto a los símbolos empleados, así como a los significados e interpretaciones que realiza cada EPP en los contextos formativos propuestos, los resultados adoptan un carácter subjetivo (no objetivo) puesto que interpretamos sobre las interpretaciones e interacciones de los informantes (Escudero-Ávila, 2015).

3) *Describe el hecho en el que se desarrolla el acontecimiento.* Dado que el conocimiento especializado de futuros profesores es un fenómeno complejo que involucra el estudio de datos cualitativos, su estudio implica la descripción de hechos que permiten establecer inferencias plausibles a partir de casos individuales. Así pues, investigar sobre el conocimiento especializado requiere una *complementariedad metodológica* que involucra una "pluralidad de métodos y la adopción de estrategias de investigación específicas, singulares y propias de la acción humana" (Pérez Serrano, 2008, p. 29). En este sentido, recogemos los datos mediante las técnicas de encuesta, revisión de documentos y observación, empleando un cuestionario de respuesta abierta, un plan de clase y el desarrollo del mismo (grabado en video y transcrito), respectivamente. Luego, se hace un análisis de contenido de los datos recogidos en dichos instrumentos.

4) *Profundiza en los diferentes motivos de los hechos.* Habiendo asumido una postura relativista de la realidad, concebimos esta como holística, global, polifacética y nunca estática. Desde esta perspectiva, el conocimiento especializado no es único o estándar para todos los EPP, sino que este es propio de cada sujeto y local a cada tema matemático, debido a los significados que cada quien le asocia a las situaciones propuestas. En coherencia con esto, proponemos el estudio de tres casos para analizar, en cada uno, descriptores (emergidos de la revisión teórica) que abordan, a la luz del MTSK, el concepto de polígono y de los cuadriláteros, además de la jerarquización de estos últimos. Así, por ejemplo, estudiamos el descriptor *definición*

verbal en relación con los subdominios del MTSK que se evidencian en cada estudio de caso. Esperamos que en todos se observe evidencias de, al menos, los subdominios conocimiento de los temas (KoT) y de la práctica matemática (KPM).

5) *El individuo es un sujeto interactivo, comunicativo, que comparte significados.* Por ello diseñamos tres contextos formativos de distintas características, como parte de la asignatura Práctica Profesional A. Los dos primeros (cuestionario y plan de clase) suponen la interacción del individuo con el conocimiento que posee; el tercero (desarrollo de la sesión de clase), en cambio, precisa de la interacción entre el EPP, el conocimiento que posee y la comunidad de estudio en la que está inmerso (EPPs y formadora de la Práctica Profesional A). Así pues, los requerimientos de cada contexto formativo llevan a que "ante una situación, el individuo interpreta y valora las cosas con las que tiene que contar para decidir su forma de actuar" (Pérez Serrano, 2008, p. 31).

Las características anteriores hacen referencia a los elementos que incluye la definición de paradigma adoptada: perspectiva ontológica, metodológica y epistemológica (Muñoz-Catalán, 2010). Sin embargo, dado que el último elemento puede resultar implícito en dicho desarrollo, empleamos los aspectos que proponen Snape y Spencer (2003) para poner de manifiesto la postura epistemológica adoptada en esta investigación:

6) *Relación entre el investigador y el investigado.* Partiendo de que "la relación entre el investigador y los fenómenos sociales es interactiva" (p.13), en nuestro estudio se produce una influencia importante entre investigador e informantes puesto que quien investiga es, además, la docente formadora de la asignatura en la que están inmersos los investigados y desde la cual se recoge la información. Así pues, considerando lo descrito en la quinta característica de los párrafos anteriores, las reacciones emotivas de la docente ante la actuación y respuestas de los EPP, en los tres contextos formativos diseñados, influyen en ellos. En consecuencia, "los participantes también ajustan continuamente sus posicionamientos a las respuestas de los investigadores" (Muñoz-Catalán, 2010, p. 151).

7) *Las teorías de verdad.* Considerando que desde nuestra postura ontológica la realidad se construye, optamos por una teoría de la verdad intersubjetiva desde la cual la realidad solo puede medirse de manera consensuada y no absoluta. Así pues, "si varios informes confirman una declaración, entonces esta puede considerarse como una representación verdadera de una realidad construida socialmente" (Snape y Spencer, 2003, p. 14, la traducción es nuestra). En la investigación que presentamos, el consenso se procura mediante la discusión de las interpretaciones de los datos, en la que intervienen los directores de este trabajo y otras comunidades académicas e investigativas, interesadas en el MTSK, la formación de profesores y el conocimiento geométrico. Así pues, estos espacios de discusión son: las sesiones de tutorías, el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM[62]) y congresos internacionales vinculados a la Educación Matemática (CERME, RELME, CIBEM[63]).

8) *Modo en que se adquiere el conocimiento.* Esta investigación se desarrolla sobre todo de forma inductiva, pues buscamos "patrones y asociaciones derivadas de las observaciones del mundo" (Snape y Spencer, p. 14). Concretamente, buscamos evidencias de conocimiento especializado en los EPP, haciendo uso del MTSK y de descriptores emergentes del análisis, para interpretar la información de manera que podamos encontrar, por un lado, *rasgos característicos* de dicho conocimiento (¿qué lo hace especializado?) y por otro lado, contribuir en la caracterización de los subdominios y categorías del MTSK. Si bien optamos por estrategias de naturaleza inductiva, no excluimos las deductivas en la medida que complementan y enriquecen la investigación.

3.2. Diseño de investigación: El Estudio de Caso

En este trabajo proponemos como diseño de investigación el estudio de caso. Entendemos este como "el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 2007, p. 11). Así pues, buscamos estudiar las evidencias de conocimiento matemático que proporcionan los

---

[62] El grupo SIDM de la Universidad de Huelva organiza una sesión mensual, siguiendo un calendario definido antes de que termine el curso académico español (julio).

[63] Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (CERME), Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) y Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM).

estudiantes para profesor de matemática de secundaria (en adelante EPP), dentro de su propio contexto formativo, para identificar y comprender el carácter especializado de dicho conocimiento.

Desarrollamos un estudio de casos instrumental colectivo (Stake, 2007)[64] a partir de las evidencias de conocimiento matemático identificadas en tres EPP. Con estas buscamos comprender las distintas dimensiones del conocimiento matemático especializado, involucradas en las prácticas matemáticas de definir y clasificar, respecto de los polígonos en general y de los cuadriláteros en particular. Así pues, el interés no reside en determinar qué saben o no los EPP sino en comprender cómo es el conocimiento evidenciado, las características que tiene este, de tal forma que se pueda "generar teorizaciones sobre la naturaleza del conocimiento especializado del [estudiante para] profesor de matemáticas de secundaria de manera general" (Escudero Ávila, 2015, p. 77). Con tal propósito, hacemos un estudio individual de tres informantes para, posteriormente, realizar una interpretación colectiva sobre el concepto de polígono, el concepto de cuadrilátero y la jerarquización de este último.

En resumen, nuestra investigación aborda las siguientes dimensiones del estudio de casos (Martínez Bonafé, 1988, p. 43): a) El estudio se centra en un nivel "micro" (una asignatura de Práctica Profesional) y en interacciones específicas (conocimiento-EPP, conocimiento-EPP-formadora); b) se funda en una concepción humanista de la educación, lo cual dota de complejidad, diversidad y multiplicidad al fenómeno educativo, específicamente, al conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas de secundaria, y; c) centra el interés en la comprensión de los significados vertidos en tres fuentes de información (cuestionario, plan de clase y sesión de clase), teniendo en cuenta las características y circunstancias en que se desarrollan los mismos, los participantes, el carácter subjetivo y las interacciones que suceden entre informantes y formadora, quien es además la investigadora.

---

[64] Stake (2007) diferencia el estudio de casos en intrínseco e instrumental. En el primero se estudia el caso en cuestión porque interesa en sí mismo, no se elige, sino que la necesidad del estudio viene dada. Por su parte, el estudio de caso instrumental surge de la necesidad de comprender algo más que un caso concreto, el interés es general. Desde esta perspectiva, también podría estudiarse varios casos individuales entre los que existe coordinación, esto constituye un estudio colectivo de casos.

3.3. El contexto del estudio: la asignatura Práctica Profesional A

La Práctica Profesional A es una asignatura que se cursa en el octavo ciclo (cuarto año) de la carrera de Educación de una universidad privada de Piura (Perú). Su naturaleza es teórica y práctica y en ella se diferencian dos etapas: la primera se caracteriza por el estudio de documentos curriculares y el diseño de sesiones de aprendizaje, según el tema asignado por el docente responsable de la asignatura. La segunda etapa es sobre todo práctica; consiste en ejecutar sesiones de aprendizaje habiendo realizado, previamente, la planificación escrita de las mismas (plan de clase). En estas sesiones, los compañeros de la asignatura *simulan* el rol de estudiantes de escuela secundaria. Tras la ejecución de la sesión planificada, se analiza esta críticamente en gran grupo, iniciando con la perspectiva individual y propia (*autoevaluación*), siguiendo con la discusión entre iguales (*coevaluación*) y terminando con la valoración del docente (*heteroevaluación*).

El estudio de la Práctica Profesional A tiene asignaturas "prerrequisito" entre las cuales, figuran las Didácticas (de la Matemática y la Física[65]) y Tecnología Educativa II[66], pertenecientes a los ciclos VI y VII, respectivamente[67]. Además, al momento de cursarla (ciclo VIII), los EPP ya han tenido que estudiar asignaturas de carácter disciplinar (p. ej. Geometría Plana y Trigonometría), pedagógico (p. ej. Tecnología Educativa I y II, Psicología Educativa) y didáctico (p. ej. Didáctica de la Matemática) que son la base sobre la que es viable estudiar la especialización del conocimiento de los EPP[68].

---

[65]Recuérdese que la licenciatura es en Educación, nivel secundaria, especialidad Matemática y Física (ver capítulo de Introducción). En esta investigación solo nos referimos a la asignatura Didáctica de la Matemática, no a la Didáctica de la Física.

[66] En esta asignatura se estudian los contenidos generales para la planificación y evaluación de la enseñanza que, posteriormente, han de ser adaptados a la especialidad en la que se forman cada estudiante (en muestro caso, matemática y física).

[67] Recuérdese que la carrera de Educación tiene una duración de 5 años pues el plan formativo está compuesto de 10 cuatrimestres o ciclos académicos.

[68]En el apéndice E se muestra una la malla curricular de la carrera.

3.4. El estudio colectivo de casos: La selección de informantes

Definido el interés en comprender el conocimiento especializado de futuros profesores de matemática de secundaria, mediante el estudio de casos, se ha desarrollado un proceso de selección de informantes y tratamiento de la información que tiene en cuenta:

1) *Las características de la selección de informantes en la investigación cualitativa* (Rodríguez, Gil y García, 1996). Según estas, el proceso de selección adopta un carácter *dinámico,* la definición de informantes se realiza a lo largo de la investigación. Inicialmente, se recoge información de los estudiantes que cursan Práctica Profesional A en el periodo académico 2011-II, luego, para ampliar dicha información, se aplican las mismas técnicas e instrumentos a los estudiantes que cursan la asignatura mencionada en el 2012-II[69]. De los 11 informantes que teníamos, decidimos seleccionar tres para realizar un estudio individual y exhaustivo de lo que caracteriza al conocimiento especializado, en torno a los conceptos de polígono y cuadrilátero, además de la jerarquización de los últimos. El proceso descrito resulta, por un lado, *fásico* "dado que su desarrollo tiene lugar en más de una etapa o momento de la investigación" (p. 135) y, por otro lado, *a posteriori* ya que, habiendo incrementado la muestra, respecto del primer grupo (2011-II), se decide seleccionar casos específicos dentro de los 11 informantes. A su vez, se evidencia la *secuencialidad* del proceso pues, se estudian distintos aspectos de conocimiento especializado a medida que se desarrollan los instrumentos propuestos y según las necesidades emergentes durante la investigación.

2) *El contexto de la experimentación*. Dado que la experimentación se realiza dentro de la asignatura Práctica Profesional A, siguiendo la metodología de la misma (aunque con las adaptaciones necesarias de cara al registro de información para la investigación), las características estructurales de la asignatura (el contexto) son las mismas en todos los periodos académicos en que se cursa.

[69] En Perú, la educación universitaria se organiza en dos cuatrimestres anuales, con un periodo vacacional de, aproximadamente, un mes entre ellos. El primer ciclo formativo se desarrolla entre marzo y julio y el segundo entre agosto y diciembre, según las fechas de inicio que establezca cada universidad. Por lo tanto, llamamos 2011-II al segundo periodo académico del año 2011 que ocurre entre los meses de agosto y diciembre.

3) *Las características de los informantes*. Según la estructura de la asignatura Práctica Profesional A es viable considerar a los dos grupos de informantes (2011-II y 2012-II) como equivalentes y tratarlos como un grupo único del que seleccionamos los casos Laura, Samuel y Marta. Las razones de dicha selección son:

- El desempeño académico mostrado durante la formación inicial (pregrado) resumido en la Tabla 3.

Tabla 3

Características académicas de los informantes

Grupo	INF	IF	FF	AMD	N°-P1M
2011	EPP1	2004	2013	4	2-(2011, 2012)
	Marta	***2005***	***No egresó***	***8***	***2-(2010, 2011)***[70]
	EPP3	2007	2012	0	1
	Samuel	***2008***	***2012***	***1***	***1***
2012	EPP5	2006	2013	4	1
	EPP6	2007	2013	3	1
	EPP7	2008	2013	2	2-(2011, 2012)
	EPP8	2008	2013	0	1
	Laura	***2008***	***2013***	***2***	***2-(2011, 2012)***
	EPP10	2009	2013	0	1
	EPP11	2009	No egresó	5[71]	1

Leyenda:

INF.: Informante

FF: Fin de la formación de pregrado

AMD: Asignaturas de matemática desaprobadas durante la formación de pregrado

IF: Inicio de la formación de pregrado.

N°-P1M: Número de vez que cursaba la Práctica Profesional A cuando completó el cuestionario.

De la Tabla 3 podemos ver que los EPP inician la formación universitaria en distintos años y algunos no concluyen la carrera (Marta y EPP11). Además, se observa el número de asignaturas de formación disciplinar desaprobadas, lo cual da indicios del rendimiento académico en algunos casos o de la falta de habilidad para ciertas áreas de la matemática, en otros[72].

[70] Pese a que Marta cursó la asignatura dos veces, solo desarrolló una vez los instrumentos de la investigación, pues la recogida de información se inició el 2011.

[71] De esta cantidad de asignaturas, cuatro fueron desaprobadas porque abandonó los estudios a mitad del periodo académico 2014-I

[72] Además de la cantidad de asignaturas desaprobadas, la extensión del periodo de formación inicial da indicios de un rendimiento académico regular-bajo en algunos casos (EPP1, Marta, EPP5). Sin embargo,

- La disposición para completar los instrumentos propuestos, mostrando cierta competencia comunicativa. Así, si bien en algunos casos hay respuestas que no consideran todo lo solicitado en la consigna, en general, se refieren a lo que se cuestiona sin dispersarse en otros temas.
- Capacidad reflexiva y en algunos casos, autoreflexiva, lo cual les conlleva a asumir un rol docente requerido al abordar las situaciones de enseñanza-aprendizaje propuestas, incluso, simular un diálogo con los hipotéticos estudiantes al completar el cuestionario o reformular el conocimiento matemático propio y la planificación de la sesión de clase al ejecutar esta.

4) *Las características de la sesión de clase planificada y ejecutada*[73]. Las secuencias didácticas ideadas por los informantes seleccionados se caracterizan por proponer el análisis de objetos del entorno y representaciones gráficas dadas, la clasificación de lo anterior desde una postura abierta (según los criterios que cada hipotético estudiante quiera) o tradicional en algún caso (según criterios dados en libros de texto) para transitar a una clasificación inclusiva. Además, proponen el análisis de definiciones dadas (extraídas del cuestionario) y la construcción de definiciones, posteriormente, a dicho análisis. Así, por el contenido de la información dada y por la asunción de un rol docente o de una postura autorreflexiva al completar el cuestionario o autoevaluar su sesión de clase, seleccionamos a dos informantes que abordan el concepto de polígono (Marta) y a dos que se encargan de la clasificación de los cuadriláteros (Samuel y Laura).

Apoyados en la información anterior, desarrollamos una descripción de cada informante. En esta tomamos en cuenta los aspectos ya abordados: el rendimiento académico, la disposición para aprender y reflexionar, las características de las respuestas dadas al completar el cuestionario (competencia comunicativa) y las acciones que integran la secuencia didáctica de la sesión de clase planificada y, posteriormente, ejecutada.

---

para el caso de Samuel, haber desaprobado solamente la asignatura Combinatoria y Probabilidad en toda la carrera, se corresponde más con una falta de habilidad en esta área de la matemática.

[73] La planificación de las sesiones de clase estuvo orientada por las consignas dadas por la docente formadora. Esto se desarrolla con detalle en el apartado 3.5.2. Recogida de artefactos y plan de clase.

Laura como informante

Laura es una estudiante con rendimiento académico medio-alto. Evidencia una postura crítica frente al conocimiento que posee y al que emerge cuando operativiza este. De hecho, al completar el cuestionario se observan respuestas extensas, incluso, en algún párrafo pone de manifiesto los cambios que suceden sobre su conocimiento inicial después de haber respondido a alguna cuestión. La actitud crítica y autoreflexiva, comentada antes, puede ser consecuencia de cursar la Práctica Profesional A dos veces. Este hecho, posiblemente, ha podido contribuir en el desarrollo de conocimiento didáctico del contenido y por ende, en la asunción del rol docente al desarrollar los distintos instrumentos de recogida de información. En la sesión de clase que desarrolla, parte de la clasificación que hacen sus hipotéticos estudiantes de las representaciones gráficas de los cuadriláteros dados, para abordar la clasificación que suele encontrarse en los libros de texto y culminar con una clasificación inclusiva.

Samuel como informante

Samuel es un estudiante con rendimiento académico alto. Es empeñoso en su formación, muestra disposición para aprender y reflexionar sobre lo que se le cuestiona. Ha completado el cuestionario con respuestas, en general, extensas y algunas veces, desde una perspectiva docente, incluso cuando no se requiere esta. Este aspecto hace suponer que es esperable encontrar evidencias de conocimiento del dominio didáctico y no solo del matemático en dicho instrumento. Además, se observa una tendencia a responder apoyándose en representaciones gráficas lo cual es un foco de interés en esta investigación, aunque resulta problemático cuando dichas representaciones están desprovistas de un discurso verbal. Por otro lado, la secuencia didáctica de la sesión de clase toma en cuenta la observación de objetos del entorno cuya forma es cuadrangular, lo cual contribuye a que los estudiantes puedan visualizar la matemática y encontrarle sentido a su estudio

Marta como informante

Marta es una estudiante con rendimiento académico bajo. El proceso seguido en su formación de pregrado ha sido largo y no concluyó (ver Tabla 3). Sin embargo, resalta su disposición y empeño por aprender, el desarrollo de un conocimiento didáctico debido a la impartición de clases particulares a estudiantes de primaria y secundaria y una continua reflexión sobre contenidos geométricos puesto que cursó la asignatura Geometría Plana y Trigonometría cuatro veces (2006-I, 2007-I, 2008-I y 2010-I).

Respecto de sus características reflexivas, al completar el cuestionario, Marta incluye preguntas y comentarios como interpelando a los hipotéticos estudiantes que le dan la información. Esto nos lleva a suponer, entre otras cosas, que toma en cuenta el pensamiento del estudiante e intenta comprenderlo desde el conocimiento que ella posee. También, analiza fragmentando la información dada, lo cual evidencia su interés (el de Marta) por hacer un análisis minucioso de lo propuesto. Esto se observa, además, en la sesión de clase.

3.5. Mi rol en esta investigación[74]

Tal como se ha señalado en el apartado 3.1., la postura ontológica, asumida en esta investigación, toma en cuenta la relación entre el investigador y los investigados. Así pues, asumo un doble papel: ser la profesora de Práctica Profesional A, la asignatura desde la que se recoge la información de este estudio; y a la vez, ser la investigadora de este.

Desde el rol de *profesora* de la asignatura, he indicado los temas que debía desarrollar cada EPP (ver apéndice A), según la información consignada por cada uno al desarrollar el cuestionario[75]. Luego, he revisado los planes de clase que previamente elaboraron y finalmente, he observado y grabado en video cada sesión de clase. En la ejecución de esta, he intervenido durante su desarrollo cada vez que ha sido necesario: para hacer conscientes a los EPP de algún error conceptual o procedimental cometido y para promover la ampliación o aclaración de algún aspecto abordado o consigna dada. También, al finalizar la sesión, he moderado y realizado la *crítica pedagógica.* Esto es, discutir en gran grupo el trabajo realizado

[74]Para una comunicación más sencilla, escribo este apartado haciendo uso de la primera persona del singular.

[75]Lo completado en el cuestionario por cada EPP orienta la asignación del tema a planificar y ejecutar. Así, por ejemplo, a quien no desarrolló todas las cuestiones sobre cuadriláteros, se le asignó un tema relacionado con ello para completar o ampliar las evidencias de su conocimiento.

por el EPP correspondiente y, en consecuencia, desarrollar procesos de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.

Como *investigadora*, he recogido las evidencias proporcionadas por los EPP en cada contexto formativo diseñado: cuestionario, plan de clase y desarrollo de la clase (registrada en video). Dichas evidencias las he analizado intentando marcar distancia con mi rol de profesora de la asignatura, es decir, como investigadora he "mirado" las evidencias esforzándome por no apelar a datos que son de conocimiento únicamente de la profesora. No obstante, por las propias características de la investigación cualitativa, esto no se consigue del todo al realizar las interpretaciones:

> Lejos de ser una actividad unidimensional y lineal, el análisis cualitativo opera en dos dimensiones y de forma circular. No solo se observan y graban los datos, sino que se entabla un diálogo permanente entre el observador y lo observado, entre inducción (datos) y deducción (hipótesis), al que acompaña una reflexión analítica permanente entre lo que se capta del exterior y lo que se busca cuando se vuelve, después de cierta reflexión, de nuevo al campo de trabajo (Ruiz Olabuénaga, 2007, p. 24).

3.6. Objetivos y pregunta de investigación

Según lo descrito en la motivación y formulación del problema (apartado 1.3) planteamos como pregunta de investigación: *¿Qué conocimiento especializado muestran estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, al abordar situaciones de enseñanza-aprendizaje relativas a los polígonos, en un contexto de simulación de prácticas profesionales?* Responder lo anterior nos lleva a proponer como objetivo general de este estudio:

> *Caracterizar el conocimiento especializado de estudiantes para profesor de matemática de Educación Secundaria Básica, respecto del tema de polígonos.*

Entendemos por *caracterizar* realizar una descripción cualitativa, estructurada y sistemática, que hace uso de datos de diversa naturaleza y de fuentes variadas (Bonilla, Hurtado y Jaramillo, 2009), para mostrar la composición de cada subdominio del MTSK y sus interrelaciones. A partir de esto, se definen los siguientes objetivos específicos:

1) *Definir descriptores de conocimiento especializado sobre polígonos*

La revisión teórica y el análisis (inicial) de las unidades de información permite que emerjan elementos o aspectos a los que llamamos descriptores que, integrados con el MTSK, posibilitan un conocimiento detallado y focalizado en torno a los polígonos. Por ejemplo, al analizar el abordaje que hacen los EPP del concepto de polígono, consideramos el descriptor características de las representaciones gráficas (dibujo prototipo, posición estándar, regularidad, etc.), el cual se asocia con los subdominios Conocimiento de los temas (KoT) y Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Del primero, se consideran las categorías *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, y *registros de representación*. Del segundo, se pone atención a la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*. En resumen, los descriptores dotan de contenido al modelo MTSK, propician la interrelación entre los subdominios de este, así como la vinculación entre el MTSK y marcos teóricos referidos al conocimiento geométrico y a las prácticas matemáticas de definir y clasificar.

2) *Describir el conocimiento evidenciado por los EPP*.

Los descriptores definidos se integran con los elementos del MTSK para mostrar, detalladamente, el conocimiento especializado de los EPP en las temáticas diferenciadas (concepto de polígono y concepto de cuadrilátero y jerarquización). La descripción de dicho conocimiento se acompaña de unidades de análisis y figuras extraídas de los distintos instrumentos de recogida de información.

3) *Describir características del MTSK evidenciado, su estructura y posibles relaciones con los diferentes instrumentos y contextos de recogida de información.*

La consecución de los objetivos anteriores ofrece la posibilidad de reflexionar sobre cada caso con un propósito integrador. Así pues, buscamos establecer lo característico de cada subdominio y de las relaciones entre estos, a partir de la información que permite recoger el cuestionario, el plan de clase y la ejecución del mismo. Dicho propósito integrador se extiende al analizar la potencialidad de los instrumentos de recogida empleados y su complementariedad. Este análisis puede constituir un aporte para el campo de la investigación educativa, en el área de conocimiento del profesor.

3.7. Método de investigación

Teniendo en cuenta que el método es “el conjunto de técnicas de recogida que incluyen el diseño y elaboración de instrumentos (test, pruebas ad hoc, cuestionarios, escalas, etc.) y análisis de datos utilizados en una investigación” (Godino, Carrillo, Castro, Lacasta, Muñoz-Catalán y Wilhelmi, 2011, p. 33), declaramos que en nuestro estudio desarrollamos un método cualitativo, interactivo y no interactivo (Goetz y LeCompte, 1988), sobre datos cualitativos (Rodríguez, Gil y García, 1996) y desde el paradigma interpretativo. El método no interactivo incluye las técnicas de encuesta y recogida de artefactos vinculadas, respectivamente, a un cuestionario diseñado por la investigadora y a un plan de clase elaborado por cada informante. Por su parte, el método interactivo incluye la observación participante de una sesión de clase simulada, registrada en video y posteriormente, transcrita. La necesidad de este último método queda justificada por el doble rol que asume la investigadora (apartado 3.3).

3.7.1. Encuesta y cuestionario

La encuesta es un término que adopta diversos significados en el campo investigativo. Hay quienes la consideran una estrategia (Goetz y LeCompte, 1988), método (Cohen y Manion, 1990) o modalidad de investigación no experimental (McMillan y Schumacher, 2005)[76]. Este término también es usado como sinónimo de cuestionario (Goetz y LeCompte, 1988). Pese a todas estas asociaciones, lo que resulta claro es que la encuesta es bastante difundida y empleada en la investigación. En esta investigación consideramos a la encuesta como una técnica de recogida de datos y la diferenciamos de cuestionario, asumiendo este como el instrumento de recogida de datos correspondiente. Si bien ambos términos, encuesta y cuestionario, se asocian tradicionalmente a los métodos cuantitativos, en nuestra investigación se concibe como un instrumento cualitativo pues “su aplicación y posterior tratamiento de los datos se realiza con la orientación de identificar los significados presentes en los discursos y acciones de los participantes” (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011, p. 80). En

---

[76] Aunque estos autores abordan la encuesta como modalidad de investigación no experimental, aclaran que también es considerada como una técnica de recogida de datos.

este sentido, proponemos la encuesta centrada en el *estudio de aspectos objetivos*[77]: el conocimiento de los EPP en torno a los polígonos. Este se pone de manifiesto en las *respuestas verbales escritas* que proporcionan los EPP al completar un cuestionario de respuesta abierta sobre dicho tema. Así pues, el propósito de emplear la encuesta es comprender el conocimiento que evidencian los EPP al responder a las preguntas formuladas en el cuestionario.

El método de encuesta que consideramos en este estudio, según el modo de administración[78], es la *encuesta autoadministrada entregada al grupo por un entrevistador*. En esta, cada EPP lee el cuestionario y escribe sus respuestas. La aplicación del instrumento se realiza en un aula de clases, bajo la presencia de la docente de la asignatura (investigadora) quien responde a las preguntas que surgen durante el desarrollo del cuestionario. En la selección del método de encuesta y su aplicación, además de los objetivos de la investigación, hemos considerado los siguientes factores (Cea D'Ancona, 2004):

- *La complejidad del tema.* El estudio del conocimiento especializado de los EPP es un tema complejo. Esta complejidad se manifiesta en la información obtenida y en los medios empleados para obtenerla. En este sentido, si bien la encuesta autoadministrada no es la opción más recomendable cuando se proponen preguntas abiertas, sino la encuesta cara a cara, consideramos que el hecho de que sea la investigadora quien administre el cuestionario, permite que el método de encuesta adoptado tenga matices de la *encuesta mediante administrador del tipo cara a cara o en persona*, ya que la investigadora puede responder a las interrogantes de los informantes mientras completan el cuestionario.

---

[77]El calificativo “objetivo” se usa en este caso por contraste con el de datos que expresan sentimientos o puntos de vista de los informantes. Somos conscientes de que los resultados que obtenemos no son objetivos sino intersubjetivos, mediados por la interpretación de la investigadora y con los que se comparte su interpretación.

[78]Según el modo de administración del cuestionario propuesto por Cea D’Ancona (2004, pp. 48-49), los métodos de encuesta son: 1) Encuestas de observación directa y 2) Encuestas autoadministradas. En el primer grupo se ubican las encuestas mediante entrevistador que pueden ser “en persona” (de papel y lápiz o informatizadas) o por vía telefónica. Por su parte, las encuestas autoadministradas pueden ser entregadas por un entrevistador (en grupo, diario o en modos informatizados) o enviadas por correo (correo postal, fax, modos informatizados).

- *La población encuestada.* Dado que la muestra la constituyen los estudiantes de la asignatura Práctica Profesional A, cuyo desarrollo está a cargo de la investigadora, contamos con información complementaria de los mismos. En relación con esto, las dificultades de dispersión geográfica, fechas y tiempo disponible para completar el cuestionario se minimizan puesto que este se desarrolla en un horario acordado con los EPP dentro de su jornada académica.
- *El tiempo disponible para la recogida de información.* Debido a la extensión y características del cuestionario, consideramos, al menos, dos sesiones para completar el mismo. Esto permite que los EPP proporcionen respuestas reflexivas a cada interrogante propuesto, sin sentirse presionados por un periodo establecido de aplicación.
- *El nivel deseado de calidad de los datos*. Ya que cada EPP de la asignatura mencionada completa el cuestionario individualmente, evitamos *sesgos de deseabilidad social*.

Para Rodríguez, Gil y García (1999), el cuestionario es "una forma de encuesta" que supone un interrogatorio a partir de un formulario de preguntas previamente establecidas, cuya respuesta puede ser textual (escrita u oral) o codificada. En nuestra investigación empleamos un *cuestionario que busca información de carácter cualitativo*[79], a partir de preguntas abiertas que se desprenden de cuatro situaciones (casos) de enseñanza. Así pues, el contenido que aborda y la estructura que presenta, exige de los informantes grandes dosis de reflexión que se manifiestan en el tiempo empleado y en el esfuerzo realizado para responder a las preguntas. Lo anterior, nos lleva a afirmar que nuestro cuestionario posee elementos comunes a otro instrumento asociado a la encuesta: la *entrevista*[80]. De hecho, los autores citados consideran que el cuestionario, como técnica de recogida de información, es similar a la *entrevista estructurada* aunque no supone la interacción cara a cara entre el entrevistado y el entrevistador (en lo que nos atañe, ya se ha mencionado en qué consiste la

---

[79]Rodríguez, Gil y García (1999) se centran en dos tipos de cuestionarios, aquellos que buscan una información descriptiva común, tal como se hace en los censos poblacionales; y, aquellos que buscan una información más cualitativa.

[80] La entrevista es definida por Rodríguez, Gil y García (1999) como "una técnica en la que una persona (entrevistador) solicita información de otra o de un grupo (entrevistados, informantes), para obtener datos sobre un problema determinado. Presupone, pues, la existencia al menos de dos personas y la posibilidad de interacción verbal" (p. 167).

interacción entre investigadora e informantes). Considerando lo anterior, el uso del cuestionario, como instrumento de recogida de información, resulta conveniente en nuestra investigación debido a que se ajusta a las exigencias que proponen los autores de referencia:

a) El cuestionario permite *explorar las ideas y concepciones* que tienen los EPP en torno a los polígonos.

b) El cuestionario es *uno de los instrumentos*, no el único ni el principal, que empleamos para recoger información.

c) En la elaboración de cuestionario *se ha tenido en cuenta las referencias* del marco teórico, los *resultados* obtenidos en un cuestionario piloto y la *validación* de expertos.

d) La administración del cuestionario *no produce rechazo* visible entre los EPP.

3.7.1.1. Cuestionario piloto

El estudio previo se realiza por medio de un cuestionario[81] conformado por diversas y breves situaciones de enseñanza que tienen como contexto la asignatura de Matemática II, desarrollada en el segundo semestre (primer año) de la carrera de Educación[82]. Estas situaciones se proponen con la intención de que los EPP se sitúen en el rol de "enseñar" a sus compañeros (simulando que estos son sus estudiantes, ejercicio habitual en las materias de Práctica Profesional) un tópico específico, lo cual debe llevarles a responder asumiendo el rol de profesor. Así pues, el instrumento tiene por objetivo indagar el carácter especializado (en el sentido del MKT) del conocimiento del contenido que debe poseer el profesor de matemáticas.

La elaboración de este instrumento se realiza en el 2010, época en la que el MKT y los trabajos del grupo de Deborah Ball llaman la atención de los investigadores debido al interés que manifiestan sobre las características del conocimiento (matemático) que debe poseer un profesor de matemáticas. De hecho, es este marco el que sirve de referencia al iniciar nuestro estudio. Así, a partir de la revisión de distintos documentos del grupo de Michigan (p. ej., Ball

[81]Se denomina prueba y no cuestionario, para diferenciar los instrumentos empleados en la investigación.

[82] Esta asignatura es una materia de formación básica y obligatoria para los estudiantes que quieren ser profesores de los niveles inicial y primaria. En el nivel secundaria, solo cursan la asignatura los estudiantes de la especialidad de Matemática y Física.

y McDiamird, 1990; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), así como de la observación de las clases de la asignatura *Matemática y su Didáctica* para la titulación de Maestro en la Universidad de Huelva[83], realizamos la identificación de tareas docentes y posibles ítems de evaluación compilados en un banco de preguntas desde el cual se elaboró el cuestionario piloto. Este se conforma de diez ítems[84], que contienen, en conjunto, un total de 29 preguntas o tareas. Debido a su extensión, en el cuestionario se ha diferenciado tres partes que han sido desarrolladas una a una, requiriéndose incluso, más de una sesión para completarlas (Figura 7, Figura 8 y Figura 9).

[83]Si bien la titulación de *Maestro* (en España) no es equiparable con la Licenciatura de *Profesor* de Matemáticas de Secundaria (en Perú) las observaciones son relevantes porque abordan con profundidad el tópico que se considera en nuestra investigación: Los polígonos.

[84] Se entiende ítem como “cada una de las partes o unidades de que se compone una prueba, un test, un cuestionario” (DRAE, 2014)

Figura 7

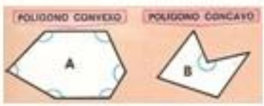
Cuestionario piloto (Parte I-Ítems 1-5)

Cuestionario N°1-Parte I: Polígonos

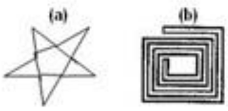
Carné N°: ________________________ Fecha: _______________ Ciclo: _____ Hora de inicio: ____________

Instrucciones: *Usted ha de responder el siguiente cuestionario siendo lo más analítico(a) y exhaustivo(a) posible, de tal forma que en sus respuestas evidencie el conocimiento geométrico que posee, las concepciones que tiene sobre ciertos objetos geométricos, las propiedades que atañe a cada uno y las relaciones que establece entre estos.*

1. Usted debe dar una clase de polígonos a sus compañeros de Matemática II, mientras la prepara, reflexiona sobre los subconceptos[1] que ha de considerar al definir polígono. ¿Cuáles son los subconceptos que integrarían la definición y cómo definiría los mismos?
2. Dé una definición, matemáticamente correcta, de polígono
3. Luego de haber dado, a sus compañeros de Matemática II, la definición de Polígono debe ejemplificar gráficamente la misma. Trace al menos tres dibujos que ejemplifiquen la definición dada en el apartado anterior y otros tres que estén excluidos con esa misma definición.
4. Se han revisado algunas páginas web sobre polígonos y se ha encontrado las siguientes definiciones y sus respectivas representaciones. Analice y justifique en cada caso si:
   4.1. Las definiciones son coherentes con las respectivas representaciones ¿Por qué?
   4.2. Cuál de las tres definiciones le parece más correcta. ¿Por qué? ¿Le haría alguna modificación para convertirla, a su entender, en correcta? ¿cuál y por qué?

		
Un polígono es una figura geométrica conformada por segmentos consecutivos no alineados, llamados lados.	Llamamos polígono a una parte del plano limitado por una línea quebrada cerrada.	Polígono es la figura que está formado por segmentos de recta unidos por sus extremos dos a dos.

5. Con la definición de polígono que tiene ahora en mente:
   a) ¿Mantiene la definición dada en (2) o la modifica? ¿Por qué?
   b) Las siguientes figuras son o no polígonos? ¿Por qué?



   c) Al considerar como polígonos las figuras anteriores, ¿Alguna propiedad de la familia de los polígonos dejaría de cumplirse? ¿Cuál y por qué?

[1] Conceptos que se involucran explícita o implícitamente en el concepto de polígono.

Con los ítems de la parte I se indaga el concepto y subconceptos de polígono, se propone la construcción de una definición verbal y la ejemplificación gráfica de la misma, así como el análisis de definiciones dadas y su coherencia con diversas representaciones gráficas. Finalmente, se cuestiona la persistencia de la idea inicial de polígono a partir de dos representaciones gráficas en las que hay que analizar el cumplimiento de las propiedades que conocen.

Figura 8

Cuestionario piloto (Parte II–Ítems 6-7)

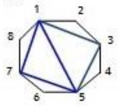
Universidad de Piura
Facultad de Ciencias de la Educación

Cuestionario Nº1-Parte II: Polígonos

Carné Nº: ______________________ Fecha: ______________ Ciclo: _____Hora de inicio: ____________

Instrucciones: *Usted ha de responder el siguiente cuestionario siendo lo más analítico(a) y exhaustivo(a) posible, de tal forma que en sus respuestas evidencie el conocimiento geométrico que posee, las concepciones que tiene sobre ciertos objetos geométricos, las propiedades que atañe a cada uno y las relaciones que establece entre estos.*

6. En la clase de Matemáticas II se está estudiando la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono. Los estudiantes deben hallar una expresión general que les permita calcular cuánto suma la medida de los ángulos interiores de un polígono cualquiera. Para conseguir esto, inician el trazado de polígonos conocidos y los triangulan porque han decidido tomar como referencia la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo que es 180º. Así, van completando una tabla.
   La profesora pide a una alumna que explique cómo triangula un polígono cualquiera y ella explica el siguiente proceso:
   - Dibujo el siguiente polígono, por ejemplo, un octógono:

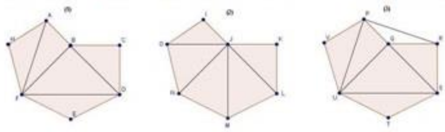


   - Escojo un vértice y voy trazando las diagonales dejando libre el vértice consecutivo, por ejemplo, si empiezo en 1 dejo libre 2 y trazo la diagonal 1-3, dejo libre 4 y trazo 3-5, dejo libre el 6 y trazo la diagonal 5-7, dejo libre 8 y trazo la diagonal 7-1 y finalmente trazo 1-5. Así se han formado 6 triángulos y se tiene: 6x180º= 1080º.

   Si usted tuviese que elegir un proceso de triangulación de un polígono de "n" lados, cara a demostrar la fórmula de la suma de las medidas de sus ángulos interiores:

   6.1. ¿Cree que es válido el procedimiento de triangulación de un polígono explicado por la alumna para extraer una fórmula o expresión general para calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono? ¿Por qué?
   6.2. ¿Se le ocurre algún otro procedimiento que le permita obtener una fórmula o expresión general para calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono? Si es así, reproduzca dicho procedimiento hasta obtener la expresión.
   6.3. El procedimiento y ejemplo gráfico con el que usted explicaría a sus compañeros cómo calcular la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono (apartado anterior 6.2.)¿Es óptimo para los polígonos cóncavos y convexos? Justifique.
   6.4. El procedimiento explicado por la alumna ¿Serviría para conocer cuántas diagonales tienen un polígono? ¿Por qué?
   6.5. ¿Qué procedimiento utilizaría usted para encontrar una fórmula general que le permita calcular la cantidad de diagonales que tiene un polígono cualquiera? Reproduzca dicho procedimiento hasta obtener la fórmula.
   6.6. El procedimiento y ejemplo gráfico con el que usted explicaría a sus compañeros cómo calcular la cantidad de diagonales de un polígono (apartado anterior 6.6.)¿Es óptimo para los polígonos cóncavos y convexos? Justifique.
   6.7. En caso de no haber respondido las cuestiones 6.5. y 6.6., ¿conoce alguna fórmula que permita calcular la cantidad de diagonales de un polígono? Indíquela.

7. Tres alumnos de la clase de Matemática II han mostrado la triangulación que han realizado de un polígono cóncavo de 7 lados (heptágono):
   a) ¿En alguna(s) de las tres figuras se evidencia el procedimiento de triangulación explicado por la alumna de la pregunta anterior (6)? Explique.
   b) ¿Puede inferir cuál ha sido el procedimiento seguido en cada caso? Si es así, explique lo realizado en cada caso



En los ítems de la parte II (Figura 8) se indaga sobre el conocimiento de procedimientos para determinar la cantidad de diagonales de un polígono, propiciando distintos niveles o tipos de demostración.

Figura 9

Cuestionario piloto (Parte III–Ítems 8-10)

Universidad de Piura
Facultad de Ciencias de la Educación

Cuestionario Nº1-Parte III: Cuadriláteros

Carné Nº: ________________________ Fecha: _______________ Ciclo: _____Hora de inicio: ___________

Instrucciones: *Usted ha de responder el siguiente cuestionario siendo lo más analítico(a) y exhaustivo(a) posible, de tal forma que en sus respuestas evidencie el conocimiento geométrico que posee, las concepciones que tiene sobre ciertos objetos geométricos, las propiedades que atañe a cada uno y las relaciones que establece entre estos.*

8. Para trabajar la clasificación de cuadriláteros:

8.1. Piense en el tipo de cuadrilátero más general, el que menos propiedades añadidas tiene. Grafíquelo, indique su nombre y defínalo. Justifique por qué cree que cumple "el que menos propiedades añadidas tiene".
Por ejemplo, *se puede pensar que un cuadrado es un cuadrilátero con condiciones añadidas a las del rombo, puesto que, además de ser paralelogramo con 4 lados iguales, tiene sus cuatro ángulos iguales.*

8.2. En un libro de texto se muestra una clasificación de los cuadriláteros y se menciona los siguientes tipos: paralelogramo, trapecio, trapezoide, rectángulo, cuadrado, rombo. ¿Cómo los organizaría si empieza por el que representa la clase más general (recuerde apartado 8.1.) hasta llegar a la clase más particular? Justifique la organización.

8.3. Defina cada uno de los cuadriláteros que ha mencionado

9. Los enunciados señalados ¿son verdaderos o falsos? y argumente por qué.

a) Todos los cuadriláteros son trapezoides.
b) Todos los cuadrados son trapecios.
c) Algunos rombos son cuadrados.
d) Todo rectángulo es un paralelogramo.
e) Todo cuadrado es un rombo.
f) Todo rombo es un rectángulo.
g) Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados.

9.1. Dé las definiciones correspondientes para que al menos tres de las afirmaciones anteriores sean ciertas.
9.2. Construya la clasificación de los paralelogramos considerando las definiciones dadas en (9.1.).

10. Tres carpinteros A, B y C quieren cortar **cuadrados** de madera y después de cortar **cuadriláteros convexos** hacen las siguientes comprobaciones:

- A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido.
- B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido.
- C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado.

¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Justifique.

Los ítems de la Parte III (Figura 9) están centrados en indagar el conocimiento de los cuadriláteros, desde una perspectiva jerárquica. Así, se propone clasificarlos y establecer relaciones entre ellos desde dicha perspectiva.

Este instrumento es completado por ocho estudiantes de la especialidad de Matemática y Física[85] de diversos ciclos al finalizar el semestre 2010-II y a mitad del 2011-I. En la Tabla 4 puede observarse que todos los EPP habían cursado la asignatura de Geometría Plana y Trigonometría y en consecuencia, se asume que tenían el conocimiento base para reflexionar sobre el tópico propuesto.

Tabla 4

Características académicas de los informantes al momento de completar el cuestionario piloto

Informante (I)	Periodo académico	Ciclo/situación académica	Cursos requisitos cursados[86]					Completó cuestionario[87]
			MGP	MD1	MD3	P1M	CT2	
I1	2010-II	4	Sí	No	No	No	No	Sí
I2	2010-II	4	Sí	No	No	No	No	Sí
I3	2011-II	4	Sí	No	No	No	No	No
I4	2011-II	5	Sí	No	No	No	No	No
I5	2010-II	6	Sí	No	No	No	Sí	Sí
I6	2011-II	6	Sí	No	No	No	Sí	Sí
I7	2010-II	8	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
I8[88]	2010-II	10	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
I9[89]	2011	Egresado	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No

La variedad académica de los informantes, mostrada en la Tabla 4 se justifica en la necesidad de valorar el cuestionario piloto según la correspondencia de las preguntas con los objetivos de la investigación (¿Las preguntas propician respuestas que contribuyen al

---

[85] Dado que la carrera de Educación es poco elegida entre los postulantes a la universidad, ordinariamente se tiene entre 10 y 25 estudiantes en cada especialidad. Los estudiantes que aceptaron completar el cuestionario piloto superan la mitad de los que se preparar para ser profesores de Matemática y Física.

[86] La leyenda de las siglas es: MGP: Geometría plana y trigonometría, MD1: Didáctica de la matemática, MD3. Programación y evaluación en matemática, P1M: Práctica Profesional A, CT2: Tecnología Educativa II.

[87]Llamamos “cuestionario” al instrumento que se elaboró a partir de la información obtenida en el cuestionario piloto y del cual reportamos resultados.

[88]Estaba concluyendo su formación inicial y había cursado todas las asignaturas de Práctica Profesional. Esto lo dota de una experiencia de enseñanza de la matemática, con alumnos reales, ya que ha desarrollado clases en, al menos, una institución educativa.

[89]Este informante había concluido su formación inicial en el 2009-II, en consecuencia, tenía un año de experiencia como docente en una institución educativa. Si bien, este informante no es un estudiante para profesor, sino un profesor novel, consideramos que puede aportar información relevante sobre la idoneidad del instrumento.

desarrollo de la investigación?) y según la idoneidad de estas con la formación que tiene cada estudiante en el momento específico de la aplicación de la prueba (¿Los EPP responden a lo que se les pregunta? ¿Las respuestas dadas por los EPP coinciden con lo previsto?). En relación con lo último, suponemos que la riqueza del conocimiento matemático (su especialización) que poseen los estudiantes, en ese momento de su formación académica, es mayor en aquellos de los últimos ciclos. Bajo esta conjetura, decidimos que un egresado de la carrera también complete el cuestionario piloto para confirmar y ampliar la información dada por los EPP. Este informante había culminado la carrera el 2009-II con uno de los mejores expedientes académicos y trabajaba como profesor de matemáticas de 6º de primaria[90] así como de 1° y 3° de secundaria.

Antes de ser aplicado, el cuestionario piloto se sometió al juicio de expertos. Así pues, el instrumento fue enviado (vía correo electrónico) a los miembros del área de Didáctica de la Matemática del grupo DESYM[91]. A este instrumento lo acompañó una guía orientadora que declaraba los objetivos de la investigación y del instrumento, además de describir brevemente la estructura de este (Apéndice B). El cuestionario piloto fue completado por dos de los investigadores referidos y un tercero emitió comentarios generales. A partir de ellos, se introdujeron algunos cambios:

- Formular los ítems relacionados con la definición de polígono cuidando que estos no hagan pensar que hay una sola definición de este objeto geométrico, sino que permitieran ver la concepción de cada estudiante respecto de dicho objeto.
- Omitir o reformular los ítems que parecían preguntar por lo mismo, sin aportar ninguna variación de contexto o condición.
- Formular las preguntas, intentando asegurar que se justifique cada respuesta, así, hubo que agregar algunos "por qué, justifique o explique". Además, sugirieron que las preguntas no generen respuestas cerradas (sí o no) sino que, por el contrario, se

[90]Actualmente, hay una tendencia a contratar profesores de matemáticas (de secundaria) para enseñar esta asignatura en el nivel primario, ya que se considera que poseen una formación especializada, cosa que no ocurre con los profesores de primaria, cuya formación matemática es básica y muchas veces mínima. Esta tendencia se nota sobre todo en los colegios privados (no públicos).

[91] Grupo de investigación Formación inicial y Desarrollo Profesional de Profesores, adscrito a la Universidad de Huelva (España)".

obtenga de ellas el máximo conocimiento que posee un estudiante respecto del tópico en cuestión.

Después de hacer los cambios en el cuestionario piloto y luego de aplicarlo a los EPP, se analizaron las respuestas haciendo uso de un listado de indicadores construidos a partir del MKT[92] (Apéndice C). Este análisis permitió observar que los EPP no lograban posicionarse en el papel de *docentes de sus compañeros* y, por tanto, las respuestas se limitaban al conocimiento matemático, específicamente al conocimiento común, dejando de lado el conocimiento didáctico del contenido. Además, considerando los comentarios emitidos por los investigadores expertos que valoraron el instrumento piloto, decidimos que era necesario reformular las situaciones, la forma de preguntar, la extensión de la prueba y, por ende, los contenidos a abordar, lo cual suponía confeccionar un nuevo cuestionario.

3.7.1.2. Cuestionario

La confección de este cuestionario se basa en la fundamentación teórica de las investigaciones en didáctica sobre el tópico y también en las relacionadas con el conocimiento del profesor de matemáticas. Además de ello, al solicitar el juicio de expertos sobre el cuestionario piloto y considerar los resultados obtenidos en el mismo, hemos controlado la credibilidad[93], es decir, el grado de confianza en la veracidad de los resultados de la investigación.

En la Tabla 5 mostramos las sugerencias específicas (a las generales ya nos referimos en el apartado anterior) dadas por los expertos que revisaron el cuestionario piloto, asociadas (para facilitar la lectura) al ítem correspondiente. Esta vinculación puede contribuir a localizar la concreción de las sugerencias en el nuevo cuestionario y a visualizar las diferencias estructurales en el mismo.

---

[92] Recuérdese que esta investigación inició teniendo al MKT como marco teórico de referencia y como herramienta de análisis.

[93] Este término se propone desde el enfoque cualitativo, como equivalente al de "validez interna", empleado en el paradigma positivista. Dado que algunos investigadores cualitativos rechazan este último, se propone como término alternativo "credibilidad". Así pues, el criterio de credibilidad hacer referencia a la correspondencia entre los resultados de la investigación y las percepciones que los participantes poseen de la realidad estudiada (Rodríguez, Gil y García, 1999).

Tabla 5

Sugerencias del juicio de expertos sobre el cuestionario piloto

Ítem del cuestionario piloto	*Sugerencias de los expertos*
1. Usted debe dar una clase de polígonos a sus compañeros de Matemática II, mientras la prepara, reflexiona sobre los subconceptos[94] que ha de considerar al definir polígono. ¿Cuáles son los subconceptos que integrarían la definición y cómo definiría los mismos?	*Aclarar el término "subconcepto" o situarlo en un contexto que ayude a comprenderlo*. Los estudiantes confunden el subconcepto con los elementos necesarios para trazar un polígono (puntos y segmentos) o, sencillamente, lo desconocen.
2. Dé una definición, matemáticamente correcta de polígono.	Ítem 2: *Enunciar la consigna vinculándola al ítem 1*. Los estudiantes no emplean en general los subconceptos señalados en (1) al construir la definición de polígono.
3. Luego de haber dado, a sus compañeros de Matemática II, la definición de Polígono debe ejemplificar gráficamente la misma. Trace al menos tres dibujos que ejemplifiquen la definición dada en el apartado anterior y otros tres que estén excluidos con esa misma definición.	Ítem 3: *Incidir en la variedad de los ejemplos gráficos de polígonos y no polígonos*. Los estudiantes trazan representantes prototípicos y poco variados de los polígonos; por ejemplo, hay quienes trazan solo cuadriláteros como ejemplos de polígonos.
4. Se han revisado algunas páginas web sobre polígonos y se ha encontrado las siguientes definiciones y sus respectivas representaciones. Analice y justifique en cada caso si: 4.1. Las definiciones son coherentes con las respectivas representaciones ¿Por qué? 4.2. Cuál de las tres definiciones le parece más correcta. ¿Por qué? ¿Le haría alguna modificación para convertirla, a su entender, en correcta? ¿cuál y por qué?	Ítem 4: *Diferenciar las preguntas para que se respondan necesariamente todas, aunque puedan tener aspectos comunes*. Por ejemplo, la presentación de los ítems 4.1 y 4.2 ha hecho que algunas informantes solo respondan a una de ellas.
5. Con la definición de polígono que tiene ahora en mente: a) Mantiene la definición dada en (2) o la modifica ¿Por qué? b) Las siguientes figuras son o no polígonos? ¿por qué? (ver Figura 7) c) Al considerar como polígonos las figuras anteriores, ¿Alguna propiedad de la familia de los polígonos dejaría de cumplirse? ¿Cuál y por qué?	Ítem 5: *Hacer especificaciones en cada ítem*. Por ejemplo, en 5a debe señalarse que si se modifica la definición inicial de polígono, entonces debe escribirse la nueva.
6. En la clase de Matemáticas II se está estudiando la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono. Los estudiantes deben hallar una expresión general que les permita calcular cuánto suma la medida de los ángulos interiores de un polígono cualquiera. (Se describe el procedimiento que sigue una hipotética estudiante y se plantean 7 cuestiones) (ver Figura 8).	Ítem 6: *Explicitar que deben aportarse ejemplos que apoyen el discurso*. Por ejemplo, es conveniente que el discurso que señala la validez para polígonos cóncavos y convexos del procedimiento de 6.2, se vea acompañado con una representación gráfica.

[94] Conceptos que se involucran explícita o implícitamente en el concepto de polígono.

7. Trea alumnos de la clase de Matemática han mostrado la triangulación que han realizado de un polígono cóncavo de 7 lados (heptágono): a) ¿En alguna(s) de las tres figuras (ver figura 8) se evidencia el procedimiento de triangulación explicado por la alumna de la pregunta anterior (6)? Explique. b) ¿Puede inferir cuál ha sido el procedimiento seguido en cada caso? Si es así, explique lo realizado en cada caso.	Ítem 7: *Mejorar las representaciones gráficas y reformular las consignas*. Por un lado, se observa que las figuras mostradas no permiten diferenciar cuáles son los lados del polígono y cuáles las diagonales o trazos adicionales, esto ha podido obstaculizar la elaboración de supuestos para cada "triangulación". Por otro lado, la consigna dada en 7b debe asegurar que los EPP elaboren supuestos sobre la triangulación.
8. Para trabajar la clasificación de cuadriláteros: 81. Piense en el tipo de cuadrilátero más general, el que menos propiedades añadidas tiene. Grafíquelo, indique su nombre y defínalo. Justifique por qué cree que cumple "el que menos propiedades añadidas tiene". 8.2. En un libro de texto se muestra una clasificación de los cuadriláteros y se menciona los siguientes tipos: paralelogramo, trapecio, trapezoide, rectángulo, cuadrado, rombo. ¿Cómo los organizaría si empieza por el que representa la clase más general (recuerde apartado 8.1.) hasta llegar a la clase más particular? Justifique la organización. 8.3. Defina cada uno de los cuadriláteros que ha mencionado.	Ítem 8: *Crear un contexto de enseñanza que involucre a cada consigna, ejemplificarlas y explicitarlas*. El contexto debe permitir indagar las características del conocimiento matemático necesario para la enseñanza.
9. Los enunciados señalados ¿son verdaderos o falsos? y argumente por qué. (ver figura 9) 9.1. Dé las definiciones correspondientes para que al menos tres de las afirmaciones anteriores sean ciertas. 9.2. Construya la clasificación de los paralelogramos considerando las definiciones dadas en (9.1).	Ítem 9: *Recalcar la necesidad de justificar y ejemplificar las respuestas, además de explicitar las consignas.* Asimismo, hay que revisar la disposición de las preguntas y el espacio reservado a las preguntas.
10. Tres carpinteros A, B y C quieren cortar cuadrados de madera y después de cortar cuadriláteros convexos hacen las siguientes comprobaciones.: - A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido. - B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido. - C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado. ¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Justifique.	Ítem 10: *Agregar en el enunciado de la pregunta, que han de indicar el cuadrilátero que consigue construir cada carpintero*.

El nuevo cuestionario está constituido por cuatro situaciones de enseñanza-aprendizaje (S)[95], ideadas para el 2° grado de secundaria[96], en las que se proponen 18 ítems en los que cada EPP debe situarse en el rol docente. En situación 1 (S1) se aborda la enseñanza y aprendizaje de la noción de *polígono* (concepto y representaciones gráficas); en las tres restantes (S2, S3, S4), se aborda el desarrollo de los cuadriláteros: clasificación, propiedades, definición de cada uno y relaciones entre ellos (Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13). Un tema que ya no se abordó fue el cálculo de la cantidad de diagonales de un polígono y los procesos de triangulación para el mismo.

[95] Son *situaciones hipotéticas* constituidas por un conjunto de tareas específicas, propuestas en la formación de profesores (Blanco y Contreras, 2002), que permiten el análisis y operativización de conocimientos y concepciones, en relación con la matemática, su enseñanza y aprendizaje.

[96] La educación básica regular peruana está dividida en 7 ciclos. El nivel secundario lo constituyen 2 ciclos, el VI que abarca 1° y 2° (12-14 años) y el VII constituido por 3°, 4°, y 5° (15 a 17 años).

Figura 10

Cuestionario (S1: preg. 1-3)

CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

El presente cuestionario forma parte de la Tesis Doctoral "*Conocimiento Matemático para la Enseñanza en Estudiantes para Profesor de Matemáticas. El caso de los Polígonos*", donde uno de los objetivos es comprender los procesos de pensamiento y el conocimiento geométrico de estudiantes para profesor. Se garantiza la confidencialidad de la información recogida así como el anonimato de los encuestados. En este sentido, pedimos su colaboración y total disponibilidad para completar, de forma detallada, las preguntas que se presentan en este cuestionario, puesto que las respuestas dadas serán de crucial importancia para concretar esta investigación.
¡Muchas gracias!

DATOS DEL INFORMANTE			
Carné N°:		Fecha de aplicación:	
Ciclo que cursa:		Duración:	

Situación 1: Al iniciar el tema de Polígonos en 2° de secundaria, Laura pide a sus alumnos que piensen *¿Qué es un polígono y cómo lo definirían?* Tras unos minutos, les pide que escriban en una hoja la definición que han pensado. A continuación, Laura hace una tabla en la pizarra y salen algunos alumnos a escribir la definición que han construido:

Alumno	Definición
Pablo	Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.
Ana	Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales.
Gaby	Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n-2).
Luis	Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

1) **Si usted estuviera en el caso de Laura** (la profesora) y tuviera que corregir las definiciones dadas por sus alumnos ¿qué valoración haría de cada una de las que se muestra en la tabla? Explique los errores que ha identificado y señale las ideas válidas.

Definición dada por:	Errores de la definición	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Ideas válidas/ justificación de tal consideración

2) ¿Qué le dicen los errores que ha identificado sobre la concepción de polígono que tiene cada alumno? ¿Qué imágenes está asociando cada alumno a su definición? Dibuje estas.

Definición dada por:	Concepción de polígono	Imágenes que asocia a su definición de polígono

3) Si tuviese que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os)? Trácelo(s) y justifique por qué emplearía dicho(s) o dibujo(s).

Definición dada por:	Dibujo(s) para refutar el error de la definición	Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)

Figura 11

Cuestionario (S1: preg. 4-6; S2)

4) Es posible que los errores que evidencian los alumnos se deban a que los subconceptos involucrados en el concepto de polígono no han sido construidos correctamente. Tomando en cuenta esto ¿Qué subconceptos[1] de polígono trabajaría con cada alumno de cara a construir una definición correcta?

Por ejemplo: *para trabajar la definición de altura de un triángulo, es necesario que antes los estudiantes hayan comprendido qué es un segmento perpendicular, cuál es el lado opuesto a un vértice, sepa trazar un segmento perpendicular desde un punto exterior hacia una recta, etc.*

Alumno	Subconcepto que trabajaría para construir una definición correcta de polígono

5) ¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a sus estudiantes de 2° de secundaria, después de haber analizado las respuestas que ellos le dieron inicialmente y de haber trabajado las actividades anteriores? Enúnciela.

6) Trace, al menos tres dibujos, lo más variados posibles, que ejemplifiquen la definición que ha construido en (5) y tres dibujos que no estén considerados en ella.

Ejemplos de polígono	Contraejemplos de polígono

Situación 2: En la clase de 2° de secundaria acaban de definir un *cuadrilátero como polígono de cuatro lados*. El profesor ha indicado que se dividen en cóncavos y convexos y ha definido estos. Luego, al iniciar la reflexión sobre cuadriláteros convexos se suscita el siguiente diálogo.

Profesor: *¿Qué cuadriláteros convexos conocen? Escriban el nombre y tracen un dibujo de cada uno.*

Ana: *(levanta la mano): rectángulo, cuadrado y paralelogramo y sale a la pizarra para dibujarlos.*

Pablo *(agrega): rombo y trapecio* y los dibuja.

Profesor: *¿Hay alguno más?*

Claudia: *romboide y trapezoide.*

Luis: *romboide y paralelogramo son lo mismo.*

(Se genera murmullos por lo que acaba de decir Luis)

Profesor: *Eso lo aclararemos más adelante, ahora continúen pensando en los cuadriláteros que conocen.*

Beatriz: Un rombo es un cuadrado girado.

Profesor: ¿Así? ¿Entonces para ser un cuadrilátero determinado hay que fijarse en el giro que muestra su representación gráfica?

Pablo: Para algunos creo que sí, porque el paralelogramo si se gira, se parece a un rombo.

Profesor: Bueno, y ¿qué pasa si no giran los cuadriláteros? ¿Son iguales? ¿Estarán relacionados?

Beatriz: Si no los giran no estarán relacionados porque, un cuadrado no será un rombo.

Ana: El giro no importa, porque un rombo es un cuadrado porque tiene los lados iguales.

(Luego de escuchar a sus alumnos, el profesor se da cuenta de los errores que tienen e inicia una reflexión sobre el origen de dichos errores y cómo contrarrestar estos).

[1] Entienda “subconceptos” como los conceptos que son necesarios conocer para comprender el concepto de polígono.

Figura 12

Cuestionario (S2: preg.1-3; S3: preg. 4-6)

Si usted estuviese en el lugar del profesor de esta aula:

1. ¿Qué conclusiones sacaría sobre el conocimiento de sus alumnos en el tema de cuadriláteros? Justifique cada conclusión con alguna proposición (o parte de ella) del diálogo.

Conclusión sobre el conocimiento de los cuadriláteros	Proposición que justifica dicha conclusión

2. ¿Qué aspectos o elementos cree que consideran los alumnos (del diálogo), como factores determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿Dichos aspectos o elementos son erróneos, por qué?

   Por ejemplo: *considerar que "el rombo para ser cuadrado debe estar girado" (apoyado sobre un vértice). ¿Es un acierto? ¿Es un error? ¿Por qué?*

Aspectos o elementos determinantes en la concepción de un cuadrilátero	Justificación del acierto o del error

3. Intente explicar con el máximo detalle posible las causas de los errores señalados (¿A qué pueden deberse?, ¿qué comprensión del contenido muestran los alumnos?). Luego, indique ¿Qué plantearía como profesor para abordar estos errores?

Error	Causa del error	Acción a plantear

Situación 3: El profesor, en su casa, ha seguido reflexionando sobre el conocimiento que evidenciaron sus alumnos en la clase de "Cuadriláteros" y ha considerado que es necesario hacerles ver los aspectos que determinan que un cuadrilátero sea lo que es. Cree que si tienen claro esto y las propiedades que les atañe a cada uno, podrán establecer relaciones entre los distintos cuadriláteros y luego clasificarlos.

Si usted fuese aquel profesor:

4. ¿Qué aspectos o elementos les señalaría a los alumnos como determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿En qué deberían fijarse sus alumnos para diferenciar cada cuadrilátero?
5. Si ahora tuviera que señalar las propiedades que son **necesarias para determinar y luego definir** cada cuadrilátero ¿Cuáles enunciaría?

Cuadrilátero	Propiedades que lo definen

6. Si usted quisiera mostrar las relaciones entre los distintos cuadriláteros que están estudiando y para ello necesita jerarquizar estos, identificando primero el cuadrilátero más general ¿A cuál elegiría, qué cuadrilátero es el que menos propiedades añadidas tiene? Escriba su nombre y defínalo.

   Si le sirve de ayuda piense en el siguiente **ejemplo**: *se podría decir que un cuadrado es un cuadrilátero con condiciones añadidas a las del rombo, puesto que, además de ser paralelogramo con 4 lados iguales, tiene sus cuatro ángulos iguales, de este modo el rombo es una clase más general que el cuadrado.*

   Nombre del cuadrilátero: ______________________________

Definición	Razón por la que es el más general

Figura 13

Cuestionario (S3: preg.7-9; S4)

7. ¿Cómo organizaría los cuadriláteros convexos si empieza por el más general de estos (ítem 6), hasta llegar al más particular (el que más propiedades añadidas tiene)? Muestre esta organización en un esquema y luego explique por qué los ha organizado de esa manera. **Recuerde que debe empezar por el más general hasta llegar al más particular.**
8. Después de haber organizado los cuadriláteros en un esquema, deberá definir cada uno, cuidando la coherencia con el esquema realizado, esto es, definiendo el más particular en función del cuadrilátero inmediatamente anterior.
9. Para continuar la reflexión sobre las relaciones entre los distintos cuadriláteros, el profesor formula a sus alumnos las siguientes proposiciones, pidiéndoles que indiquen si son verdaderas o falsas y que justifiquen verbal, y gráficamente **si es necesario**, cada una de sus respuestas. ¿Qué respondería usted a cada afirmación?

   a) Todos los cuadriláteros son trapezoides ( )

   b) Todo paralelogramo es un rombo ( )

   c) Algunos cuadrados son trapecios ( )

   d) Todo rectángulo es un paralelogramo ( )

   e) Algunos rombos son cuadrados ( )

   f) Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados ( )

Situación 4: Con la intención de comprobar si las actividades propuestas para contrarrestar los errores iniciales han sido efectivas, el profesor propone la siguiente actividad:

Tres carpinteros A, B y C quieren cortar cuadrados de madera y después de cortar cuadriláteros convexos hacen las siguientes comprobaciones:

- A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido.
- B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido.
- C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado.

¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Si considera que alguno(s) no consiguió cortar un cuadrado, indique qué cuadrilátero construyó. Justifique para cada construcción realizada.

Considerando que el cuestionario diseñado adopta características comunes a la entrevista, tal como se ha justificado en el apartado 3.5.1. Encuesta y cuestionario, las preguntas incluidas en este instrumento abordan, de manera no excluyente, dos de los tipos propuestos para la entrevista[97]:

[97] Al desarrollar las cuestiones que se proponen en una entrevista, Rodríguez, Gil y García (1996) toman como referencia la clasificación propuesta por Patton (1980). Este autor diferencia las cuestiones en preguntas demográficas/biográficas, preguntas sensoriales, preguntas sobre experiencia/conducta, preguntas sobre sentimientos, preguntas sobre conocimiento y preguntas de opinión/valor.

1) *Preguntas sobre experiencia/conducta*: formuladas para conocer lo que harían los EPP ante una situación concreta o las experiencias que han tenido como discentes. "A través de ellas se pretende que el entrevistado describa experiencias, conductas, acciones y actividades que habría sido visibles de haber estado presente un observador" (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 174). Un ejemplo puede verse en la Figura 14 en ella se plantea una serie de preguntas, en el marco de la situación 3[98] propuesta en el cuestionario (Figura 13). Si se recuerda, la situación 3 propone un contexto de reflexión del profesor en torno a los aspectos que determinan que un cuadrilátero sea lo que es, para hacérselos ver a sus estudiantes. Responder las cuestiones propuesta supone que los EPP apelen al conocimiento que poseen, así como a lo que consideran la conducta ideal.

Figura 14
Ejemplo de pregunta sobre experiencia/conducta

3. Intente explicar con el máximo detalle posible las causas de los errores señalados (¿A qué pueden deberse?, ¿qué comprensión del contenido muestran los alumnos?). Luego, indique ¿Qué plantearía como profesor para abordar estos errores?

Error	Causa del error	Acción a plantear

2) *Preguntas de conocimiento* se proponen para conocer qué saben los EPP (desde el punto de vista especializado) sobre los polígonos y cómo usan dicho conocimiento en las diversas situaciones propuestas. En el ejemplo mostrado en la Figura 15 se observa que, para responder a la pregunta formulada[99], es necesario que los EPP tengan una idea de polígono y diferencien los conceptos o características estructurantes de los accesorios.

---

[98] La situación 3 dice: *El profesor, en su casa, ha seguido reflexionando sobre el conocimiento que evidenciaron sus alumnos en la clase de "Cuadriláteros" y ha considerado que es necesario hacerles ver los aspectos que determinan que un cuadrilátero sea lo que es. Cree que si tienen claro esto y las propiedades que les atañe a cada uno, podrán establecer relaciones entre los distintos cuadriláteros y luego clasificarlos. Si usted fuese el profesor:* (se enuncian los ítems)

[99] La pregunta propuesta está asociada a la situación 1 del cuestionario (Figura 10). En esta se propone cuatro definiciones dadas por cuatro hipotéticos alumnos de 2do de secundaria. La narración previa a dichas definiciones dice: Situación 1: *Al iniciar el tema de Polígonos en 2° de secundaria, Laura pide a sus alumnos que piensen ¿Qué es un polígono y cómo lo definirían? Tras unos minutos, les pide que escriban en una hoja la definición que han pensado. A continuación, Laura hace una tabla en la pizarra*

Figura 15

Ejemplo de pregunta de conocimiento

4) Es posible que los errores que evidencian los alumnos se deban a que los subconceptos involucrados en el concepto de polígono no han sido construidos correctamente. Tomando en cuenta esto ¿Qué subconceptos[1] de polígono trabajaría con cada alumno de cara a construir una definición correcta?

Por ejemplo: *para trabajar la definición de altura de un triángulo, es necesario que antes los estudiantes hayan comprendido qué es un segmento perpendicular, cuál es el lado opuesto a un vértice, sepa trazar un segmento perpendicular desde un punto exterior hacia una recta, etc.*

Alumno	Subconcepto que trabajaría para construir una definición correcta de polígono

El cuestionario es completado por los estudiantes de la asignatura Práctica Profesional A en los periodos académicos 2011-II y 2012-II, como se ha mencionado en apartados anteriores[100]. Cabe resaltar que de los tres informantes de nuestro estudio, dos resolvieron el cuestionario piloto (Marta, Laura), tal como puede observarse en la Tabla 6.

Tabla 6

Informantes que resolvieron el cuestionario piloto (CP) y el cuestionario

Grupo	EPP	Resolvió CP	Veces que resolvió el cuestionario	Finalizó la formación inicial	Veces que cursó P1M
2011	Marta	Sí	1	No egresó	2
	Samuel	No	1	2012	1
2012	Laura	Sí	2	2013	2

3.7.2. Recogida de artefactos y plan de clase

La recogida de fuentes documentales y otros artefactos es una de las técnicas de recogida de datos más empleadas en la investigación etnográfica (Goetz y LeCompte, 1988). Se considera “artefacto” a todo objeto que aporta datos sobre “las sensaciones, experiencias

y salen algunos alumnos a escribir la definición que han construido; (se propone la tabla con las definiciones).

[100]Recuérdese que estos EPP se encuentran cursando el octavo ciclo, cuarto año de carrera. Han estudiado las asignaturas de Geometría Plana y Trigonometría y Didáctica de la Matemática. Además, mientras desarrollan la Práctica Profesional también cursan la materia de Programación y evaluación en Matemática.

y conocimiento de las personas, y que también connotan opiniones, valores y sentimientos" (p. 162) (p.ej. libros de texto, apuntes de clase, diarios de clase, etc.). Tomando como referencia lo anterior, elegimos como instrumentos complementarios al cuestionario, el plan de clase y el registro en video de la ejecución del mismo. Con esta decisión buscamos ampliar la información proporcionada por los EPP en el cuestionario y sobre todo, extraer evidencias de su conocimiento ante una situación lo más parecida a una de aula, en la enseñanza de un tema relacionado con los polígonos.

La selección del plan de clase como instrumento de recogida de información, se justifica porque la planificación de la enseñanza y el correspondiente desarrollo de planes de clase es un aspecto central en la formación, inicial y continua, del profesorado (Murphy, 2012). De allí que constituya una de las dos competencias definidas, en el Dominio 1: Preparación para el aprendizaje de los estudiantes, en el Marco de Buen Desempeño Docente (Ministerio de Educación del Perú, 2012). Así pues, en dicho documento se enuncia la competencia: "Planifica la enseñanza de forma colegiada garantizando la coherencia entre los aprendizajes que quiere lograr en sus estudiantes, el proceso pedagógico, el uso de los recursos disponibles y la evaluación, en una programación curricular en permanente revisión" (p. 22). La consecución de lo anterior es el resultado de un conjunto de desempeños como: diseñar procesos pedagógicos motivadores que posibiliten el logro de aprendizajes; crear, seleccionar y organizar recursos; diseñar una evaluación sistemática así como sesiones de aprendizaje, entre otros.

Si bien la importancia de la planificación de las clases queda claramente evidenciada en el párrafo anterior (y en consecuencia, debe formar parte de toda carrera de formación de profesores), los elementos que integran dicha planificación (plan de clase en sí mismo, instrumentos de evaluación, materiales didácticos construidos, actividades de aprendizaje propuestas, etc.) representan instrumentos complementarios para recoger información en una investigación, tal como los diarios o las observaciones no participantes de aula (Carrillo & Muñoz-Catalán, 2011). En este sentido consideramos el *plan de clase,* elaborado por cada EPP, como un instrumento de recogida de información pues, evidencia conocimiento de los EPP sobre un tema, las conexiones desarrolladas en torno a este, la eficacia de las actividades que proponen (Murphy, 2012), y otros aspectos relativos a diversos subdominios del MTSK.

Así pues, luego de que cada EPP completa el cuestionario, se le asigna uno de los temas abordados en el mismo para que sea desarrollado en una sesión de clase simulada, como parte de la asignatura de Práctica Profesional A. La distribución de los temas y las orientaciones a tener en cuenta en la elaboración de la sesión de clase se describe en una guía (Apéndice A) que se muestra de manera resumida en la Tabla 7.

Tabla 7

Temas y consignas dadas a los EPP para construir el plan de clase

Informante	Tema	Consigna para la construcción de la sesión
Marta	Concepto de polígono y clasificación	Iniciar la clase proponiendo como ejemplo las definiciones de polígono dadas en el cuestionario (C-I.1). Analizarlas con los alumnos para construir la definición; proporcionar los ejemplos gráficos necesarios y clasificación de los polígonos.
Samuel	Clasificación de cuadriláteros	Construir una clasificación inclusiva de los cuadriláteros. Elaborar un esquema de la misma y definir cada uno de ellos según el esquema. En la evaluación puede usarse la situación del carpintero (C-IV)
Laura	Clasificación inclusiva de cuadriláteros	Empezar la sesión proporcionando a los alumnos distintos cuadriláteros numerados en una hoja para que los clasifiquen, bajo el criterio que quieran, pero cuidando que estén relacionados y no tratándolos como clases disjuntas. (Se le pide que considere las respuestas que dio al responder C-II.3)

3.7.3. Observación y ejecución de una sesión de clase

La observación, al igual que la entrevista, es una de las técnicas de recogida de información más empleadas en la investigación etnográfica (Goetz y LeCompte, 1988). Dado que el cuestionario empleado en esta investigación posee elementos comunes a una entrevista estructurada (véase apartado 3.5.1), puede decirse que la integración de la *observación* con la técnica de encuesta es compatible puesto que permite ampliar y complementar la información recogida inicialmente, además de triangular la misma (Cohen, Manion y Morrison, 2007).

En este estudio se realiza la observación de una sesión de clase simulada siguiendo el plan de clase construido, previamente, por cada EPP. Esta observación tiene las siguientes características (Friedrichs, 1973 citado por Flick, 2004, p. 150):

- *Descubierta*: Los EPP saben que se observa su trabajo, tanto de quien ejecuta la sesión como de los que participan en ella, esto es parte del contrato didáctico.
- *Participante*: Como ya se ha dicho, la docente investigadora interviene en la sesión cada vez que es necesario y esto puede influir en las posteriores acciones de los EPP durante el desarrollo de esta.
- *No sistemática*: Si bien se proporcionó unas directrices para planificar la sesión de clase (Tabla 7) y se tiene el documento correspondiente (plan de clase), la observación no se realiza en referencia estricta a esto. Es decir que, si bien hay una idea de las actividades de enseñanza que propondrá cada EPP y del conocimiento especializado que puede suponer su ejecución de estas, la docente-investigadora "espera" a ver qué se desarrolla en la sesión, y por ende, qué conocimiento se moviliza.
- En situaciones *naturales*: La observación se realiza bajo la metodología de la asignatura Práctica Profesional A, en el aula asignada y según el contrato didáctico establecido (Ver Apéndice D-sílabo de la asignatura).
- *Centrada en la observación de otros*: Pues lo que se observa es el desempeño que tienen los EPP durante las sesiones de clase desarrolladas.

La ejecución de la sesión de clase es realizada según el cronograma establecido en la asignatura (Tabla 8) y registrada en video puesto que este "proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez" (Planas, 2006, p. 40). Además de lo anterior, las ventajas del uso del video señaladas por Ruíz (2011) permite que evaluemos la pertinencia de su uso, concluyendo que:

- Posibilita el estudio de *procesos complejos* sucedidos en la enseñanza y el aprendizaje de una noción geométrica específica. En este sentido, hacen visibles los significados que construyen y atribuyen los EPP a dicha noción, así como los fenómenos acontecidos en el desarrollo de una sesión de clase.
- Permite responder a las preguntas de investigación y plantear *múltiples reanálisis* que generen nuevas preguntas de investigación.
- Facilita la ampliación y comprobación de información recogida por otros instrumentos y su posterior integración.

Tabla 8

Grabación en video del desarrollo de las sesiones de clase

Informante	Tema desarrollado	Fecha	Duración del video[101]
Marta	Concepto de polígono y clasificación	17/11/11	77 min 37 s
Samuel	Clasificación de cuadriláteros	17/11/11	96 min 8 s
Laura	Clasificación inclusiva de cuadriláteros	03/10/12	64 min 20 s

El uso del video en la investigación está asociado con dos fases concretamente: la recogida de información y el análisis de esta. En estas, suceden tres etapas: permisos y consentimiento para el desarrollo de las grabaciones, realización de estas y análisis de la información recogida (Savola, 2008). En la primera etapa (permisos y consentimientos) se ha tenido en cuenta aspectos éticos como comunicar a los EPP el objetivo de la investigación y la necesidad de su colaboración, así como asegurar la preservación de la identidad de cada uno. Los permisos fueron concedidos por los EPP sin dificultad alguna pues, conocían del desarrollo de esta investigación desde el momento que completaron el cuestionario. La segunda etapa, sucedió según se indica en la Tabla 8 en el marco de la asignatura Práctica Profesional A, razón por la cual, no fue necesario prever sesiones de adaptación a la presencia de la investigadora y la cámara de grabación pues, asumían aquello como parte de la asignatura. La tercera etapa es abordada en el apartado 3.5.3. (Métodos de análisis e interpretación de los datos).

En el desarrollo de la sesión se diferencian tres actores: el EPP que asume el rol de profesor y ejecuta la sesión, los compañeros EPP que asumen el rol de estudiantes de secundaria y su vez, de evaluadores del desempeño del EPP que ejecutó la sesión, y la docente formadora que, como ya se indicó en el aparatado *3.2.1. El contexto de estudio: la asignatura Práctica Profesional A*, evalúa la sesión de cara a la asignatura en cuestión y observa el desarrollo de esta por el interés de la investigación.

[101]El tiempo de duración del video es variado porque solo se registra las interacciones ocurridas en la sesión, es decir, aquellos momentos de silencio o de trabajo individual (sin consultas) no son grabadas. Además, en algunos casos los EPP llegaron con retraso a desarrollar su sesión de clase, razón por la cual contaron con menos tiempo del asignado.

3.7.4. Métodos de análisis e interpretación de los datos: Definición de descriptores

El análisis supone la manipulación, transformación, reflexión e interpretación de datos (obtenidos mediante diversos instrumentos), con la finalidad de extraer significados y establecer relaciones para alcanzar un mayor conocimiento de la especialización del conocimiento de profesor de matemática y, en la medida de lo posible, profundizar en su descripción y comprensión (Rodríguez, Gil y García, 1996).

El análisis e interpretación de los datos recogidos se realiza según el diseño de estudio de caso, a través de las dos estrategias propuestas por Stake (2007): "la interpretación directa de los ejemplos individuales y la suma de ejemplos hasta que se pueda decir algo sobre ellos como conjunto o clase" (p. 69). En este sentido, se emplea el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) ya que, como señalan Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014), este:

> "Tiene una dualidad en tanto es una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar distintas práctica del profesor de matemáticas a través de sus categorías" (p. 57).

En el proceso de análisis se contempla la reducción de datos, su presentación y la búsqueda de conclusiones. *La reducción de datos* obliga a revisar la completitud de la información dada por cada EPP, lo que conlleva a seleccionar tres informantes de los 11 que completaron el cuestionario. Además, dado que dos de este último grupo repitieron la asignatura, desarrollando los instrumentos dos veces, decidimos elegir la información dada en un solo periodo académico y no en los dos (o bien 2011-II o bien 2012-II). Dentro de esta etapa llevamos a cabo la identificación de unidades de información significativas siguiendo un criterio temático diferenciando: concepto de polígono y conceptualización jerárquica de cuadriláteros. Las unidades de información, para el caso de la sesión de clase, se toman de la transcripción del registro en video que se hizo de cada sesión. Dicha transcripción tiene numeradas las líneas lo cual permite señalar el párrafo que se emplea para ayudar en la comprensión de lo que se describe[102]. de referencia

---

[102] Procuramos tomar las unidades de información, tal como se han transcrito del video, sin embargo, cuando se usen expresiones repetidas o carentes de significados propias de un diálogo oral (p.ej. eeeee,

En la segunda etapa, *presentación de los datos*, se describe el conocimiento evidenciado por los EPP en un análisis inicial, haciendo uso de marcos teóricos distintos al MTSK, asociados a las temáticas señaladas en el párrafo anterior (concepto de polígono y conceptualización jerárquica de cuadrilátero). Sin embargo, en esta descripción se identifican aspectos que se repiten con regularidad y cuyo uso intencionado, hacer un análisis exhaustivo y sistemático de los datos, involucrando las categorías definidas para cada subdominio del MTSK. A estos aspectos les denominamos descriptores y les asociamos las categorías de distintos subdominios, tal como se muestra en el siguiente apartado. En la presentación de los resultados incluimos narraciones que integran los descriptores de cada temática y las categorías y subdominios del MTSK, así como figuras, tablas y transcripciones que ayudan a comprender la interpretación realizada en cada caso de estudio.

Finalmente, en la etapa de *establecimiento de inferencias* se reconstruyen las unidades analizadas para obtener resultados globales, estructurados y significativos. Hemos de decir que la extracción de conclusiones (del análisis) no se circunscribe a la individualidad de cada uno de los casos estudiados sino, a la integración de estos con el propósito de identificar interrelaciones entre descriptores-categorías MTSK, descriptores-subdominios MTSK y subdominio-subdominio. Esta identificación de relaciones pone en evidencia distintos niveles de análisis y contribuye a la caracterización del conocimiento especializado en torno a los polígonos.

Los descriptores de análisis, como se dijo en los apartados anteriores, se sustentan en la revisión teórica que abordan la conceptualización y jerarquización en geometría (Herskowitz, 1990; Vinner, 1991; Mariotti y Fischbein, 1997; De Villiers, 1998; Shir y Zaslavsky, 2001; Zazkis y Leikin, 2008; De Villiers et al., 2009; Ülger y Broutin, 2017). Así, llamamos *descriptor* al aspecto o parte de la temática en la que se centra el análisis. En algunos casos, coinciden en ambas temáticas (concepto de polígono y conceptualización de cuadriláteros y jerarquización), así como también lo hacen en algunos instrumentos de recogida de información (cuestionario, plan de clase y desarrollo de la sesión de clase).

---

esteeee) serán omitidas, siempre que resten comprensión. Por otro lado, si omitimos parte de un diálogo, localizado en un mismo párrafo, indicaremos el intervalo completo de las líneas de este. Sin embargo, cuando se presente una trascripción de párrafos (o fragmentos de estos) no contiguos, indicaremos los intervalos de las líneas correspondientes.

Dado que los descriptores ayudan a centrar el análisis en aspectos específicos de las temáticas, la integración de las categorías y subdominios del MTSK contribuye a la realización de un análisis exhaustivo e integrado a la vez, debido a las características de este modelo. Si bien se propone una asociación hipotética inicial (Tabla 9, Tabla 10), el análisis de los datos permitirá validar dicha asociación o modificarla.

Tabla 9

Descriptores y subdominios y categorías del MTSK respecto del concepto polígono

Descriptor	Subdominio	Categorías asociadas por instrumentos	
		Cuestionario (C)	Plan de Clase (PC) y Sesión de Clase (SC)
Características que atribuye a polígono	KoT–Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.
		Registros de representación	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.
Definición verbal	KoT–Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
		Registros de representación	Registros de representación
	KMT–Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Imagen conceptual de polígono	KoT–Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.
		Registros de representación	Registros de representación
	KFLM–Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas		Fortalezas y dificultades
Subconceptos de polígono	KoT–Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.	
	KSM–Conocimiento de la estructura de las matemáticas	Conexiones de complejización	Conexiones de complejización
		Conexiones de simplificación	Conexiones de simplificación
	KMT–Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Propiedades de polígonos	KoT–Conocimiento de los temas		Definiciones, propiedades y sus fundamentos
Características de una definición matemática	KPM–Conocimiento de la práctica matemática	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
Tipos de definiciones	KoT–Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.	Definiciones, propiedades y sus fundamentos.
Características de las representaciones gráficas	KoT–Conocimiento de los temas	Registros de representación	Registros de representación
	KMT–Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Cómo aprenden los estudiantes	KFLM–Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas	Formas de interacción con un contenido matemático	Teorías de aprendizaje

Tabla 10

Descriptores y subdominios y categorías del MTSK respecto de la conceptualización de cuadriláteros y su jerarquización

Descriptor	Subdominio	Categorías asociadas por instrumentos	
		Cuestionario (C)	Plan de Clase (PC) y Sesión de Clase (SC)
Criterios para clasificar cuadriláteros	KoT-Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y fundamentos	Definiciones, propiedades y fundamentos
Procedimiento para clasificar	KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	Prácticas particulares del quehacer matemático
Clases de cuadriláteros consideradas	KoT-Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y fundamentos	Definiciones, propiedades y fundamentos
Propiedades de cuadriláteros	KoT-Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y fundamentos	Definiciones, propiedades y fundamentos
Comprensión de clasificaciones inclusivas	KoT-Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y fundamentos	Definiciones, propiedades y fundamentos
Coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases	KoT-Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y fundamentos	Definiciones, propiedades y fundamentos
Características de una definición matemática	KPM-Conocimiento de la práctica matemática	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
Características de las representaciones gráficas	KoT-Conocimiento de los temas	Registros de representación	Registros de representación
	KMT-Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	KFLM-Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas		Fortaleza y dificultades
Cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros	KFLM-Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas		Teorías de aprendizaje
			Fortaleza y dificultades
Recursos para la enseñanza de cuadriláteros	KMT-Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas		Recursos materiales y virtuales
			Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

3.8. Fiabilidad y validez del estudio

Tomando como referencia que "la fiabilidad alude a la posibilidad de que un estudio pueda ser replicado" (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 284), consideramos que esta se logra en la medida que hemos manifestado el rol de la investigadora dentro del estudio realizado y la relación establecida con los informantes (3.3), las características de estos y del contexto académico al que pertenecen (3.2.1), así como el método de análisis e interpretación de los datos (3.5). Además, dado que nuestro estudio es eminentemente cualitativo, se ha utilizado procesos de triangulación, tales como triangulación de fuentes de datos, de investigadores y metodológica. En el primer caso, recogimos datos en dos periodos académicos distintos (diferentes ciclos temporales) y de distintos informantes aunque, por los hallazgos, fueron tratados como un grupo equivalente. La *triangulación de investigadores* se realiza por dos vías. La primera consiste en discutir los descriptores de análisis en algunas de las sesiones mensuales del grupo SIDM. La segunda vía de triangulación está referida a la presentación de algunos resultados iniciales, comunicados en congresos internacionales (Carreño, Ribeiro y Climent, 2013; Climent, Carreño y Ribeiro, 2014; Carreño, Climent y Flores-Medrano, 2017; Carreño y Climent, 2019). La *triangulación metodológica* la realizamos al recoger datos con tres instrumentos distintos (cuestionario, plan de clase y desarrollo de la clase), apoyándonos en "la utilización de procedimientos automáticos para el registro y conservación de los datos (fotografías, grabaciones de audio y video)" (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 285). Finalmente, como criterios de *calidad alternativos*, proponemos el uso de expresiones de los informantes (transcripciones) y, subsidiariamente, notas de campo (observación de clases) de estudiantes particulares. Estos registros constituyen información que respalda las interpretaciones realizadas.

Respecto de la validez, entendemos que esta "alude al grado en que los constructos elaborados y las conclusiones de un estudio se corresponden con la realidad" (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 285). En este sentido, en nuestra investigación, la *validez interna* queda evidenciada con la realización del estudio piloto (3.5.1.1), puesto que se obtienen datos que marcan la necesidad de reformular el cuestionario inicial, de tal forma que pueda indagarse el conocimiento especializado de los EPP. Además de esto, tomamos como referencia la coincidencia del contenido de las categorías (y de los subdominios) en las diversas investigaciones realizadas en el grupo SIDM, en torno al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, lo cual permite establecer correspondencia entre los significados atribuidos a dichas categorías. Finalmente, evidenciamos la *validez externa* al trascender el estudio de cada caso para integrar estos en un estudio global que permita caracterizar el conocimiento del futuro profesor de matemática de secundaria, en el campo de la geometría.

CAPÍTULO 4.
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo abordamos tres casos instrumentales en los que se muestran las evidencias de conocimiento especializado de estudiantes para profesor de matemática de secundaria (EPP). Dichas evidencias se recogen de tres fuentes de información: cuestionario (C), plan de clase (PC) y sesión de clase (SC). Para analizar los datos, empleamos el MTSK y los marcos teóricos referidos a la definición y clasificación como prácticas matemáticas. Los resultados se comunican diferenciando los instrumentos y los temas abordados en cada uno, para cada caso de estudio. En la descripción de dichos resultados hacemos uso de imágenes de las tres fuentes de información y de transcripciones del video de la sesión de clase, así como del cuestionario en los casos en que las imágenes de los manuscritos no son legibles. Con esto pretendemos aportar comprensión al discurso y que la descripción de cada caso sea la base para hacer una discusión del conocimiento especializado de los informantes.

4.1. El Caso Laura

Laura es una estudiante con rendimiento académico medio que ha mostrado cuestionarse sobre el conocimiento que posee y el que emerge cuando operativiza este. Así pues, explicita los cambios ocurridos sobre su conocimiento inicial durante el desarrollo de los instrumentos de recogida de información. Ha cursado dos veces la asignatura Práctica Profesional A, lo cual ha podido influir en su actitud crítica y autorreflexiva, en la asunción de un rol docente y en el desarrollo de conocimiento didáctico del contenido.

4.1.1. Respuestas de Laura en el Cuestionario

4.1.1.1. Concepto de Polígono

El análisis de las definiciones propuesto en la situación 1 en la que se propone 4 definiciones de polígono dadas por hipotéticos estudiantes de secundaria, permite que, al identificar los errores en cada una, Laura deje ver las **características que le atribuye a polígono** (*KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos*). Así, considera que polígono es a) una figura plana (no cuerpo geométrico), b) formada por lados y ángulos que pueden tener diversas medidas (no siempre todos iguales o todos diferentes) (Transcripción 1)[103], c) los lados que lo forman son rectos y pueden cruzarse (Transcripción 2), y d) ocupan un lugar en el plano (encierra una región poligonal) (Transcripción 3).

Transcripción 1
Errores identificados en las definiciones de Pablo y Ana (C-Laura, S1: ítem1[104])

Definiciones de estudiantes
Pablo: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares.
Ana: Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales.

Errores de la definición	
Pablo	**Ana**
- Cuerpo geométrico *al hablar de cuerpo se toma en cuenta el volumen y un polígono no lo tiene.* - Tiene lados y ángulos diferentes *no necesariamente son diferentes, además menciona los regulares con lo cual se contradice.* - *Falta completar los elementos de polígono*	- Tiene lados y ángulos de medidas iguales *no todos los polígonos cumplen con esta definición.* - *Falta completar los elementos del polígono*

En la Transcripción 1 también observamos reparo en la contradicción y restricción en que se cae al señalar determinados polígonos, pese a que la definición se centra en los irregulares. Dicho reparo coincide con la "no contradicción" como una de las características de una buena definición (Shir y Zaslavsky, 2001), lo cual podría ser un indicio de conocimiento

[103] Como indicamos en el resumen de este capítulo, transcribimos las respuestas de los EPP que no son legibles en los manuscritos. Además, señalamos el contenido del cuestionario (sombreado) que contribuye a contextualizar o situar al lector en lo abordado en dicho instrumento. Lo que se indica en cursiva es lo que ha manifestado cada EPP.

[104] Recuerde las siglas: C-cuestionario, S1-situación 1 del cuestionario.

de la práctica matemática (**KPM**–Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal). Por otro lado, Laura cuestiona la consideración de aspectos accesorios (inclusión de la fórmula que permite hallar la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono) (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), así como no emplear un vocabulario preciso (Transcripción 2).

Transcripción 2

Errores identificados en las definiciones de Gaby y Luis (C-Laura, S1: ítem1)

Definiciones de estudiantes

Gaby: Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n–2).

Luis: Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

Errores de la definición

Gaby	**Luis**
- Sus ángulos miden más de 180°: *se entiende como que cada ángulo mide más de 180°.* - Su fórmula es 180(n–2) *esa es la fórmula para hallar la medida del ángulo (entendiendo eso).*	- Los puntos no deben cruzarse *Los puntos no se pueden cruzar, las que se cruzan son las rectas que se forman al unir los puntos.*

El cuestionamiento del vocabulario empleado es explicitado por Laura en una reflexión personal que añade, de manera adicional en un espacio libre del cuestionario, luego de construir la definición de polígono (Transcripción 3). De este modo, parece considerar que las **características de una definición matemática** incluyen ser no contradictoria, precisa y sin elementos innecesarios (**KPM**–Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Transcripción 3

Reflexión de Laura luego de construir la definición de polígono (C-Laura, S1: ítem5)

A raíz de mi definición me di cuenta que Luis tiene un error al decir "la unión de 3 o más puntos", pues debe de ser segmentos de recta. Si esto va acompañado de "los puntos no deben cruzarse", asumo que hace referencia a que al unir los puntos, las líneas que se forman no deben cruzarse, en todo caso habría un error de redacción pues ha pensado en los segmentos de recta pero ha colocado puntos.

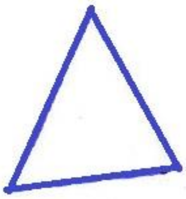
El reparo en las **características de una definición matemática** no es constante en todos los casos puesto que, al analizar las ideas válidas en las definiciones ya referidas, incluye aspectos que no corresponden a la definición como tal aunque sean correctos respecto del concepto, por ejemplo: la clasificación (cóncavos, convexos, regulares e irregulares) y que determina una región poligonal (Transcripción 4) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En consecuencia, podría suponerse que califica como válido el conocimiento en sí mismo respecto de polígono y no en relación con la estructura de una definición.

Transcripción 4
Ideas válidas de las definiciones de Pablo y Luis (C-Laura, S1: ítem 1)

Definiciones de estudiantes	
Pablo: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares.	
Luis: Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.	
Ideas válidas	
Pablo	**Luis**
- *Tiene lados y ángulos.*	- *Figura geométrica cerrada.*
- *La clasificación.*	- *Ocupa un lugar en el plano.*

Pese al reparo aleatorio en la estructura de una definición matemática, la corrección matemática de las expresiones es un foco de interés para Laura, lo cual evidencia su conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos (**KoT**). Esto justifica que señale que Gaby (hipotética estudiante) comete un error de redacción al decir *sus ángulos miden más de 180°* puesto que, estaría excluyendo al triángulo de ser polígono (Transcripción 5).

Transcripción 5
Ejemplo de polígono para abordar errores de la definición de Gaby (C-Laura, S1: ítem 3)

Definición dada por Gaby	**Dibujo para refutar el error de la definición**	**Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)**
Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n-2).		Debido a un error de redacción le dibujaría un triángulo para demostrarle que la suma de los ángulos internos es 180°. Además de señalar la diferencia entre ángulo interno y externo.

Luego del análisis propuesto, Laura construye una **definición verbal** (Figura 16) en la que explicita como características críticas: figura geométrica cerrada, formada por tres o más segmentos de recta (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Sin embargo, al añadir "que ocupa un lugar en el espacio", no "un lugar en el plano", puede generar contradicción puesto que lo primero se asocia a "cuerpo geométrico" y no a "figura geométrica".

Figura 16

Definición de polígono construida por Laura (C-Laura, S1: ítem5)

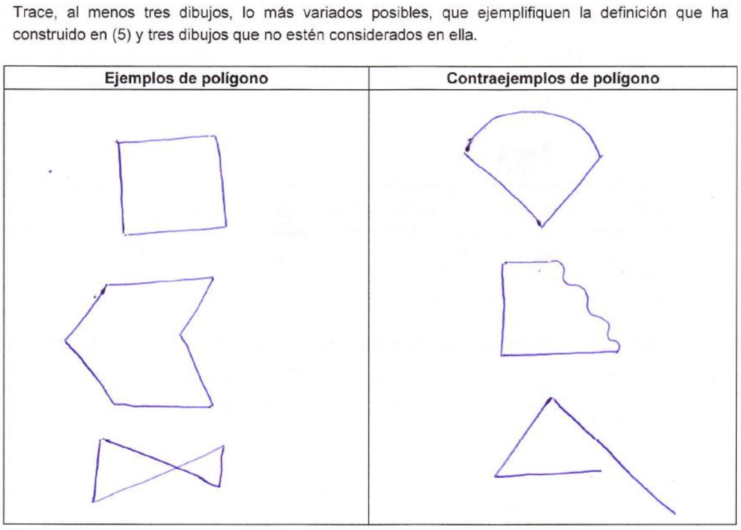
¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a sus estudiantes de 2° de secundaria, después de haber analizado las respuestas que ellos le dieron inicialmente y de haber trabajado las actividades anteriores? Enúnciela.

Polígono: es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 ó más segmentos de recta y que ocupa un lugar en el espacio.

La definición anterior (Figura 16) resulta ser descriptiva (De Villiers, 1998), inapropiada porque contiene propiedades innecesarias (Zazkis y Leikin, 2008), lo cual la hace no económica (De Villiers et al., 2009) y es estructural puesto que toma en cuenta "segmentos de recta" que es un elemento constituyente (Shir y Zaslavsky, 2001). Por otro lado, las características consideradas en la definición construida y las inferidas del análisis de las definiciones dadas resultan coherentes con los ejemplos y contraejemplos que propone para la misma (Figura 17). Así, puede decirse que la **imagen conceptual de polígono** coincide con una figura geométrica plana y cerrada, de al menos tres lados rectos cuya unión determina una región poligonal y que puede tener lados de distintas medidas, no siempre todos iguales o todos distintos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación). Incluso, aunque de la Figura 17 se observe que los polígonos pueden tener los lados cruzados, sin que esta característica haya sido explicitada en la definición, el enunciado de esta deja abierta dicha posibilidad, por lo tanto, el ejemplo se correspondería con la definición construida.

Figura 17

Ejemplos y contraejemplos de polígono propuestos por Laura (C-Laura, S1-ítem 6)

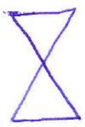


Considerar la intersección de los lados (Figura 17) y aquello de "ocupa un lugar en el espacio" (Figura 16) nos lleva a cuestionar si las características incluidas en la definición son necesarias y suficientes (**KPM**). Hacer referencia, en la definición construida, a que un polígono ocupa un lugar en el espacio es innecesario y la suficiencia de incluir si los lados se interceptan se ve dependiente del nivel al que está dirigida la definición. Sobre esto último, en la educación básica peruana, según el currículo de referencia (Ministerio de Educación, 2008), este tipo de polígonos (denominados complejos) no se abordan (Tabla 1, Capítulo 1). Así pues, no solo está involucrado el conocimiento de las características que atribuye a polígono (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) sino también, de las expectativas de aprendizaje y del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (**KMLS**). Sin embargo, de este último subdominio solo hay indicio de lo que propone o no el currículo (**KMLS**-Expectativas de aprendizaje) cuando, en la justificación de su representación gráfica, Laura señala "también existen (refiriéndose a los polígonos de lados cruzados) a pesar de que no se estudian (Figura 18).

Figura 18

Representación gráfica para abordar los errores de la definición de Luis (C-Laura, S1: ítem 3)

Si tuviese que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os)? Trácelo(s) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s).

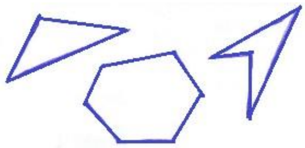
Definición dada por:	Dibujo(s) para refutar el error de la definición	Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)
Luis		a pesar de ser polígonos no tan comunes, también existen a pesar de que no se estudien.

Además de la coherencia entre la **definición verbal** e **imagen conceptual** (Vinner 1991) de polígono, por la relación mutuo dependiente de ambos elementos, analizamos las **características de las representaciones gráficas** trazadas (Figura 17) tomando como referencia los elementos que Zazkis y Leikin (2007, 2008) valoran en una definición. Así pues, sobre las representaciones gráficas trazadas en la Figura 17 debemos decir que, en general, poseen *corrección* porque se adecúan a lo que son los polígonos, incluyendo simples y complejos, *riqueza* porque superan los prototipos, de hecho, como polígono se contemplan representaciones simples (lados no cruzados), complejas (lados cruzados), de distinto número de lados (cuadriláteros y hexágonos) y tanto cóncavos como convexos, y *generalidad* porque contempla distintos niveles jerárquicos (simples y complejos, cóncavos y convexos, regulares e irregulares). Además, se observa coherencia entre las características atribuidas a polígono, la definición de este y las representaciones gráficas que se trazan para ejemplificar lo que son y no son los polígonos. Así pues, los no polígonos se alinean a las características de corrección (todas las representaciones no son polígonos), riqueza (contemplan variadas características no prototípicas) y generalidad (incluyen figuras abiertas y cerradas, lados curvos y rectos). (**KoT**-Definiciones, propiedades, y sus fundamentos; registros de representación).

En el contexto en el que se piden los ejemplos y contraejemplos de polígono, las características de estos (Figura 17) forman parte de una estrategia de enseñanza (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) puesto que las consideraciones para proponer los ejemplos y contraejemplos, proceden de un proceso en el que Laura ha interpretado de la idea de polígono de los hipotéticos estudiantes de la situación 1 (**KFLM**-Fortalezas y dificultades) y ha graficado dicha idea (**KoT**–Registros de representación) (Transcripción 6), para luego, proponer representaciones gráficas para abordar los errores detectados y confundidos antes (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación) (Figura 18, Figura 19).

Transcripción 6

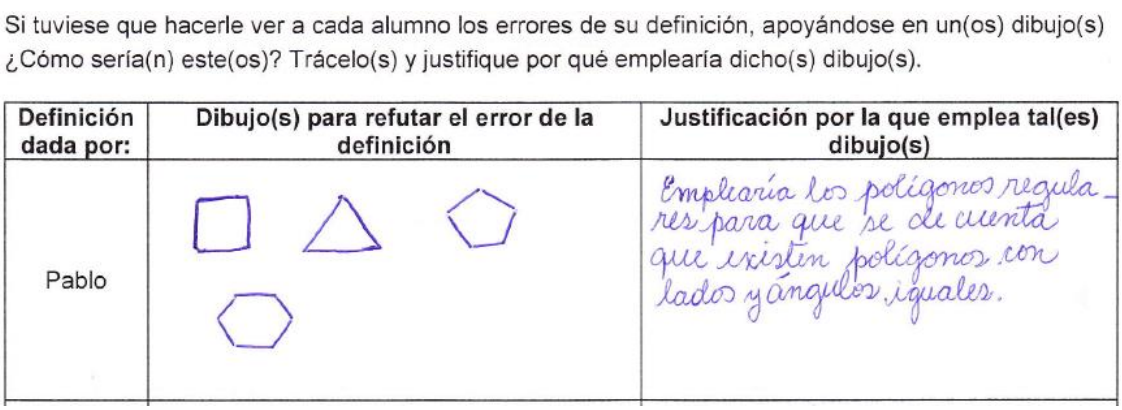
Idea de polígono, interpretada de la definición de Pablo (C-Laura, S1: ítem 2)

<table>
<tr><td colspan="2">¿Qué le dicen los errores que ha identificado sobre la concepción de polígonos que tiene cada alumno? ¿Qué imágenes está asociando cada alumno a su definición? Dibuje estas.</td></tr>
<tr><th>Concepción de polígono</th><th>Imágenes que asocia a su definición de polígono</th></tr>
<tr><td>Sabe que es una figura plana, sin embargo emplea mal el término cuerpo por el error expuesto en la pregunta 1 [transcripción 1]. Considera polígono a una figura plana y además irregular.</td><td></td></tr>
</table>

Como puede verse en la Transcripción 6, Laura excede la definición literal de polígono dada por Pablo (*es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares*) y concluye que dicho alumno emplea el término “cuerpo geométrico” relacionado con “figura plana” (**KFLM**–Formas de interacción con un contenido matemático). También, al reconocer la idea parcializada de polígono (solo irregulares) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), propone representaciones gráficas que completan el concepto de dicha noción geométrica (**KoT**–Registros de representación) lo cual se puede en evidencia al pensar en las estrategias de enseñanza (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) (Figura 18, Figura 19).

Figura 19

Representaciones propuestas para abordar los errores de la definición de Pablo (C-Laura, S1: ítem 3)



Si tuviese que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os)? Trácelo(s) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s).

Definición dada por:	Dibujo(s) para refutar el error de la definición	Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)
Pablo		Emplearía los polígonos regulares para que se dé cuenta que existen polígonos con lados y ángulos iguales.

Por otro lado, según las evidencias anteriores, algunas expresiones empleadas por Laura (Transcripción 5: *Debido a un error de redacción le dibujaría un triángulo para demostrarle que…*, Transcripción 6: *Sabe que es una figura plana, sin embargo emplea mal el término cuerpo…* y Figura 19: *Emplearía los polígonos regulares para que se dé cuenta…*), dejan ver su disposición para considerar lo que conocen o no sus estudiantes (**KFLM**-Fortalezas y dificultades), así como las formas de interacción de estos con un contenido matemática (**KFLM**) cuando se les propone representaciones gráficas para abordar los errores detectados en su definición (Figura 18, Figura 19). Además de esto, desde el rol docente requerido identifica como **subconceptos** (Blanco y Contreras, 2002) **de polígono** (KoT-*Definiciones, propiedades, y sus fundamentos)* los conceptos que originan los elementos (punto, recta, segmentos de recta), así como los que se contraponen (figura geométrica y cuerpo geométrico) (Figura 20).

Figura 20

Subconceptos que propone trabajar Laura (C-Laura, S1: ítem 4)

Alumno	Subconcepto que trabajaría para construir una definición correcta de polígono
Pablo	-diferencia entre figura y cuerpo -segmentos de recta y medida de ángulos iguales.
Ana	segmentos de recta y medida de ángulos diferentes. unión de segmentos
Gaby	- ángulos: medida, clases.
Luis	conceptos básicos: punto, recta, segmentos de recta.

Al señalar los subconceptos anteriores, para abordar todos los errores y conceptos confusos en los ítems de la situación 1 del cuestionario, Laura reconoce relaciones intraconceptuales (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), cuyo tratamiento se torna una estrategia de enseñanza (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) que complementa las actividades en las que se busca completar las ideas parcializadas de sus estudiantes (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático) (Figura 19, Transcripción 5).

4.1.1.2. Síntesis del conocimiento especializado sobre el concepto de polígono

Luego de haber descrito el conocimiento especializado, evidenciado por Laura, al abordar polígonos, presentamos una síntesis gráfica de este. En la Figura 21 identificamos las tres tareas generales propuestas en la situación 1 del cuestionario: análisis de definiciones, construcción de una definición y trazado de ejemplos y contraejemplos de polígonos (recuadros amarillos). Estas tareas permiten evidenciar conocimientos asociados a los descriptores de análisis (escritos con negrita y en cursiva) y a las categorías de los subdominios del MTSK (recuadros verdes para el dominio de conocimiento matemático y recuadros anaranjados para el dominio de conocimiento didáctico del contenido).

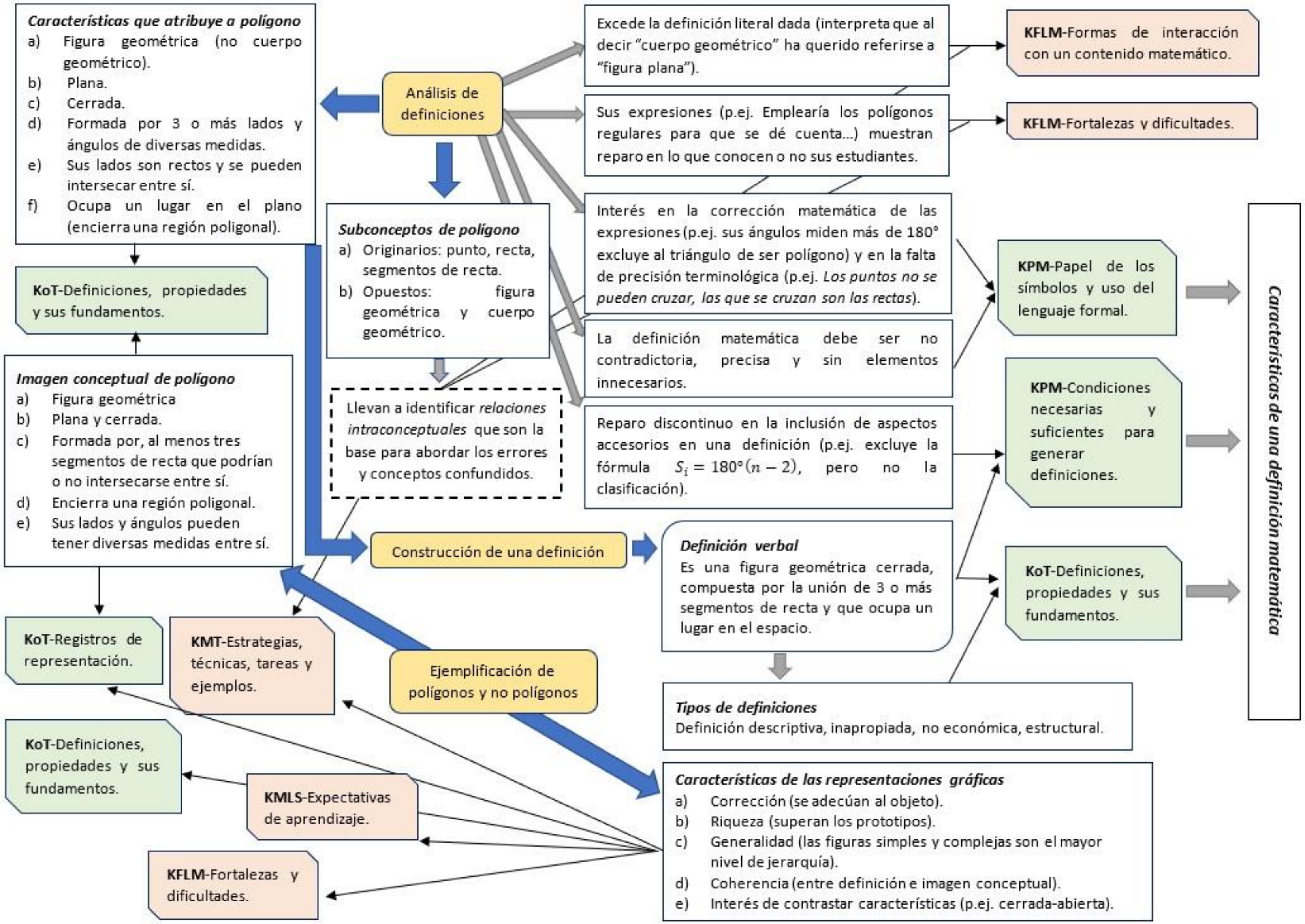
En la Figura 21 observamos que el conocimiento especializado de Laura, sobre polígonos, involucra cinco de los seis subdominios del MTSK. El *conocimiento de los temas* (KoT) es la base para abordar las tareas propuestas, lo cual se evidencia en la asociación con todos los descriptores emergidos: características que atribuye a polígono, subconceptos de polígono, definición verbal, características de una definición matemática, imagen conceptual de polígono y características de las representaciones gráficas. Estos están vinculados con dos categorías del KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos, y registros de representación. Dado que dos de las tareas tienen que ver directamente con la definición de polígono (análisis y formulación), emerge el *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), específicamente el que se refiere a la práctica de definir. Esta se vincula con dos descriptores: **características de una definición matemática** y **definición verbal**, los que, a su vez, se asocian con dos categorías del KPM: el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

El contexto hipotético de enseñanza-aprendizaje en el que se plantea la situación 1 permite que el conocimiento del dominio matemático requiera conectar con el conocimiento didáctico del contenido (PCK). Así, la identificación de **subconceptos de polígono** (que también constituye un descriptor), como parte de la tarea “Análisis de definiciones”, le lleva a Laura a identificar *relaciones intraconceptuales* que resultan ser el punto de partida para plantear actividades que permitan abordar los errores identificados en torno al concepto de polígono (Figura 19), tomando en cuenta las ideas iniciales (erróneas o no) de los estudiantes. Esto nos sitúa en los *subdominios conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) y *conocimiento del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), específicamente en las categorías: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT), formas de interacción con un contenido matemático (KFLM) y fortalezas y dificultades (KFLM). En la Figura 21se señala entre líneas discontinuas las relaciones intraconceptuales porque, si bien pertenecen al KoT, es posible que dada su relevancia requiera visibilidad a nivel de categoría del subdominio en cuestión.

Finalmente, el contexto de enseñanza-aprendizaje referido en el párrafo anterior, ocasiona que, para el caso de Laura, la tarea de trazar ejemplos de polígonos y no polígonos no solo tenga como base al KoT, visibilizado en el descriptor **imagen conceptual**, sino también a los tres subdominios del PCK en cuanto nos situamos en el descriptor **características de las representaciones**. Así, aunque ambos descriptores tengan sus raíces en las categorías definiciones, propiedades y sus fundamentos, y registros de representación (KoT), el contexto de la tarea hace que Laura evidencie un conocimiento vinculado a lo que propone o no el currículo respecto del aprendizaje de los polígonos (KMLS-Expectativas de aprendizaje), a lo que los estudiantes conocen previamente sobre dicho tópico (KFLM-Fortalezas y dificultades) y a los ejemplos o contraejemplos gráficos que conviene proponer según lo anterior (KMT-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 21

Síntesis del conocimiento especializado de Laura sobre polígonos

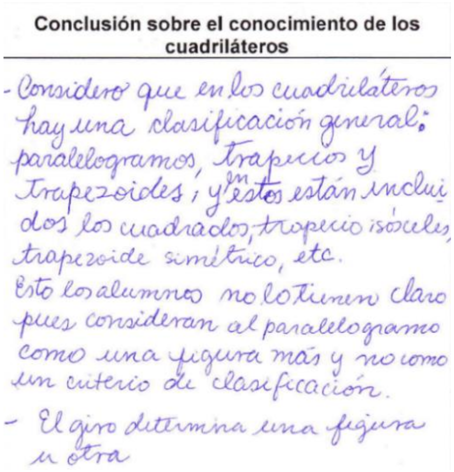


4.1.1.3. Concepto de Cuadrilátero y Jerarquización

El concepto de cuadrilátero está estrechamente vinculado a su clasificación (De Villiers et al., 2009). Así, considerando este como un polígono de cuatro lados, se ha propuesto la reflexión sobre un diálogo hipotético en torno a todos los cuadriláteros que se conocen (Figura 12, situación 2 del cuestionario). En este escenario, las conclusiones de Laura (Figura 22) evidencian la consideración de cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros (**KFLM**–Formas de interacción con un contenido matemático: *El giro determina una figura u otra*; **KFLM**–fortalezas y dificultades: *Esto* (refiriéndose la clasificación general: paralelogramos, trapecios y trapezoides) *los alumnos no lo tienen claro pues consideran al paralelogramo como una figura más y no como un criterio de clasificación*). Así pues, pese a que al escribir "criterio" en lugar de "clase" muestra una confusión terminológica (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), deja claro que las **clases de cuadriláteros que considera** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) son los tres grupos que, convencionalmente, se aprenden en la escuela (Dalcín, 2006).

Figura 22

Conclusiones de Laura sobre el conocimiento de los estudiantes (C-Laura, S2: ítem 1)


Conclusión sobre el conocimiento de los cuadriláteros

- Considero que en los cuadriláteros hay una clasificación general: paralelogramos, trapecios y Trapezoides; y en estos están incluidos los cuadrados, trapecio isósceles, trapezoide simétrico, etc. Esto los alumnos no lo tienen claro pues consideran al paralelogramo como una figura más y no como un criterio de clasificación.
- El giro determina una figura u otra

***Transcripción* del texto de la figura** (para mayor legibilidad)

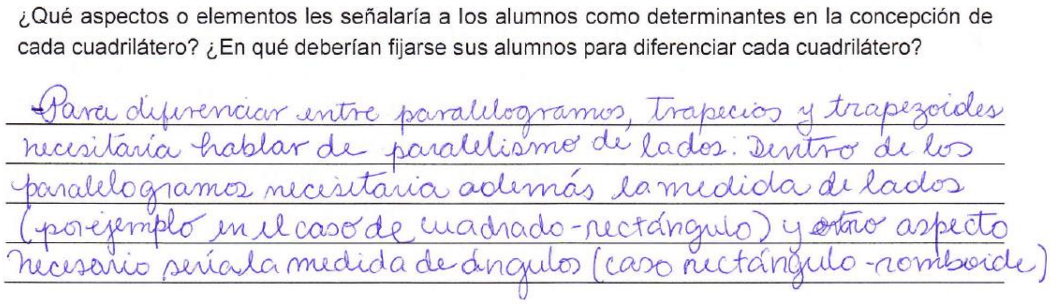
- *Considero que en los cuadriláteros hay una clasificación general: paralelogramos, trapecios y trapezoides, y en estos están incluidos los cuadrados, trapecio isósceles, trapezoide simétrico, etc. Esto los alumnos no lo tienen claro pues consideran al paralelogramo como una figura más y no como un criterio de clasificación.*
- *El giro determina una figura u otra.*

En la línea de lo anterior, la interpretación que hace Laura del diálogo (Figura 22) deja ver que repara en **cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros** puesto que identifica que al giro de la representación de un cuadrilátero le otorgan un rol determinante en la concepción del mismo (**KFLM**–Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático), lo cual lleva al establecimiento de conceptos errados (**KFLM**–Fortalezas y dificultades de aprendizaje). Por otro lado, también se evidencia el conocimiento de Laura sobre las **clases**

de cuadriláteros consideradas, los **criterios para clasificar cuadriláteros** y su **comprensión sobre de clasificaciones inclusivas** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). De hecho, el que Laura anticipe que los estudiantes consideran al paralelogramo como *una figura más* en lugar de un *criterio* de clasificación (Figura 22) evidencia que tiene una idea del **procedimiento para clasificar** en matemática (**KoT**–Procedimientos), así como de algunos aspectos que determinan que un cuadrilátero sea lo que es (Figura 23).

Figura 23

Aspectos determinantes en la concepción de un cuadrilátero (C-Laura, S3: ítem 4)



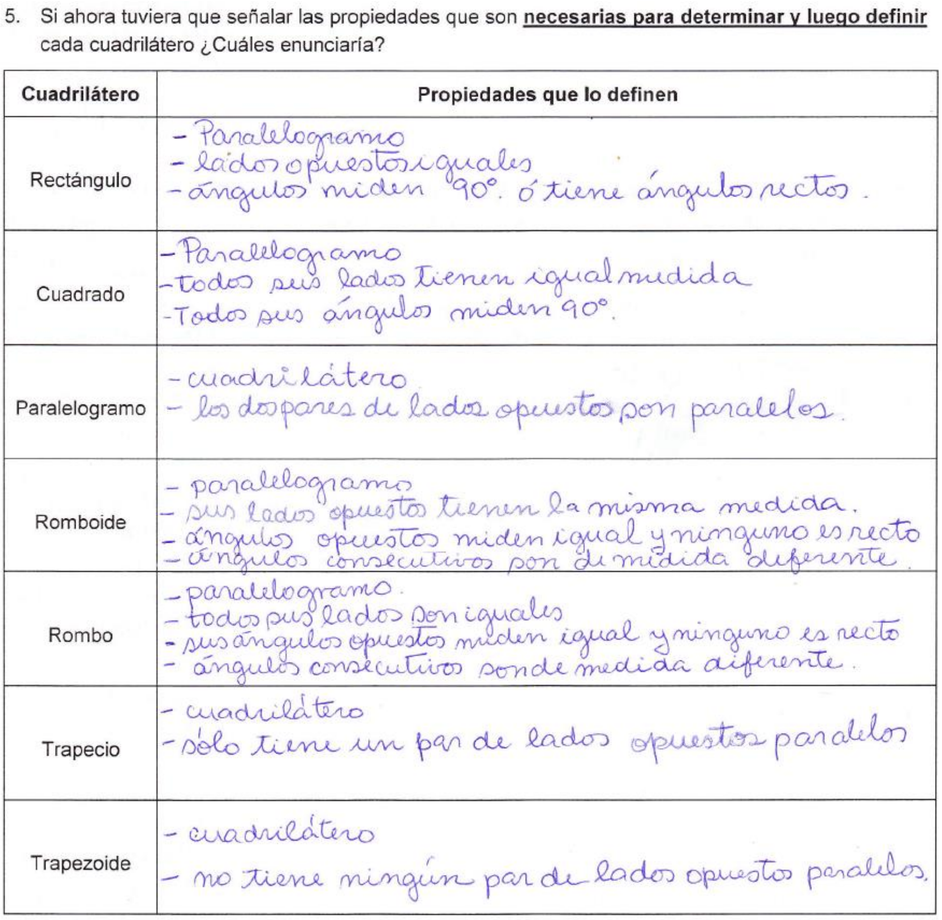
¿Qué aspectos o elementos les señalaría a los alumnos como determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿En qué deberían fijarse sus alumnos para diferenciar cada cuadrilátero?

Para diferenciar entre paralelogramos, Trapecios y trapezoides necesitaría hablar de paralelismo de lados. Dentro de los paralelogramos necesitaría además la medida de lados (por ejemplo en el caso de cuadrado-rectángulo) y otro aspecto necesario señala la medida de ángulos (caso rectángulo-romboide)

En la Figura 23 observamos que Laura centra su atención en la clase paralelogramos y no en los cuadriláteros (en general) como indica la consigna. Para dicha clase señala: el paralelismo de los lados, la medida de los lados y la medida de los ángulos como aspectos determinantes en la concepción de cada cuadrilátero que integra esa clase, aunque no menciona al rombo en su discurso. Llama la atención que vincule un aspecto determinado a cuadriláteros específicos (p. ej. La medida de los lados al rectángulo y al romboide) y no todos los aspectos indicados a todos los cuadriláteros de la clase paralelogramos. Lo anterior, también se evidencia al momento de indicar las propiedades que determinan cada cuadrilátero de las clases trapecios y trapezoides, puesto que solo considera paralelismo de los lados, mientras que para la clase paralelogramos sí considera los tres aspectos identificados (Figura 24). Además de lo anterior, en la Figura 24 también puede verse la **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) porque establece una jerarquía entre clases de cuadriláteros (paralelogramo, trapecio y trapezoide) y cuadriláteros que pertenecen a una clase, en este caso, a paralelogramo. Así pues, la primera propiedad que señala está referida a dicha jerarquía: paralelogramo, trapecio y trapezoide los etiqueta como “cuadrilátero”; mientras que, a cuadrado, rectángulo, rombo y romboide les llama “paralelogramo”. La segunda propiedad está referida a la igualdad de los lados y la tercera, solo para los paralelogramos, está enfocada en la medida de los ángulos, específicamente, si son rectos o no. Su **comprensión de clasificaciones inclusivas** también se hace evidente porque las propiedades que señala para paralelogramo las cumple el rectángulo, cuadrado, romboide y rombo. Además, las propiedades que propone para el rectángulo, las cumple el cuadrado. Sin embargo, esto no ocurre entre romboide y rectángulo ni entre rombo y cuadrado pues, en estos casos, Laura adopta una postura excluyente, de allí que señale que el romboide y el rombo no tienen ángulos rectos y que, además, dos ángulos consecutivos no tienen la misma medida (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 24

Propiedades que determinan cada cuadrilátero (C-Laura, S3: ítem 5)



5. Si ahora tuviera que señalar las propiedades que son **necesarias para determinar y luego definir** cada cuadrilátero ¿Cuáles enunciaría?

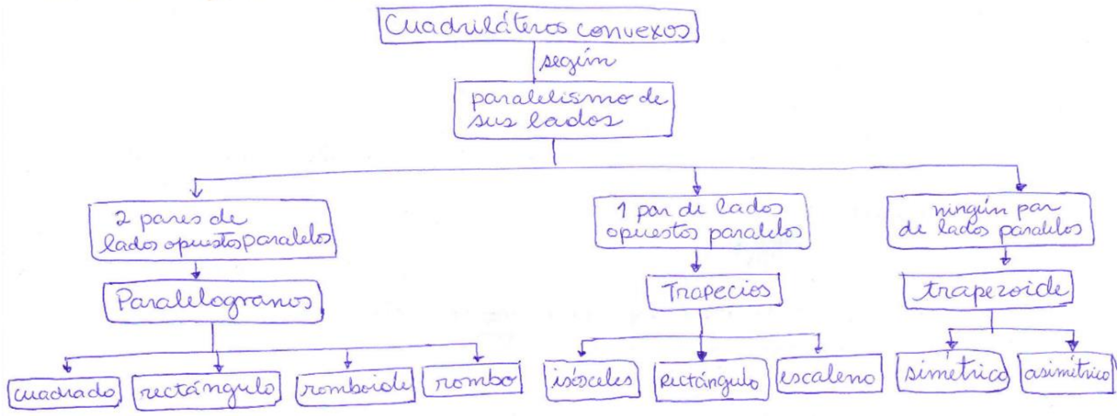
Cuadrilátero	Propiedades que lo definen
Rectángulo	- Paralelogramo - lados opuestos iguales - ángulos miden 90°. ó tiene ángulos rectos.
Cuadrado	-Paralelogramo -todos sus lados tienen igual medida -Todos sus ángulos miden 90°.
Paralelogramo	- cuadrilátero - los dos pares de lados opuestos son paralelos.
Romboide	- paralelogramo - sus lados opuestos tienen la misma medida. - ángulos opuestos miden igual y ninguno es recto - ángulos consecutivos son de medida diferente.
Rombo	- paralelogramo. - todos sus lados son iguales - sus ángulos opuestos miden igual y ninguno es recto - ángulos consecutivos son de medida diferente.
Trapecio	- cuadrilátero - sólo tiene un par de lados opuestos paralelos
Trapezoide	- cuadrilátero - no tiene ningún par de lados opuestos paralelos.

Lo comentado en el párrafo anterior evidencia que el paralelismo de los lados, la medida de los lados y la medida de los ángulos no solo determinan la concepción de un cuadrilátero, sino que también constituyen **criterios para clasificar cuadriláteros** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), aunque Laura ponga énfasis sobre el primero.

Esta primacía del paralelismo de los lados, observada en las Figura 23 y Figura 24, también se observa en el esquema de clasificación que propone (Figura 25). En este, a diferencia de la Figura 24, no solo se observa una postura excluyente entre clases de cuadriláteros sino también entre aquellos que pertenecen a cada clase, así pues, el vínculo entre rectángulo y cuadrado desaparece (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). La elección del criterio de clasificación y la organización particional que propone de los cuadriláteros en la Figura 25 la justifica señalando que facilita la comprensión de las relaciones entre ellos (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático) y por tanto, constituye su estrategia de enseñanza (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 25

Clasificación de cuadriláteros y justificación propuesta por Laura (C-Laura, S3:ítem7)



7. ¿Cómo organizaría los cuadriláteros convexos si empieza por el más general de estos (ítem 6), hasta llegar al más particular (el que más propiedades añadidas tiene)? Muestre esta organización en un esquema y luego explique por qué los ha organizado de esa manera. **Recuerde que debe empezar por el más general hasta llegar al más particular.**

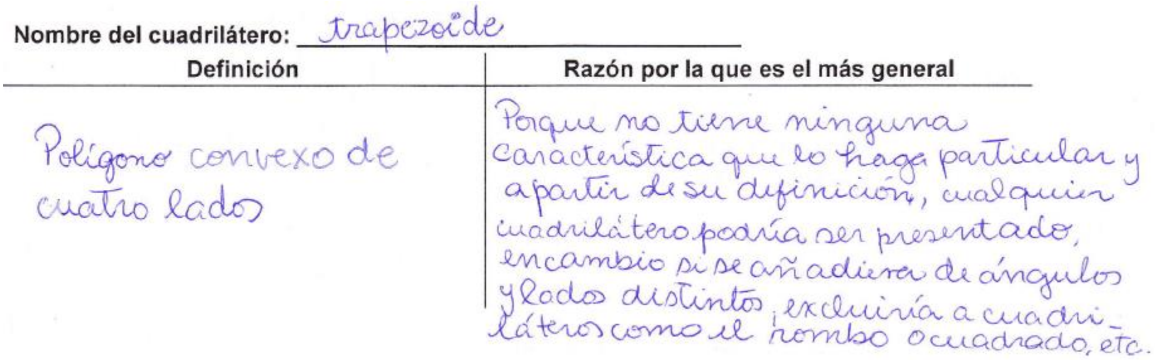
JUSTIFICACIÓN DE LA ORGANIZACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Como he mencionado antes el trapezoide, es para mí, el cuadrilátero más general, sin embargo tomando en cuenta la clasificación según el paralelismo de sus lados, se hubiera vuelto a repetir la palabra trapezoide, pudiendo crear confusiones, por ello el título del esquema es cuadriláteros convexos. Los cuadriláteros divididos según la cantidad de pares de lados opuestos paralelos, lo que a mi parecer facilita las relaciones entre ellos.

Aunque el esquema de clasificación (Figura 25), en su conjunto, evidencia grupos disjuntos, más no relaciones jerárquicas como se pedía en la consigna, el hecho de que Laura reconozca al trapezoide como el cuadrilátero más general (Figura 26) y explique que, según la definición dada, todos los cuadriláteros estarían incluidos, da indicios de la **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Sin embargo, aunque en la Figura 26 observamos que Laura entiende que trapezoide es el cuadrilátero *base* sobre el cual se añaden características para definir cuadriláteros más particulares, la definición construida de trapezoide en la Transcripción 7, contradice esto puesto que le impone que los lados opuestos paralelos sean de diferente medida, en consecuencia, esta clase no incluiría a los demás cuadriláteros.

Figura 26

Identificación del trapezoide como el cuadrilátero más general (C-Laura, S3: ítem 6)



Nombre del cuadrilátero: trapezoide

Definición	Razón por la que es el más general
Polígono convexo de cuatro lados	Porque no tiene ninguna característica que lo haga particular y apartir de su definición, cualquier cuadrilátero podría ser presentado, encambio si se añadiera de ángulos y lados distintos, excluiría a cuadriláteros como el rombo o cuadrado, etc.

La contradicción evidenciada entre la Figura 26 y la Transcripción 7, respecto del trapezoide, puede deberse a querer mantener la coherencia con el esquema de clasificación propuesto (Figura 25). Así, al momento de construir las definiciones requeridas (Transcripción 7), se mantiene el criterio excluyente entre las tres clases de cuadriláteros (un paralelogramo no puede ser trapecio porque este último debe tener “par de lados opuestos paralelos y de diferente medida”) y entre los cuadriláteros de una misma clase (un cuadrado no puede ser rectángulo porque a este último le impone “lados consecutivos de distinta medida”). No obstante, se observa una intención inclusiva entre clase y cada cuadrilátero de esta. Así pues, dado que el cuadrado, rectángulo, rombo y romboide pertenecen a la clase “paralelogramos”, al definir cada uno los etiqueta como tal y les añade una característica específica (Transcripción 7).

Transcripción 7

Definiciones de cuadriláteros según esquema de clasificación (C-Laura, S3: ítem 8)

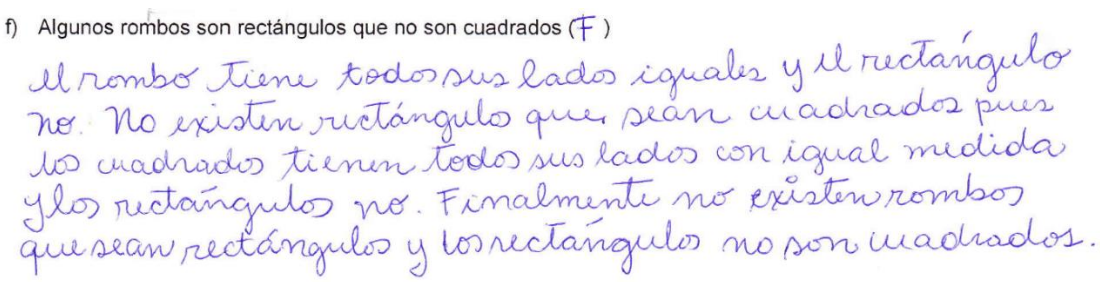
Después de haber organizado los cuadriláteros en un esquema, deberá definir cada uno, cuidando la coherencia con el esquema realizado, esto es, definiendo el más particular en función del cuadrilátero inmediatamente anterior.

1) *Paralelogramo: Cuadrilátero convexo con dos pares de lados opuestos paralelos.*
   a) *Cuadrado: paralelogramo cuyos lados tienen la misma medida y sus ángulos miden 90°.*
   b) *Rectángulo: paralelogramo cuyos lados opuestos son iguales y consecutivos de distinta medida. Además, todos sus ángulos miden 90°.*
   c) *Romboide: paralelogramo cuyos lados opuestos son de igual medida y los consecutivos de diferente medida. Además, sus ángulos opuestos son iguales, los consecutivos son diferentes y todos diferentes a 90°.*
   d) *Rombo: paralelogramo cuyos lados tienen la misma medida, sus ángulos opuestos son de igual medida, sus ángulos consecutivos son diferentes y todos no son rectos.*
2) *Trapecios: cuadrilátero convexo con un par de lados opuestos paralelos y de diferente medida.*
   a) *Trapecio isósceles: trapecio cuyos lados no paralelos son iguales.*
   b) *Trapecio rectángulo: trapecio en el que uno de sus lados no paralelos forma ángulos rectos con los lados paralelos.*
   c) *Trapecio escaleno: trapecio cuyos lados no paralelos tienen distinta medida.*
3) *Trapezoide: cuadrilátero convexo con ningún par de lados opuestos paralelos.*
   a) *Trapezoide simétrico: trapezoide de lados consecutivos iguales.*
   b) *Trapezoide asimétrico: trapezoide de lados de diferente medida.*

Las definiciones anteriores (Transcripción 7) se caracterizan por ser *descriptivas* (De Villiers, 1998) puesto que muestran un listado de propiedades sin reparar en si son necesarias y suficientes. Probablemente, dada la clasificación convencional (Figura 25), las definiciones enunciadas se basen en representaciones gráficas prototipo, correspondiéndose así con definiciones *visuales* si se toma en cuenta el modelo de Van Hiele (De Villiers, 1998). De hecho, cuando Laura establece el valor de verdad de distintas proposiciones se observa **coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases** (Figura 27) (**KoT-**Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 27

Valor de verdad de las relaciones rombo-rectángulo-cuadrado (C-Laura, S3: ítem 9)


f) Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados (F)

el rombo tiene todos sus lados iguales y el rectángulo no. No existen rectángulos que sean cuadrados pues los cuadrados tienen todos sus lados con igual medida y los rectángulos no. Finalmente no existen rombos que sean rectángulos y los rectángulos no son cuadrados.

Aunque el argumento mostrado en la Figura 27 no vincula inclusivamente a rombo, rectángulo y cuadrado, sí muestra el conocimiento de Laura sobre las **propiedades de los cuadriláteros** (**KoT** –Definiciones, propiedades y sus fundamentos), de hecho, este le permite ser la única informante que concluye que ningún carpintero, de la situación 4, puede asegurar haber construido un cuadrado (Figura 28).

Figura 28

Respuesta de Laura al problema del carpintero (C-Laura, S4)

__Situación 4__: Con la intención de comprobar si las actividades propuestas para contrarrestar los errores iniciales han sido efectivas, el profesor propone la siguiente actividad:

Tres carpinteros A, B y C quieren cortar cuadrados de madera y después de cortar cuadriláteros convexos hacen las siguientes comprobaciones:

- A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido.
- B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido.
- C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado.

¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Si considera que alguno(s) no consiguió cortar un cuadrado, indique qué cuadrilátero construyó. Justifique para cada construcción realizada.

Ningún carpintero tiene la seguridad de haber cortado cuadrados.

El carpintero A pudo construir cuadrados o rombos, pues ambos tienen sus lados con igual medida.

El carpintero B pudo construir cuadrados, rectángulos, romboides o trapecios isósceles, a pesar que este último es muy diferente a un cuadrado, cumple con la descripción del carpintero B.

El carpintero C pudo construir cuadrados o rombos, ya que ambos cuadriláteros cumplen con la descripción del carpintero C.

Como puede verse en la Figura 28, Laura analiza todos los posibles cuadriláteros para la construcción que hace cada carpintero, sea visualmente parecido o no a un cuadrado. Dicho análisis requiere del conocimiento de las **propiedades de cuadriláteros (KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), lo cual permite ver la corrección o no del mismo. Al respecto, observamos que Laura comete un error al considerar que los romboides tienen diagonales de igual medida. Lo dicho en torno a esta situación del cuestionario, evidencia que es una tarea compleja para los informantes.

Dado que el conocimiento matemático *per se* sustenta el didáctico, abordar los aspectos visuales que influyen en la concepción de un cuadrilátero, permite mostrar el vínculo entre ambos dominios. En este sentido, notamos que Laura reconoce que el giro y la posición de una representación gráfica son aspectos vinculados a **cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros** (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático) y, por tanto, determinantes en la concepción de estos. Sin embargo, dicha consideración la califica como un error, indicando que son las propiedades de cada cuadrilátero lo que determina qué son o no (Figura 29).

Figura 29

Valoración de Laura sobre la posición de una figura en la concepción de un cuadrilátero (C-Laura, S2: ítem 2)

¿Qué aspectos o elementos cree que consideran los alumnos (del diálogo), como factores determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿Dichos aspectos o elementos son erróneos, por qué?

Aspectos o elementos determinantes en la concepción de un cuadrilátero	Justificación del acierto o del error
- El giro determina una figura u otra y la relación que pueden tener	Error porque cada cuadrilátero tiene unas características comunes que lo hacen ser lo que es y no otra cosa, así no importa la posición que tengan, siempre serán los mismos. Además las relaciones entre ellos no dependen de su giro sino de características comunes.

En coherencia con lo anterior, Laura remarca el error que supone considerar el giro de una representación gráfica como aspecto determinante en la concepción de un cuadrilátero (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), ejemplificando tal creencia con el rombo y cuadrado (Figura 30). A continuación, se refiere al origen didáctico de dicha creencia, pues justifica la causa del error en la posición privilegiada de las figuras, promovida en la enseñanza de la matemática escolar (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Finalmente, propone actividades para abordar el error en cuestión (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; Recursos materiales y virtuales).

Figura 30

El giro en la concepción de un cuadrilátero, causas y abordaje (C-Laura, S2: ítem 3).

Intente explicar con el máximo detalle posible las causas de los errores señalados (¿A qué pueden deberse?, ¿qué comprensión del contenido muestran los alumnos?). Luego, indique ¿Qué plantearía como profesor para abordar estos errores?

Error	Causa del error	Acción a plantear
- Error: giro determina una figura y sus relaciones. - Error: el rombo es un cuadrado por tener lados iguales.	- Siempre se muestran los cuadriláteros en la misma posición, así el cuadrado (□), el rombo (◇), el rectángulo (▭), etc.	- Trabajaría primero cuadrilátero por cuadriláteros, es decir, por ejemplo, trabajaría primero cuadrado y presentaría imágenes de cuadrado en diferentes posiciones y tamaños, y luego junto con los alumnos ir sacando las caracte-rísticas; y así con todos. Luego ver que características en común tienen y establecer relaciones entre ellos.

Proponer actividades de enseñanza requiere de un conocimiento especializado de la matemática, involucrando los dominios matemático y didáctico. Del primero se requiere un conocimiento profundo de los cuadriláteros (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación) y de cómo se define en matemática (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Del segundo, se precisa el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes la geometría, en específico cómo se construyen los esquemas conceptuales y qué aspectos influyen en dicho proceso. Estos aspectos incluyen tanto **KFLM**-Teorías de aprendizaje (p,ej, Teoría de los conceptos figurales o los niveles de Van Hiele) como **KMT**-Teorías de enseñanza (p.ej. las fases de enseñanza de Van Hiele). Relacionado con el aprendizaje (KFLM), es relevante tomar en cuenta las fortalezas y dificultades del conocimiento de los estudiantes (p.ej. qué dificultades emergen al construir una clasificación jerárquica) y las formas de interacción con un contenido matemático (p.ej. si se les pide trazar las diagonales de un cuadrilátero cóncavo, se espera que solo tracen la diagonal interior). Por su parte, en la enseñanza (KMT) hay que considerar los recursos materiales y virtuales (p.ej. siluetas de distintos cuadriláteros, geoplano), las estrategias, técnicas y ejemplos (p.ej. identificación de formas cuadriláteras en el entorno) y el referente curricular de lo que hay que enseñar (**KMLS**-Expectativas de aprendizaje), con qué nivel (**KMLS**-Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado) y en qué momento (**KMLS**-Secuenciación con temas anteriores y posteriores).

4.1.2. Plan de Clase de Laura y Realización de la Sesión de Clase

El tema asignado a Laura para planificar la sesión de clase fue "Clasificación inclusiva de cuadriláteros". En la consigna dada se pone énfasis en promover que los estudiantes clasifiquen "relacionadamente" los cuadriláteros, evitando grupos disjuntos (Tabla 7, Capítulo 3). Bajo estas condiciones, los aprendizajes esperados que propone Laura requieren de conocimiento de los temas (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Procedimientos), específicamente: **conocimiento de criterios para clasificar cuadriláteros, procedimiento para clasificar, clases de cuadriláteros consideradas, propiedades de los cuadriláteros** y **comprensión de clasificaciones inclusivas** (Figura 31).

Figura 31
Aprendizaje esperado de cuadriláteros (PC-Laura)

II. APRENDIZAJE ESPERADO

CONCEPTOS O PROCEDIMIENTOS	CAPACIDAD
<u>Cuadriláteros:</u> Polígono de cuatro lados. Sus elementos son: Lados, ángulos, vértices y diagonales. <u>Características de cada cuadrilátero.</u> <u>Clasificación tradicional de cuadriláteros.</u> <u>Clasificación inclusiva de cuadriláteros.</u> (Anexo N° 01)	- Identifica los cuadriláteros. - Clasifica los cuadriláteros. - Reconoce las características de cada cuadrilátero. - Construye una clasificación inclusiva de cuadriláteros teniendo en cuenta sus características.

La consideración de una clasificación tradicional (Figura 31) supone tener como **criterio para clasificar cuadriláteros** el paralelismo de los lados. Esto coincide con la clasificación propuesta en el cuestionario (Figura 25), lo cual evidencia conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos (KoT). La denominación de clasificación *tradicional* parece estar vinculada a lo que suelen presentar los libros de texto (**KMT**-Recursos materiales y virtuales), según indica en la Transcripción 8 y a lo que proponen los currículos oficiales de educación básica de diversos países (**KMLS**-Expectativas de aprendizaje). De allí que en el desarrollo de su sesión comente:

Transcripción 8

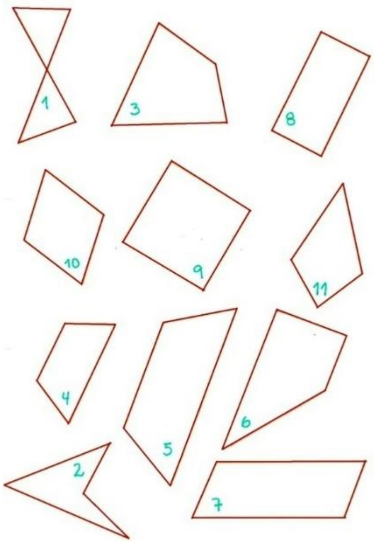
Clasificación escolar de cuadriláteros (SC-Laura: 83-85, 509-517)

LAURA: [...] Entonces una clasificación, vamos a decir así, común que se ve durante los cursos de matemática de primaria es esta: los cuadriláteros se clasifican según el criterio que es el paralelismo de los lados. [...] *FORMADORA: ¿Qué, entonces ha revisado libros de texto de quinto y sexto? ¿o qué?* *LAURA: Sí* *CÉSAR: ¿De quinto y sexto?* *LAURA: Sí. Quinto y sexto.* *CÉSAR: ¿De primaria?* *LAURA: Sí. En el de sexto se ven más de lo de las características de los ángulos, ¿no?, y quinto es como más de lados y ver si son paralelos o no, bueno y todas las figuras se ponen con la base horizontal y me di cuenta de la base horizontal ya cuando iba por los paralelogramos.*

En la Figura 31 también se observa que se propone el abordaje de una clasificación inclusiva (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) y distintas capacidades (**KMLS**-Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado). A continuación de esto, la secuencia didáctica que Laura propone está centrada en la agrupación de los cuadriláteros (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) que presenta en una lámina (Figura 32) (**KMT**-Recursos materiales y virtuales). De esta se puede ver que según las **características de las representaciones gráficas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), estas se ajustan a lo que son los cuadriláteros (corrección), superan los prototipos puesto que no tienen una posición estándar (riqueza) incluso en varias de ellas se requiere de la toma de medidas para determinar qué cuadrilátero representan (**KoT**-Registros de representación). Además, dado que contempla cuadriláteros complejos (de lados cruzados), cóncavos y convexos, podemos decir que las representaciones gráficas gozan de generalidad.

Figura 32

Cuadriláteros propuestos para construir la clasificación tradicional (PC-Laura)

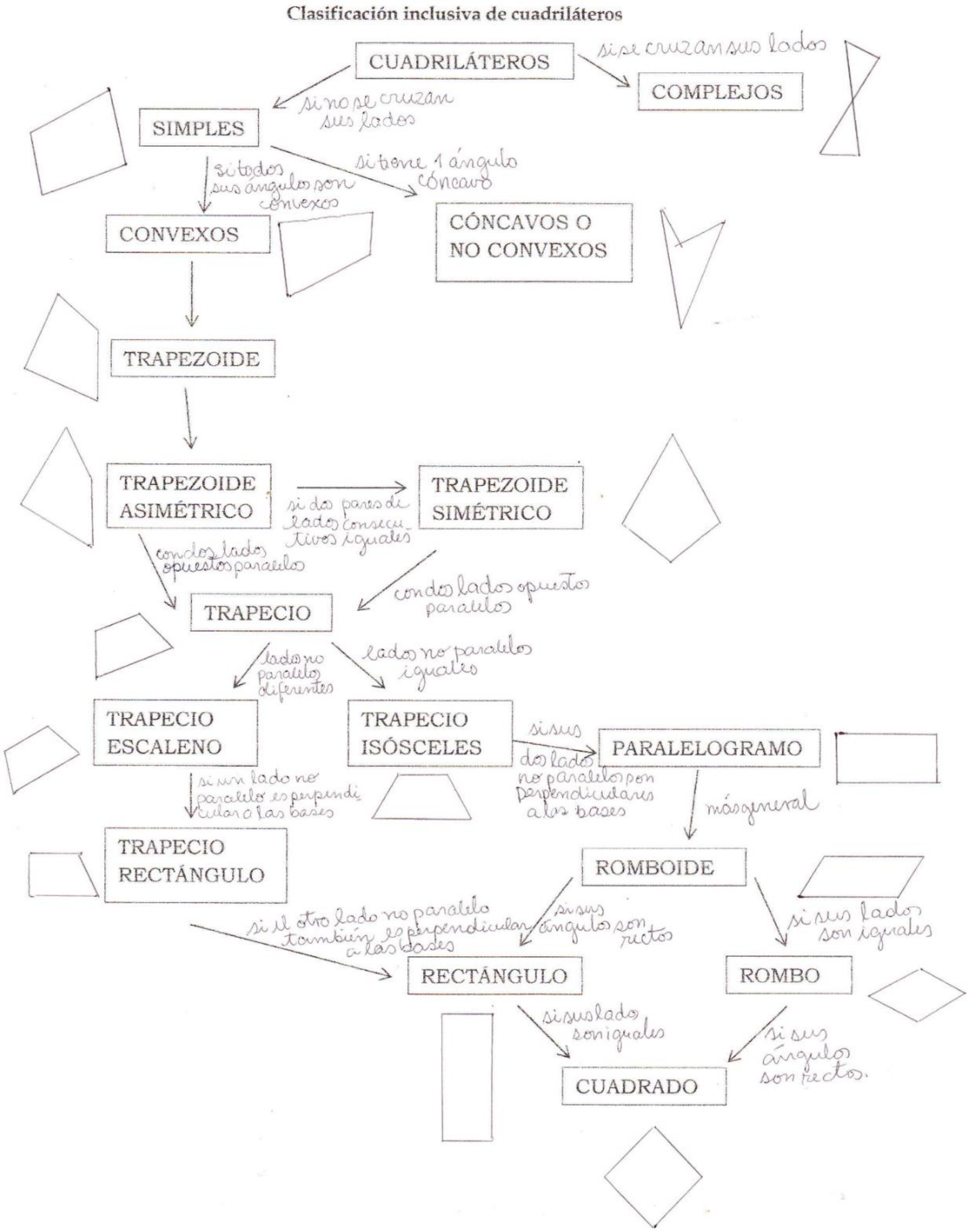


A partir de la actividad de agrupar los cuadriláteros (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), construye junto con sus estudiantes (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático), una clasificación tradicional (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) para la que prevé incluir como tipos de cuadriláteros: simples, complejos, convexos y no convexos o cóncavos (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Revisadas las **propiedades de los cuadriláteros** al construir la clasificación tradicional, Laura pone en juego su **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Procedimientos) para proponer la construcción de una nueva clasificación que parta del cuadrilátero más general para que, añadiéndole características, se obtenga los demás cuadriláteros. Esta actividad (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) está mediada por el uso de **recursos para enseñanza de los cuadriláteros**, tales como tiras móviles (**KMT**-Recursos materiales y virtuales) que permiten visualizar la variación de características. De esta manera, Laura pretende construir el esquema mostrado en la Figura 33.

Figura 33

Clasificación inclusiva de los cuadriláteros, propuesta por Laura en el plan de clase (PC-Laura)



La secuencia descrita en el plan de clase se reproduce casi totalmente en la ejecución de este. Así, en la Transcripción 9 se puede observar el desarrollo de la clasificación tradicional de cuadriláteros realizada durante la sesión de clase:

Transcripción 9

Clasificación de cuadriláteros: simples, complejos, convexos y no convexos (SC-Laura: 107-123)[105]

LAURA: Los cuadriláteros pueden ser por un lado ..., vamos a ponerle según el cruce de lados, pueden ser simples y complejos. *¿Qué significa según el cruce de lados? si nos podemos dar cuenta este es un cuadrilátero que tiene los lados cruzados, por eso forma como un triángulo, entonces a los que cruzan los lados se les va a llamar complejos y a los que no se le cruzan los lados, como pasa con el resto de cuadriláteros se le va a llamar simples ¿sí?* *[...] Ok, ahora, vamos a ponerle aquí, según la medida de ángulos, van a ver ángulos que se van a llamar los convexos y los no convexos.* *Los convexos son aquellos que tienen los ángulos menores a 180 (grados), como todos los que están aquí, por ejemplo, cualquiera de ellos, este (elige al trapezoide asimétrico) y los no convexos son los que van a tener un ángulo mayor a 180 (grados), no obtuso, sino mayor a 180 (elige al no convexo) ¿ok?, ¿hasta allí está claro?*

La Transcripción 9 evidencia un conocimiento de las **propiedades de los cuadriláteros** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) pero, además, de dos conceptos que los estudiantes suelen confundir: ángulo no convexo (o cóncavo) y ángulo obtuso, por ello remarca la medida de este último. Estos conocimientos le permiten a Laura proponer la construcción de una clasificación inclusiva de cuadriláteros, partiendo del cuadrilátero más general (Transcripción 10), lo cual muestra su **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos):

Transcripción 10

Identificación del cuadrilátero más general (SC-Laura: 282-296)

LAURA: [...] Dentro de todos estos cuadriláteros de los que hemos visto las características ¿cuál es el que tiene? ¿Cuál es el más general, el que tiene menos características? *SANDRA: El romboide.* *LAURA: El romboide, Sandra dice el romboide (Sandra defiende su postura pero no se escucha lo que dice). ¿De acuerdo o no de acuerdo?* *DIANA: El trapezoide.* *LAURA: El trapezoide, ¿por qué el trapezoide y no el romboide?* *DIANA: Porque no tiene ningún lado paralelo, sus lados no son iguales.* *SANDRA: No tiene nada (risas de todos)*

[105] Recuérdese que, aunque omitamos parte de un mismo párrafo, indicaremos el intervalo completo de las líneas del diálogo. Sin embargo, cuando se presente una trascripción de párrafos (o fragmentos de estos) no contiguos, indicaremos los intervalos de las líneas correspondientes.

LAURA: Simplemente es un cuadrilátero ¿Ok? Ahora, de los trapezoides nosotros vimos dos tipos ¿sí?: el trapezoide simétrico y el asimétrico ¿Cuál de los dos es el que tiene menos características?
SANDRA: Asimétrico.

El uso de tiras móviles (para simular los lados de los cuadriláteros) en la construcción de una clasificación inclusiva de cuadriláteros propicia el reparo en las **características de una definición matemática** (**KPM**–Practicas particulares del quehacer matemático) debido a la estrecha relación entre clasificación y definición (De Villiers et al., 2009). El desarrollo de esta actividad (Transcripción 11) lleva a pensar en las definiciones procesuales que proponen Shir y Zaslavsky (2001):

Transcripción 11

Paso de un trapezoide asimétrico a un simétrico (SC–Laura: 328–333)

LAURA: [...] *Chicos aquí tengo un trapezoide asimétrico ¿verdad? ¿Qué pasa si yo, estos dos (lados) los abro iguales y esto lo cambio por un (lado) azul? (Cambia una de las tiras por otra de distinta medida).* [...] *Entonces, yo puedo, aumentado la medida de los lados llegar a un simétrico, cambiándole los lados.*

Esta actividad reflexiva conjunta, profesora-estudiantes, le permite a Laura movilizar y cambiar su conocimiento. Así pues, en la Figura 33 puede verse su **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Procedimientos) porque en ella indica que: del trapezoide asimétrico puede pasar al trapezoide simétrico y al trapecio como clase. Además, luego de identificar al trapecio isósceles y al escaleno, de este último determina el trapecio rectángulo. Sin embargo, en la ejecución del plan de clase, este conocimiento se modifica y amplía, buscando la **coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases**. En este sentido, Laura concluye que al trapecio rectángulo se puede llegar por el trapecio escaleno y por el trapecio isósceles (Transcripción 12):

Transcripción 12

Transiciones entre trapecios (SC–Laura: 382–398)

LAURA: *[...] Entonces ¿de un trapecio isósceles paso a ¿un? (en la gráfica del trapecio isósceles traza una perpendicular que va desde la base hasta el vértice opuesto formando así el trapecio rectángulo).*
CÉSAR: (trapecio) rectángulo.
LAURA: Rectángulo, trapecio rectángulo y luego qué viene. Entonces ya tenemos los trapezoides y los trapecios y ahora qué viene ¿Qué grupo nos falta?

LUCAS: ¿Solamente puedo pasar... no puedo pasar de (trapecio) escaleno a trapecio rectángulo?
LAURA: A ver eso les estoy diciendo, de donde a donde se pasa y ustedes me dicen de un trapecio isósceles paso a un trapecio rectángulo. Ahora ¿de un trapecio escaleno puedo pasar a un trapecio rectángulo?
DIANA: Nooo
LUCAS: Sííí
LAURA: También, si este lado lo pongo recto aquí, paso de un (trapecio) escaleno a un (trapecio) rectángulo (del trapecio escaleno traza una perpendicular que va desde un vértice hasta la base mayor, el procedimiento es el mismo que utilizó con el trapecio isósceles).

El paso del trapecio al paralelogramo se hace trazando segmentos como en el diálogo anterior, pero tomando como referencia al trapecio rectángulo, no al isósceles. Esta consideración no es cuestionada por Laura, aunque inicialmente plantea si también puede pasarse del trapecio isósceles al paralelogramo. Así, según su **procedimiento para clasificar** (**KoT**-Procedimientos), Laura va construyendo una clasificación jerárquica a partir de la modificación de características de un cuadrilátero determinado (hace dobleces a las tiras móviles para variar su tamaño, cambia de tira según el tamaño que necesita) (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así pues, no se trata de añadidura de características a un cuadrilátero más general puesto que no se conservan las características iniciales de este (medida de los lados), lo que Laura hace es realizar movimientos de construcción, en las diferentes etapas, para modificar la composición de cada cuadrilátero. Bajo este procedimiento, llega a los paralelogramos para determinar el más particular (Transcripción 13).

Transcripción 13

Transición del romboide al rombo (SC-Laura: 411-413, 428-435)

LAURA: ¿Y cuál es el paralelogramo con menos características? ¿El rectángulo?
DIANA: No, el romboide
LAURA: [...] Entonces ¿del romboide qué puedo formar? ¿Un rectángulo? ¿Qué le añado al romboide para que sea rectángulo?
DIANA: Ángulos rectos.
LAURA: Ya. Entonces de un romboide paso a rectángulo poniendo ángulos rectos ¿sí? ¿Qué más puedo hacerle a un romboide? ¿Qué puedo formar? O ¿del rectángulo que puedo formar? [...]
SANDRA: Un rombo.

La afirmación de Sandra (de un rectángulo puedo formar un rombo) lleva a Laura a explicitar la acción que han realizado en todos los casos anteriores: cambiar o añadir una sola característica (Transcripción 14).

Transcripción 14

Identificación de la regla para transitar de un cuadrilátero a otro (SC-Laura: 437-441)

LAURA:	*Si se dan cuenta a todos hemos añadido una sola característica, o sea, un ejemplo, al (trapecio) isósceles un lado que sea perpendicular con el lado de acá (base menor). Si yo paso de romboide al, perdón, si yo paso del rectángulo al rombo tendría que cambiar ¿qué? Tendría que cambiar los ángulos y tendría que cambiar los lados. Dos cosas, dos características y tiene que ser solamente una ¿Cuál sería?*

La consideración de esto como una “transformación” que permite el paso de una clase a otra, puede ser consecuencia de su **comprensión de las clasificaciones inclusivas** y de los **procedimientos para clasificar**. Esta consideración no solo evidencia el conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos (**KoT**) que posee, sino también, la argumentación como práctica matemática, basada en regularidades de un conjunto de casos (**KPM**-Formas de validación y demostración).

El argumento anterior los lleva a concluir que al cuadrado se llega por el rombo, que aporta los lados iguales, y por el rectángulo que proporciona los ángulos rectos. Así, logran construir el esquema que organiza inclusivamente los cuadriláteros (Figura 34), en donde las flechas que traza indican la clase o la subclase de la que procede cada uno de estos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Ese sentido de “procedencia” llama la atención porque, según el proceso seguido y promovido por Laura, deja ver que “transformar” supone añadir una propiedad en lugar de otra, sin tener como referencia la que caracteriza a la clase o subclase. Por lo tanto, El sentido de las fechas del esquema de clasificación (Figura 34), no implica la pertenencia a una clase o subclase puesto que no se conservan las características de esta, sino que se modifican. Lo que observamos es que confunde inclusividad de las clases con transformación (Figura 34). Así pues, no puede asegurarse que para Laura el trapecio rectángulo representa una subclase del trapecio isósceles o el paralelogramo un tipo de trapecio rectángulo. Esto evidencia ausencia de **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 34

Clasificación inclusiva construida en la sesión de clase de Laura (SC-Laura)

La clasificación construida durante la clase (Figura 34) difiere de la propuesta en la planificación de esta (Figura 33), aunque mínimamente. Laura es consciente de estos cambios y de las dificultades que emergieron en el proceso de elaboración de una clasificación inclusiva) (Transcripción 15):

Transcripción 15

Reflexión sobre la complejidad de la clasificación inclusiva (SC-Laura: 545-559)

LAURA: A ver todo me salió confuso en el sentido de que yo planteé una clasificación inclusiva Figura 33*) y la que he hecho en la pizarra (*Figura 34*)no es esa, tiene mucho parecido.*
FORMADORA: O sea ¿con la que usted hizo en casa?
LAURA: La que yo hice en casa, le faltan cosas que están aquí en la pizarra
FORMADORA: ¿Digamos que esta está más completa?
LAURA: Digamos de que, o sea, yo hice una clasificación en donde como que habían partes, por ejemplo[...] yo parto del... trapezoide simétrico y asimétrico. Del trapezoide asimétrico yo no pasaba al simétrico yo me saltaba al trapecio y no había visto la relación del simétrico, cuando ustedes ya me dicen; y por qué era mi duda, porque yo no sabía si es que al agregar una característica yo podía aumentar o reducir la medida de los lados, ya con la aclaración que me hicieron temprano ya pude dar pie a que ustedes me digan que el trapezoide simétrico sale del asimétrico. ¿Qué más? Eee Qué difícil que es esta clasificación y...sí porque tienes que ponerte a pensar y ver todas las características que hay .

El diálogo anterior evidencia el conocimiento de Laura que va emergiendo mientras desarrolla la sesión de clase (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Reconoce las diferencias respecto de su conocimiento inicial y plantea sus dudas. Así, menciona al trapezoide simétrico y asimétrico como los referentes más generales sin una distinción de la clase de vínculo o jerarquía entre ellos, pese a que en las Figura 33 y Figura 34 se puede inferir al trapezoide simétrico como una subclase del asimétrico. Aunque esta relación muestra una perspectiva inclusiva, la definición dada al inicio de la sesión (trapezoide asimétrico: los que no tienen lados paralelos), responde más a una perspectiva disjunta. Esto muestra que la **coherencia entre definiciones y argumentación** de relaciones entre clase no es algo que se corresponda, completamente (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus justificaciones), en todo el desempeño de Laura y que evidencia dificultades para justificar una clasificación inclusiva (**KPM**–Formas de validación y demostración), al dudar en su desarrollo sobre qué puede mantener y modificar para que una nueva clase sea subclase de una anterior (**KoT**–Procedimientos).

4.1.3. Síntesis del conocimiento especializado sobre la conceptualización y jerarquización de los cuadriláteros

El conocimiento especializado en torno a los cuadriláteros, mostrado por Laura al resolver las situaciones 2, 3 y 4 del cuestionario, al planificar una sesión de clase y ejecutar esta, se resume de manera gráfica en las Figura 35 y Figura 36. En estas, al igual que la síntesis del conocimiento especializado sobre polígonos (Figura 21) identificamos las tareas generales (recuadros amarillos) propuestas en los instrumentos antes señalados, resaltamos los descriptores de análisis emergidos (escritos con negrita y cursiva) y asociamos ambos con las categorías de los subdominios del MTSK (recuadros verdes para el dominio de conocimiento matemático y recuadros anaranjados para el dominio de conocimiento didáctico del contenido).

Dada la densidad de la información, por involucrar a los tres instrumentos de la investigación, hemos separado la síntesis diferenciando la conceptualización de los cuadriláteros (Figura 35) y la jerarquización de estos (Figura 36). La conceptualización de los cuadriláteros se vincula con tres tareas: Análisis del conocimiento de los estudiantes y de cuestiones de enseñanza, identificación de elementos determinantes y propiedades necesarias para definir y análisis de propiedades y de relaciones. La ejecución de estas tareas involucra cinco subdominios del MTSK. Del dominio matemático se evidencia el conocimiento de los temas (categorías: definiciones, propiedades y sus fundamentos, y registros de representación) y de la práctica matemática (categoría: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). En el dominio didáctico han emergido los tres subdominios. Del Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas se han evidenciado dos categorías: formas de interacción con un contenido matemática y fortalezas y dificultades. Del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas han emergido las categorías: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, y recursos materiales y virtuales. Del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas también se han evidenciado dos categorías: expectativas de aprendizaje y nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado.

Por su parte, la jerarquización de los cuadriláteros ha involucrado los dominios matemático y didáctico del modelo. En el dominio matemático han emergido los subdominios Conocimiento de los temas (en las categorías: Definiciones, propiedades y sus fundamentos y procedimientos) y Conocimiento de la práctica matemática (en las categorías: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones y formas de validación y demostración). Del dominio didáctico ha emergido el subdominio Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, evidenciado en la categoría: formas de interacción con un contenido matemática. Del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas han emergido las categorías: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, y recursos materiales y virtuales.

Figura 35

Síntesis del conocimiento especializado de Laura sobre la conceptualización de los cuadriláteros

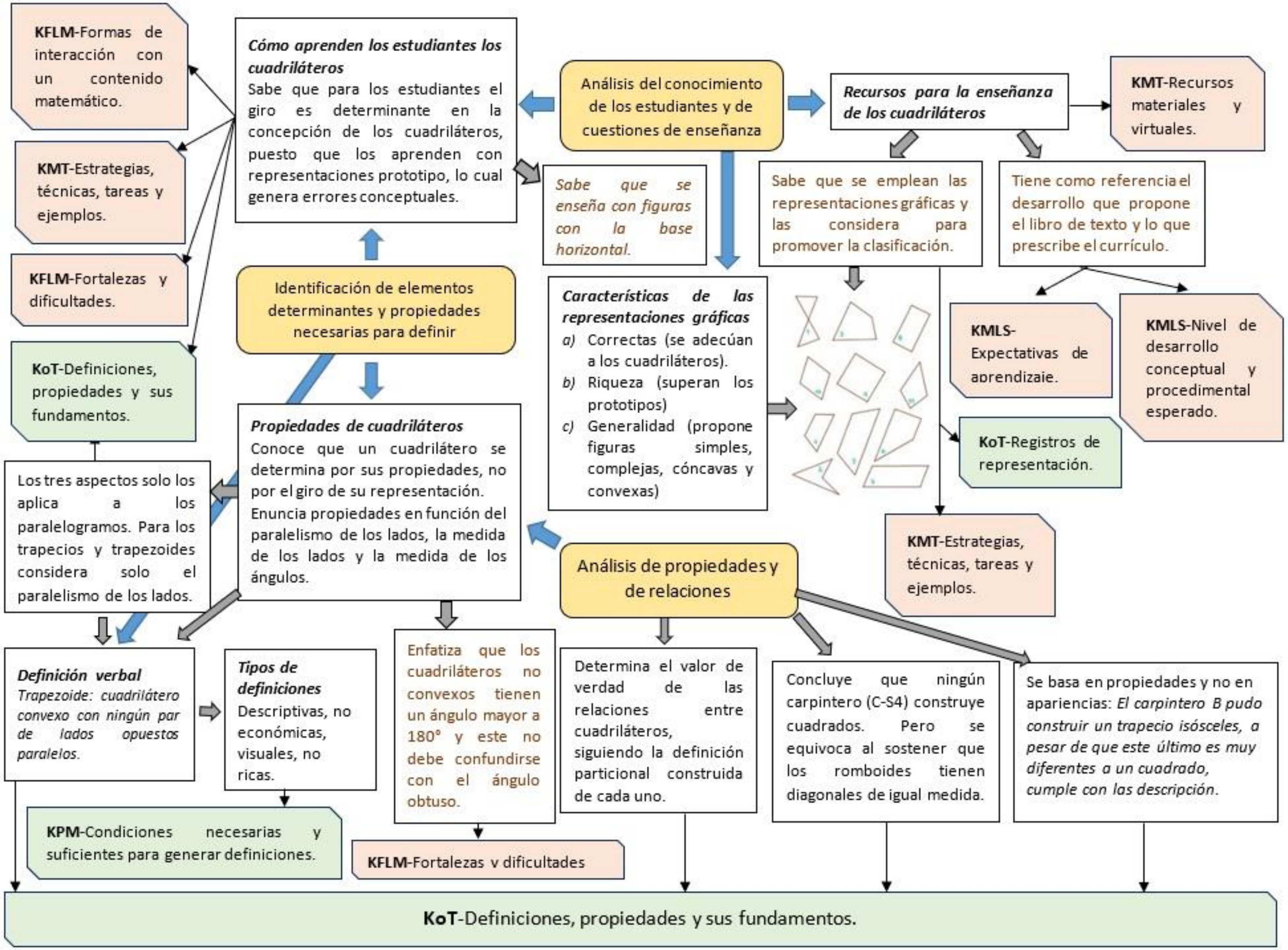
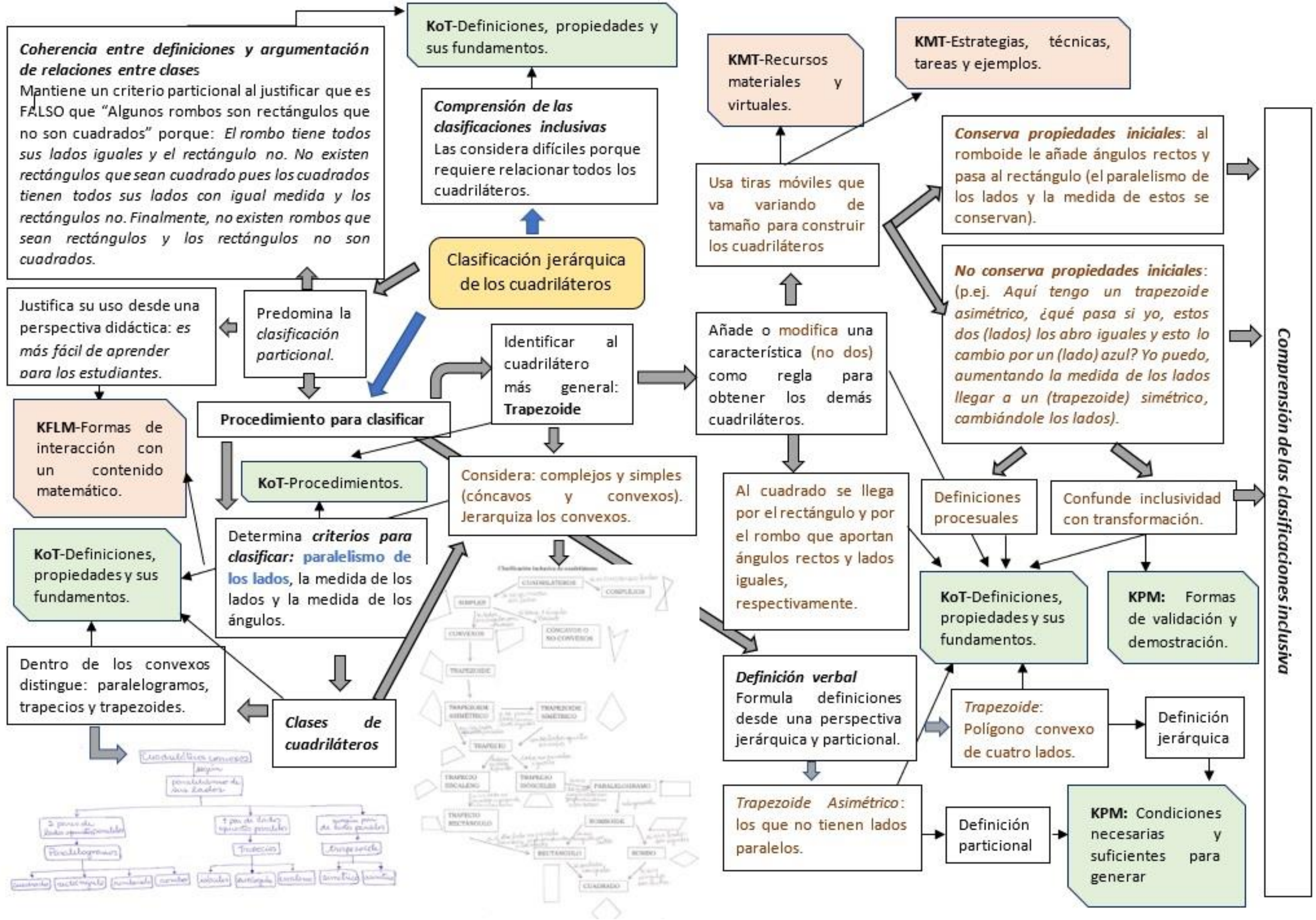


Figura 36

Síntesis del conocimiento especializado de Laura sobre la jerarquización de los cuadriláteros



4.2. El Caso Samuel

Samuel es un estudiante con rendimiento académico alto, empeñoso en su formación y con evidente disposición para aprender y reflexionar sobre lo que se le cuestiona. Ha completado el cuestionario con algunas respuestas extensas, con otras apoyadas en representaciones gráficas y otras, solo con dichas representaciones. En la planificación y desarrollo de su sesión de clase ha considerado objetos del entorno.

4.2.1. Respuestas de Samuel en el Cuestionario

4.2.1.1. Concepto de Polígono

El análisis que realiza Samuel de las definiciones dadas permite inferir las **características que atribuye a polígono** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así pues, considera al polígono como: a) una figura geométrica (no un cuerpo geométrico), b) cerrada, c) formada por ángulos que pueden tener diversas medidas (no siempre todos iguales o todos diferentes), d) tiene lados rectos que no se cruzan y, e) ocupa un lugar en el plano o en el espacio (encierra una región poligonal) (Transcripción 16). No obstante, observamos cierta confusión en torno al concepto de cuerpo geométrico. Como puede verse en la Transcripción 16, si bien diferencia figura de cuerpo geométrico, al indicar *unos son sólidos de revolución (cuerpos geométricos) y otros no* (Def. Pablo), no deja claro si esos "otros" incluye a los cuerpos geométricos que no son sólidos de revolución y a las figuras planas.

Transcripción 16
Errores, conceptos confundidos e ideas validas identificadas en la definición de Pablo y Ana (C-Samuel, S1: ítem 1)

Definiciones de estudiantes **Pablo**: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares. Ana: Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales.		
Errores de la definición	**Conceptos que está confundiendo (Def. Pablo)**	**Ideas válidas/justificación de tal consideración (Def. Ana)**
PABLO ➢ *Cuerpo geométrico.* ➢ *Ángulos diferentes (a modo general).* *ANA* ➢ *Lados y ángulos iguales.*	*Piensa que todo cuerpo geométrico es un triángulo, cuadrado, prisma, pirámide, cono, etc. Con lo cual no es así ya que unos son sólidos de revolución (cuerpos geométricos) y otros no.*	*Es una figura geométrica: Es correcto partir de allí, dado que no se puede confundir con cuerpos geométricos, y además debe ser cerrada.*

➢ *Figura geométrica (a modo general)*	*No todos los ángulos son diferentes, porque por ejemplo el cuadrado tiene ángulos iguales.*	

Sus respuestas, además, evidencian reparo en las **características de una definición matemática** (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal) puesto que, en los errores señalados en la Transcripción 16 usa la expresión "*a modo general*". Esto nos hace pensar que Samuel considera que hacen falta precisiones (Leikin & Winicki-Ladman, 2000); por ello, indica que la figura geométrica deber ser "cerrada" (Def. Ana). No obstante, se observa un reparo discontinuo en las características necesarias y suficientes (Zaslavsky & Shir, 2005) (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Así, por ejemplo, en la definición de Luis no señala como erróneo incluir la clasificación (Transcripción 16), por el contrario, la señala en las ideas válidas (*"cóncavos y convexos: es correcto porque tiene a una clasificación"*) probablemente, porque se limita al conocimiento matemático en sí. Esto no ocurre cuando analiza la definición de Gaby (Transcripción 17) porque considera inválida la inclusión de la fórmula $180°(n-2)$ como parte de la definición, de allí que señale: "*no especifica* (Gaby) *en sí para que sirve*".

Transcripción 17

Errores, conceptos confundidos e ideas validas identificadas en la definición de Gaby (C-Samuel, S1: ítem 1)

Definiciones de estudiantes **Gaby:** Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180° (n-2).		
Errores de la definición	**Conceptos que está confundiendo**	**Ideas válidas/justificación de tal consideración**
➢ *Figura geométrica (a modo general)* ➢ *Posee más de dos lados.* ➢ *Ángulos miden más de 180°.*	• *Con respecto a figura geométrica debe indicar que debe ser cerrada (no ser confundida con un círculo).* • *Todo polígono posee más de tres lados, porque no hay polígono de dos lados.*	• *Ninguna.* • *Además la fórmula 180°(n-2) no especifica en sí para qué sirve.*

	• *No todos los ángulos miden más de 180° (por ejemplo los convexos).*	

Por otro lado, se observa que Samuel no comprende la expresión *más de dos* y por ello la considera errónea (Transcripción 17). Dicha confusión le lleva, incluso, a proponer otra que “contradictoriamente” excluye al triángulo: “*Todo polígono posee más de tres lados, porque no hay polígono de dos lados*” (**KPM**–Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal). Otra confusión evidenciada gira en torno a la circunferencia, aunque Samuel la llama círculo, puesto que señala: “*Con respecto a figura geométrica debe indicar que debe ser cerrada (no ser confundida con un círculo)*”. Esta expresión hace pensar que Samuel podría aludir a la necesidad de hacer más precisiones pues, si bien la circunferencia también es una figura geométrica cerrada, no es un polígono (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

En relación con lo dicho en el párrafo anterior, el análisis que hace Samuel de la definición de Luis (Transcripción 18), refuerza su interés en precisar las expresiones, así indica *“lo que no debe cruzarse son las rectas. Además, los puntos no deben ser colineales (a lo mucho dos)”.* Con esto, además, excluye de ser polígono a aquellos de lados cruzados. Por otro lado, posiblemente, equipara plano y espacio puesto que, señala como válido *“ocupa un lugar en el espacio o plano”* (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). El uso equiparado de plano y espacio tal vez sea consecuencia de la confusión en torno a los conceptos figura geométrica y cuerpo geométrico, comentado sobre la definición de Pablo Transcripción 16).

Transcripción 18

Errores, conceptos confundidos e ideas validas en la definición de Luis

Definiciones de estudiantes **Luis:** Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.		
Errores de la definición	**Conceptos que está confundiendo**	**Ideas válidas/justificación de tal consideración**
• *Los puntos deben cruzarse.* • *Unión de tres puntos (sin más).*	• *Esta parte, parece que está mal dicha, ya que lo que no debe cruzarse son las rectas o lados del polígono.*	• *Figura geométrica cerrada, porque si no es cerrada quedaría solo en una recta.*

	• *Además los puntos no deben ser colineales (a lo mucho dos).*	• *Compuesta por la unión de 3 a más puntos (por ejemplo un triángulo).* • *Ocupa un lugar en el espacio o plano.*

Las **características que atribuye a polígono**, según el análisis realizado sobre las definiciones dadas, se confirman en la **definición verbal** que Samuel construye (Figura 37), aunque sin hacer referencia explícita a los elementos y sus medidas (característica c y d), pero sí al área que determina, pese a que indica: "*ocupa un lugar en el espacio*" (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 37

Definición de polígono construida por Samuel (C-Samuel, S1-ítem5)

¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a sus estudiantes de 2° de secundaria, después de haber analizado las respuestas que ellos le dieron inicialmente y de haber trabajado las actividades anteriores? Enúnciela.

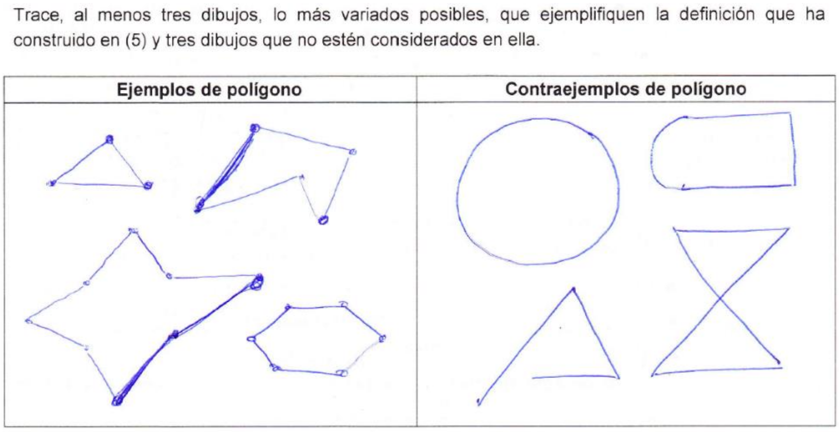
Es una figura geométrica cerrada, constituida por la unión de tres a más puntos no colineales, formada por segmentos de recta dos a dos y que ocupa un lugar en el espacio

Al analizar el tipo de la definición construida (Figura 37), a la luz de las **características de una definición matemática, podemos decir que** es *descriptiva* (De Villiers, 1998) no evidencia una diferenciación entre características necesarias y suficientes (KPM), lo cual la hace inapropiada (Zazkis y Leikin, 2008). Así pues, es una definición *no económica* de tipo *estructural* por referirse a los puntos y segmentos que conforman todo polígono (Shir y Zaslavsky, 2001). Esto último le dota de *riqueza* al mencionar aspectos no tradicionales (p.ej. puntos no colineales).

La coherencia entre las características de polígono inferidas del análisis de las definiciones dadas y las incluidas en la definición construida por Samuel, también se mantiene en la **imagen conceptual de polígono**, inferida de los ejemplos y contraejemplos que propone para el mismo (**KoT**-Registros de representación). Así pues, en la Figura 38 puede verse que los polígonos son: figuras geométricas cerradas, de al menos tres lados, formadas por segmentos que no se cruzan entre sí y que, al unirse cada dos, determinan ángulos cóncavos o convexos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esto último es una característica que Samuel no ha explicitado antes, sin embargo, podemos ver coherencia entre la imagen conceptual y la definición conceptual de polígono (Vinner 1991).

Figura 38

Ejemplos y contraejemplos de polígono propuestos por Samuel (C-Samuel, S1-ítem 6)



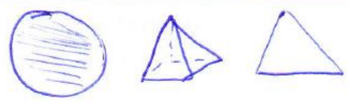
Un detalle que llama nuestra atención en los ejemplos de polígono es el énfasis que pone Samuel en los vértices y lados de los polígonos. Esto reafirma la necesidad de considerar a los elementos de polígono dentro la definición (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Para el contraste, Samuel propone como contraejemplos de polígono: figuras geométricas abiertas, curvilíneas y de lados cruzados que, además, presentan una posición estándar (sobre la horizontal). Al analizar las **características de las representaciones gráficas** de los ejemplos y contraejemplos de polígono (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación), vemos que poseen *corrección* porque se adecúan a lo que son los polígonos, *riqueza* porque superan los prototipos, *generalidad* porque contempla figuras simples (como polígonos) y complejas (como no polígonos), así como polígonos convexos y cóncavos y, guardan coherencia con la definición construida de polígono y las características atribuidas a este. Además de lo anterior, observamos una intención de contrastar una a una dichas características (cerrada-abierta, de lados rectos-curvilínea, lados que no se cruzan-lados que se cruzan). Lo anterior, hace evidente no solo un conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos, y de registros de representación (KoT), sino también, un conocimiento de qué es y no es polígono para los hipotéticos estudiantes de la situación 1 (**KFLM**-Fortalezas y dificultades) que lleva a elegir los ejemplos y contraejemplos para dejarles claros dichos conceptos (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Un concepto que no se toma en cuenta en las representaciones gráficas de los contraejemplos es *cuerpo geométrico*. Esto contrasta con la atención puesta sobre este concepto en el análisis de las definiciones dadas (Transcripción 16), lo cual involucra a la interpretación del pensamiento de los estudiantes (**KFLM**–Fortalezas y dificultades) y el abordaje de los errores identificados (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). De hecho, la confusión entre los conceptos figura geométrica, cuerpo geométrico, polígono y circunferencia que comentamos en párrafos anteriores, empieza a aclararse cuando se le pregunta a Samuel por la idea de polígono que cree él tiene Pablo y cada uno de los hipotéticos estudiantes referidos en el cuestionario. Así pues, en la Figura 39 se observa que Samuel interpreta que para Pablo un polígono es cualquier figura o cuerpo geométricos (**KFLM**–Interacción con un contenido matemático) y por ello traza una figura geométrica de lados rectilíneos (triángulo), otra curvilínea (circunferencia) y un cuerpo geométrico (pirámide) (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 39

Idea de polígono de la definición de Pablo (C-Samuel, S1: ítem 2)

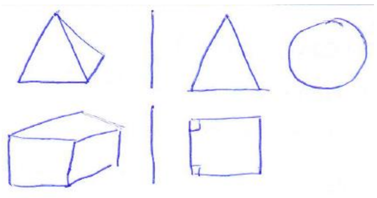
¿Qué le dicen los errores que ha identificado sobre la concepción de polígono que tiene cada alumno? ¿Qué imágenes está asociando cada alumno a su definición? Dibuje estas.

Definición dada por:	Concepción de polígono	Imágenes que asocia a su definición de polígono
Pablo	Polígono es cualquier figura o tiene lados y ángulos lados y ángulos (siempre) diferentes	 (confunde cuerpos geométricos con figuras geométricas).

La interpretación comentada en el párrafo anterior se refuerza cuando Samuel propone los dibujos para refutarle a Pablo sus errores (Transcripción 19). Las **características de las representaciones gráficas** muestran figuras y cuerpos geométricos de forma parecida (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), evidenciándose con ello un conocimiento matemático (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos, Registros de representación) que permite abordar las dificultades de los estudiantes (**KFLM**–Fortalezas y dificultades), así como prever la interacción de ellos con el concepto en cuestión (**KFLM**–Formas de interacción con un contenido matemático).

Transcripción 19

Representaciones gráficas propuestas por Samuel para abordar los errores de la definición de Pablo (C-Samuel, S1-ítem 3)

Ítem3: Si tuviera que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s)?	
Dibujo(s) para refutar el error de la definición (de PABLO)	**Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)**
	*Las emplearía para establecer una diferencia de cuerpo geométrico y figura geométrica cerrada. Ya que un polígono es una figura geométrica cerrada que tiene lados; y con lo cual un círculo no es polígono (porque no tiene lados).*

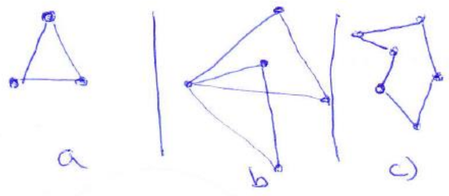
En su justificación deja claro que cuerpo geométrico es distinto de figura geométrica y que la circunferencia no es un polígono (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Estos conceptos vuelven a tomarse en cuenta cuando Samuel identifica los **subconceptos de polígono** que trabajaría con sus estudiantes para construir una definición de este. Así, señala: *1) cuerpos geométricos: clasificación, 2) figuras geométricas: tipos, y 3) polígono: clasificación*. Si se recuerda la definición de Pablo ("Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares") y lo dicho por Samuel en la Transcripción 16, resulta coherente que elija esos tres aspectos para trabajarlos con sus estudiantes, aunque no constituyan todos subconceptos, entendiendo a estos como los conceptos que son necesarios conocer para comprender el concepto de polígono.

De forma similar al caso anterior, para la definición de Luis, Samuel se centra en el error que supone la expresión *los puntos no deben cruzarse*. Así, en la Transcripción 20 se observa que remarca los puntos de las representaciones que propone para mostrar que estos no se interceptan sino los lados (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y, además, reforzar la idea de que en un polígono los lados no se cruzan (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Transcripción 20

Representaciones gráficas propuestas para abordar los errores de la definición de Luis (C-Samuel, S1: ítem 3)

Ítem3: Si tuviera que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s)?

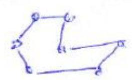
Dibujo(s) para refutar el error de la definición (de LUIS)	Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)
	*Realizaría tal comparación para explicarle, que lo que no puede cruzar son las rectas más no los puntos (ver imagen c)., porque en "c" los puntos están en desorden y se forma un polígono, pero en (b) no porque hay intersección de rectas y esto ya no es un polígono.*

Siguiendo la Transcripción 20, los subconceptos identificados por Samuel para la definición dada por Luis están centrados en el concepto de punto e, implícitamente, en el de segmento o recta (Figura 40). Llama la atención, que en la Figura 40, al igual que en la Figura 39, se mezcla una especie de actividad de enseñanza con la idea de subconcepto (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 40

Subconceptos identificados para trabajar la definición de Luis (C-Samuel, S1:ítem 4)

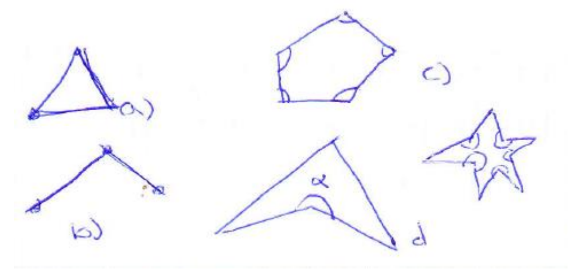
Es posible que los errores que evidencian los alumnos se deban a que los subconceptos involucrados en el concepto de polígono no han sido construidos correctamente. Tomando en cuenta esto ¿Qué subconceptos[1] de polígono trabajaría con cada alumno de cara a construir una definición correcta?

Alumno	Subconcepto que trabajaría para construir una definición correcta de polígono
Luis	• Construir figuras con la unión de puntos (dispersos) (1).  | • Puntos colineales y no colineales (2). • Polígono: clasificación, sus lados no deben intersectarse) (3).

La clarificación que se ha evidenciado en los párrafos anteriores, en torno al concepto de cuerpo geométrico, no ocurre para la confusión generada por la expresión "más de dos lados" (ver Transcripción 17). De hecho, cuando se le propone a Samuel que trace dibujos para refutar los errores de la definición de Gaby, dicha confusión vuelve a aparecer (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal) (Transcripción 21).

Transcripción 21

Representaciones propuestas por Samuel para abordar los errores de la definición de Gaby (C-Samuel, S1-ítem 3)

Ítem3: Si tuviera que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s)?	
Dibujo(s) para refutar el error de la definición (de GABY)	**Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)**
	*Le diría que un polígono sí es una figura geométrica, pero cerrada, además posee más de tres lados, y no de dos a más (ver b). Luego le diría que sus ángulos no todos son mayores que 180°, salvo que hay polígonos si lo son por ejemplo una estrella.*

La Transcripción 21 deja ver que Samuel no logra comprender que "más de tres" excluye a los triángulos de ser polígonos y que al escribir "no de dos a más" está diciendo que los polígonos tienen un lado. Lo comentado en torno a expresiones con carácter de "cuantificadores lógicos" ha puesto en evidencia una constante dificultad de Samuel para comprenderlas (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal). Por lo demás, ha mostrado una actitud reflexiva que dota de coherencia el desarrollo de los ítems propuestos y que permite interpretar lo que quieren decir en sus definiciones, los hipotéticos estudiantes involucrados en la situación 1 del cuestionario.

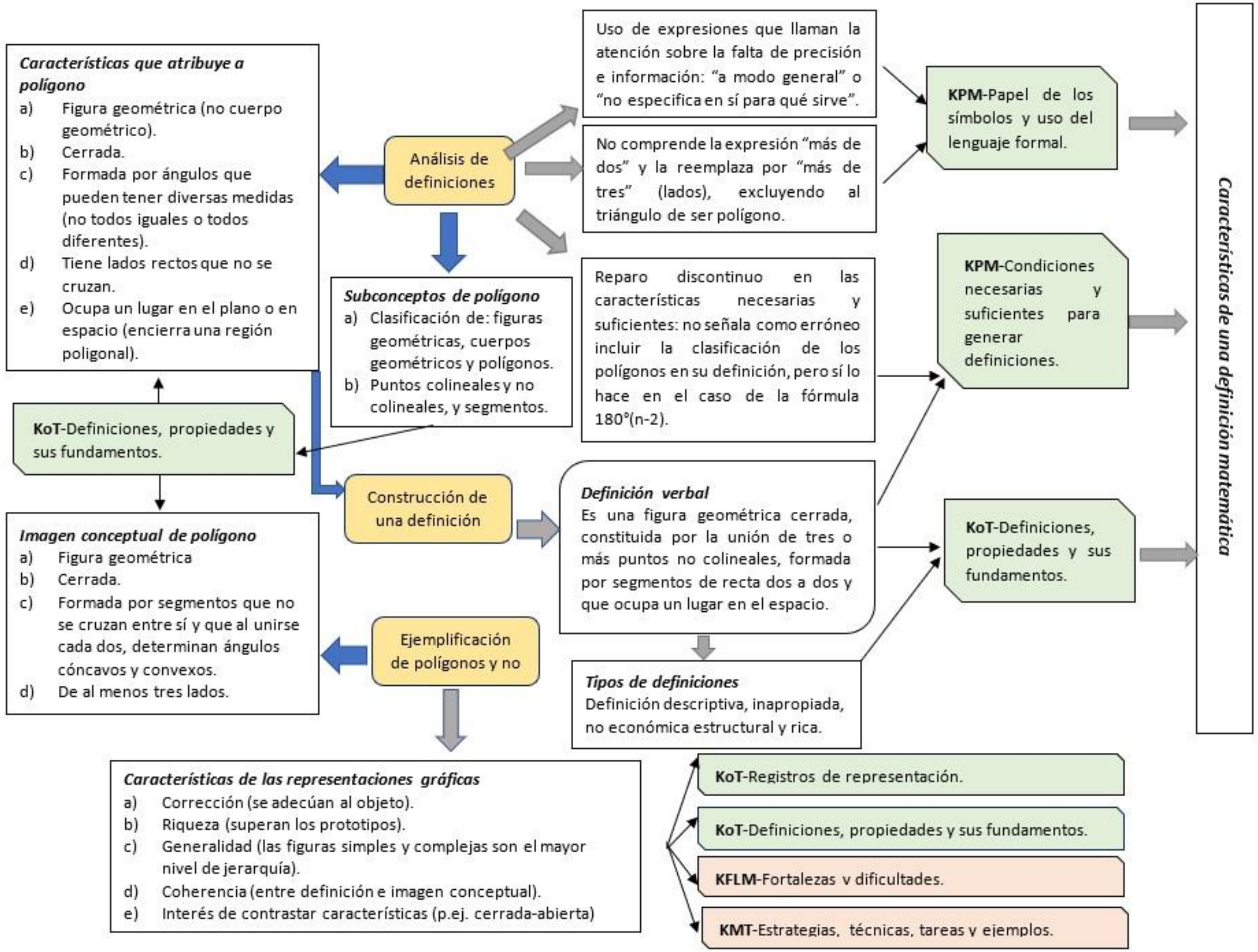
4.2.1.2. Síntesis del conocimiento especializado sobre el concepto de polígonos

Luego de haber descrito el conocimiento especializado, evidenciado por Samuel, al abordar polígonos, presentamos una síntesis gráfica de este. En la Figura 41 identificamos las tres tareas generales propuestas en la situación 1 del cuestionario: análisis de definiciones, construcción de una definición y trazado de ejemplos y contraejemplos de polígonos (recuadros amarillos). La ejecución de estas tareas involucra cuatro subdominios del MTSK. Del dominio matemático se evidencia el conocimiento de los temas (categorías: definiciones, propiedades y sus fundamentos, y registros de representación) y de la práctica matemática (categoría: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones y el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal). En el dominio didáctico han emergido dos subdominios. Del Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas se han evidenciado la categoría fortalezas y dificultades. Del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas ha emergido la categoría: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Los subdominios y categoría del MTSK emergidas evidencian que el conocimiento especializado de Samuel sobre polígonos es, sobre todo, disciplinar (KoT y KPM). De allí que los subdominios KFLM y KMT aparezcan asociados a un solo descriptor: características de las representaciones gráficas. Así pues, dado que la situación 1 plantea un contexto hipotético de enseñanza, Samuel puede haberse situado en el rol docente para proponer representaciones gráficas para ejemplificar polígonos o no polígonos.

Figura 41

Síntesis del conocimiento especializado de Samuel sobre los polígonos



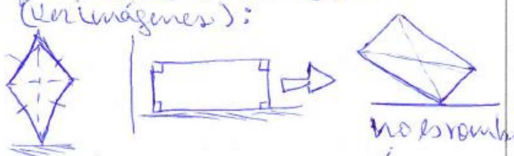
4.2.1.3. Concepto de Cuadrilátero y Jerarquización

El contexto propuesto en la situación II del cuestionario, permite evidenciar que Samuel repara en **cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros** (**KFLM**–Formas de interacción con un contenido matemático) y por ello, manifiesta que le atribuyen un rol errado a la posición de las figuras (Figura 42). Por el contrario, explicita que son las propiedades quienes determinan que un cuadrilátero sea lo que es, aunque se apoya también en la apariencia gráfica de las representaciones que propone (**KoT**–Registros de representación), y no enuncia ninguna propiedad específica (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 42

Aspectos relevantes, para los estudiantes, en la determinación de un cuadrilátero (C-Samuel, S2: ítem 2)

¿Qué aspectos o elementos cree que consideran los alumnos (del diálogo), como factores determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿Dichos aspectos o elementos son erróneos, por qué?

Aspectos o elementos determinantes en la concepción de un cuadrilátero	Justificación del acierto o del error
▷ "El rombo para ser cuadrado debe estar girado". ▷ "si un cuadrilátero se gira parece un rombo".	▷ Esta afirmación es un error, porque la posición de las figuras no alteran sus medidas o ángulos del mismo. ▷ No es correcto porque va en contra de las propiedades que tiene el rombo. (Ver imágenes):  no es rombo Los lados no son iguales (ver largo y ancho)

Las representaciones gráficas resultan ser un medio de enseñanza relevante para Samuel (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), tanto para propiciar ideas erróneas como para abordarlas (Transcripción 22. Así pues, en el primer caso, indica que las **características de las representaciones gráficas** que se emplean para estudiar los cuadriláteros suelen tener posiciones estándar (p. ej. cuadrado con base paralela al eje x o rombo apoyado en uno de los vértices) y en consecuencia, se constituyen en figuras prototipo (Herskowitz, 1990). Para el segundo caso (abordaje de ideas erróneas) Samuel alude a representaciones variadas y en posición no estándar (**KoT**–Registros de representación).

Transcripción 22

Las representaciones gráficas como medio de enseñanza (C-Samuel, S2: ítem 3)

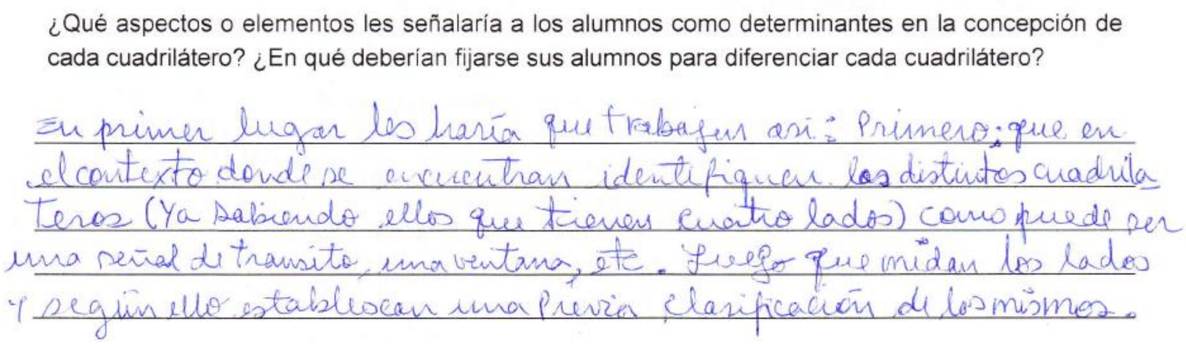
S2-Ítem 3: Intente explicar con el máximo detalle posible las causas de los errores señalados (¿a qué pueden deberse?, ¿qué comprensión del contenido muestran los alumnos?). Luego, indique ¿Qué plantearía como profesor para abordar estos errores?

Error	Causa del error	Acción a plantear
El rombo para ser cuadrado debe estar girado	*El error surge cuando en una clase siempre se explica o se grafican figuras en posición estándar, es decir, la base sobre la superficie, y no se ponen o grafican las figuras en otras posiciones. Por ello los alumnos piensan que como no están en esa posición dichas figuras no pueden ser de otra forma.*	*Graficar en la pizarra (cuando esté dando mi clase) cuadrados en distintas posiciones y cuando hablo del tema de rombo también hago lo mismo y luego los relaciono.*

La identificación de la causa del error (Transcripción 22) evidencia reparo en las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que emplean los profesores (**KMT**) y en cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros (**KFLM**–Formas de interacción con un contenido matemático). En esta línea, además de representaciones en distintas posiciones, Samuel propone usar imágenes de cuadriláteros que están en el contexto (**KoT**–Fenomenología y aplicaciones), tales como las señales de tránsito y tomar medidas de dichas representaciones para inferir propiedades (Figura 43). Si bien la respuesta dada en la Figura 43 no se ajusta a la pregunta planteada, muestra indicios de criterios para clasificar cuadriláteros, tales como la medida de los lados (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 43

Acciones para promover el aprendizaje de los cuadriláteros (C-Samuel, S3: ítem 4)



¿Qué aspectos o elementos les señalaría a los alumnos como determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿En qué deberían fijarse sus alumnos para diferenciar cada cuadrilátero?

En primer lugar les haría que trabajen así: Primero; que en el contexto donde se encuentran identifiquen los distintos cuadrilateros (Ya sabiendo ellos que tienen cuatro lados) como puede ser una señal de transito, una ventana, etc. Luego que midan los lados y según ello establezcan una previa clasificación de los mismos.

Pese a que, según lo anterior, solo se considera la medida de los lados como criterio determinante en la concepción de un cuadrilátero, al momento de cuestionar a Samuel por las propiedades que permiten definirlos, propone enunciados que se enfocan en: la medida de lados, ángulos y diagonales, el paralelismo de los lados y la congruencia de los triángulos que determinan las diagonales al intersecarse entre sí (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Como podemos ver en la Transcripción 23, Samuel hace un listado de las propiedades que conoce de cada cuadrilátero, lo cual es parte del **procedimiento para clasificar** (**KoT**-Procedimientos)**. S**in embargo, en todos los casos no emplea los mismos **criterios para clasificar cuadriláteros** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así, por ejemplo, mientras que para el rectángulo toma en cuenta todos los señalados antes (medida de lados, ángulos y diagonales, paralelismo de los lados y congruencia de los triángulos determinados por la intersección de las diagonales), para el trapecio no hace referencia alguna a las diagonales. Además, observamos que algunas **propiedades de cuadriláteros** son erróneas como que en el rectángulo *"las diagonales determinan triángulos rectángulos congruentes"* (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Transcripción 23

Propiedades que determinan cada cuadrilátero (C-Samuel)

S2-ítem 5: Si ahora tuviera que señalar las propiedades que son necesarias para determinar y luego definir cada cuadrilátero ¿cuáles enunciaría?

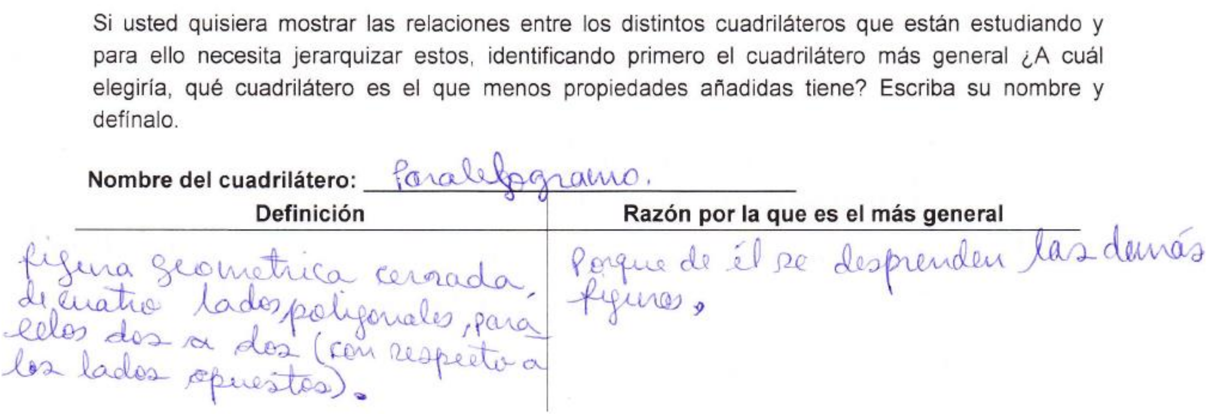
Cuadrilátero	Propiedades que lo definen
Rectángulo	*Cuatro ángulos rectos.* *Lados paralelos dos a dos.* *Diagonales miden igual.* *Las diagonales determinan triángulos rectángulos congruentes.* *Los lados opuestos son iguales, independientemente, de lo otros dos lados que también son iguales, pero digieren en longitud.*

Paralelogramo	*Los ángulos opuestos son siempre iguales/no son rectos.* *Sus lados son paralelos (dos a dos).* *La diagonal determina triángulos congruentes no rectángulos.*
Romboide	*Los ángulos opuestos son siempre iguales/no son rectos.* *Las diagonales son distintas.* *Sus lados son paralelos (dos a dos).* *La diagonal determina...(no ha terminado el enunciado).*
Trapecio	*Presenta dos lados paralelos (uno mayor y el otro menor).* *Y los otros dos lados son distintos y no paralelos.* *Los ángulos son distintos entre sí.*
Trapezoide	*Los lados son distintos uno con respecto del otro.* *Los ángulos son diferentes.*

Además, en los enunciados anteriores (Transcripción 23) se hace evidente una falta de **comprensión de las clasificaciones inclusivas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) puesto que dichos enunciados presentan un propósito excluyente, lo cual impide establecer relación entre rectángulo y romboide, o entre la clase de los paralelogramos y los trapecios. Incluso, hacen falta precisiones que permitan relacionar o diferenciar paralelogramo y romboide o trapecio y trapezoide. De allí que, en este último caso, lo dicho para el trapezoide también aplique para el trapecio, por ejemplo. Pese a este propósito excluyente, Samuel reconoce un cuadrilátero más general (el paralelogramo) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 44

Identificación del paralelogramo como el cuadrilátero más general (C-Samuel, S2: ítem 6)



Si usted quisiera mostrar las relaciones entre los distintos cuadriláteros que están estudiando y para ello necesita jerarquizar estos, identificando primero el cuadrilátero más general ¿A cuál elegiría, qué cuadrilátero es el que menos propiedades añadidas tiene? Escriba su nombre y defínalo.

Nombre del cuadrilátero: Paralelogramo.

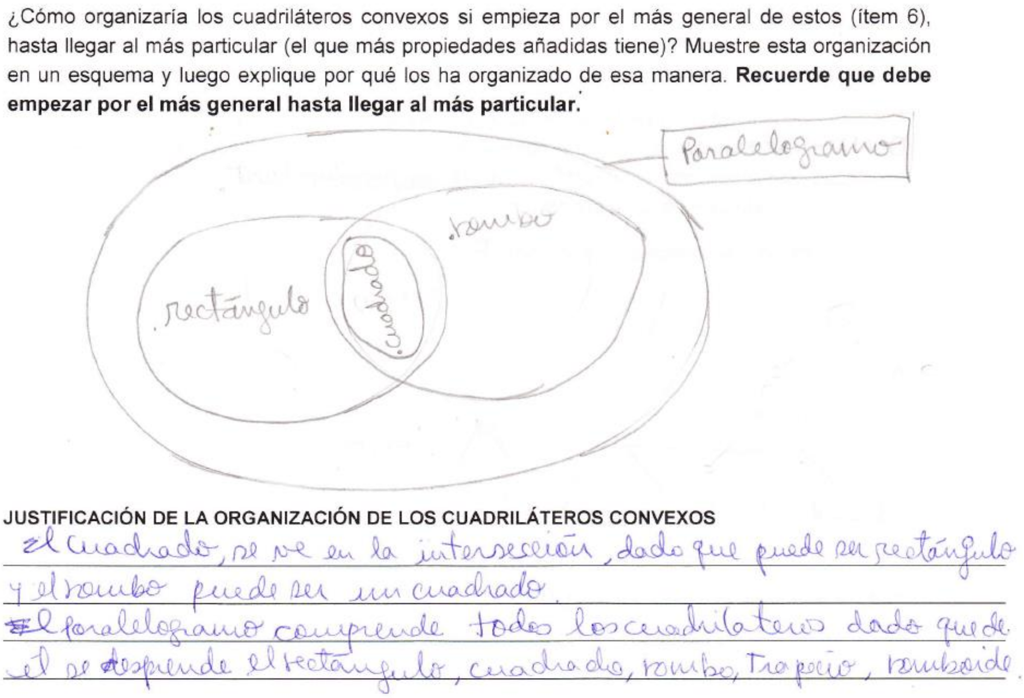
Definición	**Razón por la que es el más general**
figura geometrica cerrada, de cuatro lados poligonales, paralelos dos a dos (con respecto a los lados opuestos).	Porque de él se desprenden las demás figuras,

La elección del paralelogramo como el cuadrilátero más general (Figura 44) resulta incoherente luego de analizar la Transcripción 23. En esta, cabría pensar que el cuadrilátero con menos propiedades añadidas es el trapezoide, por lo tanto, debería ser el más general; sin embargo, imponer "los lados/los ángulos son distintos" puede ser igual de restrictivo que "los lados/los ángulos son iguales". Por otro lado, según las **características de una definición matemática** (**KPM**–Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal), la definición que Samuel construye de paralelogramo carece de la precisión que reclamaba para el caso de los polígonos (Transcripción 16). De hecho, resulta extraña la expresión "lados poligonales" porque sabiendo que el paralelogramo es un polígono, no hay necesidad de esa característica.

El esquema de clasificación mostrado en la Figura 45 evidencia la **comprensión de clasificaciones inclusivas** que tiene Samuel. Así pues, basándose en que el paralelogramo es el cuadrilátero más general (Figura 44), establece una jerarquía entre los que pertenecen a esta clase, sin considerar al romboide. Esto último puede estar justificado en el listado de propiedades que le atribuye a paralelogramo y romboide (Transcripción 23.) puesto que en ambos lo que se enuncia es similar, pudiendo decirse que, para Samuel, paralelogramo y romboide son equiparables. No obstante, al justificar el esquema de clasificación sostiene que del paralelogramo se desprende todos los cuadriláteros, incluidos trapecio y romboide, sin mencionar al trapezoide.

Figura 45

Clasificación de cuadriláteros y su justificación (C-Samuel, S3: ítem 7)


¿Cómo organizaría los cuadriláteros convexos si empieza por el más general de estos (ítem 6), hasta llegar al más particular (el que más propiedades añadidas tiene)? Muestre esta organización en un esquema y luego explique por qué los ha organizado de esa manera. **Recuerde que debe empezar por el más general hasta llegar al más particular.**

JUSTIFICACIÓN DE LA ORGANIZACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

el cuadrado, se ve en la intersección, dado que puede ser rectángulo y el rombo puede ser un cuadrado.
El paralelogramo comprende todos los cuadrilateros dado que de él se desprende el rectángulo, cuadrado, rombo, trapecio, romboide.

La posible confusión entre las **clases de cuadriláteros consideradas** (los cuadriláteros incluidos en la clase paralelogramos y entre esta con los trapecios y los trapezoides) queda reflejada en las definiciones que se construyen a partir del esquema de clasificación (**KoT**–

Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En la Figura 46 podemos ver que se define cuadrado, rombo, rectángulo y romboide, aun cuando este último no se menciona en el esquema. La definición de romboide evidencia que Samuel no tiene clara la relación romboide-paralelogramo. Otro aspecto que llama la atención de las definiciones construidas es que, a ninguno, salvo al romboide, lo define como paralelogramo sino como cuadrilátero, un concepto más general. También, pese al carácter inclusivo del esquema de clasificación, se define de manera disjunta, de allí que señale que el rectángulo presenta un lado mayor que el otro. Esta afirmación parece ser la consecuencia de una imagen conceptual prototipo de rectángulo.

Figura 46

Definiciones de cuadriláteros según esquema de clasificación (C-Samuel, S3: ítem 8)

Después de haber organizado los cuadriláteros en un esquema, deberá definir cada uno, cuidando la coherencia con el esquema realizado, esto es, definiendo el más particular en función del cuadrilátero inmediatamente anterior.

cuadrado: es un cuadrilatero, cuyos lados son iguales y presenta cuatro ángulos rectos.

Rombo: es un cuadrilatero, de lados iguales, que no necesariamente Tienen sus ángulos rectos. ES un caso particular del cuadrado.

Rectángulo: Es un cuadrilatero, que presenta los lados opuestos iguales y paralelos, y de ángulos rectos (Presenta un lado mayor que el otro).

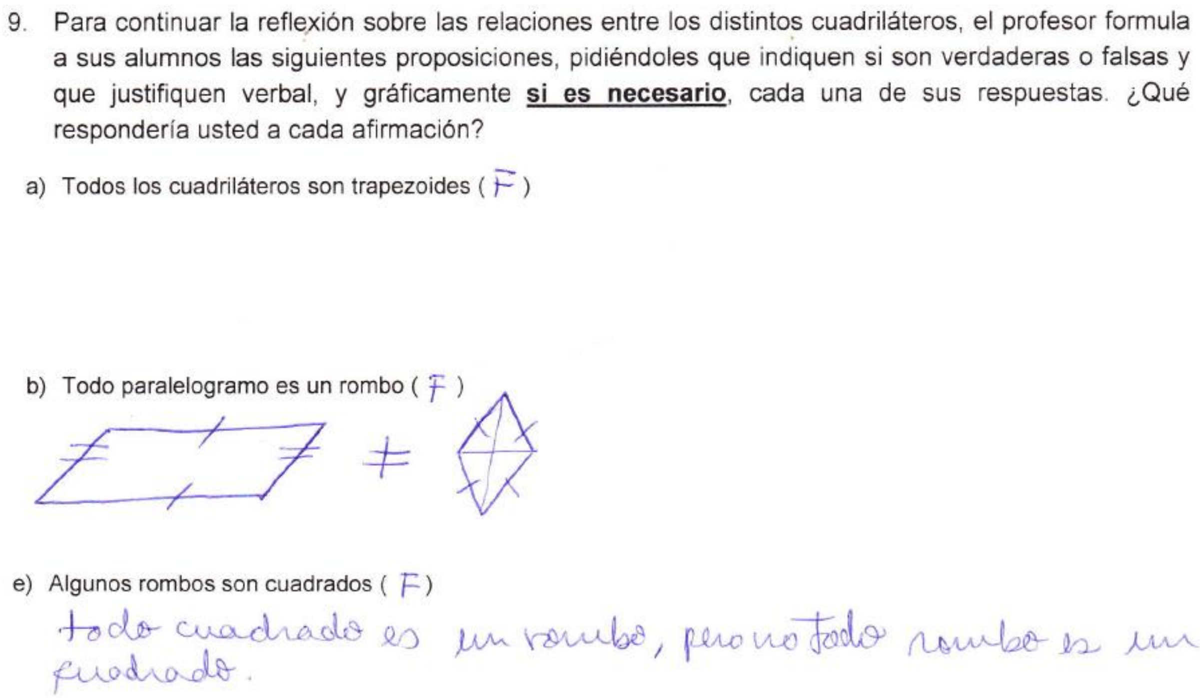
romboide: Es un paralelogramo.

Las definiciones anteriores, según las **características de una definición matemática** (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal), se caracterizan por ser *descriptivas*, centrándose en la medida de los lados y ángulos de los cuadriláteros. Además, parecieran basarse en imágenes prototípicas que emanan de objetos que tienen la forma de la representación gráfica del concepto (De Villiers, 1998) (**KoT**-Registros de representación). Por otro lado, desde la perspectiva de Zazkis y Leikin (2008), constituyen definiciones *incorrectas* por no considerar características necesarias y suficientes mediadas por el rigor y, a su vez, *inapropiada*s porque no contemplan elementos no tradicionales, distintos a lados y ángulos. Esto si bien evidencia un conocimiento base de las propiedades de los cuadriláteros (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), refleja un escaso reparo en la relevancia de la estructura de las definiciones (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

El conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos (KoT), evidenciado por Samuel, justifica el nivel de **coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases**. Así pues, observamos escasos argumentos en el análisis de relaciones entre cuadriláteros o reemplazo de estos por representaciones gráficas. En este sentido, en la Figura 47, Samuel no indica por qué todos los cuadriláteros no son trapezoides o por qué algunos rombos no son cuadrados. En este último caso, lo que señala es una especie de relación recíproca que suele enunciarse en la enseñanza de la geometría escolar. Finalmente, se observa una justificación gráfica, empleando representaciones prototipo del paralelogramo (romboide) y del rombo, para indicar que no todo paralelogramo es un rombo. Al analizar las clases de cuadriláteros que considera, podemos concluir que no se está entendiendo al paralelogramo como clase, sino como cuadrilátero equiparable al romboide (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 47

Valor de verdad y justificación de las relaciones entre cuadriláteros (C-Samuel, S3: ítem 9)



9. Para continuar la reflexión sobre las relaciones entre los distintos cuadriláteros, el profesor formula a sus alumnos las siguientes proposiciones, pidiéndoles que indiquen si son verdaderas o falsas y que justifiquen verbal, y gráficamente **si es necesario**, cada una de sus respuestas. ¿Qué respondería usted a cada afirmación?

a) Todos los cuadriláteros son trapezoides (F)

b) Todo paralelogramo es un rombo (F)

$\neq$

e) Algunos rombos son cuadrados (F)

todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es un cuadrado.

Relacionado con lo anterior, la situación del carpintero propone el análisis de **propiedades de cuadriláteros** (KoT). En este, Samuel muestra una confusión entre cuadriláteros y la influencia de la imagen conceptual de los mismos (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación) (Transcripción 24). Sin embargo, hemos de resaltar el reparo en la necesidad de un criterio adicional a la medida de los lados (carpintero A), o bien, de un elemento menos tradicional como las diagonales (carpintero B) o de la formación de triángulos congruentes (carpintero C), para discriminar el cuadrilátero construido. Las propiedades antes mencionadas están sujetas a la representación gráfica de cuadrado, por ello, aunque el trapecio isósceles o el rectángulo tengan las diagonales iguales, Samuel no contempla a estos cuadriláteros como opciones, si no, solo a aquello que '*visualmente*' se parecen al cuadrado (**KoT**-Registros de representación).

Transcripción 24

Respuesta de Samuel problema del carpintero (C-Samuel, S4)

<u>Situación 4</u>: Con la intención de comprobar si las actividades propuestas para contrarrestar los errores iniciales han sido efectivas, el profesor propone la siguiente actividad:

Tres carpinteros A, B y C quieren cortar cuadrados de madera y después de cortar cuadriláteros convexos hacen las siguientes comprobaciones:

- A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido.
- B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido.
- C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado.

¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Si considera que alguno(s) no consiguió cortar un cuadrado, indique qué cuadrilátero construyó. Justifique para cada construcción realizada.

A mi parecer los tres carpinteros no me dan una certeza de lo que han hecho.
Para A: Si él compara las longitudes de los lados y son iguales, puede ser un rombo (que no necesariamente tenga ángulos rectos), con lo cual la igualdad de lados no es suficiente para hacer cuadrados.
Para B: Sucede lo mismo que en "A", puede haber construido un rombo, pero cuando las diagonales son iguales hay una gran certeza de que sea un cuadrado (Ver imagen)

Solo en un cuadrado como este, las diagonales son iguales.

Por lo tanto este carpintero se asemeja más de haber construido un cuadrado.
Para C: también se asemeja de haber construido un cuadrado, dado que las diagonales del cuadrado forma 4 triángulos congruentes (es decir iguales).
Pero también puede considerarse un rombo.
∴un rombo es un caso particular del cuadrado.

Luego de lo dicho, queda corroborado que las representaciones gráficas juegan un rol relevante para Samuel. Así, no solo son el medio para justificar el valor de verdad de una proposición, si no también, para propiciar y abordar errores en la enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros, tal como se comentó al inicio de este apartado y como se observará en el diseño y ejecución de una sesión de clase.

4.2.2. Plan de Clase de Samuel y Realización de la Sesión de Clase

Samuel, siguiendo las consignas dadas por la formadora (Tabla 7, Capítulo 3), debía desarrollar el tema *clasificación de cuadriláteros*. Este debía promover tres tareas principales: construir con los estudiantes una clasificación inclusiva de los cuadriláteros, elaborar un esquema de la misma y formular las definiciones de cada cuadrilátero según dicho esquema. Además, podía usarse la situación del carpintero (cuestionario) para la evaluación.

Tal como se le indicó en el tema, Samuel planifica una clase de *Clasificación de cuadriláteros* dirigida a estudiantes hipotéticos de cuarto de secundaria (15-16 años), aunque según el diseño curricular de referencia, este *tema* es propuesto para quinto de primaria (10-11 años). En este grado (5° de primaria) lo que indica el Diseño Curricular Nacional (DCN)-es: *Clasifica triángulos y cuadriláteros de acuerdo con sus ángulos y lados.* Sin embargo, según las capacidades indicadas en los aprendizajes esperados (Figura 48), son más complejas, acordes al grado al que dirige la sesión. De hecho, las consignas dadas explicitan que la clasificación ha de ser inclusiva, lo que no coincide con lo propuesto en el DCN (2008).

Figura 48

Aprendizajes esperados propuestos por Samuel (PC-Samuel)

II. APRENDIZAJES ESPERADOS:

CONCEPTOS	CAPACIDADES
✓ **Cuadrilátero convexo:** Es el cuadrilátero cuyos ángulos internos miden menos de 180⁰. ✓ **Cuadrilátero cóncavo:** Es un cuadrilátero que posee un ángulo interno mayor de 180⁰. ✓ **Paralelogramo:** Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. • **Rectángulo:** Es un paralelogramo que tiene dos pares de lados paralelos y sus ángulos internos son rectos. • **Rombo:** Es un paralelogramo que tiene sus lados iguales. • **Cuadrado:** Es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos y de igual lados. ✓ **Trapecio:** Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. ✓ **Trapezoide:** Es un cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.	✓ Clasifica los cuadriláteros en función de sus ángulos internos y de la medida de sus lados. ✓ Diferencia los cuadriláteros según sus características o propiedades. ✓ Analiza diversas situaciones sobre cuadriláteros.

Los conceptos incluidos en la Figura 48 evidencian el conocimiento de Samuel respecto de los **criterios para clasificar** cuadriláteros y de **las clases de cuadriláteros consideradas** (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) puesto que, inicialmente, señala dos grupos de cuadriláteros según la medida de sus ángulos: cóncavos y convexos. A continuación, diferencia tres grupos de cuadriláteros, según el paralelismo de los lados: paralelogramos, trapecios y trapezoides. Esta diferenciación evidencia su **comprensión de clasificaciones inclusivas** (KoT-Procedimientos) porque, al proponer esos tres grupos se nota un carácter particional o disjunto que no se extiende al grupo de los paralelogramos. En este, tanto el rectángulo como el rombo pueden ser cuadrados. También se nota la ausencia del romboide como elemento de la clase paralelogramos. Lo anterior resulta coincidente con el conocimiento de definiciones, propiedades y fundamentos (**KoT**) evidenciado en el cuestionario. Aunque, según las características de una definición matemática (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal), las definiciones propuestas en los aprendizajes esperados incluyen, en la mayoría de los casos, propiedades necesarias y suficientes (**KPM**-

Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), esto no ocurre en el cuestionario. Por otro lado, las capacidades propuestas, evidencian un conocimiento del Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (KMLS) puesto que, si bien se propone la clasificación usando el mismo criterio que en quinto de primaria, la diferenciación de los cuadriláteros según sus propiedades y características requiere un conocimiento más amplio y un razonamiento más complejo, más aún si luego se han de analizar situaciones en torno a este tema.

La secuencia didáctica propuesta por Samuel, en su etapa inicial, contempla: la observación del entorno para identificar formas cuadrangulares, el reconocimiento de estas en las imágenes propuestas por el profesor (KoT–Fenomenología y aplicaciones) (Figura 49) y las características de los cuadriláteros que pueden inferir de cada imagen (KMT–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 49

Imágenes de forma cuadrangular, propuestas por Samuel en el desarrollo de su clase (SC-Samuel)

Posteriormente, en una segunda etapa, el docente orienta la clasificación teniendo como **criterios para clasificar cuadriláteros** la medida de los ángulos y al paralelismo de los lados (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así, situados en la clase paralelogramos, propone el estudio y definición del rectángulo, rombo y cuadrado (no menciona al romboide), así como el establecimiento de diversas relaciones entre estos, de tal forma que, luego, pueda construirse un esquema de clasificación usando diagramas de Venn (tal como Samuel propuso en el cuestionario). A continuación, propone el abordaje de trapecios y trapezoides con sus respectivos tipos. La última etapa incluye el desarrollo de una ficha, a manera de evaluación, que contiene el análisis de relaciones entre cuadriláteros para establecer el valor de verdad, la identificación de los cuadriláteros que cumplen las propiedades dadas en torno a las diagonales y el reconocimiento de cuadriláteros a partir de las representaciones gráficas que se les propone (**KMT**, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Sobre esta ficha volveremos a referirnos más adelante.

La secuencia didáctica descrita antes se ejecuta íntegramente en la sesión de clase. Así pues, la Figura 49 muestra los objetos del entorno con forma cuadrangular que Samuel emplea como **recursos para la enseñanza de cuadriláteros** (**KMT**-Recursos materiales y virtuales; Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), al inicio de la sesión. La identificación de los diversos cuadriláteros es sistematizada en una tabla de dos columnas en las que se asocia objeto-cuadrilátero. A partir de esta actividad, en la segunda etapa de la sesión, se identifican **criterios para clasificar cuadriláteros** que permiten hacer un estudio sistemático de los mismos. En este sentido, reconoce el criterio "medida de sus ángulos interiores" que permite diferenciar cuadriláteros cóncavos y convexos. Luego, al cuestionar otros criterios, Samuel redirecciona el criterio "longitud de los lados" indicado por Laura (en el rol de estudiante) para centrarse en el "paralelismo" de estos (Transcripción 25). Esta acción parece responder a mantener lo que él había previsto desarrollar, aunque al finalizar el diálogo pareciera considerar una relación implicativa entre la medida de los lados y el paralelismo de estos, es decir, Samuel parece considerar que, si hay dos lados paralelos, entonces estos tienen la misma medida (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos):

Transcripción 25

Identificación del paralelismo como criterio de clasificación (SC-Samuel: 133-164)

SAMUEL: [..] A ver, Laura, ¿cómo yo podría clasificar esos cuadriláteros y en función de qué?
Laura: eh de longitud de los lados
SAMUEL: ya (escribiendo la pizarra lo que dijo Laura) según la longitud de los lados, ¿no?). Marta acá otra característica a través de la cual podamos clasificar los cuadriláteros, ¿tendrá que ver con ángulos, con la forma de los lados? [..]
Martha: según sus ángulos
SAMUEL: según sus ángulos (reafirmando). [...] con respecto a lo que dijo Laura según la longitud de los lados, esta, está muy bien, pero hay que cambiarle y ponerle según el paralelismo de sus lados (borra la idea y la corrige) [..]
Laura: ¿por qué no hace clasificación de cuadriláteros según sus lados?
SAMUEL: claro, está bien, pero cuando yo establezco paralelismo, a ver si recordamos, ¿cuándo yo digo que … cuándo yo hablo de paralelismo? A ver Laura
Laura: cuando tiene lados paralelos

SAMUEL: ya, por ejemplo, si yo tengo este rectángulo (dibujando un rectángulo en la pizarra), ¿este lado y este lado serán paralelos? *Laura: sí* *SAMUEL: ya, si son paralelos entonces puedo hablar en función del paralelismo de sus lados, la idea de ustedes es con respecto a la longitud, ¿sí? Pero trabajaremos con el paralelismo de sus lados ¿sí?.*

La intención de emplear el paralelismo de los lados como criterio de clasificación es diferenciar como **clases de cuadriláteros consideradas** a: paralelogramos, trapecios y trapezoides (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así pues, empleando la Figura 49, Samuel propone la identificación de las clases mencionadas, según la "apariencia" de los objetos incluidos en dicha figura (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático).

Transcripción 26

Identificación de paralelogramos, trapecios y trapezoides como clases de cuadriláteros (SC-Samuel: 256-276)

SAMUEL: Entonces, ahora nos toca ver los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados. [...] *Entonces, según el paralelismo de los lados, si vemos el caso de... el cartel que tiene el niño* (Figura 49), *entonces nos damos cuenta de que, estos lados opuestos son paralelos, ¿sí?* *Porque además tengo la presencia de estos ángulos rectos, ¿sí?* *Igual este lado de acá con este lado de acá serían paralelos.* *Entonces, estas (figuras) que pueden corresponderse con el paralelismo de sus lados hablamos de tres tipos; hablamos cuando son los llamados paralelogramos, ¿sí? También si nos damos cuenta en el macetero ¿qué podemos ver?, aunque no se puede visualizar bien, pero ¿qué forma tiene?* *César: Trapecio.* *SAMUEL: Ya, usted ha dicho forma de trapecio. Los podemos clasificar también, pueden ser trapecios. Y finalmente, si observan la imagen del carrito que está..., de este carrito de compras que lo está empujando dicha persona, tiene también una forma cuadrangular, pero este cuadrilátero responde a un tipo que se le conoce como trapezoide, ya vamos a ver por qué.*

Identificados los tres grupos de cuadriláteros, Samuel pasa a definir cada cuadrilátero incluido en dichos grupos, intentando justificar por qué la pertenencia de estos, tal como se puede observar en el siguiente diálogo (Transcripción 27):

Transcripción 27

Definición de lo paralelogramo (SC-Samuel: 277-302)

SAMUEL: Entonces ya vamos a centrarnos en lo que es paralelogramos [...]. Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales [...]

¿Ustedes creen que el cartel, que la forma que tiene el cartel es un paralelogramo? [...] (Figura 49)
Entonces nos damos cuenta que el cartel, los lados opuestos miden igual, ¿sí? Y los lados verticales también. En el caso del, de la...cometa ¿también, no?
¿Y en el caso del, de la señal de tránsito, podemos decir también? Entonces, pero ¿qué nombre recibe la figura del cartel que tiene el niño, qué nombre recibe?
Laura: un rectángulo. [...]
SAMUEL: Entonces dentro de los paralelogramos encontramos a tres cuadriláteros que son también paralelogramos, que son los rectángulos, el rombo y el cuadrado.

Las **características de una definición matemática**, tales como: *jerarquía*, *existencia*, *no circularidad*, *no contradicción*, *inequivocación* e *independencia de la representación* (Shir y Zaslavsky, 2001), se observan en gran parte en las definiciones construidas Así por ejemplo, propone una definición de rectángulo que somete a discusión (Transcripción 28), incidiendo en la necesidad de que esta contenga las características mínimas (necesarias y suficientes) (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Además, deja ver una perspectiva jerárquica que propicia el cumplimiento de dicha definición para cuadrado (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus justificaciones). Así, podríamos estar frente a una definición jerárquica, correcta, económica y, por tanto, conveniente (De Villiers et al., 2009) (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Transcripción 28
Análisis de la definición de rectángulo (SC-Samuel: 303-325)

SAMUEL: A ver anoten, ¿qué es un rectángulo? Un rectángulo es un paralelogramo, es un paralelogramo que tiene un ángulo recto. Alumno David ¿está de acuerdo con la definición que le he dado? Que un rectángulo es un cuadrilátero que tiene... es un paralelogramo que tiene un ángulo recto, ¿Usted qué me dice?
DAVID: No
SAMUEL: No, ¿por qué?
DAVID: Porque ahí en la figura aparecen dos (señalando la pizarra).
SAMUEL: Pero usted cree que, para un cuadrilátero, en este caso que para un rectángulo (dibuja un rectángulo en la pizarra). Vamos a suponer, a ver, si este, si yo solamente le digo que tiene un ángulo recto, ¿no es así? (David afirma moviendo la cabeza). Entonces... por propiedad que se cumple en un rectángulo, los ángulos consecutivos siempre van a ser suplementarios, es decir, ¿suman...?
Alumnos: 180
SAMUEL: Entonces si esto vale 90, ¿cuánto suma el de acá? (dice "suma" en lugar de "mide").
Laura: 90
SAMUEL: Entonces, por eso decimos que también se forma un triángulo con un ángulo recto, ¿no es así? Y este a su vez también, por consecuencia de la propiedad, también tiene que sumar 180, igual para este lado, ¿sí?

Entonces no habría necesidad de poder definir a un rectángulo que presenta cuatro ángulos rectos, ¿sí? Cuando en realidad solo basta decir con un ángulo recto, se puede formar el resto de ángulos, ¿sí?

Comentada la brevedad de la definición de rectángulo, Samuel pasa a abordar las propiedades de cuadriláteros, empezando por ese. En su discurso (Transcripción 29) se centra en la medida de sus diagonales y en los triángulos que se forman al interceptarse estas. Así, considera que, al ser las diagonales del rectángulo de la misma medida, se cortan en su punto medio (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Por otro lado, se observa un conocimiento de la nomenclatura de la congruencia de triángulos (**KPM**–Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal).

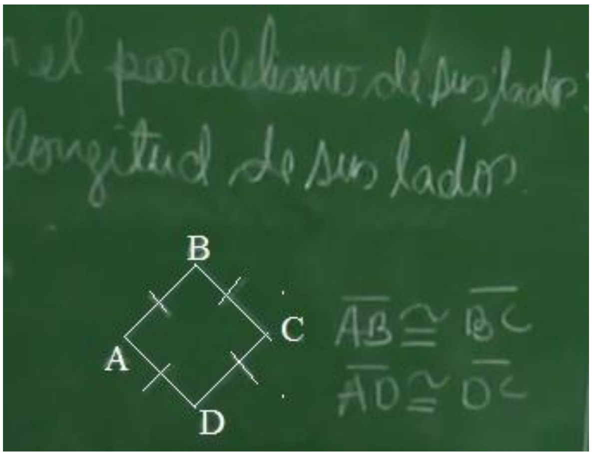
Transcripción 29

Análisis de las propiedades de rectángulos (SC-Samuel: 337-376)

SAMUEL: Con respecto al rectángulo, a ver entonces, la primera característica que tiene el rectángulo es que presenta ángulos rectos, así como en los polígonos trazamos diagonales, ¿esto será un …? (refiriéndose al rectángulo dibujado en la pizarra). Para empezar, ¿esto será un polígono?
Laura: Sí
SAMUEL: Ya, entonces puedo trazar diagonales. […] Entonces nosotros trazamos las diagonales de este cuadrilátero ABCD ¿sí? Entonces qué pasa en este cuadrilátero ¿las diagonales serán iguales o no? Laura, ¿qué dice? (Laura afirma con la cabeza)
Entonces al ser iguales las diagonales se van a cortar en su punto medio, entonces al cortarse en el punto medio, ¿qué creen que ocurrirá? A ver César, ¿qué cree que ocurrirá con los lados BE y ED?
César: Iguales
SAMUEL: Por ende, serán iguales ¿sí? ¿Y AE y EC, serán iguales?
César: Sí
SAMUEL: Claro, entonces decimos que las diagonales al interceptarse, digamos se bisecan entre sí, ¿sí? Otra propiedad que podemos encontrar en este cuadrilátero, ¿qué puede ser? Que forman cuántos…? ¿ustedes ven la formación de triángulos? Uno, dos, tres, cuatro ¿Entonces qué podemos decir?
Estudiantes: Hay dos iguales
SAMUEL: A ver en el caso… si yo trazara, si yo he trazado aquí la diagonal y acá también ¿yo podría decir que este, el triángulo ABC es congruente al triángulo ADC? Martha ¿puedo decir eso?
Martha: Sí
SAMUEL: Ya ¿y el triángulo BCD es congruente al triángulo BAD?
Martha: Sí
SAMUEL: Sí. Muy bien entonces las diagonales formarían triángulos congruentes.

Al realizar el estudio del rombo, mantiene el carácter jerárquico contemplado para el caso del rectángulo, pues lo define como: “un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos congruentes” (SC-Samuel: 345) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esta definición es explicada haciendo uso de la Figura 50, evidenciándose con ello, la **imagen conceptual** de rombo que tiene Samuel. Esta se visualiza en una representación gráfica prototipo en la que el rombo está apoyado en un vértice (**KoT**-Registros de representación). También observamos conocimiento de la nomenclatura que se emplea al abordar la congruencia de segmentos (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal) y la relevancia de las representaciones gráficas en la enseñanza-aprendizaje de la geometría (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 50
Dibujo de rombo trazado por Samuel para explicar la definición de este (SC-Samuel)



El abordaje del rombo no solo se limita a la definición y ejemplificación gráfica, sino que esta propicia el cuestionamiento de las imágenes conceptuales prototipo que se forman a partir de la posición de las representaciones gráficas (**KoT**-Registros de representación) con las que aprendimos o enseñamos (**KFLM**-Fortalezas y dificultades). Así, apoyándose nuevamente en la Figura 50 y en una de las caras de una caja de tizas (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT-Recursos materiales y virtuales), logran concluir que, pese a girar la representación gráfica del rombo, este no se convierte en otro cuadrilátero (Transcripción 30).

Transcripción 30

Análisis de la relevancia del giro y la posición de una figura en la concepción de un rombo (SC-Samuel: 394-441)

*SAMUEL: Y ustedes a ver algo que les quería decir es que, ustedes o todos nosotros siempre la imagen que hemos visto es de esta forma (señalando el rombo que dibujó en la pizarra, (*Figura 50*). O sea, tal como está ¿sí? Donde, digamos este piquito está sobre esta base (refiriéndose al eje horizontal). ¿Ustedes creen que si yo a esta figura la giro y la pongo de tal manera que AD quede sobre la base horizontal seguirá siendo rombo o no? Si yo giro esta figura, ¿seguirá siendo rombo si yo a A le doy un giro de tal manera que me quede de esta forma, a ver A, B, C, D (dibuja el rombo apoyado sobre el eje imaginario horizontal), a ver...*

Laura: No

SAMUEL: Si yo le doy este giro ¿ustedes creen que seguirá siendo rombo?

Laura: No

SAMUEL: ¿Por qué?

Laura: Porque es un cuadrado porque tiene los lados iguales y los ángulos rectos.[...]

SAMUEL: ¿Sí? ¿Están de acuerdo? ¿Qué forma tiene esta, esta cajita de tizas?

Laura: Un rectángulo

SAMUEL: Un rectángulo. Si yo lo pongo en esta posición, como ya estamos acostumbrados a ver (posición horizontal), ¿qué pasa si la pongo así (inclinada)? No pasa nada, ¿sí? Sigue siendo un rectángulo, entonces con el caso del rombo ocurre lo mismo, la posición no me dice que es o un rectángulo, sino que el cambio de posición solamente es de manera convencional, o sea puedes decir un rombo con la base estándar o un rombo con el piquito como base, digámoslo así seguirá siendo rombo.

Luego del análisis en torno a la posición de las representaciones gráficas, Samuel propone el estudio de las **propiedades de cuadriláteros**, específicamente, de las diagonales del rombo. A partir de dos representaciones gráficas, una en la que el rombo también es cuadrado (Figura 50) y otra en la que no lo es, deja ver su **comprensión de clasificaciones inclusivas** (KoT). Así, señala que en el primer caso las diagonales son iguales y en el segundo no, diferenciando una diagonal mayor y otra menor (**KoT**-propiedades y sus fundamentos; Registros de representación). Terminado el estudio del rombo, continúa con el abordaje del cuadrado para lo cual, se apoya en la definición de rectángulo y de rombo (Transcripción 31). De esta forma, mantiene el propósito inclusivo y lo extiende a la clasificación de los paralelogramos.

Transcripción 31

Definición de cuadrado a partir de las definiciones de rectángulo y rombo (SC-Samuel: 478-507)

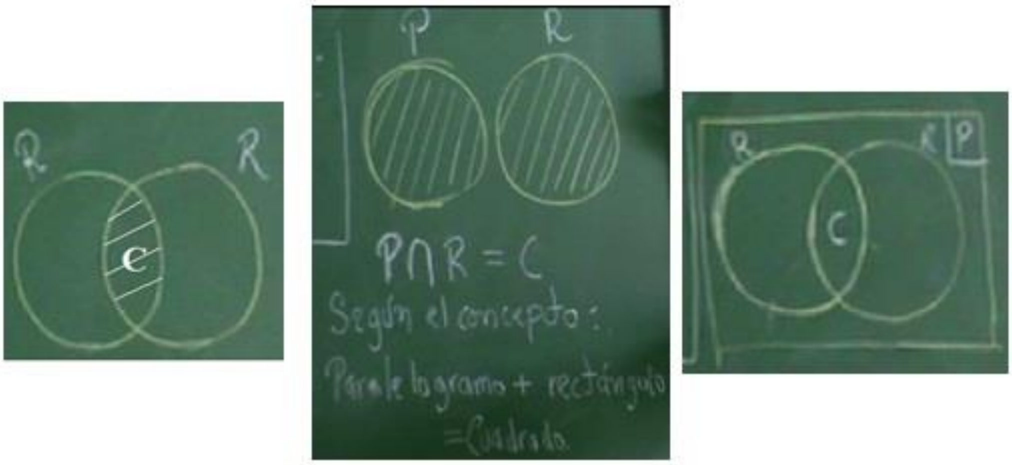
> *SAMUEL: Entonces tenemos aquí un cuadrado que se va a caracterizar por la presencia de tener ángulos rectos. (Ha dibujado una cuadrado en la pizarra).*
> *A ver, dígame César, los lados de este cuadrado, ¿son paralelos?*
> *César: Sí*
> *SAMUEL: Ya ¿presenta ángulos rectos?*
> *César: Sí*
> *SAMUEL: Ya, ahora, ¿los lados son iguales?*
> *César: También*
> *SAMUEL: Entonces, lea a definición de un rectángulo, ¿puedes este…César, César?*
> *DAVID: Un paralelogramo que tiene un ángulo recto.*
> *SAMUEL: ¿Cumple la propiedad el cuadrado, de tener un ángulo recto? Ya hemos visto que de un ángulo se puede formar cuatro, entonces ¿cumple la propiedad de un ángulo recto? Martha, no se me duerma, ¿cumple la propiedad el rectángulo de tener ángulos rectos?*
> *Martha: Sí*
> *SAMUEL: Sí, ¿de acuerdo? Ahora lea lo que dice un rombo.*
> *DAVID: Un rombo es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos congruentes.*
> *SAMUEL: Entonces este lado (remarca los vértices), el lado AB es congruente con el lado BC como lo indica en la figura.*
> *DAVID: Sí*
> *SAMUEL: ¿Y el lado CD es congruente con el lado AD? entonces ¿qué conclusión me pueden sacar de esto si cumple las mismas cualidades del rombo y de un rectángulo?, entonces ¿a qué conclusión llego?*
> *DAVID: es un paralelogramo si tiene un ángulo recto… y dos lados consecutivos congruentes*
> *SAMUEL: perfecto, ¿sí? A ver copien esa definición de qué es un cuadrado. […] A ver un cuadrado es un paralelogramo que tiene un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes.*

Conseguida la definición de cuadrado a partir del rectángulo y del rombo, propone la representación de la relación de estos tres cuadriláteros, como parte de los paralelogramos, haciendo uso de diagramas de Venn, tal como lo hizo al desarrollar el cuestionario (Figura 45). Al respecto, Samuel considera que, dado que el tema Conjuntos se estudia desde primaria (**KMLS**-Expectativas de aprendizaje), la esquematización de las relaciones entre los cuadriláteros mencionados resulta viable. Sin embargo, al estudiante César dicha esquematización no le resulta sencilla y le toma tiempo y ayuda lograrla (Transcripción 32).

Transcripción 32

Esquemas de clasificación elaborados por el estudiante César (SC-Samuel: 525-530)

SAMUEL: César venga por favor a la pizarra (César se acerca)
Como usted ya está en cuarto de secundaria, desde sexto han visto el tema de conjuntos, ¿no es así? Entonces, mediante un diagrama de Venn establezca una relación que puede existir del cuadrado, del rombo y del rectángulo, escriba con esta (le da la tiza). Considerar que son parte del paralelogramo.
(César comienza a hacer en la pizarra) (SC-SAMUEL. 471-479)



Esquema 1 Esquema 2 Esquema 3

Establecida la relación entre rectángulo, rombo y cuadrado, se propone el estudio de los trapecios, intentando mantener la perspectiva jerárquica (adoptada con los paralelogramos), lo cual da cuenta de su **comprensión de clasificaciones inclusivas** y de la **coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases** (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así pues, habiendo definido trapecio como: "cuadrilátero que tiene dos lados paralelos", cuestiona si el rombo también cumple esa condición, aun cuando manifiesta lo complicado que puede ser tal relación. De hecho, definir trapecio de esa manera interfiere en la comprensión de Samuel sobre la relación entre ambos cuadriláteros, por ello, al cambiar a una definición particional ("un trapecio tiene dos lados paralelos y dos no paralelos") no logra responder a las cuestiones de la docente formadora hasta que ella promueve el análisis de las características involucradas (Transcripción 33).

Transcripción 33

Definición jerárquica y particional de trapecio (SC-Samuel: 622-679)

SAMUEL: [...] A ver, qué es un trapecio, un trapecio es un paralelogramo... perdón es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Entonces si yo digo que tiene dos lados paralelos, si yo les dibujo el siguiente... a ver vamos a poner, este es un rombo, ¿ya? Entonces yo les he representado lados paralelos (en el trapecio

dibujado), en este caso de acá, en el rombo, ¿presentará también dos lados paralelos?
Estudiante: Sí.
SAMUEL: Sí, el rombo también presenta dos lados paralelos, ¿no es así? Este con este (señalando los lados), pero a la vez están diciendo también que el trapecio presenta dos lados paralelos; entonces ¿yo puedo decir, aunque parezca medio complicado, pero yo puedo decir que un rombo es un trapecio, según la definición que les he dado?
Laura: Sí. [...]
Docente formadora: (dirigiéndose a Samuel)... Mario dijo ahora que un trapecio tenía dos lados paralelos y dos no paralelos, bajo la definición de Mario, ¿ese rombo es un trapecio?
SAMUEL: ¿Con respecto a si tiene un par de lados no paralelos?
Docente formadora: Claro
SAMUEL: Pero, la idea fundamental es que digamos, esto puede ser un trapecio (el rombo) pero no un trapecio sería...
Docente formadora: no, no me está entendiendo, imagínese que a Mario siempre le enseñaron el trapecio de esa forma que usted la ha dibujado, entonces él dice, para que sea trapecio siempre debe tener esa forma; por lo tanto, solo puede tener un par de lados paralelos y un par no paralelos. Entonces bajo esas consignas, ¿ese rombo es un trapecio?
SAMUEL: lo que pasa es que ehh... puede decirse que un trapecio tiene al menos un par de lados paralelos
Docente formadora: eso es lo que usted está definiendo, yo le estoy diciendo bajo la definición de Mario, un par de lados paralelos y un par no paralelos
SAMUEL: ujum
Docente formadora: ¿ese rombo es un trapecio?
SAMUEL: Sí.
Docente formadora: anote allí lo que le digo, un par de lados paralelos (Samuel anota en la pizarra)
SAMUEL: ya
Docente formadora: y un par no paralelos (Samuel anota)
SAMUEL: ya
Docente formadora: ya, entonces cuando él (refiriéndose al alumno Mario) quiere discriminar si una figura es o no un trapecio, él se fija que cumpla ambas condiciones, ¿de acuerdo? ¿El rombo cumple ambas condiciones?
SAMUEL: no, porque solo presenta un par paralelos
Docente formadora: ya, entonces bajo la definición de él (de Mario), ¿ese rombo es un trapecio?
SAMUEL: no

Terminada la discusión propuesta por la formadora, Samuel continúa con la clasificación de los trapecios (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), asociándola con los tipos de triángulos (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) (Transcripción 34). Además, al abordar el trapecio rectángulo, lo hace como un caso particular del trapecio escaleno, manteniendo con ello una postura jerárquica entre ambos conceptos, evidenciando así su **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Transcripción 34

Tipos de trapecios a partir de la clasificación de triángulos (SC–Samuel: 691–744)

SAMUEL: Ya entonces ahora, dentro de los trapecios encontramos unos tipos de trapecios. […] Tengo el trapecio, vamos a ponerlo de esta forma ABCD, si ya establezco que este lado y este lado son iguales, ¿Qué puedo decir?, ¿qué nombre puede recibir este trapecio? Si ustedes lo asemejan mucho a un triángulo que tiene dos lados iguales...

Laura: isósceles

SAMUEL: isósceles, cuando un triángulo tiene lados iguales es un isósceles, ¿no es así? Entonces cuando un trapecio tiene lados iguales, ¿también sería isósceles? (Un estudiante asiente con la cabeza) […]

Ahora hay un caso muy curioso que dentro de este trapecio escaleno. […]. Si yo dibujo la siguiente imagen, a ver si este ángulo (inferior izquierdo) es recto, ¿el de acá (superior izquierdo) será recto? […]

SAMUEL: Entonces este trapecio recibe un nombre que es el trapecio rectangular, porque presenta en este caso ángulos rectos, dos ángulos rectos y además los lados son distintos, por lo tanto, dentro del trapecio escaleno un tipo es el trapecio rectangular.

Finalmente, luego de abordar el último grupo de cuadriláteros: los trapezoides, Samuel propone el desarrollo, por parejas, de una ficha (Figura 51) que, en una primera parte cuestiona algunas relaciones entre cuadriláteros, así como ciertas propiedades de las diagonales de la clase paralelogramos.

Figura 51

Ficha de trabajo (parte 1) adjunta en el plan de clase (PC-Samuel)

FICHA N°1

GRUPO N°: ________

1. **Determina si las siguientes proposiciones, sobre cuadriláteros, son verdaderas o falsas:**
    - *Todos los cuadriláteros son trapezoides ( ).*
    - *Algunos cuadrados son trapecios ( ).*
    - *Algunos rombos son cuadrados ( ).*
    - *Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados ( ).*
    - *Un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo ( ).*
    - *Un trapecio tiene al menos un par de lados paralelos ( ).*

2. **Marque mediante un (/) según corresponda, con respecto a las propiedades de las diagonales de un cuadrilátero:**

PROPIEDADES DE LAS DIAGONALES	PARALELOGRAMO	RECTANGULO	ROMBO CUADRADO
• Las diagonales se bisecan entre sí. • Las diagonales son congruentes.			
• Las diagonales son perpendiculares.			
• Las diagonales bisecan los ángulos del vértice.			
• Las diagonales forman dos pares de triángulos congruentes.			

En este contexto, se suscita una interrogante respecto al romboide (Transcripción 35), concepto que no ha sido abordado hasta el momento, ni se ha mencionado en el plan de clase. El análisis de las **propiedades de cuadriláteros** que hace Samuel le lleva a una relación equiparable a la que estableció entre paralelogramo y romboide al desarrollar el cuestionario. Si se recuerda, les atribuyó las mismas propiedades (Transcripción 23) pero, al momento de elaborar el esquema de clasificación (Figura 45), deja de lado al romboide para solo considerar el paralelogramo.

Transcripción 35

Identificación del romboide como parte de la clase paralelogramos (SC-Samuel: 829-839)

Martha: Profesor (Martha levanta la mano y Samuel se acerca a su grupo. La pregunta formulada no es audible pero, genera la siguiente respuesta).
SAMUEL: Ese es el paralelogramo propiamente dicho. (Laura levanta la mano y Samuel se acerca a su grupo). A ver ahí, a ver si escuchan un ratito, allí se me ha pasado

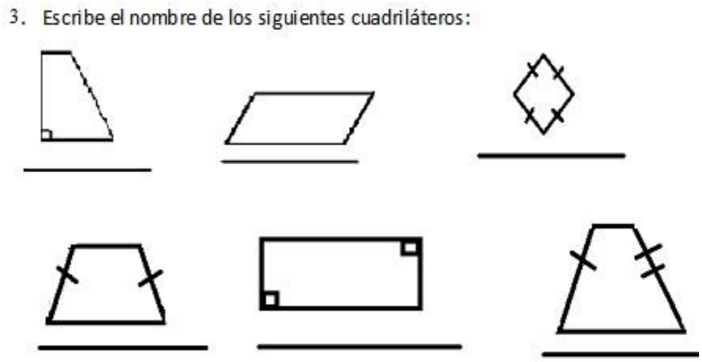
algo en la parte en cuanto al paralelogramo. En un momento les di la definición pero corresponde su imagen, sería este tipo ¿no? (dibuja un romboide) en donde los ángulos opuestos serían iguales, este con este son iguales (dibuja un paralelogramo en la pizarra) y este con este es igual, ¿sí? ¿Y al trazar yo las diagonales serían iguales o distintas?
Estudiantes: Distintas.
SAMUEL: Serían distintas, también se bisecan entre sí ¿sí? Entonces ese es un paralelogramo propiamente dicho o también llamado romboide.

Concluida la aclaración, Samuel propone la discusión de las respuestas a las proposiciones de la Figura 51. De estas, las cuatro primeras pertenecen al cuestionario y según la consigna, debían abordarse en el plan de clase y su correspondiente desarrollo. La discusión generada pone en evidencia la dificultad de **comprensión de clasificaciones inclusivas**, y confirma las dudas de Samuel cuando la formadora le plantea interrogantes.

Respecto de la última parte de la ficha (Figura 52), si bien no se termina de desarrollar en la sesión, resulta necesario comentar que las **características de las representaciones gráficas** que se proponen coinciden con: figuras *correctas* porque se ajustan a distintos cuadriláteros, con *poca riqueza* porque coinciden con prototipos. De hecho, tienen una posición estándar y, por tanto, resultan ser las típicas representaciones con las que aprendemos en la escuela y que van originando dificultades y limitaciones en la adquisición de un conocimiento más amplio o profundo. Esto podría justificar que, al proponer la clasificación de los cuadriláteros, no se haya incluido ninguno que sea cóncavo. Finalmente, no puede decirse que las representaciones posean *generalidad* puesto que no se ha representado al cuadrilátero más general, por el contrario, se muestran a cuadriláteros específicos de la clase trapecios y paralelogramos.

Figura 52

Cuadriláteros propuestos en la ficha de trabajo (Parte II), adjunta en el plan de clase (PC-Samuel)



Por otro lado, las representaciones gráficas resultan ser lo más relevante de los recursos para la enseñanza de los cuadriláteros que emplea Samuel (KMT-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así, al cuestionársele por la medida del ángulo cóncavo de un cuadrilátero (no convexo), lo primero que hace es trazar un plano cartesiano sobre el que ubica el ángulo referido para elaborar un discurso gráfico (KoT-Registros de representación), casi desprovisto del uso explícito de propiedades (Transcripción 36).

Transcripción 36

Características del ángulo no convexo o cóncavo (SC-Samuel: 200-218)

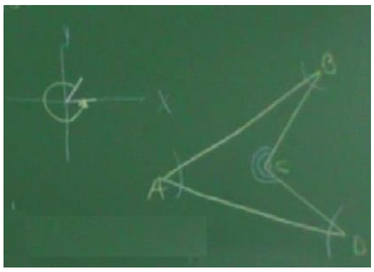
SAMUEL: Por lo tanto, solo por la presencia de este ángulo que no es menor que 180°, entonces hablamos que es un cuadrilátero no convexo y hablamos de cuadriláteros cóncavos, ¿sí?

Docente: ¿Cómo sabe que es no menor que 180 si no lo ha medido?

SAMUEL: Lo que pasa, si nos fijamos en el ángulo externo, ¿qué podemos ver?

DAVID: Es menor

SAMUEL: Por lo tanto, si nosotros sabemos, a ver, si yo trabajo mi plano en "XY" entonces, yo a este ángulo lo puedo ubicar, digámoslo así ¿no es así? (Dibuja el ángulo C en el plano cartesiano).



Este trocito lo puedo ubicar acá, ¿sí? Como es menor que 180, pero ¿qué pasa con el resto del ángulo?, nos damos cuenta que puede ser esto y ustedes saben, ¿cuánto mide el ángulo de una vuelta?

Estudiante: 360

SAMUEL: 360°, entonces nos damos cuenta que este ángulo de aquí es menor a comparación del ángulo que esta subrayado de amarillo, ¿no es así? Es por ese que establecemos que este ángulo va a ser mayor que 180° y este ángulo va a ser menor, ¿sí?

Este último diálogo (Transcripción 36) confirma la relevancia que le atribuye Samuel a las representaciones gráficas en la enseñanza de la geometría (KMT–Recursos materiales y virtuales; Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), lo cual puede ser consecuencia de la doble naturaleza de los conceptos geométricos (Fischbeim, 1993) (**KoT**–Fenomenología y aplicaciones). Si bien dicha dualidad es propia de la Geometría, ha de cuidarse que las representaciones gráficas tengan características variadas para no promover el establecimiento de imágenes prototipo y además, estén acompañadas de un discurso basado en las propiedades de cada concepto. Sin embargo, en el conocimiento evidenciado por Samuel, sobre todo en el plan de clase y su ejecución, destacan las representaciones gráficas prototipos (**KoT**–Registros de representación) y un escaso desarrollo de propiedades del concepto (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) al momento de argumentar una respuesta, en esto ha cobrado primacía el aspecto gráfico (**KPM**–Formas de validación y demostración).

4.2.3. Síntesis del conocimiento especializado sobre la conceptualización y jerarquización de los cuadriláteros

El conocimiento especializado en torno a los cuadriláteros, mostrado por Samuel al resolver las situaciones 2, 3 y 4 del cuestionario, al planificar una sesión de clase y ejecutar esta, se resume de manera gráfica en las Figura 53 y Figura 54. En estas, al igual que la síntesis del conocimiento especializado sobre polígonos (Figura 41) identificamos las tareas generales (recuadros amarillos) propuestas en los instrumentos antes señalados.

Dada la densidad de la información, por involucrar a los tres instrumentos de la investigación, hemos separado la síntesis diferenciando la conceptualización de los cuadriláteros (Figura 53) y en la jerarquización de estos (Figura 54). La conceptualización de los cuadriláteros se vincula con tres tareas: Análisis del conocimiento de los estudiantes y de cuestiones de enseñanza, identificación de elementos determinantes y propiedades necesarias para definir y análisis de propiedades y de relaciones. La ejecución de estas tareas involucra cuatro subdominios del MTSK. Del dominio matemático se evidencia el conocimiento de los temas (categorías: definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación y fenomenología y aplicaciones), Samuel es el único informante que evidencia cierto conocimiento relacionado con la categoría Fenomenología y aplicación al proponer la identificación de los cuadriláteros en el contexto real de los estudiantes. Del conocimiento de la práctica matemática emerge la categoría condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio didáctico han emergido los dos subdominios. Del Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas se han evidenciado dos categorías: formas de interacción con un contenido matemática y fortalezas y dificultades. Del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas han emergido las categorías: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, y recursos materiales y virtuales.

La jerarquización de los cuadriláteros ha involucrado sobre todo el dominio matemático. En este han emergido los subdominios Conocimiento de los temas (en las categorías: Definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación y procedimiento) y Conocimiento de la práctica matemática (en las categorías: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal y formas de validación y demostración). Del dominio didáctico solo ha emergido el subdominio Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas se tiene evidencia de la categoría Expectativas de aprendizaje.

Figura 53

Síntesis del conocimiento especializado de Samuel sobre la conceptualización de los cuadriláteros

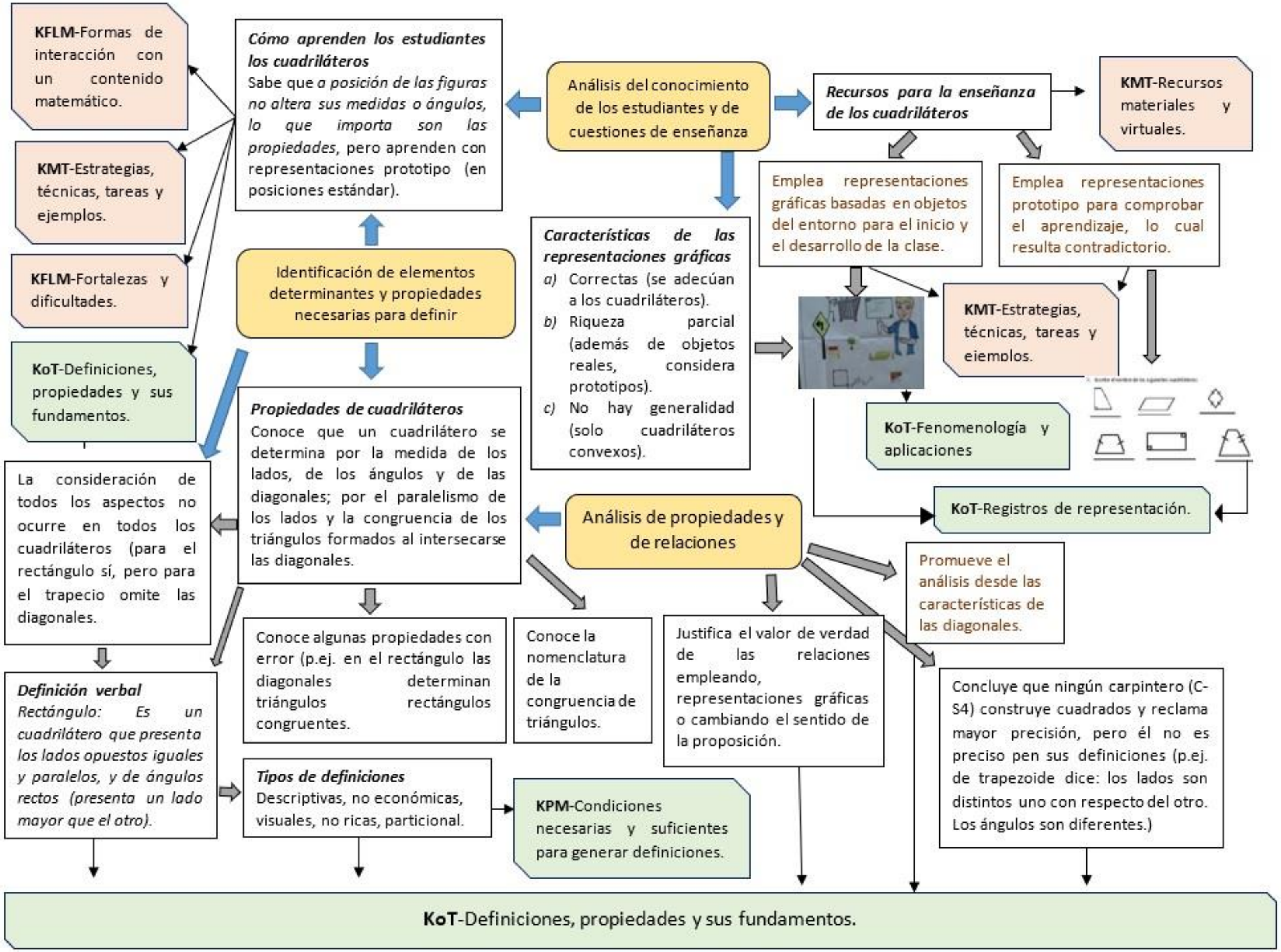
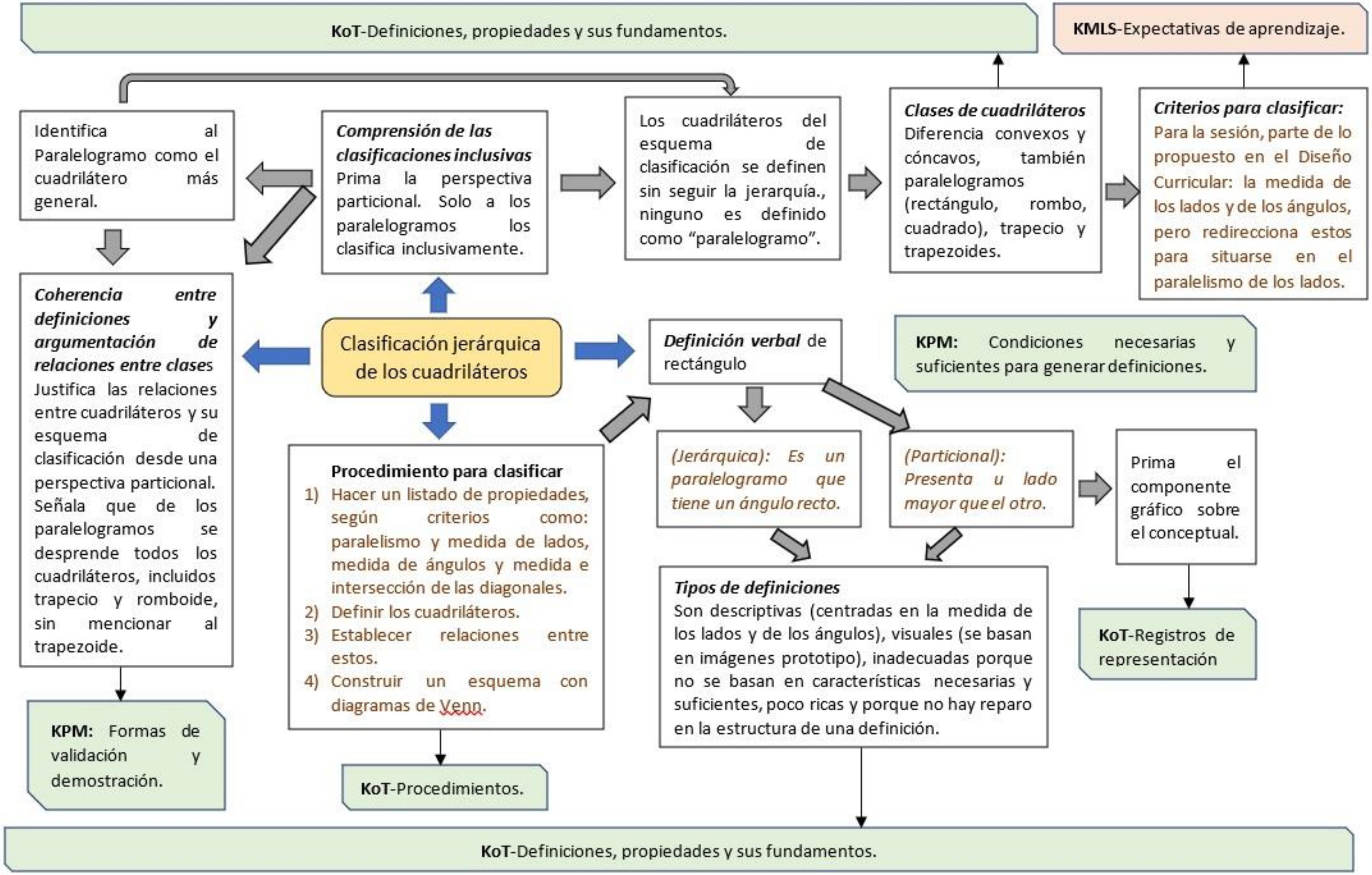


Figura 54

Síntesis del conocimiento especializado de Samuel sobre la conceptualización de los cuadriláteros



4.3. El Caso Marta

Marta es una estudiante con rendimiento académico bajo. Pese a esto, muestra disposición para reflexionar sobre su propio conocimiento y situarse en el rol docente desde que completa el cuestionario. Esta actitud posiblemente sea consecuencia de que dictaba clases particulares a estudiantes de primaria y secundaria. La asunción del rol docente propicia que emerja conocimiento didáctico del contenido y no solo conocimiento matemático, lo cual interesa en nuestra investigación.

4.3.1. Respuestas de Marta en el Cuestionario

4.3.1.1. Concepto de Polígono

El análisis de las definiciones que hace Marta permite observar los errores, conceptos confundidos e ideas válidas que identifica en cada caso, pero, además, que repara en **cómo aprenden los estudiantes** (**KFLM**–Fortalezas y dificultades). Así pues, evidencia interpretar lo que han querido decir los hipotéticos estudiantes de la situación 1 y les formularla preguntas como si estuviera en un diálogo con ellos (Transcripción 37). Ambas conductas hacen pensar que Marta completa el cuestionario desde su rol docente.

Transcripción 37

Análisis de Marta sobre la definición de Gaby (C-Marta, S1: ítem 1)

Definiciones de estudiantes **Gaby**: Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n-2).		
Errores de la definición	**Conceptos que están confundiendo**	**Ideas válidas/justificación de tal consideración**
- *Sus ángulos miden más de 180°.* *(Quiere decir que sus ángulos no pueden tomar menores valores de 180°)* - *Es una figura geomet. ¿cerrada o abierta?*	*Su fórmula 180°(n-2)* *(Está confundiendo la fórmula con la definición de polígonos)*	*Es una figura geométrica que posee más de dos lados (…)* *(Hasta aquí está bien la afirmación pero faltaría complementarla con más información para que tenga la definición de polígono).*

Respecto de las **características que le atribuye a polígono**, considera que es: a) una figura geométrica, b) cerrada, c) que posee más de dos lados (Transcripción 37), d) cuyos lados y ángulos pueden tener medidas variadas (no siempre todos iguales o todos diferentes)

(Transcripción 38). Además, del análisis de la definición de Pablo (Transcripción 38) hay indicios de que diferencia figura geométrica de cuerpo geométrico, por ello, coloca este último en los conceptos que está confundiendo (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Transcripción 38

Análisis de Marta sobre la definición de Pablo (C-Marta, S1: ítem 1)

Definiciones de estudiantes **Pablo**: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.		
Errores de la definición	**Conceptos que están confundiendo**	**Ideas válidas/justificación de tal consideración**
Tiene lados y ángulos diferentes (no siempre va a ser así).	*Pueden ser:* - *Cóncavos, convexos.* - *Regulares e irregulares. (Aquí Pablo está confundiendo la clasificación por sus ángulos y por sus lados con la definición).* - *Cuerpo geométrico.*	*Pueden ser cóncavos y convexos, así como regulares e irregulares. (Tiene la idea de cómo se pueden clasificar los polígonos)*

Estas definiciones, junto con las relativas al caso de Ana (*Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales*) y Luis (*Un polígono es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse*) nos permiten confirmar y completar la idea de polígono que tiene Marta: a) una figura geométrica (no cuerpo geométrico), b) cerrada, c) formada por la unión de puntos no colineales, d) dando origen a lados que no se cruzan y ángulos (elementos), e) cuyas medidas pueden ser variadas, incluso los ángulos pueden ser mayores o menores de 180°(**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Además del conocimiento matemático, el análisis de las definiciones dadas ha puesto en evidencia el reparo que hace Marta en las **características de una definición matemática** (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Así, ha señalado que hace falta incluir información en la definición de Gaby y que esta ha confundido la fórmula $180°(n-2)$ con la definición (Transcripción 37), de la misma manera que Pablo la confunde con la clasificación de polígonos (Transcripción 38). El llamado de atención, a la precisión o completitud de lo que se enuncia, hecho para la definición de Gaby también se evidencia en el caso de Luis. Así pues, el que incluya “es una figura geométrica cerrada” como error no es por este concepto en sí mismo, sino porque hace falta información y precisiones en relación con él (Transcripción 39).

Transcripción 39

Errores e ideas válidas, identificadas por Marta, de la definición de Luis (C-Marta, S1: ítem 1)

Definiciones de estudiantes **Luis**: Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.	
Errores de la definición	**Ideas válidas/ justificación de tal consideración**
- *Es una figura geométrica cerrada. (Aquí faltaría complementar más la idea)*	*Es una figura geométrica cerrada. (Hasta aquí está bien porque termina la idea de que se trata de una fig. geom. Cerrada), compuesta por la unión de tres o más puntos (Está bien pero falta completar la idea, pueden ser puntos consecutivos o colineales, no me especifica pero al final dice que no deben cruzarse).*

El conocimiento evidenciado por Marta, al analizar las cuatro definiciones dadas, se observa parcialmente en la **definición verbal** que construye de polígono (Figura 55). Así, solo considera las características: a) figura geométrica (no cuerpo geométrico), b) cerrada, c) formada por la unión de tres a más puntos no colineales y d) que posee una región poligonal. Deja de lado la referencia a la medida de sus ángulos y lados, así como que estos últimos no deben cruzarse. Sin embargo, es probable que esta última consideración esté implícita cuando señala que los polígonos poseen “una” región poligonal (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 55

Definición de polígono construida por Marta (C-Marta, S1: ítem 5)

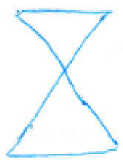
¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a sus estudiantes de 2° de secundaria, después de haber analizado las respuestas que ellos le dieron inicialmente y de haber trabajado las actividades anteriores? Enúnciela.

Un polígono es una figura geométrica plana cerrada que posee una región poligonal y está compuesta por la unión de tres a más puntos no colineales.

Otro aspecto que Marta deja de lado es su reparo en lo que debe incluirse o no en una definición (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). De hecho, incluye como característica que *posee una región poligonal*, lo cual no es necesario. Sin embargo, cuando Marta refuta al estudiante Luis el error identificado en su definición (Transcripción 40), lo cuestiona en torno a la cantidad de regiones interiores que tiene un polígono. Este aspecto, lejos de ser una característica accesoria de la definición construida, parece tener un carácter crítico que permite diferenciar un polígono de un no polígono y, por ende, excluir los de lados cruzados de ser polígonos.

Transcripción 40

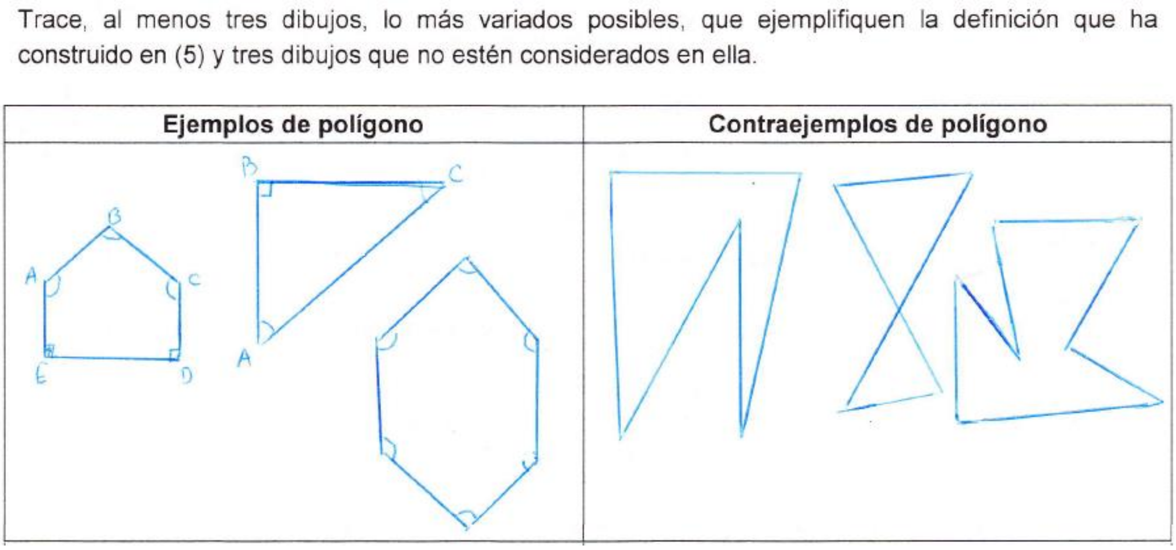
Abordaje del error identificado en la definición de Luis (C-Marta, S1: ítem 3)

<table>
<tr><td colspan="3">S1-Ítem 3: Si tuviese que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os)? Trácelo(s) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Definiciones de estudiantes
Luis: Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dibujo(s) para refutar el error de la definición</td><td>Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)</td></tr>
<tr><td></td><td>Esta es una figura geométrica cerrada que está en el plano pero; ¿Cuántas regiones tiene? Será polígono.</td><td>- Un polígono es una figura geométrica cerrada que posee una región, la figura que se muestra a continuación será un polígono sí o no.</td></tr>
<tr><td colspan="3">S1-ítem 4: Es posible que los errores que evidencian los alumnos se deban a que los subconceptos involucrados en el concepto de polígono no han sido construidos correctamente. Tomando en cuenta esto. ¿Qué subconceptos de polígono trabajaría con cada alumno de cara a construir una definición correcta?</td></tr>
<tr><td colspan="3">- Para trabajar bien la definición se necesitaría tener un concepto más, región interior de una figura geométrica.</td></tr>
</table>

Relacionado con las **características de una definición matemática** es posible que Marta caiga en redundancia al señalar *figura geométrica plana*, puesto que una de las diferencias que se establece entre figura geométrica y cuerpo geométrico es que aquella es plana y el otro no. Lo anterior, nos lleva a considerar que la definición construida por Marta es *descriptiva* y *antieconómica* (De Villiers, 1998) por considerar un listado de características sin más, *estructural* (Shir y Zaslavsky, 2001) porque hace referencia a propiedades (figura geométrica cerrada) y elementos constituyentes (puntos no colineales) e *inapropiada* matemáticamente (Zazkis y Leikin, 2008) porque, aunque lo que incluye es correcto en sí, contempla condiciones no necesarias y no suficientes. Sin embargo, dado el sentido crítico que Marta le atribuye a *posee una región poligonal*, se evidencia preferencia de las consideraciones didácticas sobre las matemáticas (Zazkis y Leikin, 2008). Ese carácter puede ser la base para idear actividades de enseñanza (**KMT**–estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), tales como la identificación de polígonos o de los conceptos involucrados con él, los cuales deben trabajarse previamente (subconceptos), así como lo ha propuesto Marta en el ítem 4 (Transcripción 41).Si bien la definición construida deja abierta la posibilidad de que los polígonos puedan ser convexos y cóncavos (según la medida de sus ángulos) y complejos o simples (al cruzarse o no sus lados) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), los ejemplos y contraejemplos que traza (Figura 56) hacen pensar en una **imagen conceptual de polígono** restringida a los simples (sus lados no se interceptan entre sí) y convexos (**KoT**–Registros de representación; Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esto pone en evidencia la primacía de la imagen conceptual sobre la definición conceptual. De hecho, los ejemplos y contraejemplos trazados en la Figura 56 aportan la información que permite tener una idea clara de lo que Marta considera como polígono. Con esto se vuelve a poner en cuestionamiento la necesidad y suficiencia de las características de polígono incluidas en la definición construida (KPM), así como la profundidad y coherencia del conocimiento evidenciado por Marta (KoT) puesto que la definición construida de polígono muestra una idea restrictiva y, aunque no se contradice con la imagen conceptual trasmitida en los ejemplos, estos aportan mayor información.

Figura 56

Ejemplos y contraejemplos de polígono propuestos por Laura (C-Marta, S1-ítem 6)



Respecto de las **características de las representaciones gráficas** en sí mismas (Figura 56), se observa que Marta ha contemplado figuras de distinto número de lados (3, 4, 5, 6 y 7), en posición no estándar y poco usuales de encontrar en un libro de texto o en el desarrollo de una clase, sobre todo en los *no polígonos* (**KoT**-Registros de representación). Esto permite afirmar que las representaciones poseen riqueza porque no son prototipos (Herskowitz, 1990). Sin embargo, cuando Marta busca refutar con gráficos los errores identificados en las definiciones dadas (Transcripción 41), se observa que estos no son lo suficientemente variados y ricos para mostrar una concepción amplia de polígono, tal vez debido a que Marta lo concibe como una figura geométrica cerrada y convexa, cuyos lados rectos no se interceptan entre sí (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En este sentido, todos los dibujos trazados coinciden en ser convexos, de base horizontal y de 3, 4 y 5 lados, pudiéndose generar con ellos el refuerzo de polígonos prototipos que, en un contexto de enseñanza, dificultan adquirir un concepto amplio de este objeto (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático). Lo anterior, nos lleva a afirmar que las representaciones son *parcialmente correctas* puesto que ejemplifican un concepto restringido de polígono y, en consecuencia, *no se observa la generalidad* en ellas.

Transcripción 41

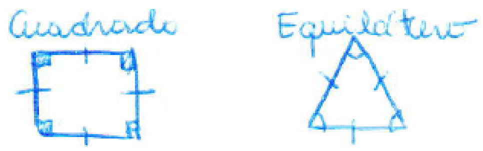
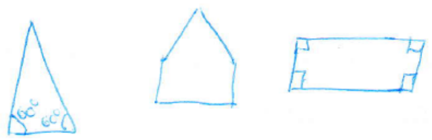
Dibujos propuestos por Marta para refutar errores de las definiciones dadas (C-Marta, S1: ítem 3)

S1-Ítem 3: Si tuviese que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujo(s) ¿Cómo sería(n) este(os)? Trácelo(s) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s).

Definiciones de estudiantes

Pablo: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

Gaby: Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n-2).

	Dibujo(s) para refutar el error de la definición	**Justificación por la que emplea tal(es) dibujo(s)**
Pablo	 *¿Qué es un cuerpo geométrico? ¿Será lo mismo decir cuerpo geométrico y figura geométrica?*	- *Quiere decir que como el cuadrado no tiene ángulos y lados diferentes no es un polígono, según la definición de Pablo.* - *Lo mismo sucede con el triángulo. Empleo ambas figuras porque tienen los mismos ángulos y los mismos lados.*
Gaby	 *¿Quiere decir que sus ángulos miden más de 180°? ¿No pueden medirlos?*	- *Las figuras geométricas son cerradas y además sus lados son no consecutivos.* - *Los ángulos pueden medir 30°, 60°, etc. No precisamente más de 180°.*

4.3.1.2. Concepto de Cuadrilátero y Jerarquización

En el contexto del diálogo de la situación II, en el que se aborda la clasificación de los cuadriláteros con incidencia en los convexos, Marta identifica cómo aprenden los estudiantes los cuadriláteros (KFLM) al destacar la relevancia que, los hipotéticos estudiantes, le atribuyen a la convexidad, la igualdad de los lados y al giro (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático) (Transcripción 42). Sin embargo, sostiene que, además de convexos, los cuadriláteros pueden ser cóncavos, que los lados por sí solos no son determinantes sino sus propiedades y que el giro no determina un cuadrilátero ni las relaciones de inclusión que puedan establecerse entre dos o más (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Transcripción 42

Aspectos relevantes, para los estudiantes, en la determinación de un cuadrilátero (C–Marta, S2: ítem 2)

S2–ítem 2: ¿Qué aspectos o elementos cree que consideran los alumnos (del diálogo), como factores determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿Dichos aspectos o elementos son erróneos, por qué?	
Aspectos o elementos determinantes en la concepción de un cuadrilátero	**Justificación del acierto o del error**
❖ *Uno de los factores es que si los cuadriláteros son convexos.*	*No es necesario saber si es convexo o cóncavo para saber si es un cuadrilátero, según los alumnos ya que nombran todos los que conocen.*
❖ *Otro elemento que ellos consideran es la igualdad que deben haber entre sus lados.*	*Puede que sea considerado este elemento pero si se refuerza con las propiedades que posee cada figura, se podría relacionar y afirmar o negar dichas relaciones.*
❖ *El giro de una figura geométrica es un factor determinante para saber si un cuadrado al girarlo es un rombo ¿Podría ser esto verdad para los alumnos?*	*El giro no tendría nada que ver para definir un cuadrilátero tampoco para incluir uno de ellos en otro que tenga similares propiedades.*

Posteriormente, Marta indica que lo que determina un cuadrilátero son sus lados, ángulos interiores y diagonales, además de las propiedades que posee (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) (Figura 57). Esta respuesta no deja claro si la expresión “aspectos determinantes” la entiende como “elementos del cuadrilátero” o como “focos de atención” de los mismos. Probablemente, Marta considere que se sobreentiende la segunda opción porque, tanto en los lados como en los ángulos, la medida forma parte de los criterios para clasificar cuadriláteros. Sin embargo, para las diagonales pueden señalarse como focos de atención: la medida (congruentes o no) o la intersección entre sí (si es perpendicularmente, si se bisecan mutuamente o si son bisectrices de los ángulos de los que parten). Sobre las propiedades, pese a la importancia que les atribuye, no indica cuáles han de tomarse en cuenta.

Figura 57

Aspectos determinantes en la concepción de un cuadrilátero (C-Marta, S3-ítem 4)

Si usted fuese aquel profesor:

4. ¿Qué aspectos o elementos les señalaría a los alumnos como determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿En qué deberían fijarse sus alumnos para diferenciar cada cuadrilátero?

Son polígonos que tienen cuatro lados, es decir uno de los elementos determinante son los lados.
Los alumnos para diferenciar cada cuadrilátero, deberían fijarse en los lados, ángulos internos así como sus diagonales y propiedades que posee cada cuadrilátero.

En coherencia con lo anterior, Marta no solo toma como **criterios para clasificar cuadriláteros** a: los lados, ángulos internos y diagonales, sino que también son su referencia al momento de enunciar propiedades que determinan a cada cuadrilátero (*KoT*-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). De la Figura 58 pueda verse un listado de **propiedades de cuadriláteros** (KoT), sin reparar en las **características de una definición matemática** (KPM), es decir, en necesidad y suficiencia de las propiedades que se enuncian. Además, se evidencian ciertos errores en las **propiedades de los cuadriláteros** que se consideran (p.ej. en el romboide, sus diagonales se cortan perpendicularmente), así como una escasa **comprensión de clasificaciones inclusivas** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) que probablemente justifica la asunción de una postura particional (p.ej. en el rombo, sus diagonales son diferentes) y expresiones confusas (p.ej. en el romboide, dos pares de lados consecutivos son iguales y los otros dos pares de lados consecutivos son diferentes).

Figura 58

Propiedades que determinan cada cuadrilátero (C-Marta, S3: ítem 5)

5. Si ahora tuviera que señalar las propiedades que son **necesarias para determinar y luego definir** cada cuadrilátero ¿Cuáles enunciaría?

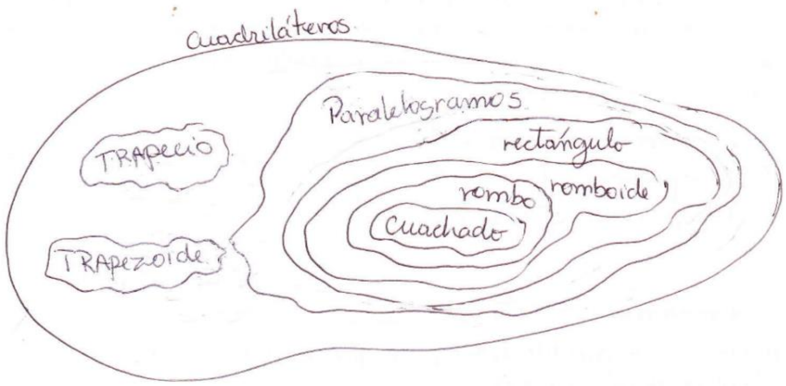
Cuadrilátero	Propiedades que lo definen
Paralelogramo	*Sus dos pares de lados paralelos son iguales. *Sus ángulos no son rectos.
Romboide	* Dos pares de lados consecutivos son iguales y los otros dos pares de lados consecutivos son diferentes * Sus diagonales se cortan perpendicularmente * Sus diagonales no son iguales.
Rombo	* Sus lados son iguales * Sus diagonales son diferentes y se cortan perpendicularmente

La postura particional también se observa en el caso del paralelogramo al señalar *sus ángulos no son rectos* (Figura 58). Esto lleva a pensar que, es posible que Marta se esté refiriendo al paralelogramo como un cuadrilátero más y no como una clase porque con lo que indica de él, excluye a los rectángulos y cuadrados de serlo. Además, las características atribuidas al romboide no se corresponden con este cuadrilátero, de hecho, describen al trapezoide simétrico. Por lo tanto, entre las **clases de cuadriláteros que considera,** Marta no vincula al romboide con el paralelogramo (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), lo cual se contradice con el esquema de clasificación que traza (Figura 59). En este se puede observar la **comprensión de clasificaciones inclusivas** que tiene puesto que diferencia tres grupos o clases de cuadriláteros (trapezoides, trapecios y paralelogramos) y también una intención de jerarquizar los cuadriláteros de la clase paralelogramos, tal como se pedía en la consigna (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Sin embargo, no se nota **coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases**, por el contrario, se observa cierta confusión al jerarquizar rectángulo y romboide pues, según el esquema, este último es un cuadrilátero más específico que el rectángulo.

Figura 59

Clasificación de cuadriláteros y justificación propuesta por Laura en el cuestionario (C-Laura, S3-ítem 7)

7. ¿Cómo organizaría los cuadriláteros convexos si empieza por el más general de estos (ítem 6), hasta llegar al más particular (el que más propiedades añadidas tiene)? Muestre esta organización en un esquema y luego explique por qué los ha organizado de esa manera. **Recuerde que debe empezar por el más general hasta llegar al más particular.**



JUSTIFICACIÓN DE LA ORGANIZACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Como sabemos los cuadriláteros son aquellos que poseen cuatro lados. el más general es el cuadrado desde allí hacemos las relaciones entre cada uno, para poder realizar la organización he tenido en cuenta las propieda-des de cada uno de los cuadriláteros como se muestra en la figura.

La confusión referida en el párrafo anterior se justifica por la comprensión de las clasificaciones inclusivas (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) que posee y se inicia al tener que identificar el cuadrilátero más general. De hecho, en la Figura 60 puede observarse que Marta elije al cuadrado como tal. Ante la confusión entre general y específico, nos cuestionamos si el ejemplo propuesto en el ítem ha podido influir en ella puesto que se hace referencia a la jerarquía entre rombo y el cuadrado (nótese lo subrayado).

Figura 60

Identificación del cuadrado como el cuadrilátero más general (C–Marta, S3: ítem 6)

Si usted quisiera mostrar las relaciones entre los distintos cuadriláteros que están estudiando y para ello necesita jerarquizar estos, identificando primero el cuadrilátero más general ¿A cuál elegiría, qué cuadrilátero es el que menos propiedades añadidas tiene? Escriba su nombre y defínalo.

Si le sirve de ayuda piense en el siguiente **ejemplo**: *se podría decir que un cuadrado es un cuadrilátero con condiciones añadidas a las del rombo, puesto que, además de ser paralelogramo con 4 lados iguales, tiene sus cuatro ángulos iguales, de este modo el rombo es una clase más general que el cuadrado.*

Nombre del cuadrilátero: El cuadrado

Definición	Razón por la que es el más general
Es un cuadrilátero que posee cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos así mismo sus diagonales son iguales	Porque presenta las condiciones mínimas: 1) Tiene sus 4 lados iguales 2) Sus diagonales son iguales 3) Cuatro ángulos rectos.

De la definición de cuadrado que Marta construye y de la justificación para elegir a este como el más general (Figura 60) puede observarse las **características de una definición matemática**. Así, podemos decir que es una definición *descriptiva* (Sinclair et al., 2016), en la que incluye las propiedades que conoce sobre los aspectos que antes había considerado: lados, ángulos interiores y diagonales. Pese a que enuncia "condiciones mínimas del cuadrado", estas no responden a la necesidad y suficiencia que ha de cuidarse en una definición (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Los aspectos comentados antes vuelven a observarse en las definiciones de cada cuadrilátero construidas por Marta (Figura 61). Lo primero que hemos de señalar es respecto de la **comprensión de clasificaciones inclusivas** (KoT) puesto que no se evidencia consideración del esquema (Figura 59) ni de la última parte de la consigna (definir el más particular en función del cuadrilátero inmediatamente anterior). En las definiciones de cuadrado, rombo, romboide y rectángulo no se observa ninguna relación de las que pudieron inferirse del esquema (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Sin embargo, es posible que esta carencia se deba a la dificultad de definir considerando, precisamente, ese criterio inclusivo-inductivo mostrado para los paralelogramos (**KoT**-Procedimientos). Así pues, ese criterio excluyente también se observa para el trapecio y trapezoide, probablemente porque ambos cuadriláteros resultaron ser clases distintas (disjuntas) a la de paralelogramos.

Figura 61

Definiciones de cuadriláteros según esquema de clasificación (C-Marta, S3: ítem 8)

8. Después de haber organizado los cuadriláteros en un esquema, deberá definir cada uno, cuidando la coherencia con el esquema realizado, esto es, definiendo el más particular en función del cuadrilátero inmediatamente anterior.

* Trapecio: Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos iguales.
* Trapezoide: Es un cuadrilátero que tiene todos sus lados desiguales.
* Cuadrado: Es aquel que tiene sus cuatro lados iguales y sus diagonales son iguales.
* Rombo: tiene 4 lados iguales, diagonales diferentes y se cortan perpendicularmente.
* Romboide: tiene dos lados consecutivos iguales y los otros dos lados son diferentes; sus diagonales son diferentes.
* Rectángulo: Tiene dos pares de lados paralelos, sus ángulos forman ángulos de 90°, y sus diagonales son diferentes.

Respecto de las **características de una definición matemática** (KPM), según su estructura, las definiciones anteriores (Figura 61) resultan *descriptivas*, y *antieconómicas* (De Villiers, 1998), probablemente apoyadas en representaciones gráficas prototipo; *estructurales* (Shir y Zaslavsky, 2001) porque hacen referencia a elementos constituyentes (lados y ángulos) e *inapropiadas* (Zazkis y Leikin, 2008) porque la mayoría de ellas incluyen información incorrecta (p.ej. *Trapecio: Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos iguales*) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

El conocimiento de Marta, comentado en los ítems anteriores, evidencia **coherencia entre definiciones y argumentación de relaciones entre clases** al determinar el valor de verdad de las proposiciones dadas (Figura 62). Así, se observa una postura excluyente entre cuadriláteros-trapezoides (a), pero inclusiva entre cuadrados-trapecios (c) y entre rectángulo-paralelogramo (d), pese a que en el primer caso no se ve relación alguna en el esquema de clasificación (Figura 59). También se reitera la confusión entre *general y particular* al evaluar la relación entre rombos y cuadrados (e) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 62

Valor de verdad y justificación de relaciones entre cuadriláteros (C-Marta)

9. Para continuar la reflexión sobre las relaciones entre los distintos cuadriláteros, el profesor formula a sus alumnos las siguientes proposiciones, pidiéndoles que indiquen si son verdaderas o falsas y que justifiquen verbal, y gráficamente **si es necesario**, cada una de sus respuestas. ¿Qué respondería usted a cada afirmación?

a) Todos los cuadriláteros son trapezoides (F)

Porque el trapezoide es el que contiene características diferentes que los demás cuadriláteros además no posen características comunes.

c) Algunos cuadrados son trapecios (F)

Porque las características que presenta el cuadrado hacen que todos los cuadrados puedan ser trapecios ya que el cuadrado está dentro de los trapecios.

d) Todo rectángulo es un paralelogramo (V)

Sí, porque los rectángulos están dentro de los paralelogramos, los paralelogramos son más generales el rectángulo está dentro de él.

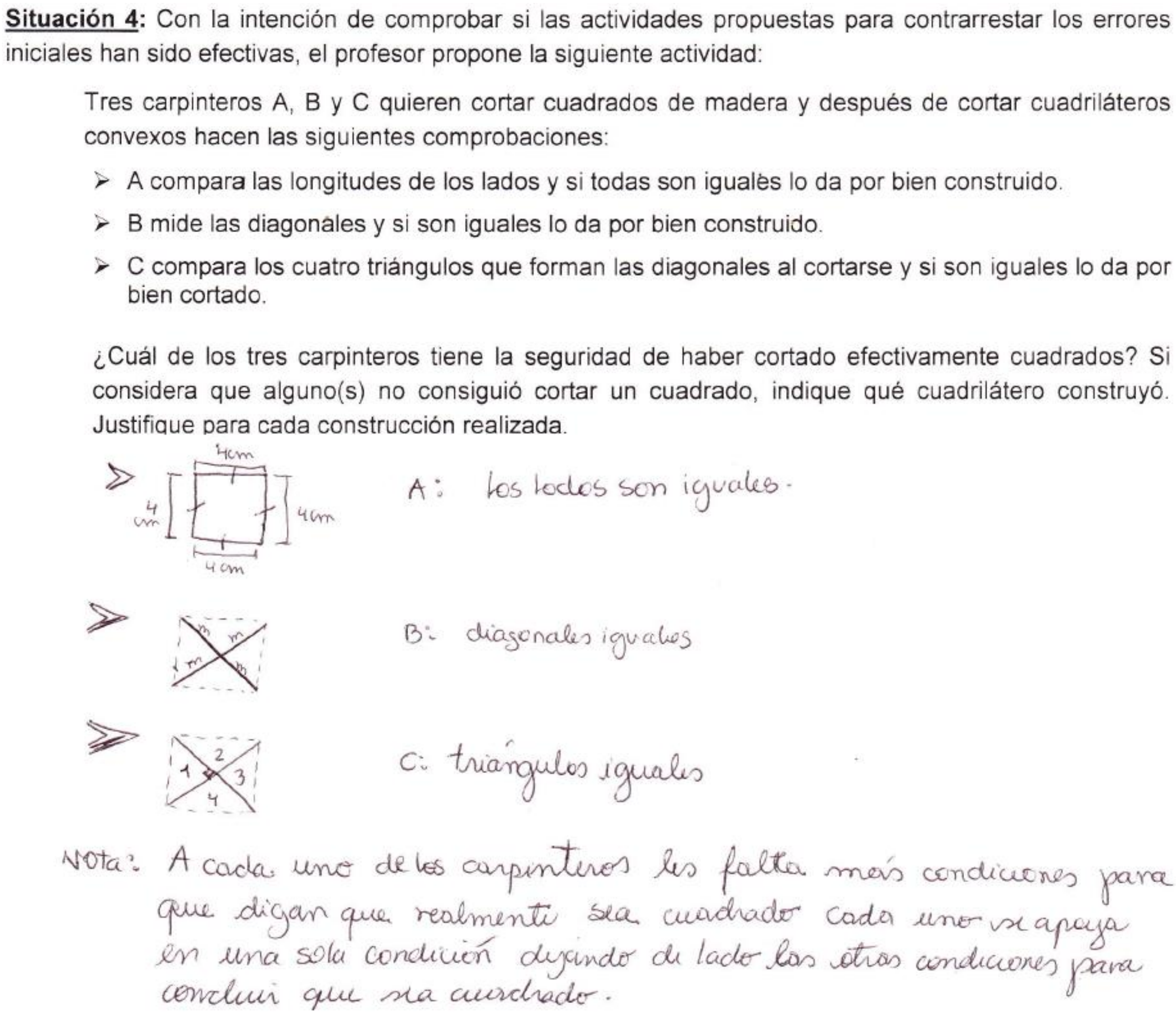
e) Algunos rombos son cuadrados (V)

Sí, pero no todos los rombos son cuadrados, porque el cuadro tiene menos características que el rombo, por ello podemos decir que algunos rombos son cuadrados.

Lo dicho hasta aquí, redunda en el análisis que hace Marta de la situación del carpintero (Figura 63). Así pues, pese a que concluye que en ningún caso se tiene la seguridad de haber construido cuadrados, no propone más argumento que la ausencia de más condiciones para asegurar que sean o no cuadrados (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 63

Respuesta de Laura al problema del carpintero (C-Marta, S4)



Situación 4: Con la intención de comprobar si las actividades propuestas para contrarrestar los errores iniciales han sido efectivas, el profesor propone la siguiente actividad:

Tres carpinteros A, B y C quieren cortar cuadrados de madera y después de cortar cuadriláteros convexos hacen las siguientes comprobaciones:

- A compara las longitudes de los lados y si todas son iguales lo da por bien construido.
- B mide las diagonales y si son iguales lo da por bien construido.
- C compara los cuatro triángulos que forman las diagonales al cortarse y si son iguales lo da por bien cortado.

¿Cuál de los tres carpinteros tiene la seguridad de haber cortado efectivamente cuadrados? Si considera que alguno(s) no consiguió cortar un cuadrado, indique qué cuadrilátero construyó. Justifique para cada construcción realizada.

A: los lados son iguales.

B: diagonales iguales

C: triángulos iguales

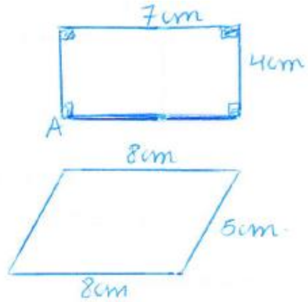
Nota: A cada uno de los carpinteros les falta más condiciones para que digan que realmente sea cuadrado cada uno se apoya en una sola condición dejando de lado los otros condiciones para concluir que sea cuadrado.

Tal como ha ocurrido al resolver la situación anterior, el conocimiento matemático que evidencia Marta al abordar cuestiones de enseñanza y aprendizaje en torno a la determinación y clasificación de cuadriláteros (Transcripción 43), resulta impreciso y hasta contradictorio respecto de lo dicho en los ítems 1 y 2 de la situación II (Transcripción 42) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En estos, Marta señaló que lo determinante en la esencia de un cuadrilátero son las propiedades de este y no el giro de su figura. Sin embargo, en las acciones que propone para abordar los errores, emplea precisamente el gito de figuras y no las propiedades de los cuadriláteros (Transcripción 43).

Transcripción 43

El giro como determinante en la concepción de un cuadrilátero. Causas y actividades de abordaje (C-Marta, S2: ítem 3)

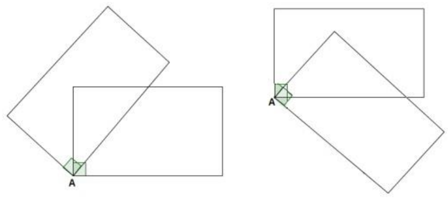
S2-ítem 3: Intente explicar con el máximo detalle posible las causas de los errores señalados (¿A qué pueden deberse?), ¿qué comprensión del contenido muestran los alumnos? Luego, indique ¿Qué plantearía como profesor para abordar estos errores?

Error	Cauda del error	Acción a plantear
Consideran que girando una figura se convierte en otra dejando de lado otros elementos o características. Ejm: ➢ *Rectángulo-paralelogramo.* ➢ *Rombo-cuadrado.*	❖ *Aplicando el concepto de rotación puede una figura (rectángulo) convertirse en un paralelogramo o viceversa, así mismo tenemos los ejemplos de rombo y cuadrado, ellos llegan a la conclusión que explicando un giro en uno de sus vértices la figura inicial es igual a la figura final.*	❖ *Dibujar un rectángulo de 7cm de 4cm de lado y un paralelogramo donde dos de sus lados paralelos miden 5cm y los otros dos lados paralelos 8 cm.*  *Pensemos, al girar el rectángulo en el punto A puedo obtener un paralelogramo. Pasará lo mismo si aplico esto a un cuadrado y un rombo.*

De la Transcripción 43 llama la atención que Marta plantee como actividad para contrarrestar el error de los estudiantes (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), exactamente lo que ellos harían, es decir, girar un rectángulo para hallar un paralelogramo (**KFLM**-Formas de interactuar con un contenido matemático). Esta actividad parece ser más la explicación de uno de los estudiantes del diálogo, para mostrar cómo influye el giro en la esencia de un cuadrilátero, que ser una tarea para refutar este error. Además, si lo que se quiere es mostrar cómo de un rectángulo se pasa a un paralelogramo o de un cuadrado a un rombo, no se comprende por qué se emplean medidas distintas.

Al intentar comprender la actividad que propone Marta se observa que emplea indistintamente “giro” y “rotación” y los califica como “la causa de sí mismos”, es decir, considerar que el giro de una figura determina lo que es, es un error y este es causado por el giro. Este razonamiento circular puede ser el resultado de la falta de **comprensión de cómo aprenden los estudiantes** los cuadriláteros (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático) y también, de la ausencia de reflexión en el conocimiento que tiene de los cuadriláteros para, a partir de él, determinar el papel del giro en la diferenciación de cada uno de ellos (**KFLM**-Fortalezas y dificultades). Por otro lado, lo que entiende por giro no queda claro porque, cuando justifica la tarea pareciera que al ángulo "A" del rectángulo, le va a modificar la medida estirándolo (como si este cuadrilátero estuviera construido con geotiras[106] y pudiera deformarse); y no simplemente fuera a girarlo en ese punto, puesto que si hubiese hecho esto último, la representación mostraría claramente que aunque se gire el rectángulo en el punto "A", este seguiría siendo rectángulo (Figura 64*)* y esto sí, hubiese permitido que los estudiantes empiecen a darse cuenta de su error.

Figura 64
Rectángulo girado en el punto "A"



4.3.1.3. Síntesis del conocimiento especializado sobre la conceptualización y jerarquización de cuadriláteros

El conocimiento especializado de Marta, en torno a los cuadriláteros, se recoge sólo de las situaciones 2, 3 y 4 del cuestionario. Dado que la densidad de información no es la misma que en los casos de Laura y Samuel, solo se muestra un gráfico al respecto (Figura 65). En este se identifican cuatro tareas generales: análisis del conocimiento de los estudiantes y de cuestiones de enseñanza, identificación de elementos determinantes y propiedades necesarias para definir, análisis de propiedades y de relaciones y clasificación jerárquica de los cuadriláteros. El desarrollo de estas tareas ha movilizado el dominio matemático y didáctico del conocimiento de Marta. En el primero, se han identificado evidencias de los

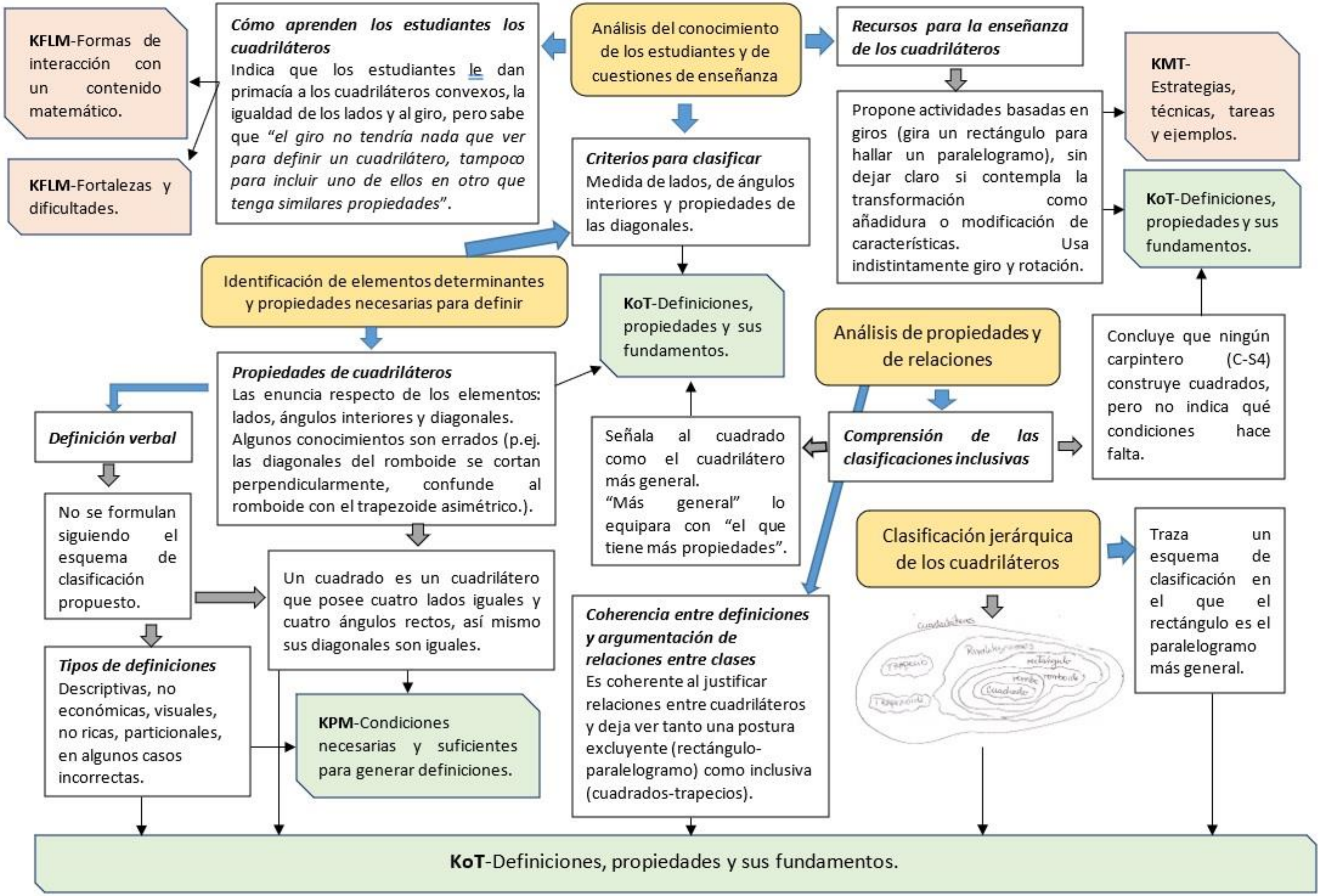
[106] Tiras flexibles de colores que pueden conectarse entre sí con corchetes. Es un recurso didáctico que permite el estudio de figuras geométricas.

subdominios Conocimiento de los temas (en la categoría: definiciones, propiedades y sus fundamentos) y Conocimiento de la práctica matemática (categoría condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Del dominio didáctico, han emergido evidencias en los subdominios Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (categorías: formas de interacción con un contenido matemática y fortalezas y dificultades) y Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (categoría: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

De la Figura 65 se observa primacía del dominio matemático, probablemente porque su confusión en torno a expresiones como "más general" o las implicancias del "giro" de una figura dificultan un abordaje didáctico coherente con el conocimiento disciplinar base.

Figura 65

Síntesis del conocimiento especializado de Marta sobre la conceptualización y jerarquización de los cuadriláteros



4.3.2. Plan de clase de Marta y Realización de la Sesión de Clase

Habiéndole asignado a Marta el tema: "Concepto de polígono y clasificación", se le indicó que iniciara la clase proponiendo el análisis de las definiciones de la situación 1 del cuestionario para, a partir de ello, construir la definición de polígono y su clasificación (Tabla 7, Capítulo 3). Propone una sesión para 2° de secundaria (13-14 años), con una duración de 60 minutos, en la que los aprendizajes esperados eran los siguientes (Figura 66):

Figura 66

Aprendizaje esperado propuesto por Marta (PC-Marta)

II. APRENDIZAJES ESPERADOS:

CONCEPTOS	CAPACIDADES
Polígono Es una figura geométrica cerrada compuesta por más de tres segmentos consecutivos coplanares.	Define el concepto de polígono. Clasifica los polígonos de acuerdo a sus características.

Las **características que atribuye a polígono** (KoT), según la **definición verbal** de la Figura 66, coinciden solo con una característica de las incluidas en la definición construida en el cuestionario (Figura 55): figura geométrica cerrada. Respecto de las otras características, incluidas en la Figura 66, observamos que: al indicar que *se compone de más de tres segmentos*, excluye al triángulo de ser un polígono, hecho que no ocurre con la definición dada en el cuestionario. Por otro lado, señalar que *los segmentos son consecutivos y coplanares* resulta redundante (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones) puesto que, al decir que el polígono es una figura geométrica cerrada, probablemente, se esté equiparando figura geométrica=figura plana, de allí que diferencien figura geométrica de cuerpo geométrico.

Sobre las capacidades indicadas en el aprendizaje esperado (**KMLS**-Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado), el Diseño Curricular Básico (MINEDU, 2008), propone la clasificación de polígonos en 1° de secundaria (12-13 años) y solo la definición de polígonos regulares e irregulares en 2° de secundaria (13-14 años). En relación con esto, Marta deja ver su conocimiento respecto de la completitud de la definición del libro de texto que (hipotéticamente) toman de referencia y considerando la limitación de esta, toma decisiones sobre el uso de los **recursos para la enseñanza de polígonos** (KMT) (Transcripción 44):

Transcripción 44

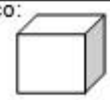
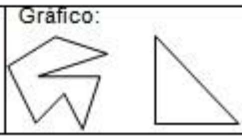
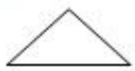
Comentario de Marta sobre la definición de polígono propuesta en un libro de texto (SC-Marta: 601-603)

> *MARTA: en el libro de texto que ustedes manejan esta definición que hemos visto no está, hay otra definición que está incompleta, entonces con la que vamos a manejar es con la que nosotros hemos construido hoy día.*

La secuencia didáctica propuesta por Marta, en coherencia con la consigna, diferencia cinco momentos: 1) Análisis, individual o grupal, de las definiciones propuestas en el cuestionario, incluyendo trazado de ejemplos y contraejemplos; 2) exposición de los estudiantes sobre el trabajo realizado en (1); 3) profundización y síntesis de lo abordado en (1) y (2); 4) construcción de una definición de polígono; y 5) clasificación de polígonos. De estos cinco momentos, nos centramos en los tres últimos porque Marta cobra protagonismo y eso permite ver su conocimiento respecto de definiciones, propiedades y sus fundamentos (KoT), puesto que analiza cada definición dada (Figura 67), subrayando las características relevantes e indicando lo que es válido o no respectivamente.

Figura 67

Análisis de las definiciones del cuestionario (PC-Marta)

Pablo	Es un cuerpo geométrico (no) que tiene lados y ángulos diferentes (no siempre). Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares (si).	Gráfico: 
Ana	Un polígono es una figura geométrica (si) que tiene lados y ángulos de medidas iguales (no siempre).	Gráfico: 
Gaby	Es una figura geométrica (si) la cual posee más de dos lados (si) y sus ángulos miden más de 180° (no siempre), su fórmula sería 180°(n-2).	Gráfico: 
Luis	Es una figura geométrica cerrada (si), compuesta por la unión de 3 o más puntos (si) y que ocupa un lugar en el plano (si), los puntos no deben de cruzarse (si).	Gráfico: 

Al analizar las definiciones dadas se da cuenta que, en cada una de ellas, se incluyen características que no se ajustan a lo que se entiende por ese objeto o cuya validez es parcial y por ello señala *no siempre*. Al respecto, nos detenemos en la definición de Gaby puesto que a la característica "sus ángulos miden más de 180°", Marta le atribuye validez parcial pese a que en el cuestionario lo calificó como error. Así pues, tanto en ese instrumento como en este (plan de clase), Marta deja ver que, entre las **características que atribuye a polígono** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), no repara o no conoce que un polígono no puede tener únicamente ángulos cóncavos, porque si así fuera no se cerraría. Por otro lado, al no decir nada respecto de la fórmula, hace pensar que no tiene claro las **características de una definición matemática** (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), específicamente, el rol de la fórmula dentro de la definición o que no conoce el significado de la misma porque, pese a que en el cuestionario ha indicado "*está confundiendo la fórmula con la definición de polígonos*" (Transcripción 37), en el plan de clase no se ha referido a ella o a la utilidad que tiene. Finalmente, de la definición de Luis se observa que la característica "*compuesta por la unión de 3 o más puntos*" se contradice con la definición indicada en los aprendizajes esperados (Figura 67). Al analizar esta se concluye que, al señalar "*compuesta por más de tres segmentos*", se ha producido un despiste o confusión terminológica porque con ello se está excluyendo al triángulo de ser polígono (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

En cuanto a las **características de las representaciones gráficas** que traza para ejemplificar o refutar algún aspecto de las definiciones de polígono (Figura 67), son predominantemente convexas (solo 1 de los 5 polígonos trazados es cóncavo); de 3, 4 o 5 lados (solo el cóncavo tiene 8 lados) y de los cuatro convexos, dos son triángulos (uno rectángulo y el otro isósceles) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así, puede decirse que en la **imagen conceptual de polígono** que tiene María predominan las figuras prototipos (salvo la figura cóncava) porque están en una posición estándar (la base paralela al eje horizontal) y predominan los triángulos (no hay variedad de polígonos), tal como se vio en los ejemplos propuestos en el cuestionario completado (**KoT**-Registros de representación). Por otro lado, al contrastar la definición con las representaciones, la primera evidencia una idea amplia de polígono porque no excluye de ellos a los polígonos cuyos lados se cruzan, cosa que sí se observa en las representaciones puesto que no considerar un ejemplo correspondiente. Este hecho también se observó en el cuestionario, lo cual da cuenta de la coherencia de su conocimiento.

Lo dicho en el párrafo anterior, observado en el plan de clase, se reafirman al momento de clasificar polígonos en la ejecución de la sesión de clase. Así pues, los ejemplos gráficos que propone no son lo suficientemente variados para que los estudiantes determinen distintas clases de polígonos (**KoT**-Registros de representación). Esta limitación la perciben los estudiantes por lo que se ven en la necesidad de trazar las figuras que les hace falta, en concreto, polígonos cóncavos (Transcripción 45).

Transcripción 45
Evidencia de la ausencia de polígonos cóncavos en la clasificación (SC-Marta: 545-557)

SAMUEL: cóncavos no hay, convexos son todos.
MARTA: Aquí en su dibujo (tomando el papelote donde trabajaron) también han hecho figuras. A ver chicos, aquí también han planteado figuras (Les alcanza el papelote) Tendrían que dibujarlas porque ya están pegadas.
ABEL: (señalando el triángulo pregunta a Marta) ¿este es equilátero, escaleno…?
(Marta no contesta, solo mueve la cabeza como diciendo que no sabe o no interesa el nombre. Luego, Samuel dibuja los cóncavos que pusieron en el papelote, los demás miran y comentan algo. Empiezan por los convexos, donde agrupan todas las siluetas dadas por la profesora. Como cóncavos dibujan un cuadrilátero y la cruz. Para los regulares dibujan un cuadrado, triángulo, pero tomando como referencia las siluetas que clasifican todas como convexos. Como irregulares dibujan un trapecio, un triángulo y una cruz (a la que también identifican como cóncavo).

Por otro lado, los dibujos asociados a las definiciones de Gaby y de Luis (Figura 67), llevan a pensar que Marta ha realizado cierta interpretación de estas para identificar las ideas que han querido transmitir ambos (KFLM-Formas de interacción con un contenido matemático). Así, si para la definición de Gaby, traza un polígono que combina ángulos de medidas mayores y menores a 180° y otro que solo contiene ángulos convexos, Marta puede creer que Gaby se está refiriendo a que la suma de las medidas de los ángulos es mayor que 180°; debido a esto, al analizar la definición Marta señala "no siempre". Para la definición de Luis, deja ver que entiende que cuando este dice "los puntos no deben cruzarse", en realidad se está refiriendo a los segmentos, de tal forma que los lados del polígono solo se unan por los extremos de cada segmento. Finalmente, el propósito de los ejemplos que Marta traza (Figura 67) no queda claramente definido (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) porque, algunas veces parecieran ser ejemplos de la definición (caso Gaby) y en otros contraejemplos (caso Pablo) y las instrucciones que se mencionan en el plan de clase, no aclaran esta situación. Así pues, no se sabe si con los ejemplos gráficos se busca resaltar las características de los polígonos o refutar alguna atribuida a ellos (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La secuencia didáctica descrita en el plan de clase se ejecuta casi íntegramente. Así, Marta propone a los tres estudiantes que asistieron a clase, analizar en un solo grupo las definiciones dadas, indicando lo que consideran correcto en cada una y asociándoles las representaciones gráficas que corresponden. Sin embargo, la consiga dada no fue clara para los estudiantes y Marta parece no comprenderla del todo porque no logra que sus estudiantes aclaren sus dudas al respecto (**KFLM**–Formas de interacción con un contenido matemático):

Transcripción 46

Confusión de Marta ante la consigna de trazar una representación gráfica (SC-Marta: 22-42)

SAMUEL: Cuando me dice: "a partir de ello realice un gráfico", o sea, a partir de lo que vamos a plantear aquí, de lo que dice cada alumno cuando (la profesora no lo deja terminar e interviene).

MARTA: Claro, o sea según esto (señalando el papelote con las definiciones para analizar)

SAMUEL: ¿Un gráfico de polígono?

MARTA: Sí, ya, los quiero ver trabajar.

formadora: ¿Un gráfico de cada definición que está allí?

MARTA: Sí

formadora: Ah, ¿no es de lo que ellos (los EPM en su rol de estudiantes) digan que es cierto o no?

MARTA: Claro. O sea, lo que quiero darles a entender es que, bueno la primera (refiriéndose a la consigna) no hay discusión, ¿no? Luego dice: A partir de ello realiza un gráfico para cada una. Es… (interviene otro estudiante) la analizo

DAVID: A¿A partir de la que nosotros hacemos? (La profesora interviene mientras él concluye su pregunta).

MARTA: La analizo y tú planteas tu gráfico según tu análisis.

DAVID: Ah, ya.

Docente formadora: ¿Qué sería,un polígono para cada alumno (de las definiciones dadas)? ¿Eso?

MARTA: Claro

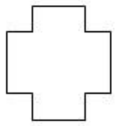
Como puede verse en el diálogo anterior (Transcripción 46), las dudas sobre la consigna se mantienen hasta luego de iniciado el análisis de las definiciones e incluso, la docente formadora se ve obligada a intervenir para ayudar en la comprensión de lo que deben realizar. Posteriormente, la exposición del estudiante seleccionado pone en evidencia la inseguridad de Marta respecto de si un polígono puede tener únicamente ángulos cóncavos.

Así, cuando cuestiona a Abel por los ángulos que tiene una de las figuras trazadas para la definición de Gaby (Transcripción 47), Marta parece limitarse solo a la figura y no al fundamento teórico que hay detrás, es decir, a si un polígono puede tener solo ángulos cóncavos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Transcripción 47

Polígono trazado por los estudiantes, para la definición de Gaby (SC-Marta: 301-308)

ABEL: (Analizando la definición de Gaby, señala una figura con forma de cruz y va comentando) Posee más de dos lados, sus ángulos miden más de 180. Hemos puesto...



MARTA: ¿qué? ¿algunos? (refiriéndose a los ángulos)
ABEL: todos
MARTA: ¿Todos? ¿Todos, David?
DAVID: algunos, no todos porque hay algunos de 90°.
ABEL: sí, algunos.
MARTA: ya.

Luego de la exposición del estudiante (Abel), Marta inicia la revisión, en plenaria, de lo realizado por los estudiantes. En esta, deja claro que entre las **características que atribuye a polígono** están que no es un cuerpo geométrico y tampoco tiene siempre lados y ángulos diferentes (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Lo que sí considera válido es la clasificación, y da indicios de saber que esta no tiene por qué incluirse en una definición, lo cual es parte de las **características de una definición matemática** (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Si bien no explicita nada, su titubeo y la intención de que pase desapercibida en la definición construida, hacen pensar que tiene ese conocimiento (Transcripción 48).

Transcripción 48

Inclusión de la clasificación de polígonos en la definición de este (SC-Marta: 502-507)

MARTA: Otra vez regresando a la definición...es una figura geométrica cerrada que posee más de dos lados. Con lo que nos ha dicho David: es una figura geométrica compuesta por la unión de tres o más (va escribiendo) segmentos coplanares y que pueden ser...bueno esto ya es...solamente (termina de escribir, sin enunciar: cóncavos, convexos, regulares e irregulares).

Este supuesto se confirma, cuando en la evaluación de la sesión, la docente formadora le hace esta observación y ella contesta (Transcripción 49):

Transcripción 49
Consideración de la clasificación de polígono como parte de la definición (SC-Marta: 703-710)

> *FORMADORA: en la definición lo que no me parece es que coloque lo último, el "puede ser" porque ya es parte de una clasificación, no de una definición.*
> *MARTA: Claro, sino que yo lo asumí justamente para poder enganchar lo que los alumnos iban a hacer con las figuras (clasificar) por eso es que en un momento yo dudé en ponerla, yo decía "la pongo o no la pongo", pero si no la voy a poner entonces ellos (los alumnos) me iban a preguntar "miss ¿por qué no pone lo que nosotros hemos puesto?".*

El argumento dado por Marta, en el diálogo anterior, muestra la relevancia de las consideraciones didácticas sobre las matemáticas al construir la definición de polígono (Zazkis y Leikin, 2008). Así pues, incluir la clasificación de polígonos en la definición consensuada (*Polígono es una figura geométrica cerrada compuesta por tres o más segmentos coplanares y que pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares* (SC-Marta: 464-466)) se corresponde con los intereses y expectativas de los estudiantes (KFLM). Aunque en el caso anterior ha primado las consideraciones didácticas, la necesidad de excluir a la circunferencia de ser polígono, lleva a Marta a indicar que hace falta mayores precisiones en la definición que construyen (Transcripción 50):

Transcripción 50
Exclusión de que el círculo sea un polígono (SC-Marta: 486-491)

> *SAMUEL: Pero un círculo es una figura geométrica y cerrada.*
> *MARTA: También.*
> *SAMUEL: Entonces un círculo es un polígono.*
> *MARTA: No porque si yo me quedo con esta definición (señala lo que ha escrito) que es una figura geométrica, ya puedo asumir que esto (dibuja un círculo) es una figura geométrica, lo que tú me dices, pero por eso la definición no termina allí.*

Continuando con el análisis de las definiciones, para determinar las **características que atribuye a polígono**, en el caso de Ana, Marta deja claro que un polígono no tiene por qué tener únicamente lados y ángulos iguales y, además, rescata como válido "figura geométrica". Por otro lado, de la definición de Gaby, destaca la cantidad mínima de lados que puede tener un segmento y quién es el polígono que cumple esta característica (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) (Transcripción 51).

Transcripción 51

Análisis de las definiciones de Ana y Gaby, dadas en el cuestionario (SC-Marta: 357-364)

MARTA: (...) Lo que dice Gaby y lo que dice Ana coinciden ¿verdad? Porque coinciden en que el polígono es una figura geométrica. Luego, ella (por Gaby) nos está dando otro dato: posee más de dos lados. El polígono, para que sea un polígono ¿cuántos lados como mínimo debe de tener?
SAMUEL: Tres
MARTA: Tres, ¿verdad? Y ¿En qué figura tiene tres lados?
DAVID: En el triángulo.

Al analizar la definición de Gaby, Marta vuelve a evidenciar desconocimiento de las características que atribuye a polígono (KoT), tal como se comentó en torno a la Transcripción 47, respecto a si un polígono puede tener únicamente ángulos cóncavos, lo cual involucra a las propiedades de polígonos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así pues, parece no saber por qué Gaby dice que sus ángulos miden más de 180° pero sí evidencia conocer el significado de la fórmula 180°(n-2) y que no es necesario incluirla en la definición (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones) (Transcripción 52).

Transcripción 52

Significado de la fórmula 180°(n-2)

ABEL: Srta. ¿Y la fórmula está mal allí?
(MARTA termina de anotar la idea que han rescatado de la definición de Gaby y luego contesta a la pregunta de ABEL)
MARTA: Esa fórmula es para la suma de ángulos interiores de un polígono, pero eso es otro tema que luego lo vamos a tratar, ahorita solamente quiero que se concentren en el concepto de polígono.

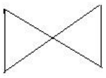
Por otro lado, el análisis de la definición de Luis permite que Marta evidencie su conocimiento sobre los puntos, a partir de sus posiciones en el plano y sobre el vocabulario geométrico que tiene (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) (Transcripción 53).

Transcripción 53

Aclaración en torno a "puntos coplanares que no se cruzan" (SC-Marta: 410-428)

MARTA: Entonces ¿con qué parte de la definición solamente se quedan?
SAMUEL: Es una figura geométrica
MARTA: (Escribe) es una figura geométrica cerrada, ¿qué más?
SAMUEL. Compuesta por la unión de tres o más puntos.
ABEL: Compuesta por la unión de dos

(Marta sigue anotando en la pizarra sin tomar en cuenta lo que ha dicho Abel)
MARTA: ...por la unión de tres o más puntos... ya, que ocupan un lugar en el plano. Entonces ¿quiere decir que estos puntos son coplanares?
SAMUEL: Sí
MARTA: Porque dice que ocupa un lugar en el plano, entonces tres o más puntos coplanares.
SAMUEL: Pero allí profesora, no entiendo eso de que los punto no deben cruzarse.
MARTA: tengo 3 puntos, 3 o más puntos (y los traza en la pizarra), lo que tú has hecho... entonces cuando él dice (Luis) los puntos no deben cruzarse, yo me imagino (y traza una especie de dos triángulos unidos por un vértice de forma opuesta, ver figura) que al unir los puntos, el segmento que une los puntos



SAMUEL: Entonces la idea sería los segmentos, los segmentos y no los puntos...o los lados (David también comentar simultáneamente algo parecido).

El análisis realizado evidencia que Marta, si bien diferencia figura geométrica de cuerpo geométrico, no logra verbalizar una definición de ninguno de los dos conceptos. Esto refuerza la preponderancia que tiene la imagen conceptual sobre la definición conceptual (Gutiérrez y Jaime, 1996). Así pues, al responder qué es una figura geométrica, solo se limita a referirse a representaciones gráficas relacionadas por su constitución (cuadrado y cubo) (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) pero, diferenciadas por el número de dimensiones que las constituyen (**KoT**-definiciones, propiedades y sus fundamentos) (Transcripción 54).

Transcripción 54
Diferencia entre figura geométrica y cuerpo geométrico (SC-Marta: 468-484)

MARTA: Muy bien chicos, a esto nos vamos a quedar con una sola definición.
A ver David, definición ¿es una figura geométrica cerrada?
DANIEL: Sí
MARTA: Entonces complementamos (Marta va escribiendo)
ABEL: ¿Qué es una figura geométrica cerrada?
MARTA: ¿Qué? (Abel repite la pregunta)
Las figuras geométricas son aquellas que nosotros hemos visto desde el colegio por ejemplo el triángulo, el cuadrado, el rectángulo, en cambio, por ejemplo, ¿se acuerdan de lo que planteaba Pablo, que cuerpo geométrico...? Un cuerpo geométrico no es igual que una figura geométrica porque si yo tengo una figura geométrica, puedo tener esta (traza un cuadrado) pero cuando yo hablo de un cuerpo geométrico es una figura que está en 3 dimensiones; por

ejemplo, yo tengo esto (traza un cubo y David comenta con Abel la diferencia porque mientras trabajó en grupo, él tenía esa duda). El cubo ¿es una figura o es un cuerpo geométrico?
Grupo: un cuerpo geométrico.

Tal como en el caso anterior, si bien Marta considera, como parte de su **imagen conceptual de polígono**, a las figuras de lados cruzados (cosa que no ocurre en el cuestionario), al preguntársele por ellos no logra definirlos o caracterizarlos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En su defecto, propone un ejemplo para que sus estudiantes se hagan una idea de lo que son (Transcripción 55).

Transcripción 55

Conocimiento de Marta sobre polígonos de lados cruzados (SC-Marta: 515-524)

SAMUEL: Entonces profesora ¿una figura cruzada es un polígono?
MARTA: Sí, pero esos son polígonos especiales, que ahorita, esos son polígonos especiales y ahorita por el tiempo no vamos a tener el espacio suficiente para poder tratarlos, pero sí existen esos polígonos.
SAMUEL: Pero sí son polígonos
MARTA: Claro, pero son polígonos especiales
ABEL: ¿Qué son polígonos especiales?
MARTA: Esos polígonos especiales, por ejemplo. a ¿ustedes han escuchado hablar sobre polígonos estrellados? Esa es otra clase, esa es otra parte de donde esos polígonos, pero a esas figuras se les llama polígonos (...).

A diferencia de figura geométrica, cuerpo geométrico y polígono de lados cruzados, Marta tiene claro las **propiedades de polígonos** regulares e irregulares (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), por ello recalca rotundamente las condiciones que ha de un cumplir un polígono para considerarlo regular (**KPM**-Características necesarias y suficientes para generar definiciones) (Transcripción 56).

Transcripción 56

Propiedades de polígono regular e irregular (SC-Marta: 575-587)

MARTA: Para que sea un polígono regular, bueno adelantándoles, para que sea un polígono regular ¿qué tiene que cumplirse? Si tú has dibujado un cuadrado eso quiere decir que los lados y los ángulos...eso todavía lo voy a explicar la próxima clase pero más o menos para que tengan una idea, los polígonos regulares tienen que cumplir dos condiciones a la vez, tienen que tener sus lados y sus ángulos iguales. Si los lados son iguales entonces todos los ángulos tienen que ser iguales, si yo tengo un polígono que solamente tiene los lados iguales y los ángulos son diferentes entonces, no es un polígono regular.
SAMUEL: Un irregular profesora, tiene...

> *MARTA: El irregular puede tener lados iguales pero los ángulos no, o sea no cumple las mismas condiciones que los regulares, los regulares tienen que cumplir las dos condiciones a la vez.*

A pesar de que parece tener un concepto más amplio de polígono que el mostrado en el cuestionario, pues reconoce a los polígonos cóncavos y a los de lados cruzados, como tales; las características de las representaciones gráficas de polígono evidencian una imagen conceptual prototipo, y por ello, restrictiva (**KoT**–Registros de representación). Es posible que esto sea resultado del predominio de la imagen conceptual sobre la definición conceptual que tiene Marta de polígono (Transcripción 57):

Transcripción 57

Características de las representaciones gráficas de polígono para clasificar (SC-Marta: 529-536)

> *MARTA: (...) Bueno, ahora tengo estas figuras (Marta pega unas siluetas de octágono, pentágono, triángulo, rectángulo y cuadrado y apoya el triángulo sobre un vértice y los demás sobre la base horizontal. Todas son convexas). Ahora, sí quiero que se levanten y vengan hacia la pizarra. Lo que vamos a hacer ahorita es, ustedes según su criterio clasifiquen esas figuras, por el criterio que ustedes crean conveniente, puede ser por sus ángulos, puede ser por sus lados...según lo que ustedes crean conveniente.*

Respecto de la clasificación, Marta parece conocer más de un **criterio para clasificar polígonos** pues, en la Transcripción 58 hace referencia a los polígonos cóncavos y convexos (criterio: medida de ángulos), regulares e irregulares (criterio: medida de lados y de ángulos), pero el único que explicita, es el número de lados (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Es posible que por el tiempo de que dispone para desarrollar la sesión no proponga la clasificación bajo otros criterios. Además, recuérdese que las representaciones gráficas propuestas por Marta para clasificar resultan limitadas porque todas son convexas y los estudiantes se ven en la necesidad de trazar las que les hacen falta (Transcripción 58).

Transcripción 58

Criterios reconocidos por Marta para clasificar polígonos (SC-Marta: 544-562)

> *MARTA: Bueno, para guiarse pueden tomar de lo que han puesto en la definición ¿en la definición qué dice? Cóncavos, convexos, regulares e irregulares. [...]*
>
> *ABEL: ¿Y por los segmentos? (pensando en otro criterio de clasificación)*
>
> *MARTA: también puede ser ¿verdad? También los puedo clasificar por su número de lados.*

En relación con lo anterior, Marta, al evaluar su desempeño, reconoce la limitación de sus ejemplos. Esto lleva a inferir que los considera importantes en el proceso de enseñanza (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) (Transcripción 59).

Transcripción 59

Valoración de las representaciones gráficas propuestas (SC-Marta: 649-652)

MARTA: (...) Yo creo que me faltó poner más ejemplos con lo que respecta a las definiciones, estaban los ejemplos de ellos pero, lo traté de hacer de tal manera que ellos puedan entender, no tratar de hacerlos confundir ni nada.

Antes de finalizar la clase, Marta intenta hacer reflexionar a sus estudiantes sobre las aplicaciones de los polígonos (**KoT**-Fenomenología y aplicaciones), ellos apelan a las formas que observan en su entorno y a otras aplicaciones que no detallan (Transcripción 60).

Transcripción 60

Reflexión sobre la utilidad de los polígonos (SC-Marta: 613-637)

MARTA: Samuel ¿para qué crees que nos puede servir el tema de polígonos? [...] *SAMUEL: Generalmente los polígonos están muy ligados a la parte artística, porque por ejemplo en obras de arte generalmente se usa el polígono del rectángulo para trazar allí las imágenes. [...]* *MARTA: [...] Bueno chicos, prácticamente lo que dice Samuel es importante porque en las construcciones, en las edificaciones, tanto de los edificios, aquí en esta misma facultad es muy importante el tema de polígonos. Y sin ir muy lejos, en nuestra casa de repente nos ponemos un día a observar podemos encontrar varios objetos que tienen esa forma: los espejos, las señales de tránsito, qué se yo, una mesa, un cuadro; eso es muy importante porque no hay que desligarlo de la vida real en la que nosotros estamos inmersos, ¿no? Entonces, la próxima clase continuamos, ¿ya?*

Tal como se evidenció en el cuestionario, Marta ha puesto énfasis en formular preguntas a sus estudiantes para cuestionar el conocimiento que tienen (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En este proceso ha tomado en cuenta conceptos que puede resultarles conflictivos (p.ej. los puntos no deben cruzarse), (**KFLM**-Fortalezas y dificultades), aunque en varios casos, también han sido conflictivos para ella y por eso, no ha logrado construir una definición verbal (p.ej. figura geométrica y cuerpo geométrico) sino, solamente, ejemplificar gráficamente. Esto da cuenta de un conocimiento matemático poco profundo que limita la operativización de su conocimiento didáctico del contenido.

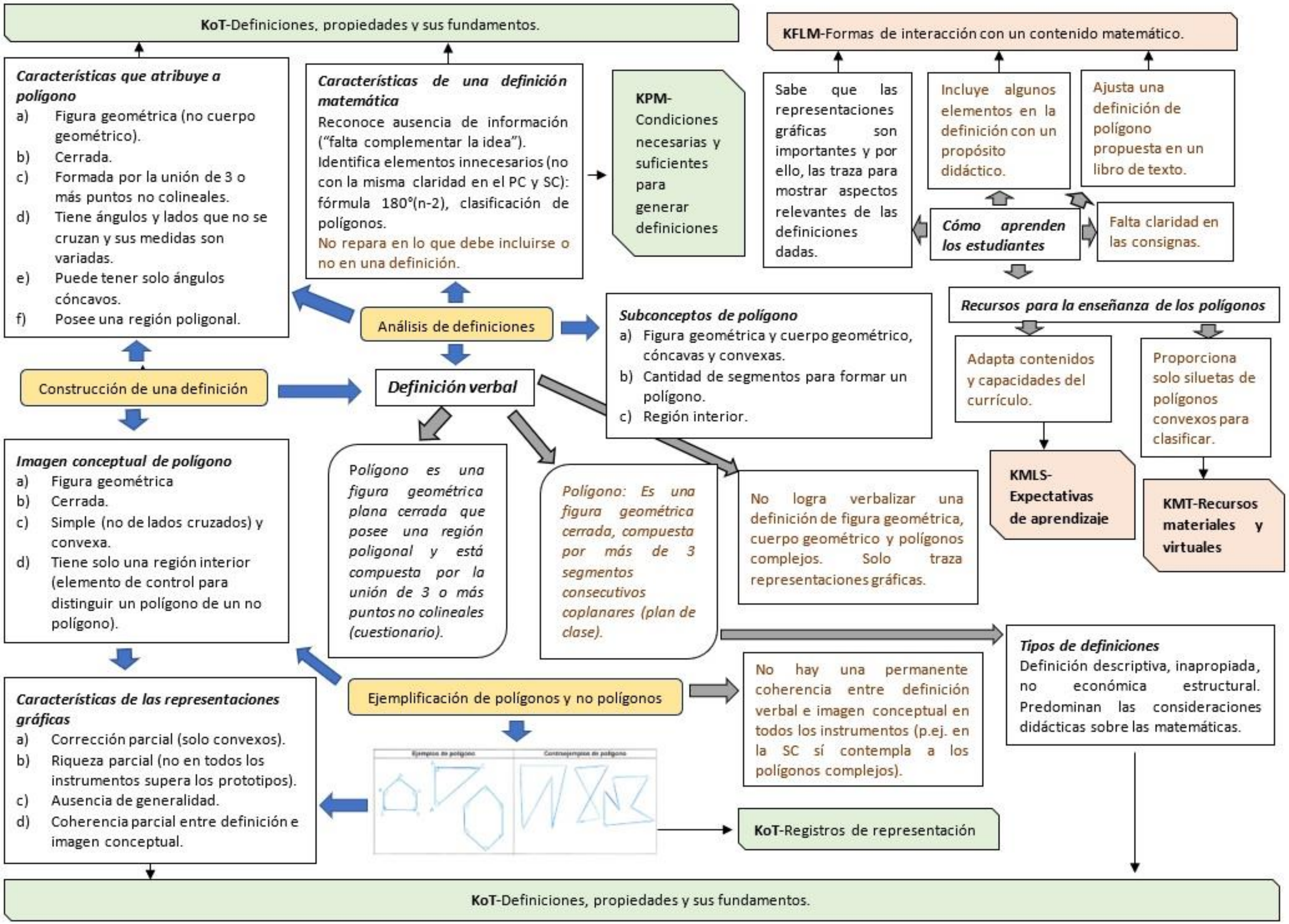
4.3.3. Síntesis del conocimiento especializado sobre el concepto de polígono

Marta es la única informante de la que se recoge información sobre los polígonos de los tres instrumentos. De la Figura 68 puede verse que han emergido evidencias de conocimiento de los dominios didáctico y matemático, aunque involucran categorías que podrían considerarse "comunes". Del primero, se observa los tres subdominios que corresponden: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (categoría: formas de interacción con un contenido matemático), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (en la categoría recursos materiales y virtuales) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (categoría expectativas de aprendizaje). Del dominio matemático, se tiene evidencia del conocimiento de los temas (en las categorías: definiciones, propiedades y sus fundamentos, y registros de representación) y conocimiento de la práctica matemática (categorías: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Las dificultades para identificar conceptos estructurantes y definirlos, probablemente limitas la gestión del aprendizaje, al elaborar un plan de clase y posteriormente, ejecutarlo. De allí que no haya podido construir definiciones de dichos conceptos y se haya limitado a trazar representaciones gráficas. Esto, a su vez, corrobora la primacía de la imagen conceptual sobre la definición verbal.

Figura 68

Síntesis del conocimiento especializado de Marta sobre el concepto de polígono



4.4. Discusión de los Resultados

Discutimos los resultados descritos en los apartados anteriores diferenciando los temas abordados en las fuentes de información. En cada tema, nos centramos en el conocimiento especializado de los EPP según las dimensiones del MTSK que emergen. Aunque el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) es un subdominio del MTSK, consideramos más rico discutir los resultados en torno a este en un apartado independiente. En el desarrollo de la discusión empleamos los descriptores propuestos (Tabla 9, Tabla 10, capítulo de metodología), de tal forma que se articula el MTSK y los marcos teóricos referidos a la adquisición de conceptos geométricos y a la definición y la clasificación como prácticas matemáticas.

4.4.1. Discusión sobre el Concepto de Polígono

El concepto de polígono poseído por los EPP se puso en conflicto en el desarrollo del cuestionario, y también en la planificación y ejecución de una sesión de clase para el caso de Marta. Así pues, tanto el análisis y construcción de definiciones, como los ejemplos y contraejemplos propuestos para las mismas, ha permitido que los EPP se hagan conscientes, en algún grado, del conocimiento que poseen y perciban los alcances y limitaciones de este (transcripción 3, transcripción 49), tal como ocurrió en el trabajo de Blanco y Contreras (2002) al proponer *tareas didácticas contextualizadas y personalizadas* a los EPM[107]. De allí que este tipo de actividades de análisis de ejemplos y contraejemplos, uso y construcción de definiciones sean necesarias para quienes se preparan para ser profesores (Vinner, 1991).

Partiendo de que la adquisición de un concepto requiere construir un esquema que incluya imagen conceptual y definición conceptual (Vinner, 1991), diremos que el esquema conceptual mostrado por los EPP evidencia primacía de la **imagen conceptual** sobre la **definición verbal** (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Debido a esto, las **características que** los informantes **atribuyen a polígono** en la **definición verbal** que construyen son insuficientes (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar

---

[107] Con EPM nos referimos a Estudiantes para Maestro (de infantil o primaria) y con EPP a los estudiantes para profesor de matemática de secundaria. Recuérdese que, en Perú, a diferencia de España, se tiene las carreras de educación inicial, primaria y secundaria.

definiciones) en comparación con las representaciones gráficas que trazan (KoT–Registros de representación), trasmitiendo estas una idea más completa de qué es y qué no es polígono para los EPP. Por ejemplo, al contrastar las definiciones construidas por los EPP (Figura 69), observamos que ninguna explicita si los lados del polígono pueden o no cruzarse; sin embargo, este atributo sí se nota en los ejemplos de Laura (Figura 70) y en los contraejemplos de Samuel y Marta (Figura 71). Si bien en el caso de Laura la omisión de esta característica significa que los polígonos pueden tener sus lados cruzados, probablemente para los casos de Samuel y Marta, la exclusión de que estas figuras sean polígono se indica con las expresiones "segmentos unidos dos a dos" y "posee una región poligonal", respectivamente. De hecho, en las respuestas de Samuel y Marta para hacer ver al estudiante Luis el error de su definición (KMT–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) observamos que, cuando Samuel traza figuras de lados que se cruzan y no se cruzan remarcando los vértices indica: "hay intersección de rectas y esto ya no es un polígono" (Transcripción 20). Por su parte, Marta cuestiona el número de regiones que se forman en un cuadrilátero de lados cruzados y luego, al indicar los subconceptos de polígono señala la necesidad de trabajar el concepto de región interior (Transcripción 41) (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Figura 69

Características atribuidas a polígono por Laura, Samuel y Marta

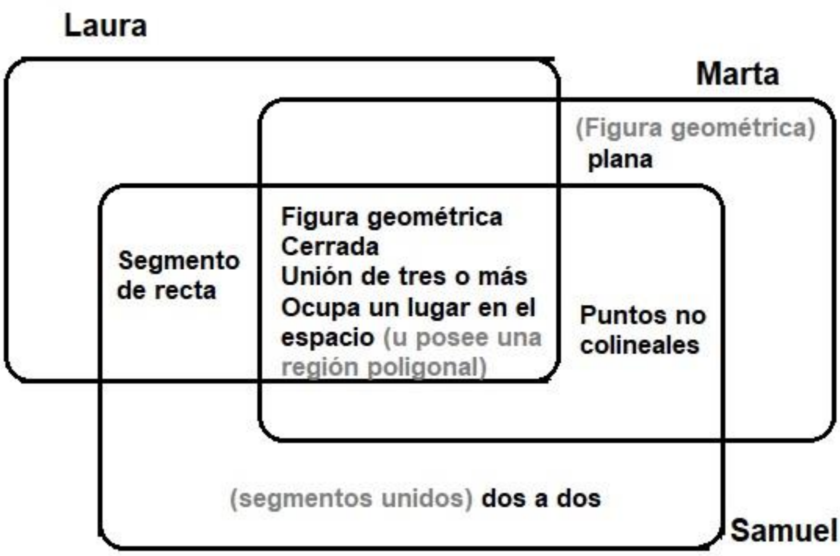


Figura 70

Ejemplos de polígono (cuestionario)

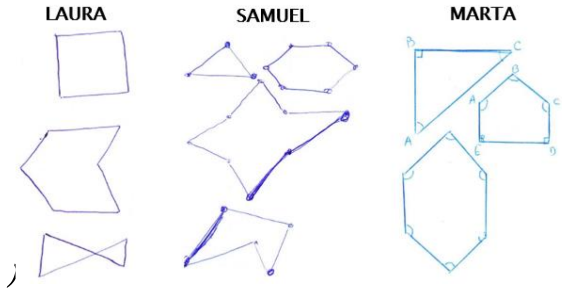
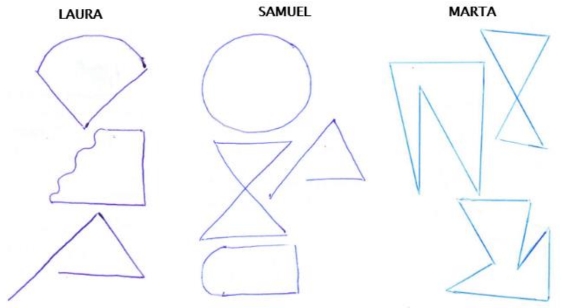


Figura 71

Contraejemplos de polígono (cuestionario)



Siguiendo lo anterior, discutimos las evidencias de conocimiento de los EPP centrando la atención en cada subdominio del MTSK emergido para que, a partir de ello, podamos identificar qué otros subdominios se vinculan al de referencia. Como hemos visto en los párrafos anteriores, el análisis del esquema conceptual que tienen los EPP sobre polígono involucra distintos subdominios del MTSK. Esto resulta coherente con el carácter sintético, integrado y complejo del conocimiento del profesor, sobre el cual el MTSK puede emplearse:

> no como una colección de compartimentos estancos, sino como un conjunto de elementos de conocimiento interrelacionados, y condicionados unos por otros, que son lo que denominamos «conocimiento especializado del profesor de matemáticas», cuyas componentes, como ya se ha señalado, tienen su fundamento en las matemáticas, su estructura, la forma en que se construyen y su visión como objeto de enseñanza y aprendizaje. (Muñoz-Catalán et al., 2015, p. 602).

El *Conocimiento de los Temas Matemáticos* (KoT) mostrado en la identificación y abordaje de errores, ideas confundidas y válidas en las definiciones dadas de polígono, así como en la construcción de una definición y en la ejemplificación gráfica de este concepto, pone de relieve que la idea "común" que tienen los EPP de polígono es: "figura geométrica cerrada formada por la unión de tres o más segmentos que delimitan una región interior" (Figura 69) (**KoT**- Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Dicha idea, incluye, explícita o implícitamente, los elementos[108] matemáticos que Pascual et al. (2019), en su estudio de

[108] Esta denominación que proponen Pascual et al. (2019) se corresponde con lo que en nuestro estudio hemos denominado subconceptos y características o atributos del concepto.

cómo definen los estudiantes para maestro (EPM) los polígonos, reportan como los más frecuentes en sus resultados (Tabla 11).

Tabla 11

Comparación de elementos matemáticos incluidos en la definición de polígono

Definiciones de los EPM (Pascual et al.2019)	Definiciones de los EPP
Figura plana	Figura geométrica
Cerrado	Cerrado
Segmentos rectilíneos	Segmentos
Simple	"segmentos unidos dos a dos" "posee una región poligonal"

Si bien en la Tabla 11 solo se ve la coincidencia exacta del elemento "cerrado", las respuestas de los EPP al desarrollar la situación 1 nos llevan a afirmar que *equiparan figura geométrica con figura plana*, por lo tanto, a "figura geométrica", implícitamente, le atribuyen que es plana. Por ejemplo, Laura propone abordar la "diferencia entre figura y cuerpo" como parte de los subconceptos (Figura 38) y Samuel señala que es correcto definir polígono como figura geométrica porque "no se puede confundir con cuerpos geométricos" (Transcripción 16). En esa misma línea, *los EPP suponen que referirse a segmentos implica que estos son rectilíneos (no curvos)* por ello, en el análisis de las definiciones dadas no hacen ninguna precisión sobre este elemento; además, en la definición que construyen Laura y Samuel sí se indica (Figura 19, Figura 37). Dicho supuesto es compartido con los informantes de Pascual et al. (2019). Finalmente, haciendo una asociación terminológica para el elemento "simple" observamos que los EPP consideran que *un polígono simple posee una región poligonal*. Esta característica se alinea con las expresiones equivalentes que proponen los autores de referencia.

Las consideraciones realizadas en el párrafo anterior llevan a cuestionar qué ocasionan esas equivalencias conceptuales (figura geométrica=figura plana, segmento=segmento rectilíneo, polígono simple=polígono con solo una región interior) y emergen dos posibles respuestas. La primera recae en el aprendizaje de los conceptos previos–*subconceptos*–que permiten la comprensión del concepto de polígono puesto que propician el establecimiento de relaciones intraconceptuales. La identificación de dichos subconceptos resulta ser una tarea compleja para los EPM y por ello, se observa un listado extenso de estos y pocas coincidencias entre los mismos. De la Tabla 12 podemos ver que los conceptos más recurrentes entre los informantes son: "diferencia entre cuerpo geométrico y figura geométrica" (Laura y Marta), "tipos de ángulos según su medida" (Laura, Samuel y Marta), "figuras con ángulos diferentes y figuras con ángulos iguales" (Laura y Samuel). Además, hay subconceptos que un informante ha considerado abordar en más de una definición: "segmentos mínimos para formar un polígono" (Marta), "tipos de figuras geométricas y clasificación de polígonos" (Samuel) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tabla 12

Subconceptos a trabajar para construir el concepto de polígono (C-S1: ítem 4)

Subconcepto	Laura	Samuel	Marta
Diferencia entre cuerpo geométrico y figura geométrica	1		1
Cuerpo geométrico			1
Convexo y cóncavo			1
Segmentos mínimos para formar un polígono			2
Figura geométrica			1
Tipos de ángulos según su medida	1	1	1
Región interior de una figura geométrica			1
Clasificación de cuerpos geométricos		1	
Tipos de figuras geométricas		3	
Clasificación de polígonos		3	
Figuras con lados iguales		1	
Figuras con lados diferentes		1	
Figuras con ángulos diferentes	1	1	
Figuras con ángulos iguales	1	1	
Puntos colineales y no colineales		1	
Sus lados no deben interceptarse		1	
Segmentos de recta	1		
Unión de segmentos	1		
Conceptos básicos: punto, recta, segmentos de recta	1		

Los subconceptos de la Tabla 12 podríamos agruparlos en: conceptos fundamentales (en el sentido de Ma (2010)) sobre los que se construye el aprendizaje del concepto de polígono (punto, recta, segmentos de recta o puntos colineales y no colineales); conceptos posteriores y más complejos (como cuerpo geométrico), y conceptos accesorios (como clases de ángulos y de polígonos) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). La identificación de estos grupos evidencia la distinta jerarquía de los subconceptos, lo cual, por un lado, justifica la complejidad de la tarea y, por otro lado, nos cuestiona sobre si la jerarquización es una *práctica particular del quehacer matemático*, ligada a definir (KPM).

La segunda respuesta, sobre qué ocasiona el establecimiento de equivalencias conceptuales, es la enseñanza geométrica recibida en etapas educativas previas. Si bien en la literatura hay evidencias de que la falta de correspondencia entre definiciones e imágenes de un concepto es consecuencia de la Educación Primaria (Blanco y Contreras, 2012), en nuestro trabajo hemos indagado por las definiciones y las imágenes de polígono que tienen los EPP (obtenidas estas últimas, como aproximación, a través de las representaciones que atribuyen al concepto), mas no si estas proceden de la enseñanza que recibieron. En ese sentido, dado que ya hemos abordado las definiciones, nos centraremos en las representaciones gráficas que asocian.

La primacía de la imagen conceptual sobre la definición conceptual, mencionada en párrafos anteriores, queda evidenciada porque las representaciones gráficas de polígonos y no polígonos, confirman y completan la información dada en una definición verbal. Así pues, pese a que el contenido de la definición dada por cada informante es similar (Figura 69), no ocurre lo mismo con las representaciones gráficas trazadas. De hecho, mientras Laura considera polígonos a aquellas figuras de lados cruzados (Figura 70), Samuel y Marta no lo hacen (Figura 71) (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, los ejemplos de polígono dados por Marta muestran que todos los polígonos son convexos (Figura 56) y confirma esto en los contraejemplos que propone (Figura 71) (KoT–Registros de representación).

Las características de las representaciones gráficas de polígonos y no polígonos, trazadas por los EPP, nos llevan a afirmar que, según lo propuesto por Zazkis & Leikin (2008), son *correctas* (las representaciones gráficas de cada informante se adecuan al objeto *polígono*) (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), *ricas* (en su mayoría son variadas, evidenciando características críticas –ángulos y lados de distintas medidas, los lados pueden cortarse entre sí, los segmentos rectos se unen cada dos por sus extremos– y superando los prototipos porque no se sitúan en posiciones estándar) (KoT–Registros de representación) y *generales* (están referidas al nivel de jerarquía más general: figura geométrica) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Si bien en los ejemplos de polígono de los tres EPP (Figura 70) podemos observar las características señaladas antes (corrección, riqueza y generalidad), en el caso de Marta hay restricciones puesto que, aunque sus ejemplos son correctos porque cumplen que el polígono es una figura plana y cerrada con lados rectos, su riqueza es mínima (**KoT**–Registros de representación) porque las representaciones solo contemplan polígonos convexos, esto a su vez, le resta generalidad porque solo involucran a las figuras geométricas convexas (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

El *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM) tiene como base el análisis de los elementos matemáticos de las definiciones construidas (Tabla 12) y la articulación de estos en las definiciones construidas por los EPP (Figura 16, Figura 37, Figura 55), sintetizado en la Figura 69. Siguiendo lo propuesto por Shir y Zaslavsky (2001), podemos decir que las definiciones *no son contradictorias* pese a que evidencian ciertas imprecisiones terminológicas (figura plana, segmentos de recta) (Figura 11) (**KPM**–Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal), tal como ocurre con los informantes de Pascual et al. (2019). Si bien esas imprecisiones pueden llevar a *ambigüedades* tomando como referente la matemática como disciplina, las equivalencias terminológicas establecidas por los EPP (figura geométrica=figura plana, segmentos=segmentos rectilíneos) no los lleva a caer en contradicciones. Finalmente, la *minimalidad* es la característica que menos se observa en las definiciones porque todas incluyen al menos una característica innecesaria (como, por ejemplo, "ocupa un lugar en el espacio") (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), salvo un propósito restrictivo (excluir a los polígonos de lados cruzados) como en el caso de Samuel y Marta. Por lo tanto, los EPP no evidencian un conocimiento profundo de qué características son necesarias y suficientes para definir polígono.

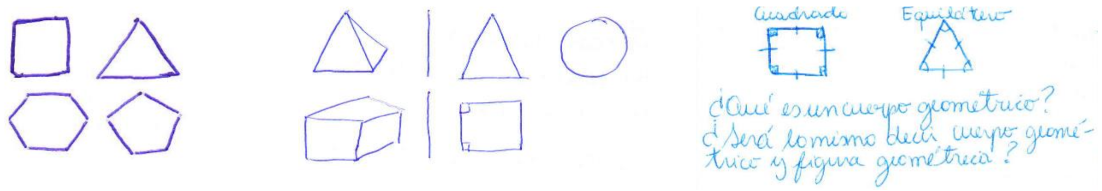
El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* emerge cuando le pedimos a los EPP que aborden los errores de sus estudiantes identificados en las definiciones dadas. En este contexto, las representaciones gráficas cobran relevancia pues las emplean para ejemplificar. Así los EPP dejan ver que en la enseñanza (de la geometría) son importantes los ejemplos (gráficos), en consecuencia, anteceden al desarrollo teórico y, posteriormente, facilitan su comprensión (**KMT** –estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Considerando la corrección, riqueza y generalidad de los ejemplos trazados de polígono (Figura 70) es esperable que dichas características se mantengan en todas las representaciones, aunque estén sujetas a aspectos específicos que abordar en cada definición. Sin embargo, lo que observamos al respecto es el uso de los polígonos más comunes (triángulos, cuadriláteros) y en posición estándar (alineados con el eje horizontal) (Figura 72), lo cual resta riqueza a los ejemplos propuestos (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Respecto de la generalidad, probablemente se visualice más en los dibujos de Samuel porque traza un prisma y una pirámide, conceptos más complejos que integran a las figuras planas (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Figura 72

Dibujos propuestos para hacerle ver sus errores a Pablo (C-S1: ítem 3)

S1: ítem 3: Si tuviese que hacerle ver a cada alumno los errores de su definición, apoyándose en un(os) dibujos ¿Cómo sería(n) este(os)? Trácelo(s) y justifique por qué emplearía dicho(s) dibujo(s).
Definición dada por Pablo: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

Laura	**Samuel**	**Marta**



Dado que en la Geometría los objetos de estudio tienen un doble estatus (Mesquita, 1992) porque cada concepto está vinculado a representaciones externas, es importante que estas no posean distractores visuales (Guillén, 2000) que propicien obstáculos de aprendizaje (Barrantes y Zapata, 2008),

El *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) queda evidenciado en la interpretación que hace cada EPP de las definiciones de polígono dadas por sus hipotéticos estudiantes. Si bien lo común es un nivel literal de interpretación, Laura supera este al señalar que Pablo: “Sabe qué es una figura plana; sin embargo, emplea mal el término cuerpo” (transcripción 6). Con esto, evidencia que sabe que los estudiantes suelen confundir los conceptos cuerpo geométrico y figura geométrica (**KFLM**–Fortalezas y dificultades). De hecho, la conexión entre ambos conceptos ha sido reportada por Guillén (2001) al señalar que "las clasificaciones de los polígonos surgen inmersas en problemas de clasificación en el mundo de los poliedros" (p. 417). Esto sirve para comprender que Samuel proponga representaciones gráficas de polígonos y prismas con apariencia similar (Figura 39) (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). El hecho de que solo Samuel incluya cuerpos geométricos en el abordaje de la situación 1 podría confirmar que Laura no considera la existencia de un error conceptual en Pablo, en torno a los conceptos de cuerpo geométrico y figura geométrica, sino solo una confusión terminológica (**KFLM**–Fortalezas y dificultades). Esto no se puede afirmar para el caso de Marta porque ella, en lugar de proponer representaciones gráficas, plantea interrogantes a sus estudiantes (Transcripción 41) (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). La interrogación a los hipotéticos estudiantes es característico y exclusivo del caso Marta. El uso de esta estrategia puede deberse a su experiencia docente adquirida al dictar clases particulares.

El *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) se evidencia solo en el caso Laura, al abordar los polígonos de lados cruzados en el cuestionario (Figura 18). Así, al proponer un cuadrilátero de lados cruzados para hacer ver a Luis los errores de su definición, justifica esta representación diciendo: "a pesar de ser polígonos no tan comunes, también existen a pesar de que no se estudien". Si bien sabe que, matemáticamente, existen los polígonos de lados cruzados (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), tiene claro que estos no se abordan en la matemática escolar (**KMLS**–Expectativas de aprendizaje).

Para el caso Marta, la única EPP que planifica y desarrolla una sesión de clase sobre polígonos, el conocimiento en torno a las figuras de lados cruzados, evidenciado en el cuestionario (no es un polígono) se modifica en el desarrollo de su sesión de clase, debido a la pregunta de un estudiante (Transcripción 55). Así pues, adopta la misma postura que Laura: reconoce la existencia de los polígonos de lados cruzados, a los que llama "especiales" (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), pero no los enseña. Esto último no lo justifica haciendo referencia a su enseñanza en la educación básica, como dejó ver Laura, sino que se escuda en la falta de tiempo para tratarlo en esa sesión de clase. Sin embargo, el conocimiento evidenciado en torno a este concepto al desarrollar el cuestionario y el que no sepa definir que son los “polígonos especiales”, hace pensar en un escaso conocimiento sobre estos.

Sobre el conocimiento de Marta respecto de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, se observan indicios en los aprendizajes esperados que señala en el plan de clase (Figura 66). En estos, además de una definición de polígono que no coincide con la dada en el cuestionario (Figura 55), propone dos capacidades centradas en la definición y en la clasificación de polígonos (**KMLS**–Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado). De estas, en el Diseño Curricular (2008), solo se explicita: “Clasifica polígonos de acuerdo a sus características” (1° de secundaria), tal como Marta ha enunciado. Mientras que sobre la definición se propone: “Define polígonos regulares e irregulares” (2° de secundaria) (ver Tabla 1, Capítulo 1), lo cual no coincide con el aprendizaje esperado (Define el concepto de polígono) que enuncia Marta en su plan de clase. Este ajuste, probablemente se deba a la consigna dada por la formadora (Tabla 6, capítulo 3) y al establecimiento de una secuenciación entre el concepto “general” de polígono y el de polígono regular e irregular (**KMLS**–Secuenciación con temas anteriores y posteriores).

4.4.2. Discusión sobre la Conceptualización de los Cuadriláteros y su Jerarquización

El análisis del diálogo en torno a la clasificación de los cuadriláteros convexos propicia la reflexión sobre lo que saben los hipotéticos estudiantes que en él intervienen (situación 2 del cuestionario). Al respecto, los tres informantes– Laura, Samuel y Marta– concluyen que es erróneo considerar que el giro de la representación gráfica de un cuadrilátero determina o modifica su esencia (lo que es) (Figura 29, Figura 42, y Transcripción 43), por el contrario, reconocen que son las propiedades quienes lo hacen (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, Laura y Samuel señalan que la fuente de dicho error son las características de las representaciones gráficas con las que se enseña los cuadriláteros en la escuela (Figura 30, Transcripción 22) (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y reconocen que la posición “estándar” de las figuras representadas influye en la construcción del concepto de cada cuadrilátero (**KFLM**–Fortalezas y dificultades). Esta consideración responde a que las representaciones gráficas pueden incluir distractores visuales (Guillén, 1997) que, debido a su orientación, generan el establecimiento de prototipos (Vinner y

Hershkowitz, 1983). Pese a lo comentado, las actividades que proponen para abordar errores o promover la clasificación de los cuadriláteros (**KMT**–Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), se basan en representaciones gráficas de variadas características y en distintas posiciones (**KMT**–Recursos materiales y virtuales), lo cual evidencia el rol trascendente que otorgan los EPP al uso de las representaciones gráficas en la enseñanza.

Los aspectos determinantes en la concepción de un cuadrilátero son empleados por los EPP con un doble propósito: ser el referente para identificar propiedades (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) y definir cada cuadrilátero (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones) y ser los criterios para clasificarlos (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Sobre el primero observamos poca uniformidad para aplicar todos los aspectos a cada cuadrilátero (Transcripción 23, Figura 58) y sobre el segundo notamos que esos criterios son empleados al elaborar clasificaciones particionales (Figura 25) o parcialmente jerárquicas (Figura 34, Figura 59).

La jerarquización de los cuadriláteros es una tarea compleja para los informantes (Transcripción 15, Transcripción 33) debido a que requiere desarrollar un proceso deductivo (no inductivo como se cree) en el que las definiciones correctas y mínimas son la base (Kumar et al., 2019). En ese sentido, dado que las definiciones construidas por los EPP no poseen esas características para todos los cuadriláteros (**KPM**–Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), es esperable que los EPP no consigan elaborar una clasificación jerárquica de estos (Figura 25, Figura 45, Figura 59), así como tampoco determinar y justificar el valor de verdad de una proposición que relaciona dos o más cuadriláteros (Figura 27, Figura 47) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Lo comentado en los párrafos anteriores lo discutimos ahora a la luz de MTSK, diferenciando los subdominios que han emergido en el análisis de resultados.

El *Conocimiento de los Temas Matemáticos* (KoT) se evidencia en los EPP cuando sostienen que el giro de la representación gráfica de un cuadrilátero no determina lo que este es. Pese a la relevancia que le atribuyen al componente gráfico, tienen claro que son las propiedades las que determinan cada cuadrilátero. El conocimiento sobre estas gira, sobre todo, en torno a tres aspectos *tradicionales* (en el sentido de Leikin & Winicki-Landman, 2000): paralelismo de los lados, medida de los lados y medida de los ángulos. Así, aunque solo Laura se enfoque en ellos (Figura 23) para: 1) determinar un cuadrilátero, 2) identificar y enunciar las propiedades que definen a cada uno (Figura 24) y 3) tomarlos como criterios de clasificación Figura 25), Samuel y Marta también los toman en cuenta, sobre todo, para (2) y (3) (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). De hecho, Samuel atribuye a todos los cuadriláteros una propiedad referida a la medida de los ángulos, a casi todos (no al trapezoide) una vinculada al paralelismo de los lados y para algunos (p.ej. rectángulo, trapecio y trapezoide) propone una propiedad referida a la medida de los lados. Además, en la clase de los paralelogramos repara en la medida de las diagonales o si al interceptarse estas determinan triángulos congruentes (Transcripción 23). Si bien no aplica los mismos aspectos al momento de enunciar propiedades, repara en las diagonales y la generación de triángulos congruentes a partir de la intersección de estas, lo cual da indicios de riqueza en su conocimiento. Al respecto, es importante señalar que ningún EPP considera la simetría, elemento que Leikin & Winicki-Landman (2000) indican como no tradicional. La escasa uniformidad observada en Samuel, al momento de enunciar propiedades, también se nota en Marta (Figura 58) pues, si bien considera los aspectos señalados como determinantes (lados, ángulos y diagonales), las propiedades enunciadas para algunos casos (p.ej. Paralelogramos), abordan dos de dichos aspectos o incorporan otros elementos como la medida de las diagonales y su perpendicularidad (p.ej. Romboide). En este último caso, se evidencian errores en las propiedades que atribuye al romboide pues, al parecer, lo ha confundido con un trapezoide simétrico (KoT–Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La consideración de los aspectos determinantes para orientar la definición y clasificación de los cuadriláteros confirma la conexión entre definición y clasificación (Ulger & Broutin, 2017). Para iniciar el proceso de clasificar jerárquicamente se propone la identificación del cuadrilátero más general (con menos propiedades añadidas); sin embargo, esta consigna parece ser entendida solo por Laura. Esta señala al trapezoide como el cuadrilátero más general porque “no tiene ninguna característica que lo haga particular” (Figura 26), mientras que Samuel indica al paralelogramo “porque de él se desprenden las demás figuras” (Figura 44). Si bien esta respuesta excluye, aparentemente, a los trapecios y trapezoides del proceso de clasificación, el esquema que propone guarda coherencia con su consideración sobre los paralelogramos (Figura 45). Sin embargo, al justificar dicho esquema señala que: “el paralelogramo comprende todos los cuadriláteros dado que de él se desprende el rectángulo, cuadrado, rombo, trapecio y romboide”. Esta respuesta, a diferencia de otras, muestra ausencia de comprensión de clasificaciones inclusivas (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esto también se observa en Marta porque entiende que el cuadrilátero más general es el que más propiedades tiene, y por ello, pese al ejemplo que se incluye junto a la consigna, señala al cuadrado como tal “porque presenta las condiciones mínimas: 1) Tiene sus cuatro lados iguales, 2) sus diagonales son iguales y 3) cuatro ángulos rectos” (Figura 60). Por las características que atribuye al cuadrado, es posible que asocie *menos propiedades añadidas* con *menos variedad* en sus propiedades, por ejemplo, no tiene unos lados iguales y otros diferentes, sino todos iguales.

La clasificación de los cuadriláteros, según el cuadrilátero que han identificado como más general, solo se lleva a cabo por Samuel puesto que en su esquema de clasificación emplea diagramas de Venn (**KoT**–Registros de representación) para mostrar que el cuadrado es el cuadrilátero más particular porque tiene características del rectángulo y del rombo (Figura 45). Sin embargo, como ya se comentó en el párrafo anterior, dicho esquema no se corresponde con su justificación de este porque haría falta incluir al romboide y al trapecio (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En el caso de Laura, pese a identificar al trapezoide como el cuadrilátero más general, elabora un esquema de clasificación particional, tal como ejemplifica De Villiers (1994). En este, tomando como criterio la cantidad de pares de lados paralelos, diferencia las tres clases comunes de cuadriláteros: paralelogramos, trapecios y trapezoides (Figura 25) (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). La justificación del esquema deja ver lo complejo que resulta hacer una clasificación jerárquica a partir del trapezoide, probablemente porque no logra establecer relaciones intraconceptuales entre los distintos cuadriláteros. Debido a esto, considera que el criterio empleado facilita las relaciones entre ellos (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esto pone en evidencia una escasa comprensión de clasificaciones inclusiva. Por su parte, Marta al igual que Samuel, hace uso de diagramas de Venn, pero si bien muestra al cuadrado como el más general (recuérdese el significado que ella establece), no logra identificar la jerarquía entre rombo, rectángulo y romboide (Figura 59). Además, los indicios de comprensión de clasificaciones inclusivas mostrada para los paralelogramos, no se extienden para el trapecio y trapezoide quienes se muestras como clases disjuntas. La justificación de esta organización solo corrobora que se entiende al cuadrado como el más general y a partir de él se establecen las relaciones con otros cuadriláteros.

La **comprensión de las clasificaciones inclusivas** y el **conocimiento de las propiedades de los cuadriláteros** se pone en juego al hallar el valor de verdad de las relaciones propuestas entre estos (C-S3: ítem 9) y al determinar qué características de los cuadriláteros cortados por tres carpinteros se ajustan a las del cuadrado (C-S4). En el caso de Laura, responde desde una postura excluyente (Figura 27), lo que es coherente con el esquema de clasificación elaborado (Figura 25). Su respuesta evidencia tener claridad de las características de rombo y rectángulo y la imposibilidad de que algunos rombos sean cuadrado. Sin embargo, no hace alusión a la relación rombo-cuadrado (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). A diferencia de Laura, que proporciona una justificación verbal, Samuel responde algunas proposiciones con representaciones gráficas, otras con argumentos verbales y otras no las responde (Figura 47). Respecto de la relación paralelogramo-rombo, traza representaciones gráficas prototipo para "mostrar" que son dos cuadriláteros distintos. Posteriormente, al justificar si "algunos rombos son cuadrados" invierte la dirección de la relación implicativa: "todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es un cuadrado". Esto mismo es realizado por Marta quien, a diferencia de Samuel, señala que la proposición "algunos rombos son cuadrados" es verdadera (Figura 62). Además, en su argumento se refuerza nuevamente que entiende que el cuadrado es el cuadrilátero con menos características. Pese a la escasa profundidad de conocimiento de las propiedades de cuadriláteros y su interrelación (**KoT**-Definiciones, propiedades y ejemplos), los tres EPP concluyen que hace falta más información para determinar si los carpinteros construyeron cuadrados de madera (C-S4). No obstante, la justificación dada por Laura resulta ser exhaustiva y no limitada por distractores visuales (Guillén, 1997). Así pues, al referirse al carpintero B, que cortó cuadriláteros con diagonales iguales, considera que "pudo construir cuadrados, rectángulos, romboide, trapecios isósceles, a pesar de que este último es muy diferente a un cuadrado, cumple con la descripción del carpintero" (Figura 28). Esto último evidencia primacía de la definición verbal sobre la imagen conceptual (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos); sin embargo, probablemente esto no ocurra para los romboides pues considera que tiene diagonales de igual medida, lo cual es un error. Por su parte, Samuel solo logra identificar al rombo en el análisis de la situación 4 (Transcripción 24) mientras que Marta se limita a trazar cuadriláteros sobre los que grafica la condición indicada. Así, pese a que señala que hace falta más información, no explicita cuál (Figura 63).

El *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT) tiene como centro el reconocimiento de las representaciones gráficas como fuentes de error, dependiendo de sus características visuales (**KMT**-Recursos materiales y virtuales). Pese a esto, los EPP las involucran en las acciones para abordar errores (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así pues, los tres EPP proponen abordar los errores identificados en el diálogo (C-S2), dibujando cuadriláteros. Laura y Samuel explicitan que serán dibujos de distintos tamaños y en distintas posiciones sobre los cuales se analizarán las propiedades para establecer relaciones (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) (Figura 30, Transcripción 22). Sin embargo, las acciones que plantea Marta llaman la atención porque se limita a dibujar un rectángulo y un paralelogramo cuyos lados tienen una medida específica (Transcripción 43) y propone el análisis de la conservación de características si se gira sobre uno de sus vértices cada cuadrilátero (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), sin dejar ver lo que espera obtener de dicha actividad (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). El uso de representaciones gráficas, para Samuel, no solo se reduce a la enseñanza, sino que para él son, en algunos casos, un recurso de validación de relaciones entre dos cuadriláteros, lo cual evidencia, por un lado, la primacía de la **imagen conceptual** sobre la **definición verbal** (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) y, por otro lado, el arraigo de representaciones de cuadriláteros en posición estándar (prototipos), pese a haber señalado que ha de evitarse esto (Figura 47). Este hecho vuelve a observarse cuando Samuel resuelve la situación del carpintero (Transcripción 24), lo cual también ocurre con Marta (Figura 63).

Luego de contrastar las evidencias de conocimiento extraídas del cuestionario, resulta necesario discutir estas para los casos de Laura y Samuel dado que planificaron una sesión de clase y la desarrollaron.

Según las consignas dadas para elaborar el plan de clase (Tabla 6-capítulo 3), Laura y Samuel debían abordan la clasificación inclusiva de los cuadriláteros. Sin embargo, solo Laura lo explicita en los aprendizajes esperados de su plan, tanto como conceptos o procedimientos como capacidades (Figura 31). Esto último puede responder a la “novedad” del conocimiento que se adquiere y del procedimiento que se sigue pues, tal como manifiesta en la autoevaluación de la ejecución de su sesión de clase (Figura 31), construir una clasificación inclusiva le generó confusión y reestructuración del esquema de clasificación propuesto en el plan de clase (Figura 33) debido a la complejidad que supone analizar todas las características de los cuadriláteros desde una perspectiva jerárquica. Antes de desarrollar este tipo de clasificación, Laura considera la clasificación tradicional de cuadriláteros al igual que lo hace Samuel, aunque este no la denomine así (Figura 48). Al respecto, Samuel a diferencia de Laura, explicita como **criterios para clasificar cuadriláteros** (la medida de) sus ángulos internos y de la medida de sus lados. Estos se corresponden con los que señaló como aspectos determinantes en la concepción de un cuadrilátero (Figura 43), así como los que toma en cuenta para enunciar propiedades que permitan definir cada uno (Transcripción 23).

En el desarrollo de la sesión de clase, Laura sí señala el paralelismo de los lados como criterio para elaborar la clasificación “común” que se aprende desde la educación primaria (**KMLS**-Secuenciación con temas anteriores y posteriores) (Transcripción 8). Al respecto, comenta que el tratamiento de este tema en los libros de texto incluye representaciones gráficas con base horizontal (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). La consideración del paralelismo como criterio de clasificación de cuadriláteros se corresponde con los aspectos determinantes en la concepción de estos (Figura 23). De hecho, a partir de la lámina con dibujos de cuadriláteros (Figura 32) construyen una clasificación disjunta como la propuesta en el esquema (Figura 25) del cuestionario: Así, diferencian paralelogramos, trapecios y trapezoides. Previo a esto, diferencia entre cuadriláteros simples y complejos (lados cruzados), convexos y no convexos (Transcripción 9). La identificación de los cuadriláteros complejos resulta coherente con la consideración de polígonos complejos manifestada en el cuestionario, pese a que estos no se estudian en la escuela (Figura 18). Al igual que Laura, Samuel ha considerado la medida de los ángulos interiores para diferenciar a los cuadriláteros convexos y cóncavos (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Posterior a esto, propone al paralelismo como criterio de clasificación (Transcripción 25) para diferenciar a los paralelogramos, trapecios y trapezoides (Transcripción 26). Esto coincide con la clasificación que Laura denominó común o tradicional.

Si bien la clasificación de Samuel no se ajusta, en conjunto, a la consigna dada (Tabla 7, Capítulo 3), sí se observa un propósito inclusivo al promover la construcción las definiciones de los cuadriláteros. Sin embargo, esta tarea, al igual que transitar de una clasificación inclusiva a una particional, le resulta compleja (Transcripción 33). La complejidad de la comprensión de la clasificación inclusiva (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) también ha sido evidenciado y manifestado por Laura (Transcripción 15). Otro aspecto en el que Samuel evidencia su intención de clasificar inclusivamente es la propuesta que le hace a un estudiante para que represente la relación entre rectángulo, rombo y cuadrado empleando diagramas de Venn (Transcripción 32), tal como él lo hizo en el cuestionario (Figura 45). A diferencia de él, Laura sí propone una clasificación jerárquica de todos los cuadriláteros y para ello hace uso de tiras de papel (**KMT**–Recursos materiales y virtuales) para simular los lados de los cuadriláteros, empezando por el trapezoide asimétrico, de tal forma que pueda llegar al esquema mostrado en la Figura 34. La complejidad de esta tarea se ve manifestada durante el proceso de clasificación porque no tiene la seguridad de qué modificaciones pueden hacerse y cómo se modifican las propiedades de un cuadrilátero para pasar a otro.

La construcción de clasificación de los cuadriláteros muestra la relevancia que le otorgan Laura y Samuel a las representaciones gráficas en **la enseñanza de los cuadriláteros** (**KMT**–Estrategias, técnicas, tares y ejemplos). Así, cuando Laura aborda la clasificación tradicional emplea una lámina con cuadriláteros de distintas formas y posiciones (Figura 32) (**KMT**–Recursos materiales y virtuales). Por su parte, Samuel propone la identificación de cuadriláteros en objetos del entorno (lo que muestra su **KoT**–Fenomenología y aplicaciones) mostrados en una lámina (Figura 49). Si bien en ambos casos predominan representaciones gráficas no prototípicas, cuando Samuel explica la definición de rombo, propone la típica representación de él (apoyado en un vértice) (Figura 50). Aunque esta posición genera contradicción con el conocimiento evidenciado en el cuestionario, también emplea dicha representación para cuestionar a sus estudiantes sobre la influencia del giro en la determinación de un cuadrilátero (Transcripción 30). Dado que concluye que no, podemos decir que Samuel conoce las propiedades de los cuadriláteros (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), pero las representaciones gráficas que propone para explicar o comprobar un conocimiento (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) poseen características prototípicas (Figura 52). Así, si bien se ve el propósito de emplear los objetos del entorno con forma cuadrilátera, en cuanto el contexto desaparece, las representaciones gráficas se reducen a los ejemplos típicos o comunes y con posiciones estándar. Con esto se evidencia la influencia que ejerce el aspecto visual en Samuel.

4.4.3. Discusión sobre el Conocimiento de las Prácticas Matemáticas de Definir y Clasificar

4.4.3.1. Conocimiento de la práctica matemática de definir

La identificación de errores, ideas confundidas y válidas en el análisis de las definiciones dadas, ha puesto en evidencia que los EPP reparan en el contenido (**KoT**-Definiciones, propiedades y ejemplos) y estructura (**KPM**-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones) de una definición de polígono. En este sentido, identifican:

- contradicciones (Transcripción 1-Laura: *los polígonos tienen lados y ángulos diferentes, pero pueden ser regulares*),

- ausencia de información (Transcripción 1-Laura: *Falta completar los elementos de polígono;* Transcripción 17-Samuel: *Con respecto a figura geométrica debe indicar que debe ser cerrada (no confundida con un círculo);* Transcripción 37-Marta*: Es una figura geomét. ¿cerrada o abierta?*),

- necesidad de precisión terminológica (Transcripción 2-Laura: *Los puntos no se pueden cruzar, las que se cruzan son las rectas que se forman al unir los puntos*), y

- aspectos innecesarios (Transcripción 17-Samuel: *Además la fórmula 180°(n-2) no especifica en sí para qué sirve,* Transcripción 37-Marta: *Está confundiendo la fórmula con la definición de polígono*, Transcripción 38-Marta: *Aquí Pablo está confundiendo la clasificación por sus ángulos y por sus lados con la definición*).

Si bien las consideraciones anteriores evidencian la atención que los EPP ponen sobre la *necesidad* de incluir una característica, no ocurre lo mismo con la *suficiencia* de esta (**KPM**-Prácticas particulares del quehacer matemático). Dicho aspecto parece ser más complejo y su omisión influye en el tipo de definiciones que construyen. Además, observamos que el reparo en las contradicciones, en la ausencia de información, en la necesidad de precisión terminológica y en los aspectos no necesarios no lo realizan en todos los casos, ni cuando analizan una definición ni cuando la construyen. Debido a esto, podemos decir que tienen un conocimiento parcial de las **características de una definición matemática** lo cual involucra saber qué es definir en matemática (KPM-Prácticas particulares del quehacer matemático) y cómo construir definiciones (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal).

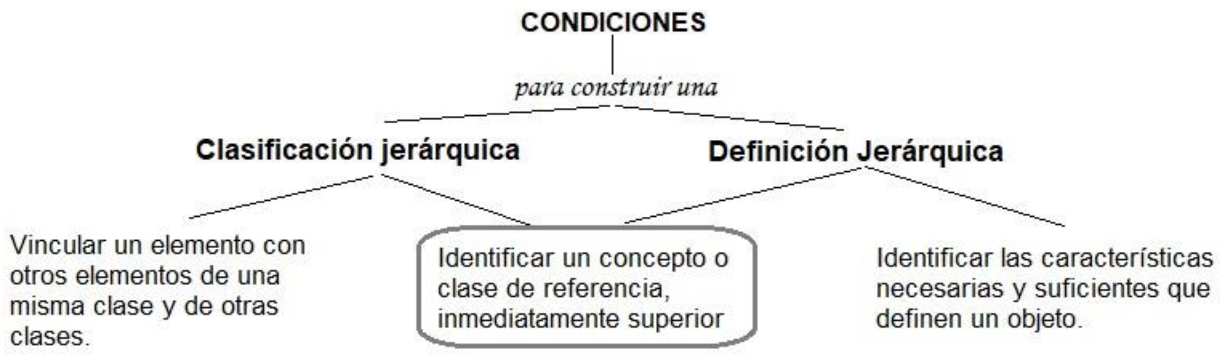
En base a lo anterior, y a las características incluidas en la Figura 69, podemos decir que, tal como en los resultados de Pascual et al. (2019), las definiciones dadas por Laura, Samuel y Marta cumplen con el criterio de *no contradicción*. Sin embargo, las de Laura y Samuel son *ambiguas* y las de Samuel y Marta *no mínimas*. La ambigüedad se genera por considerar que *ocupa un lugar en el espacio*, en lugar de referirse a plano. Esto puede estar vinculado a la confusión entre figura geométrica y cuerpo geométrico (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Por otro lado, la ausencia de minimalidad se observa por incluir elementos o características redundantes (Figura 33-Samuel: *unión de puntos no colineales y formada por segmentos de recta dos a dos*; Figura 51-Marta: *figura geométrica plana cerrada*). Esto hace pensar en la posesión de un escaso conocimiento de las características de una definición matemática.

Finalmente, si analizamos la estructura de las definiciones para tipificarlas, diremos que son *descriptivas* porque parten de una imagen conceptual para identificar las características que atribuyen a polígono, *incorrectas* por incluir propiedades innecesarias (ocupa un lugar en el espacio), *no económicas* porque incluyen elementos redundantes (figura geométrica plana cerrada) y particionales porque al concepto general *figura geométrica* le van añadiendo características para excluir casos especiales (De Villiers, 1998; De Villiers et al., 2009).

4.4.3.1. Conocimiento de la práctica matemática de clasificar

El vínculo entre definición y clasificación (De Villiers, et al.,2009; Fujita & Jones, 2007; Ulger & Broutin, 2017) lo vemos confirmado en los resultados de nuestro estudio. Pese a que no ha sido un conocimiento coincidente en los tres informantes ni en todo el desarrollo de los instrumentos realizado por cada uno, en el cuestionario hemos observado que el tipo de definición construida coincide con el tipo de clasificación que se elabora. Tenemos evidencia de algunas definiciones con cierto carácter inclusivo, pues al definir los cuadriláteros de una misma clase, en el enunciado se hace referencia a dicha clase, por ser el concepto inmediatamente superior (p.ej. Caso Laura-Transcripción 7: *Un rectángulo es un paralelogramo…*), y otras definiciones tienen por referencia otro cuadrilátero superior, no el inmediato (p.ej. Caso Samuel-Figura 46: *Un cuadrado es un cuadrilátero…*). En coherencia con esto, Laura ha elaborado, en conjunto, clasificaciones particionales (Figura 25), mientras que Samuel ha propuesto una clasificación inclusiva solo para la clase paralelogramos (Figura 45). En el primer caso, Laura diferencia tres clases de cuadriláteros: trapezoides, trapecios y paralelogramos (clasificación particional) y en cada clase señala los cuadriláteros que corresponden sin establecer vínculo entre ellos (clasificación particional) (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Si bien en esto último se ve un sentido de pertenencia entre cuadrilátero-clase inmediatamente superior, este no es suficiente para decir que la clasificación es jerárquica. Este hecho evidencia la complejidad de la práctica de clasificar jerárquicamente pues, además de ese vínculo entre un cuadrilátero y su clase inmediatamente superior, requiere el vínculo con elementos de la misma clase y con otras clases (**comprensión de clasificaciones inclusivas**). Por su parte, construir una definición jerárquica también requiere la identificación de un concepto o clase inmediatamente más general al que se le atribuyen las características necesarias y suficientes (**Características de una definición matemática**), sin un propósito excluyente (Figura 73).

Figura 73
Vínculo entre clasificación y definición jerárquica



En el segundo caso, Samuel se limita a clasificar inclusivamente los paralelogramos: rectángulo, rombo y cuadrado (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Si bien, la relación entre estos tres cuadriláteros es jerárquica, no puede asegurarse que Samuel tenga una **comprensión** (completa) **de las clasificaciones inclusivas** porque no logra definirlos según esa jerarquía y solo se limita a la clase paralelogramos, sin tener en cuenta al romboide.

En el caso de Marta, es evidente la ausencia de **comprensión de clasificaciones inclusivas** porque, así como no logró construir definiciones inclusivas de los cuadriláteros, tampoco llega a construir una clasificación de ese tipo. Si bien en la Figura 59 reconoce las tres clases de cuadriláteros que identifica Laura (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos), en la de paralelogramos no logra establecer jerarquía total entre ellos. Así, muestra que el rectángulo es más general que el romboide y que el cuadrado está incluido en el rombo, ambos en el romboide y estos tres en el rectángulo.

Si lo antes comentado lo comparamos con lo observado en el plan de clases y en la sesión de clase, vemos que predominan las clasificaciones particionales y coinciden con lo evidenciado en el cuestionario. Sin embargo, dadas las consignas para la planificación y ejecución de la enseñanza, lograr construir una clasificación jerárquica resulta complejo por las relaciones que han de procurarse entre todos los cuadriláteros (Figura 33, Transcripción 15).

A modo de resumen, observamos que la identificación de características de un objeto y su referencia inmediata a un concepto más general evidencia un conocimiento definiciones y propiedades (KoT) que no es suficiente para construir definiciones y clasificaciones jerárquicas. Para estas prácticas matemáticas es necesario el establecimiento de conexiones intraconceptuales (KoT) que posibiliten jerarquizar a los conceptos involucrados para luego, organizarlos o definirlos, según se requiera. Así pues, mientras lo complejo de una clasificación jerárquica puede ser el establecimiento de las conexiones intraconceptuales, en una definición jerárquica es construir un enunciado formal que se ajuste a las características de una definición matemática (minimalidad, no contradictoria, no ambigua, invariante bajo el cambio de representación, jerárquica, no circular). Tener una idea correcta de un objeto no asegura que se logre establecer conexiones entre este y otros, ni que se consiga definirlo empleando, únicamente, condiciones necesarias y suficientes.

Capítulo 5
Conclusiones Y Cuestiones Abiertas

La complejidad del conocimiento del profesor, debida a las distintas dimensiones que posee, ha llamado la atención de los investigadores, que han indagado sobre su naturaleza, estructura e implicancias en el proceso de enseñanza-aprendizaje (de distintas materias y en los distintos niveles educativos). Situados en la matemática, se han propuesto distintos modelos para analizarlo y caracterizarlo que tienen como base general el trabajo de Shulman (1986). De ellos, elegimos el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK*) puesto que emerge de la reflexión de las fortalezas y limitaciones de otros modelos, en cuanto a sus fundamentos teóricos y elementos estructurales. De hecho, nuestra investigación inició teniendo como referencia al modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*-MKT), pero diferenciar los subdominios Conocimiento Común del Contenido (*Common Content Knowledge*-CCK) y Conocimiento Especializado del Contenido (*Specialized Content Knowledge*-SCK) nos resultó problemático porque debíamos tener un referente externo (una persona instruida que posee un conocimiento deseable) en lugar de caracterizar el conocimiento matemático de modo intrínseco, sin referencia a personas, profesiones o titulaciones. Esta, entre otras limitaciones reportadas por Carrillo et al. (2013), nos hizo migrar al MTSK (Carreño, Rojas y Montes, 2013; Carreño, Ribeiro y Climent, 2013).

Situados en el MTSK, marco teórico y herramienta analítica para estudiar la especialización y la especificidad del conocimiento del profesor de matemática, buscamos respuesta a la siguiente pregunta *¿Qué conocimiento especializado muestran estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, al abordar situaciones de enseñanza-aprendizaje* *relativas a los polígonos, en un contexto de simulación de prácticas profesionales?* Para ello, damos cuenta del cumplimiento de los objetivos propuestos al finalizar esta memoria investigación.

Objetivo general: *Caracterizar el conocimiento especializado de estudiantes para profesor de matemática de Educación Secundaria Básica, respecto del tema de polígonos.*

OE1: Definir descriptores de conocimiento especializado sobre polígonos.

OE2: Describir el conocimiento evidenciado por los EPP.

OE3: Describir características del MTSK evidenciado, su estructura y posibles relaciones con los diferentes instrumentos y contextos de recogida de información

Dada la amplitud de la matemática como disciplina, el estudio del conocimiento del profesor suele restringirse a un bloque de contenido o tema específico. En ese sentido las investigaciones que han empleado el modelo MTSK, reportadas por Escudero-Domínguez et al., (2016) abordan los bloques de Números (destacando fracciones), Magnitud y medida, Geometría, y Análisis de datos y probabilidad. Además, desde 2016 se han realizado otros estudios en los bloques de álgebra y análisis matemático. Esto permite concluir que, *el conocimiento especializado del profesor de matemática es local*, tal como ocurre con los niveles de Van Hiele. Aparte de eso, el empleo del MTSK para investigar sobre dicho objeto de estudio en los distintos bloques de contenidos reconocidos, muestra la generalidad de los subdominios y categorías que lo componen y, por tanto, su potencialidad como herramienta metodológica.

Dado que los temas *Polígono y Cuadriláteros* pertenecen al bloque de Geometría, centramos nuestra atención en las conclusiones y cuestiones abiertas de las tesis doctorales de Aguilar (2016) y Liñán (2017) (sobre el conocimiento especializado de profesores de primaria en geometría) para hallar elementos que contribuyan en la caracterización del conocimiento especializado de nuestros informantes. Además del contenido geométrico, nos centramos en las prácticas matemáticas de definir y clasificar, razón por la cual también tomamos como referencia el trabajo de Delgado-Rebolledo (2020).

OE1: *Definir descriptores de conocimiento especializado sobre polígonos*

La utilización del MTSK como herramienta de análisis es posible por la estructura que presenta. En ese sentido, validamos que la diferenciación de subdominios y categorías, tanto para el dominio matemático como didáctico, posibilitan un análisis exhaustivo del conocimiento de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria (EPP). No obstante, el primer análisis (global) que realizamos permitió identificar elementos que emergían con regularidad. Estos, a los que denominamos *descriptores*, se vinculan con diversos subdominios (y categorías) del MTSK (Tabla 9, Tabla 10), en algunos casos con un solo subdominio y más de una categoría, en otros, a más de un subdominio. Este hecho corrobora las interrelaciones entre subdominios (Cabrera-Baquedano y Pezoa-Reyes, 2020; Carrillo et al., 2017; Escudero-Ávila, Vasco y Aguilar-Gonzáles, 2017).

Nuestros descriptores, emergidos de un análisis inicial, se alinean con marcos teóricos que abordan el *aprendizaje de los conceptos geométricos* (p.ej. Hershkowitz, 1990; Ulger & Broutin, 2017; Mariotti & Fischbein, 1993; Vinner, 1991) *y las prácticas matemáticas de definir y clasificar* (p.ej. De Villiers, 1994, 1998; De Villiers, Govender & Pattersn, 2009; Fujita & Jones, 2007; Shir & Zaslavsky, 2001; van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Winicki-Ladman & Leikin, 2000; Zazkis & Leikin, 2008). De hecho, son estos marcos los que han contribuido en la denominación atribuida. Algo similar ha ocurrido en el trabajo de Delgado-Rebolledo (2020) pues la subcategoría *características de la definición* ha sido propuesta a partir de las evidencias empíricas reportadas en estudios previos, propios y de otros autores.

Los descriptores establecidos han permitido centrar la caracterización del conocimiento evidenciado en los EPP, razón por la cual se han incluido en el discurso. Si bien estos podrían ser elementos propios (específicos) del conocimiento especializado del profesor de matemáticas cuando abordan un contenido geométrico, queda pendiente analizar si es posible agruparlos (p.ej. por subdominio relacionado) y que aporten datos sobre las características del conocimiento del profesor, respecto de un contenido geométrico. Otra cuestión que dejamos abierta es si, según el contenido matemático que se aborde, pueden emerger otros descriptores y evidenciarse otros subdominios (p.ej. Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas-KSM) que no han emergido en nuestro trabajo.

OE2: Describir el conocimiento evidenciado por los EPP.

La recogida de información a través de los tres instrumentos (cuestionario, plan de clase y sesión de clase) y la identificación de unidades de información ha permitido describir el conocimiento que operativizan los EPP respecto de los tópicos: concepto de polígono, conceptualización de los cuadriláteros y la clasificación de estos desde perspectivas particionales y jerárquicas. La potencialidad de cada instrumento ha evidenciado la necesidad de que los tres se complementen para lograr una visión más completa del conocimiento especializado de los EPP (Carreño, Climent y Flores-Medrano, 2017). Sin embargo, pese al empleo de los tres instrumentos, se hace necesario un instrumento que permita indagar sobre conocimientos de los que se tiene indicios y no certeza (Aguilar, 2015). En ese sentido, a posteriori, podríamos indagar, si las representaciones gráficas que proponen para la enseñanza son las réplicas de aquellas con las que aprendieron o cual es la razón por la cual incluyen cada característica en las definiciones construidas de polígono (p.ej. "ocupa un lugar en el espacio").

Del conocimiento evidenciado por los EPP podemos concluir que este se ve influido más por la imagen conceptual que por la definición conceptual (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En consecuencia, los EPP otorgan un papel relevante a las representaciones gráficas a la hora de enseñar los polígonos y cuadriláteros (**KMT**-Estrategias, técnicas, ejemplos y tareas) para abordar los errores de los estudiantes (**KFLM**-Fortalezas y dificultades), para promover un nuevo conocimiento, para justificar una relación entre dos o más cuadriláteros (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos) o para comprobar el conocimiento de un estudiante. Lo anterior, coincide con lo reportado por Ricart, et al (2019) pues manifiestan que: "Los resultados indican que los futuros maestros no tienen bien adquiridos los significados de algunos conceptos geométricos elementales, sus argumentos se basan más bien en aspectos perceptivos e, incluso, tiene dificultades para clasificar" (p. 503).

Por su parte, las definiciones conceptuales se explicitan en enunciados a los que les hace falta minimalidad (**KPM**-Condiciones necesarios y suficientes para formular definiciones), precisiones terminológicas (**KPM**-Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal) para lograr coherencia entre imagen conceptual y definición conceptual, respecto de los atributos que se otorgan a un concepto. Esto último es la base para desarrollar procesos de jerarquización de cuadriláteros (**KoT**–Procedimientos), siempre que se logren establecer relaciones intraconceptuales previas, de tal forma que se atenúe la declarada complejidad de construir definiciones y clasificaciones jerárquicas (**KoT**–Definiciones, propiedades y sus fundamentos) y en consecuencia, disminuya la primacía de las definiciones y clasificaciones particionales sobre las jerárquicas. La promoción de las prácticas matemáticas de definir y clasificar se ven mediadas por el uso de láminas y tiras de papel (que simulan geotiras) (**KMT**–Recursos materiales y virtuales).

En base a lo anterior y al contrastar las evidencias de nuestro estudio con las señaladas por Liñán (2017) en su investigación sobre el Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5° de Primaria, concluimos que el subdominio que más se evidencia es el KoT, sobre todo las categorías *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*, así como los *Registros de representación*. Además, las Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT) que emplea la informante de Liñán (2017) coincide con la de los EPP. Así pues, emplean el dibujo para una mejor comprensión de la geometría, trazando variados ejemplos en la pizarra, proponen ejemplos de la vida cotidiana (recuérdese el caso Samuel) y se promueve la construcción de conceptos y clasificaciones. Además, emplean recursos materiales como la pizarra para dibujar y papel que en nuestro caso sirvió para construir tiras, que sean una especie de geotiras, y permitan formar cuadriláteros. Estas coincidencias plantean la necesidad de indagar (en próximos estudios) si el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KPM) tiene unas características definidas para la geometría, puesto que, con lo anterior, se ve que hay similitudes en la *Estrategia, técnicas, tareas y ejemplos*, así como en el uso de *Recursos materiales y virtuales*.

OE3: *Describir características del MTSK evidenciado, su estructura y posibles relaciones con los diferentes instrumentos y contextos de recogida de información*

El conocimiento especializado de los EPP se caracteriza por una marcada influencia de aspectos visuales, y la emergencia de distintos subdominios al momento de realizar las prácticas matemáticas de definir y clasificar. Al respecto, predomina una perspectiva particional por lo que, la construcción de definiciones y clasificaciones jerárquicas se tornan complejas. Si bien en este proceso se ha evidenciado que el KoT es el subdominio base para los otros (Liñán, 2017), las relaciones emergentes no han involucrado al subdominio de Conocimiento de Estructura de la Matemáticas (KSM), tal como ha ocurrido en los trabajos de Aguilar (2015) y Liñán (2017). Mínimamente, sí han involucrado al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Estas limitaciones nos llevan a cuestionar si *el establecimiento de conexiones entre subdominios podría depender de la riqueza o complejidad de la situación de enseñanza-aprendizaje que se proponga.* En esta línea, dejamos abierta la posibilidad de analizar si las situaciones e ítems del cuestionario, así como el plan de clases y la sesión de clase, propician la emergencia de los subdominios que no se evidencian y cómo deberían ser o modificarse dichas situaciones y consignas para lograr que se evidencien. Con esto, reiteramos la necesidad de la complementariedad entre instrumentos de recogida de información y la inclusión de alguno que permita explicitar los conocimientos de los que solo se tienen indicios o ni siquiera estos.

El análisis de las relaciones entre cuadriláteros que establecen o no los EPP nos cuestiona sobre la necesidad de otorgar a las conexiones intraconceptuales el rango de categoría. Si bien en la descripción de la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos (KoT) se incluyen dichas conexiones, al momento de hacer el análisis y asociar dicha categoría a la evidencia, se percibe un carácter genérico en la misma, lo que resta exhaustividad a la caracterización del conocimiento de los EPP. Esta cuestión surge del análisis de la práctica de clasificar jerárquicamente los cuadriláteros. Si bien la base para clasificar es el conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos, la posesión aislada de estas no asegura la construcción de clasificaciones jerárquicas ni de definiciones jerárquicas. Sobre la cuestión planteada anteriormente no hay estudios previos, solo indicios de nuestra investigación, y esa es uno de los motivos que nos lleva a considerar necesario ponerla a discusión, en aras de seguir enriqueciendo el modelo MTSK. Algo similar le ocurre a Delgado-Rebolledo (2020) sobre establecer el conocimiento del papel del lenguaje matemático como categoría del Conocimiento de la Práctica Matemática, debido a que hay pocos estudios al respecto.

Otro cuestionamiento que nos surge de las evidencias de nuestro estudio y de la revisión de la literatura (p.ej. De Villiers, Govender & Pattersn, 2009; Fujita & Jones, 2007;

Ulger & Broutin, 2017) es que interesa indagar sobre los vínculos de definir y clasificar y cuestionar si esta última es una práctica matemática o debe incluirse dentro de la práctica de definir. En sintonía con lo anterior, Delgado-Rebolledo (2020) propone indagar sobre los vínculos entre las prácticas de definir y demostrar.

Finalmente, a la cuestión planteada por Aguilar (2015) en la prospectiva de su investigación (¿qué consecuencias para la formación inicial de maestros pueden derivarse de los conocimientos especializados detectados?), añadimos la posibilidad de indagar si la ausencia de evidencias o restricciones en las mismas, por ejemplo, en el Conocimiento de la Práctica Matemática es consecuencia de la formación recibida. Complementariamente, si no se ha recibido formación sobre ello, interesa conocer de dónde procede el conocimiento evidenciado sobre dicho subdominio.

Referencia Bibliográficas

Aslan-Tutak, F., & Adams, T. (2015). Study of Geometry Content Knowledge of Elementary Preservice Teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *7*(3), 301-318.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, *8*, 111-137.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Ball, D. L., & Wilson, S. M. (1990). Knowing the subject and learning to teach it: Examining assumptions about becoming a mathematics teacher. *American Educational Research Association*, 1-15.

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 365-402). Kluwer.

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Macmillan.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barrantes, M., & Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, *27*(1), 55-71.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Students Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235-268.

Blanco, L. J. (1996). Formación inicial del profesorado de primaria en el área de matemáticas. *Enseñanza & Teaching*, *14*, 99-117.

Blanco, L. J., & Contreras, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Union- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *30*, 101-123.

Blanco, L., & Contreras, L. C. (2002). Un modelo formativo del maestro de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. In *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Brunheira, L., & Ponte, J. P. da. (2019). From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*(April), 65-80.

Cabrera-Baquedano, A., & Pezoa-Reyes, M. (2019). Relaciones entre subdominios del PCK: La experiencia de la práctica comunitaria. In J. Carrillo, M. Codes, & L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 101-109). Universidad de Huelva Publicaciones.

Cámara Estrella, Á. M., Abril Gallego, A. M., Díaz Pareja, E. M., Gutiérrez García, F., Párraga Montilla, J. A., Romero Ariza, M., & Ortega Tudela, J. M. (2011). Análisis de competencias en la formación de maestros a través del practicum. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, *9*(2), 55.

Carreño, E., & Climent, N. (2009). Polígonos: Conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. In *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187-196). SEIEM.

Carreño, E., & Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, *14*(1), 23-53.

Carreño, E., Climent, N., & Flores-Medrano, E. (2017). Conocimiento geométrico especializado de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria al cursar la asignatura práctica profesional. Una reflexión sobre el plan de clase y su desarrollo. *Actas Del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 274-284.

Carreño, E., Ribeiro, C. M., & Climent, N. (2013). Specialized and Horizon Content Knowledge -Discussing Prospective Teachers Knowledge on Polygons. In B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2966-2975). ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) in the "dissecting an equilateral triangle" problem. *Revista Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática*, *7*(2), 88-107.

Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2020) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. *Investigación En Educación Matemática XV*, 77-98.

Cea D'Ancona, M. Á. (2004). *Métodos de encuesta: teoría y práctica, errores y mejora*. Síntesis.

Chinnappan, M., & Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 197-221.

Clements, D., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 133-148.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva.

Climent, N., Carreño, E., & Ribeiro, C. M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1761-1769.

Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C., & Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. In *Un marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 35-55). Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge.

Dalcín, M. (2006). La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y hou. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 472-477.

De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. In T. Craine & R. Rubinstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World* (pp. 189-203). NCTM.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the Twenty second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *2* (July), 248-255.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Elbaz, F. (1981). The teacher's "practical knowledge": Report of a case study. *Curriculum Inquiry*, *11*(1), 43-71.

Escudero-Ávila, D., Vasco, D., & Aguilar-González, Á. (2017). Relaciones entre los dominos y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. In F. E. de S.

de P. de M. FESPM (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 83-91). FESPM.

Escudero-Domínguez, A., & Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. In M. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). SEIEM.

Figueras, O., & Sáiz, M. (2019). Una mirada a las investigaciones internacionales sobre el conocimiento del profesor y problemas emergentes. In E. Babadillo, N. Climent, C. Fernández, & M. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 193-2014). Ediciones Universidad de Salamanca.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Flick, U. (2008). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialized Content Knowledge. In B. Ubuz, C. Haser, & M. . Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). ERME.

Fou-Lai, T., & Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. In Á. Gutiérrez, G. . Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_14

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, *9*(1), 3-20. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/14794800008520167

Gavilán, J., Sánchez-Matamoros, G., & Escudero, I. (2014). Aprender a definir en Matemáticas: estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de Las Ciencias*, *32*(3), 29-50.

Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C., & Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los Simposios de la SEIEM. In *Investigación en educación matemática XV* (pp. 33-50). SEIEM.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata, S.A.

Grossman, P., Wilson, S., & Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: El conocimiento de la materia para la enseñanza. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación Del Profesorado*, *9*(2), 1-25.

Gudmundsdottir, S., & Shulman, L. (1987). Pedagogical content knowledge in Social Studies. *Scandinavian Journal of Educationl Research*, *31*(2), 59–70.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de Las Ciencias*, *18*(1), 35–53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de Las Ciencias*, *19*(3), 415–431.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372–400.

Latorre, A., del Rincón, D., & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. GR92.

Leikin, R., & Winicky-Landman, G. (2000). On equivalent and nonequivalent definitions II. *For the Learning of Mathematics*, *20*(2), 24–29.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Vol. XII* (pp. 25–54). Badajoz: SEIEM.

Llinares, S. (1996). Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en relación a la noción de Función. In *Desenvolvimiento Profissional dos Professores da Matemática. Qué Formacao? Seccao de Educacao Matemática* (pp. 47–82). Sociedad de Portuguesa de Ciencias da Educacao.

Llinares, S., & Sánchez, V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas. In *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Alfar.

Ma, L. (2010). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and The United States* (Anniversar). Routledge.

Mariotti, M., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219–248.

Martín, R., & Porlán, R. (1999). Tendencias en la formación inicial del profesorado sobre los contenidos escolares. *Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, *35*, 115–128.

Martínez Bonafé, J. (1988). El estudio de caso en la investigación educativa. *Investigación En La Escuela6*, *6*, 41–50.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. Pearson Addison Wesley.

Mesquita, A. L. (1992). The Types of Apprehension in Spatial Geometry: Sketch of a Research. *Structural Topology*, *18*, 19-30.

Ministerio de Educación. (2008). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. RESOLUCION MINISTERIAL Nº 0440-2008-ED.

Ministerio de Educación. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*. https://bit.ly/39KWCEl

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *18*(3), 1801-1817.

Murphy, C. (2012). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 187-206.

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P., & Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestros: Análisis de sus definiciones de polígono. In J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463-471). SEIEM.

Pérez-Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I. Métodos*. La Muralla, S.A.

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de proceso de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática*, *18*(1), 37-72.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. In *Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.

Puig, L., & Calderón, J. (1996). Cabri-Geómetra o una nueva relación con la geometría. In *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp. 67-85). CIDE.

Ribeiro, C. M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Aljibe.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Ruiz Olabuénaga, J. I. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.

Ruíz, A. (2011). La lección de matemáticas a través de estudios internacionales con vídeos. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *8*, 55-121.

Savola, L. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: examples from finland and Iceland* (Tesis doctoral). Universidad de Columbia.

Scaglia, S., & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, *17*(3), 105-120.

Schoenfeld, A. ., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In T. Wood & D. Tirosh (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.

Shir, K., & Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of square. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 161-168). Utrecht University.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 691-719.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(5), 691-719.

Snape, D., & Spencer, L. (2003). The Foundations of Qualitative Research. In J. Ritchie & J. Lewis (Eds.), *Qualitative Research Practice* (pp. 1-23). SAGE Publications.

Somayajulu, R. B. (2013). *Capturing Pre-Service Teachers' Mathematical Knowledge For Teaching of Geometry*. 6-10.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Ulger, T. K., & Broutin, M. S. (2017). Pre-Service Mathematics Teachers' Understanding Of Quadrilaterals And The Internal Relationships Between Quadrilaterals: The Case Of Parallelograms. *European Journal of Educational Research*, *6*(3), 331-345.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 91-106.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM*, *83*(1), 20-25.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 64-81). Kluwer Academic Publishers.

Winicki-Ladman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 17-21.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 15-21.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148.

Apéndices

Apéndice A:

Temas asignados para desarrollar una sesión de clase

<table>
<tr><th>MARTA: Concepto de polígono y clasificación</th><th>Curso: 2011-II</th></tr>
<tr><td>Consideraciones</td><td>17/11/11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Iniciará comentando que al iniciar la clase de polígonos en la otra aula, algunos alumnos lo han definido como:
<table>
<tr><th>Alumno</th><th>Definición[109]</th></tr>
<tr><td>Pablo</td><td>Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.</td></tr>
<tr><td>Ana</td><td>Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales.</td></tr>
<tr><td>Gaby</td><td>Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n-2).</td></tr>
<tr><td>Luis</td><td>Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.</td></tr>
</table>
Entonces, a partir de esto, debe iniciar un análisis con sus alumnos para construir la definición. Ésta debe construirla con los aportes de ellos, además debe proporcionar los ejemplos gráficos necesarios.
Posteriormente, a partir de los ejemplos gráficos, se hará la clasificación de los polígonos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>SAMUEL: Clasificación de cuadriláteros</th><th>Curso: 2011-II</th></tr>
<tr><td>Consideraciones</td><td>17/11/11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Iniciará preguntando a sus alumnos ¿qué cuadriláteros conocen? Y qué caracteriza a cada uno para luego, definirlos inclusivamente (partiendo del más general hasta llegar al más particular, por ejemplo: Un rectángulo es un paralelogramo con los ángulos rectos).
Luego les entregará 2 siluetas de cuadriláteros con las siguientes características:
a) cuadrilátero de lados iguales.
b) Cuadrilátero de diagonales iguales.
Y les pregunta: ¿qué cuadrilátero es cada uno? Justificando su respuesta.
Para consolidar ideas les propondrá determinar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
Todos los cuadriláteros son trapezoides (   )
Algunos cuadrados son trapecios (   )
Algunos rombos son cuadrados (   )
Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados (   )
(Esto último también podría proponerlo de evaluación, pero si lo hace, ha de revisarlo con ellos antes de terminar la sesión).</td></tr>
</table>

[109] Esta información corresponde a la situación 1 del cuestionario.

LAURA: Clasificación inclusiva de cuadriláteros	Curso: 2012-II
Consideraciones	03/10/12

Dado que el objetivo de la clase será construir una clasificación inclusiva de los cuadriláteros y por ende se abordará (aunque no como objetivo de la clase) las definiciones de cada uno con esta misma característica (inclusiva), se le propone iniciar la sesión proporcionando a los alumnos distintos cuadriláteros numerados en una hoja para a continuación, darles la consigna de que los clasifiquen, bajo el criterio que quieran pero cuidando que estén relacionados y no tratados como clases disjuntas.

En los dibujos que proporcione, debe contemplar la posición estándar de algunos, de tal forma que cuestione qué es lo relevante para decir que una figura es lo que es. Puede servirle de guía lo que usted desarrolló en el ítem 3, situación II del cuestionario. Intente explicar con el máximo detalle posible las causas de los errores señalados (¿A qué pueden deberse?, ¿qué comprensión del contenido muestran los alumnos?). Luego, indique ¿Qué plantearía como profesor para abordar estos errores?

<u>Situación 2</u>: En la clase de 2° de secundaria acaban de definir un cuadrilátero como polígono de cuatro lados. El profesor ha indicado que se dividen en cóncavos y convexos y ha definido estos. Luego, al iniciar la reflexión sobre cuadriláteros convexos se suscita el siguiente diálogo.

Profesor: ¿Qué cuadriláteros convexos conocen? Escriban el nombre y tracen un dibujo de cada uno.

Ana: (levanta la mano): rectángulo, cuadrado y paralelogramo y sale a la pizarra para dibujarlos.

Pablo (agrega): rombo y trapecio y los dibuja.

Profesor: ¿Hay alguno más?

Claudia: romboide y trapezoide.

Luis: romboide y paralelogramo son lo mismo.

(Se genera murmullos por lo que acaba de decir Luis)

Profesor: Eso lo aclararemos más adelante, ahora continúen pensando en los cuadriláteros que conocen.

Beatriz: Un rombo es un cuadrado girado.

Profesor: ¿Así? ¿Entonces para ser un cuadrilátero determinado hay que fijarse en el giro que muestra su representación gráfica?

Pablo: Para algunos creo que sí, porque el paralelogramo si se gira, se parece a un rombo.

Profesor: Bueno, y ¿qué pasa si no giran los cuadriláteros? ¿Son iguales? ¿Estarán relacionados?

Beatriz: Si no los giran no estarán relacionados porque, un cuadrado no será un rombo.

Ana: El giro no importa, porque un rombo es un cuadrado porque tiene los lados iguales

Sus respuestas fueron:

Error	Causa del error	Acción a plantear
Error de asociar la imagen de romboide al paralelogramo	Al decir o enseñar paralelogramo se asocia solo la imagen del romboide, a la imagen de romboide se le llama paralelogramo propiamente dicho.	Hacer una clasificación detallada de los cuadriláteros, así decir que los paralelogramos son aquellos que tienen 2 pares de lados paralelos y las figuras que cumplen esta característica son los cuadrados, rectángulos, romboide y rombo. Una clasificación según el paralelismo de los lados.
Error: giro determina una figura y sus relaciones. Error el rombo es un cuadrado por tener lados iguales.	Siempre se muestran los cuadriláteros en la misma posición, así el cuadrado (□), el rombo ◇), el rectángulo (▭), etc.	Trabajaría primero cuadrilátero por cuadrilátero, es decir, por ejemplo, trabajaría primero cuadrado y presentaría imágenes de cuadrado en diferentes posiciones y tamaños, y luego junto con los alumnos ir sacando las características y así con todos. Luego ver que características en común tienen y establecen relaciones entre ellos. Lograr que se den cuenta que hay cuadriláteros con características comunes pero también tiene características particulares que lo hacen ser lo que son.

Apéndice B:

Orientaciones para la validación del cuestionario Conocimiento Matemático para la Enseñanza

El presente cuestionario que será aplicado a los estudiantes de IV, VI, VIII y X ciclo de la especialidad de Matemática y Física tiene como finalidad identificar y caracterizar el conocimiento geométrico para la enseñanza, en las dimensiones de conocimiento común (CCK), conocimiento especializado (SCK), conocimiento del contenido y enseñanza (KCT) y conocimiento del contenido y estudiantes (KCS) que van adquiriendo o que han adquirido durante la carrera.

En coherencia con la tesis, los objetivos específicos del cuestionario son:

- Identificar el conocimiento geométrico para la enseñanza, que tienen los estudiantes para profesor en torno a los temas de Polígonos y cuadriláteros.
- Caracterizar el conocimiento geométrico para la enseñanza que tienen los estudiantes para profesor en torno a los temas de Polígonos y cuadriláteros.
- Detectar las limitaciones formativas en el campo geométrico del actual plan de formación para profesor.

Según el marco de Ball, es muy complejo para un profesor o investigador, separar el conocimiento de la materia del campo de la enseñanza, por ello, aunque inicialmente pretendíamos centrar nuestro trabajo en el conocimiento especializado del contenido desprovisto del ámbito de la enseñanza, nos dimos cuenta lo difícil que es hacerlo, ya que este ámbito del conocimiento se justifica por la enseñanza, puesto que el conocimiento especializado del contenido se concibe como “un tipo de conocimiento del contenido que necesitan únicamente los docentes–una forma de conocimiento profesional basado en la disciplina de referencia” (Ball, Thames and Phelps, 2007, p.1).

En la primera parte del cuestionario se busca conocer si los estudiantes saben qué es un polígono, pueden dar o analizar una definición y además reflexionar sobre ella para descubrir los subconceptos que la integran. Por otro lado, buscamos conocer la coherencia entre sus concepciones, definición e imagen conceptual, esto podrá manifestarse al momento de plantear ejemplos que muestren claramente qué es y qué no es un polígono.

La segunda parte del cuestionario tiene como objetivo explorar en las habilidades de demostración e inferencia de los estudiantes frente a una fórmula matemática, cara a una justificación y generalización matemática.

La tercera parte del cuestionario tiene como objetivo, servirse de los cuadriláteros, para observar el análisis, las relaciones que los estudiantes establecen o deberían establecer entre estos, así como las definiciones que pueden elaborar bajo ciertas condiciones.

Agradecemos la valoración que pueda hacer del instrumento en cuestión pues servirá para dotar de validez nuestra investigación y mejorar lo que sea necesario en dicho instrumento.

Apéndice C:
Categorías e indicadores de análisis de la prueba piloto

DOMINIO: CONOCIMIENTO MATEMÁTICA (SMK[110])

SUBDOMINIO: CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO (CCK[111])

***Bloque 1**: Definición e imagen de un concepto*
CdM1[112]: Definición conceptual de un objeto geométrico.
CdM2: Identificación de los elementos de un objeto geométrico.
CdM3: Construcción de una definición verbal de un objeto geométrico adecuada a convenios matemático.
CdM4: Análisis de la definición de un objeto geométrico dada por su adecuación al convenio matemático general sobre lo que se entiende por dicho objeto.
CdM5: Representación gráfica de un objeto geométrico y sus elementos, evidenciando la imagen conceptual de dicho objeto.
CsM1: Saber qué es una definición matemática.
CsM2: Análisis de la definición de un objeto geométrico por su adecuación a cómo se define en matemáticas.

***Bloque 2**: Propiedades[113] de un objeto geométricos*

Bloque 2.1. Estudio de propiedades no métricas

CdM6: Conocimiento de las propiedades de un objeto geométrico[114].
CdM7: Saber analizar las propiedades de un objeto geométrico.
CdM8: Saber analizar las relaciones entre las propiedades de un objeto geométrico.
CdM9: Análisis de las relaciones entre las propiedades de distintos objetos geométricos.
CdM10 Enunciado de una propiedad sobre un objeto geométrico.
CdM11: Identificación de la variabilidad de los elementos o propiedades de un objeto geométrico.
CdM12: Construcción de un objeto geométrico dadas ciertas condiciones.

Bloque 2.2. Conocimiento relativo a fórmulas

---

[110] Se emplea las siglas de los nombres en inglés: subject matter knowledge (SMK).

[111] Se usan las siglas de los nombres en inglés de cada subdominio del MKT.

[112] Se diferencia *conocimiento de matemática* (CdM) de *conocimiento sobre matemática* (CsM), nociones dadas por Ball & McDiamird, 1990 y trabajas posteriormente, por Climent, 2002.

[113] Según la vigésima segunda edición del Diccionario de la Real Academia de la Lengua, una de las acepciones de **propiedad** es: f. *Atributo o cualidad esencial de alguien o algo*. Por otra parte, **característica** se define como: *adj. Dicho de una cualidad: que da carácter o sirve para distinguir a alguien o algo de sus semejantes*.

[114] Entendemos que las relaciones entre elementos de un objeto geométrico constituyen propiedades de éste. Además, el que el EPP sepa qué elementos están vinculados, no implica que conozca o no la propiedad correcta o que tenga que enunciarla, como se señala en el CdM11.

CdM13: Enunciado de fórmulas para calcular las relaciones métricas o las regularidades de los objetos geométricos.
CdM14: Inferencia de una fórmula que exprese una relación métrica o una regularidad de un objeto geométrico.
CdM15: Demostración de una fórmula que exprese una relación métrica o una regularidad de un objeto geométrico.
CdM16: Evaluación de la adecuación de un procedimiento de cara a calcular una métrica de un objeto geométrico.
CdM17: Evaluación de la adecuación de un procedimiento de cara a inferir una relación métrica o una regularidad de un objeto geométrico.
CdM18: Evaluación de la adecuación de un procedimiento de cara a demostrar una fórmula que exprese una relación métrica o una regularidad de un objeto geométrico.

Bloque 2.3. Conocimiento relativo a clasificaciones

CdM19: Clasificar u organizar un objeto geométrico eligiendo criterios matemáticamente potentes.
CdM20: Consideración de criterios variados para construir clasificaciones o definiciones disjuntas de un objeto geométrico.
CdM21: Consideración de criterios variados para construir clasificaciones o definiciones inclusivas de un objeto geométrico.

SUBDOMINIO: CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO (SCK)

SCK1: Identificación de los subconceptos implicados en una noción geométrica.
SCK2: Identificación de las características críticas[115] en una definición o noción dada de un objeto geométrico.
SCK3: Identificación de las característicaS críticas al construir una definición de un objeto geométrico.
SCK4: Análisis de la coherencia entre una definición dada de un objeto geométrico y un conjunto de características críticas asociadas al mismo.
SCK5: Análisis de la coherencia entre una definición verbal y un conjunto de representaciones del objeto definido[116].
SCK6: Validación de si una propiedad es característica de una familia de objetos geométricos.
SCK7: Definición de las distintas clases de un objeto geométrico cuidando la coherencia con la representación de clasificación elaborada.
SCK8: Comparación de las distintas clasificaciones de un objeto geométrico.

[115] Según el DRAE (22 ed.) Dicho de una cualidad: Que da carácter o sirve para distinguir a alguien o algo de sus semejantes.

[116]Aunque un matemático pueda hacerlo, no es usual que lo haga, sin embargo sí es una tarea necesaria para enseñar.

DOMINIO: CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO (PCK)

SUBDOMINIO: CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y ENSEÑANZA (KCT)

KCT1: Elección de ejemplos y contraejemplos gráficos que resalten las características críticas de la definición de un objeto geométrico sin añadir ninguna accesoria.
KCT2: Elección de ejemplos gráficos de un objeto geométrico que validen o invaliden alguna propiedad.
KCT3: Elección de un procedimiento de cara a inferir una relación métrica o una regularidad de un objeto geométrico.
KCT4: Elección de un procedimiento de cara a demostrar una fórmula que exprese una relación métrica o una regularidad de un objeto geométrico.
KCT5: Elección de una representación[117] (esquema) adecuada al elaborar la clasificación de un objeto geométrico.

SUBDOMINIO: CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y ESTUDIANTES (KCS)

KCS1: Interpretación del pensamiento de los alumnos a partir de sus manifestaciones.

Bloque de conocimiento transversal: Lenguaje Matemático

CdM22: Explicación de procedimientos seguidos en la resolución de una situación geométrica, empleando términos matemáticos adecuados.
CdM23: Justificación de las respuestas dadas, de las afirmaciones o negaciones de una proposición.
CdM24: Notación matemática.
CsM3: Conocer las reglas del lenguaje matemático.

[117] Representación indica el esquema de clasificación, no un dibujo de un objeto geométrico.

Apéndice D:

Sílabo de la asignatura Práctica Profesional A

I. Datos informativos

Nº de créditos : 4
Ciclo : VIII
Semestre : 2012-II

II. Fundamentación

La práctica profesional A es una asignatura que comprende un conjunto integrado de actividades técnico pedagógicas, que tienen como finalidad el contacto inicial del estudiante con la tarea docente. Esta asignatura se caracteriza por integrar los aspectos personal, profesional, ético, social, globalizador y práctico. Este último aspecto cobra mucha importancia, pues los conocimientos que se ha recibido hasta el momento en la formación académica, han de concretarse en la elaboración y ejecución de sesiones de enseñanza-aprendizaje. Por ello, el estudiante para profesor deberá tomar decisiones respecto a la planificación de las clases simuladas (determinando objetivos, seleccionando y organizando contenidos, dosificando el tiempo, etc.) y a su desarrollo (seleccionando también los métodos, técnicas, estrategias, medios y materiales, etc., que resulten más apropiados).

III. Objetivos

1) Evidenciar dominio de contenidos de matemática y física al diseñar y desarrollar las sesiones de enseñanza-aprendizaje, así como en las pruebas escritas u orales.
2) Planificar y realizar sesiones de enseñanza-aprendizaje significativas[118], empleando documentos básicos del docente[119]y buscando promover en sus alumnos la adquisición de contenidos, procedimientos y actitudes.
3) Consolidar y ampliar los conocimientos pedagógicos y didácticos, adquiridos durante la formación académica, reflexionando sobre ellos para aplicarlos en la planificación y desarrollo de sesiones de enseñanza-aprendizaje.
4) Participar activamente, con apertura y actitud crítica en su formación docente; observando y reflexionando las sesiones de enseñanza-aprendizaje desarrolladas por cada estudiante para profesor.

---

[118] Entendiendo el aprendizaje como construcción de conocimiento, y por ende, que no es fácil de olvidar. Para la consecución del aprendizaje *es necesario conectar la estrategia didáctica del profesorado con las ideas previas del alumnado y presentar la información de manera coherente y no arbitraria, "construyendo", de manera sólida, conceptos, interconectando los unos con los otros en forma de red de conocimiento.* (Ballester, A. (2002) El aprendizaje significativo en la práctica: Cómo hacer el aprendizaje significativo en el aula. Extraído el 02/08/12 de: http://www.aprendizajesignificativo.es/libreria-digital/el-aprendizaje-significativo-en-la-practica-como-hacer-el-aprendizaje-significativo-en-el-aula/)

[119] Diseño Curricular Nacional (DCN), guías de diversificación, orientaciones para el trabajo pedagógico, libros de textos, etc

IV. Contenidos

Generales

1. Introducción al análisis de situaciones de enseñanza.
2. La educación básica peruana y el diseño curricular nacional.
   2.1. Fundamentos y propósitos.
   2.2. Diversificación curricular y evaluación.
   2.3. El área de Matemática.
   2.4. El área de Ciencia y Ambiente.
3. La sesión de enseñanza-aprendizaje.
4. Enseñanza y aprendizaje: concepciones y posicionamientos para desarrollar la práctica docente.

Disciplinares

A) Matemática

1. Numeración: número, numeral, sistemas de numeración (base, clasificación), conversión de sistemas de distintas bases, operaciones aritméticas.
2. Sistemas numéricos: N, Z, Q, Q', R. Operaciones aritméticas.
3. Divisibilidad: número primo, número compuesto. Divisor, múltiplo. Criterios de divisibilidad. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
4. Proporcionalidad directa e inversa. Regla de tres simple y compuesta. Tanto por ciento.
5. Lenguaje verbal y algebraico.
6. Teoría de exponentes
7. Teoría de ecuaciones Sistema de ecuaciones.
8. Ángulos: Definición, clases, medida.
9. Polígonos: Definición, clasificación. Triángulos, cuadriláteros. Polígonos regulares e irregulares.
10. Área y perímetro de regiones poligonales.

B) Física

1. Ciencia y Física. El método científico. Conceptos, leyes, modelos y teorías. Física clásica y física moderna.
2. Sistema Internacional de unidades; conversiones. Magnitudes físicas. Análisis dimensional.
3. Vectores y Escalares. Vectores libres Componentes de un vector en una dos, y tres dimensiones. Vectores unitarios. Operaciones con vectores. Vector negativo. Suma vectorial. Producto de un escalar por un vector. Producto de vectores: vectorial y escalar.
4. Movimiento de las partículas. Movimiento, tipos. Descriptores del movimiento. Movimiento con velocidad constante. Movimiento con aceleración constante. Caída libre. Movimiento parabólico.
5. Movimiento Circular uniforme y no uniforme. Velocidades relativas.
6. Mecánica de las Partículas. Fuerza. Resultante de varias fuerzas concurrentes. Estática de la partícula. Equilibrio y diagrama de cuerpo libre. Inercia. Primera ley de Newton. Momento de fuerza. Dinámica de la partícula. Masa. Segunda ley de Newton. Peso. Tercera ley de Newton. Fuerzas de rozamiento.

7. Trabajo realizado por una fuerza constante. Trabajo negativo y trabajo realizado por la fuerza de fricción. Trabajo realizado por la gravedad. Trabajo y energía cinética. Trabajo realizado por una fuerza variable. Caso resorte, caso general.
8. Energía potencial gravitatoria. Fuerzas conservativas y no conservativas. Conservación de la energía mecánica. Energía potencial elástica.

V. Estrategias metodológicas

- Los contenidos generales serán desarrollados a través de sesiones magistrales y debates de los documentos que serán señalados oportunamente a los estudiantes.
- En la planificación de cada sesión de enseñanza-aprendizaje debe considerarse lo propuesto en el Diseño Curricular Nacional (DCN). Además, dicho plan ha de ser revisado con el formador una semana antes de desarrollarse, de lo contrario la sesión de enseñanza-aprendizaje no podrá llevarse a cabo.
- Los estudiantes para profesor (EPP) asumirán un doble rol cuando uno de sus compañeros desarrolle su sesión de enseñanza-aprendizaje: por un lado serán alumnos del grado que se indique y por otro lado, observarán y evaluarán el desarrollo de dicha sesión. Bajo el primer rol, tomarán apuntes y harán todas las preguntas que consideren necesarias para conseguir el aprendizaje. Para el segundo rol, anotarán las observaciones y preguntas respecto de contenidos, recursos, metodología, desempeño en el aula, etc.
- Las sesiones serán grabadas para que a la siguiente clase se realice la crítica pedagógica, esto implica el análisis y evaluación de cada una, de tal forma que se promueva la reflexión sobre la práctica y se propongan acciones de mejora. Luego de la crítica pedagógica, cada alumno evaluado hará un análisis a posteriori de su clase desarrollada.
- Los estudiantes para profesor (EPP), en grupos de dos, deben visitar tres instituciones educativas (privada, parroquial y estatal) para observar la infraestructura, organización institucional y además dos sesiones de clase (una de matemática y una de física) de un profesor de cada institución visitada. Dichas observaciones serán registradas en las fichas respectivas.
- Se tomará pruebas escritas sobre los contenidos disciplinares desarrollados durante la carrera o que son parte de la Educación Básica Regular. En estas pruebas se abordará el contenido disciplinar desde la enseñanza y el aprendizaje y no solo desde la disciplina pura. Además, los exámenes parcial y final tendrán una parte de contenidos disciplinares, que se indicarán oportunamente, y otra de diseño curricular.
- Los EPP deben presentar al finalizar el curso una carpeta pedagógica que contenga: los cargos de las cartas firmadas de las tres instituciones educativas visitadas, las fichas de observación de la infraestructura y organización de estas, las fichas de observación de las sesiones de un profesor de cada institución a la que asistieron, los apuntes y material entregado en las sesiones (según su rol de alumno), las observaciones consideradas desde el rol de evaluador de la sesión, el análisis a posteriori de cada clase desarrollada (ficha de evaluación), sus prácticas y exámenes, su autoevaluación sobre el desempeño desarrollado en el Show de Ciencia Mágica, el trabajo sobre libros de texto y el proyecto de tesis de licenciatura.

VI. Evaluación

- Desarrollo de 3 sesiones de enseñanza-aprendizaje (ninguna de estas notas se anula).
- 5 prácticas (2 de matemática y 3 de física, de las cuales se anulará la más baja).
- Un trabajo de investigación sobre libros de texto[120] (equivalente a dos notas).
- Examen parcial y final (equivalente a 6 notas), no hay examen sustitutorio.
- Carpeta pedagógica[121].
- Elaboración del proyecto de tesis de licenciatura.
- Organización del Show de Ciencia Mágica.

Total de notas a considerar: 18.

La promoción del curso es con promedio final 11.00.

VII. Bibliografía

- Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psiciología de Jean Piaget*. Buenos Aires: Kapeluz.
- Aebli, H. (1995). Doce formas básicas de enseñan. Una didáctica basada en la psicología. Madrid: Narcea.
- Castro; E., Rico, L. y Castro, E. (1992). Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar. Madrid: Síntesis.

Catalá, M. (et al.) (2002). La ciencias en la escuela: teorías y prácticas. Barcelona: Graó.Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*(59), 389-407.

Ball, D., & McDiamird, W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W. Houston, *Handbook for research on teacher education.* New York: Macmillan.

Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. In M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 77-98). Ciudad Real: SEIEM.

Cea D'Ancona, M. Á. (2004). *Métodos de encuesta. Teoría y práctica, errores y mejora.* Madrid: Síntesis.

---

[120] Este trabajo será individual, pero con la intención de no recargarlos y de que tengan apoyo en parte de su elaboración, unos aspectos serán trabajados por parejas, no obstante, cada uno redactará su propia memoria de la investigación (Ver guía para elaborar el trabajo: El desarrollo longitudinal de un contenido en diversos libros de texto).

[121] Su calificación dependerá de las fichas de observación de las instituciones visitadas, los informes de evaluación de las clases dictadas por cada compañero, los apuntes tomados y el material que se recopila en cada una de estas, la presentación (forma) de la carpeta misma y una nota por la **asistencia y puntualidad** a cada una de las sesiones de clase.

Ministerio de Educación del Perú. (2012). *Marco de Buen Desempeño Docente.* Retrieved from http://www.perueduca.pe/documents/60563/ce664fb7-a1dd-450d-a43d-bd8cd65b4736

Pérez Serrano, G. (2008). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes* (Vol. I Métodos). Madrid: La Muralla, S.A.

- Duschl, R. (1997). Renovar la enseñanza de las ciencias: importancia de las teorías y su desarrollo. Madrid: Narcea.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). Figuras geométricas, planas y del espacio. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). El maestro y su comprensión del sistema numérico N. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). El maestro y su comprensión del sistema numérico Z. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). El maestro y su comprensión del sistema numérico Q. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). El maestro y su comprensión del sistema numérico R. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). Aplicaciones de la propiedad distributiva. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). Juegos matemáticos. Lima: Ministerio de Educación.
- Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (2001). Modelos geométricos y la realidad. Lima: Ministerio de Educación.
- Fernández, A.; Rico, L. (1996). Prensa, educación matemática. Madrid: Síntesis.
- Fernández, J. y Rodríguez, M. (1997). Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental. Madrid: Síntesis.
- Gil, D. (et al.) (1991). La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona.
- Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.
- Jones, B. (et al.) (1997). Estrategias para enseñar a aprender. Buenos Aires: Aique.
- Kilpatrick, J. y Rico, L. (1994). Educación matemática e investigación. Madrid: Síntesis.
- Martín, C. (et al.) (1992). Enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. Madrid: Rialp.
- Parra, C. y Saiz, I. (Comps.). (1994). Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós.
- Rico, L. (Ed.). (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid: Síntesis.
- Siguero, F. y Carrillo, E. (1996). Recursos en el aula de matemáticas. Madrid: Síntesis.
- Socas, M. (et al). (1996). Iniciación *al álgebra*. Madrid: Síntesis.

ANEXO 1: DESGLOSE DE LA CARGA DE TRABAJO SEMESTRAL 2012-I

Semana	**HT** [122]	**HP**	**EP**	**HE**	**Temario**
1ª Del 6 al 11 de agosto	4		6		Lineamientos generales de la asignatura. 1. Introducción al análisis de situaciones de enseñanza 2. La educación básica peruana y el diseño curricular nacional. Fundamentos y propósitos. 3. Esquema a seguir en el diseño de la sesión de enseñanza-aprendizaje.
2ª Del 13 al 18 de agosto	3	1	6		2. La educación básica peruana y el diseño curricular nacional. 2.1. Fundamentos y propósitos. 2.2. Diversificación curricular y evaluación. 2.3. El área de Matemática. 2.4. El área de Ciencia y Ambiente. 3. La sesión de enseñanza-aprendizaje. 4. Enseñanza y aprendizaje: concepciones y posicionamientos para desarrollar la práctica docente.
3ª Del 20 al 25 de agosto		4	10	2	<u>Matemática</u> 1. Sistemas de numeración y concepto de base. 2. Los números enteros: definición, adición y sustracción.
4ª Del 27 de agosto al 01 de setiembre		4			3. Los números racionales: Ubicación en la recta numérica, concepto de fracción, números mixtos, fracciones equivalentes. 4. Adición, multiplicación y división de números racionales.
5ª Del 3 al 8 de setiembre		4	8	2	5. Divisibilidad: divisor, múltiplo, criterios de divisibilidad. 6. Proporcionalidad directa e inversa.
6ª. Del 10 al 15 de setiembre		4			7. Lenguaje verbal y algebraico. 8. Sistemas de ecuaciones.
7ª Del 17 al 24 de setiembre		4			1. Tema de geometría 2. Tema de geometría

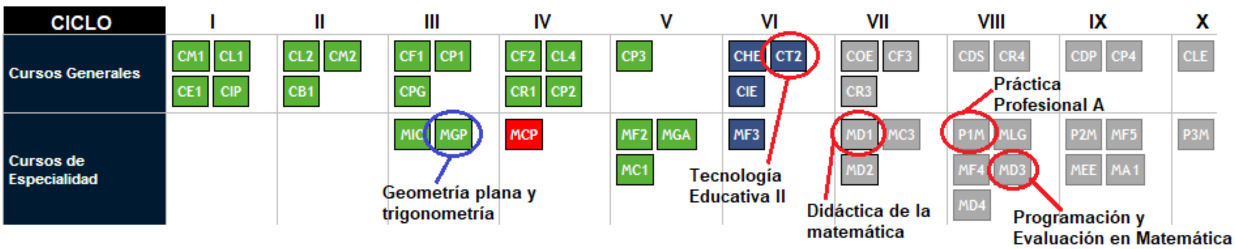
[122] **HT**: Cantidad de horas teórica, **HP**: Cantidad de horas prácticas, **EP**: Cantidad de horas de estudio personal, **HE**: Cantidad de horas de evaluación.

	EXÁMENES PARCIALES (Del 25 de setiembre al 02 de octubre)				
9ª Del 03 al 6 de octubre		2			3. Tema de geometría 4. Tema de geometría
10ª Del 9 al 13 de octubre		2			3. Tema de geometría 4. Tema de geometría[123]
11ª Del 15 al 20 de octubre		4	8	2	5. Tema de geometría 6. Tema de geometría
12ª Del 22 al 27 de octubre		4	8	2	7. Tema de geometría 8. Tema de geometría
13ª Del 29 de octubre al 3 de noviembre		4	8	2	<u>Física</u> 1. El método científico 2. Vectores
14ª Del 5 al 10 de noviembre		4			3. Movimiento con aceleración constante 4. Movimiento circular
15ª Del 12 al 17 de noviembre		4			5. Equilibrio y diagrama de cuerpo libre 6. Leyes de Newton (Segunda ley)
16ª Del 19 al 21 de noviembre (*)		4			7. Trabajo realizado por una fuerza constante. 8. Energía: tipos. Teorema del trabajo y la energía.
	EXÁMENES FINALES (Del 22 al 30 de noviembre)				

[123] En esta semana se llevará a cabo el análisis, porque la semana anterior solo tiene un día de clase debido a los Exámenes parciales.

Apéndice E:

Malla curricular de la licenciatura en educación, nivel secundaria, especialidad matemática y física



Leyenda:

Ciclo I
CM1: Matemática I
CL1: Lengua Castellana I
CE1: Metodología del estudio
CIP: Introducción a la pedagogía

Ciclo II
CM2: Matemática II
CL2: Lengua Castellana II
CB1: Biología

Ciclo III
CF1: Introducción a la filosofía
CP1: Psicología general
CPG: Pedagogía general
MIC: Introducción al cálculo
MGP: Geometría plana y trigonometría

Ciclo IV
CF2: Antropología filosófica
CL4: Redacción
CR1: Teología I
CP2: Psicología evolutiva
MCP: Combinatoria y probabilidad
MF1: Física I

Ciclo V
CP3: Psicología educativa
MF2: Física II
MGA: Geometría analítica
MC1: Cálculo I
CR2: Teología II

Ciclo VI
CHE: Historia de la educación
CT2: Tecnología educativa II
CIE: Investigación educativa
MF3: Física III
MC2: Cálculo II

Ciclo VII
COE: Organización educativa
CF3: Filosofía de la educación
CR3: Teología II
MD1: Didáctica de la matemática
MD2: Didáctica de la física
MC3: Cálculo III

Ciclo VIII
CDS: Doctrina social
CR4: Teología IV
P1M: Práctica Profesional A
MLG: Álgebra lineal
MF4: Física IV
MD3: Programación y evaluación de la matemática
MD4: Programación y evaluación de la física

Ciclo IX
CDP: Deontología profesional
CP4: Orientación educativa
P2M: Práctica Profesional B
MF5: Física V
MEE: Estadística
MA1: Análisis matemático

Ciclo X
CLE: Legislación educativa
P3M: Práctica Profesional C

Apéndice F:

Transcripción de la sesión de clase de Laura

Clasificación inclusiva de cuadriláteros

Responsable: Laura

Fecha: 3 de octubre de 2012

Grado: Primero **Duración:** 40 min.

Profesora: buenos días chicos
Todos: buenos días
Profesora: a ver vamos a trabajar con esto (entrega unas fichas, unos alumnos golpean la puerta y los hace pasar).
Adelante César.
(Da las instrucciones para trabajar con las fichas)
Ok, tienen unas fichas con varias figuras ¿sí? Si es que necesitan regla o transportador pueden sacar. lo que quiero es que midan la figura de lados o no sé, de características comunes entre ellas y las agrupen. Entonces, tienen aquí (les muestra la ficha mientras les explica) el grupo número uno, y así sucesivamente dos, tres; el nombre del grupo donde van a reunir esas figuras, las figuras números, van ponerlo aquí el número de las figuras que están en este grupo y que características o por qué ustedes han considerado que estas figuras deberían estar aquí en este grupo. Ok
Adelante (ingresa Sandra).
(Los estudiantes trabajan en grupos por vario minutos, mientras la profesora coloca un papelote en la pizarra, el mismo que contiene las mismas figuras entregadas en la ficha).
En la parte de atrás de la hoja me ponen los integrantes del grupo.
¿Ya? Diana a la pizarra, con la hoja por favor, atrás va el nombre de los integrantes
(Golpean la puerta) Julieta adelante. Forma tu grupo con Lucas y con César.
A ver, Lucas. Lucas a la pizarra con tu hoja, las figuras ya están acá (señalando la pizarra)
¿Ya? A ver, quiero que cada uno explique, bueno primero Diana y después Lucas qué criterios; expliquen el cuadro que han hecho, cómo los han agrupado esas figuras
Diana: hemos agrupado en tres grupos primero ubicando primero a los que tienen un par de lados paralelos que son las figuras 4, 5 y 6. El segundo es el que tiene dos pares de lados paralelos y son las figuras 7, 8, 9 y 10 y el tercer grupo es el que no tiene ningún lado paralelo, es el 3, 2 ,1 y 11
Profesora: ¿un par de lados paralelos? ¿Dos pares? (copia en la pizarra la clasificación expuesta)
Diana: si, dos pares
Profesora: ¿y el otro es? (desglosa del papelote las figuras necesarias y se las entrega a Diana para que se coloquen ordenadamente)
Diana: ningún lado paralelo
Profesora: Ya, en un par de lados paralelos ¿qué has agrupado?

Diana: 4, 5 y 6 (la profesora le alcanza las figuras para que las coloque en los grupos formados)
Profesora: 4, 5 y 6. Dos pares de lados paralelos
Diana 7, 8, 9 y 10 (la profesora el alcanza los cuadriláteros indicados).
Ningún lado paralelo 3, 2, 1 y 11
Profesora. muy bien. Este es el criterio que han utilizado ustedes para… ¿y no le han dado un nombre a cada numero de lados paralelos?
Diana: no
Profesora: solo lo han puesto así: con un par de lados paralelos.
Diana: sí
Profesora: ya. Sigue Lucas. (Lucas se dirige a su sitio)
No. Lucas sigue a explicar
Lucas: nosotros no hemos terminado de clasificarlo
Profesora: ¿hasta dónde han avanzado? ¿Tienen puntos comunes con el grupo de Diana o es una clasificación diferente?
Lucas: Sí, tenemos puntos en común. Por ejemplo, aquí he puesto, ella ha puesto dos pares de lados paralelos y hemos considerado este… por los ángulos rectos
Profesora: Ángulos rectos y ¿Cuáles han considerado como ángulos rectos?
Lucas: O sea los cuatro ángulos rectos, el 8 y el 9 (señala unas figuras)
Profesora: El 8 y el 9 o sea estos dos de aquí
Lucas: Sí. Después, este… los que tienen solamente un par de lados paralelos
Profesora: ya y después. ¿Han hecho la misma? ¿Y les han puesto algún nombre o al igual que el grupo de Diana?
Lucas: Sí, trapecio no más.
Profesora: Ya (anota en la pizarra).
Ok, puede tomar asiento.
Bien, considera, todos estos, todas estas figuras que vemos nosotros en la pizarra ¿cómo se llaman?
Lucas: cuadriláteros
Profesora: los cuadriláteros, ¿Qué es un cuadrilátero?
Lucas: una figura de cuatro lados
Diana: que tiene cuatro lados
(La profesora pega el título CUADRILÁTEROS en la pizarra)
Profesora: una figura de cuatro lados. ¿Sí?, entonces, como cuadriláteros, pongan en su cuaderno el título, y ponen, es un polígono de cuatros lados (al lado del título escribe es un polígono de cuatro lados. Mira a sus alumnos mientras ellos escriben en su cuaderno).
Bien, a ver, estos los han llamado trapecios, los polígonos que tienen, perdón, los cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos y ¿cómo se les llaman a los que tienen dos pares de lados paralelos?
¿Nadie recuerda la clasificación que hemos visto antes?
Julieta: ¿paralelogramos?
Profesora: los paralelogramos ¿y las que no tienen ninguno?
Sandra: Trapezoides (en voz muy bajita).
Profesora: Trapezoides, ¿bien?

Entonces vamos a ver.

Entonces una clasificación, vamos a decir así, común que se ve durante los cursos de matemática de primaria es esta: los cuadriláteros se clasifican según el criterio que es el paralelismo de los lados, en cuántos lados paralelos tiene, si tiene uno se llama trapecio, si tienen dos se llaman paralelogramos y si no tienen ningún lado se llaman trapezoide, pero dentro de los trapezoides ¿hay diferencia entre las figuras que están allí, agrupadas? ¿Cuáles son diferentes? libros

Diana: la 3 y la 4

Profesora: ¿esta con esta? (señala el cuadrilátero cruzado)

Diana: no la que está al costado

Profesora: ¿estas dos?

Julieta: no la que está allá

Profesora: (señala el trapezoide asimétrico y el simétrico)

¿Ya y estos que tienen de diferentes?

Sandra: ¿que tiene un ángulo obtuso?

Profesora: ¿y cuánto mide un ángulo obtuso? Este ángulo de aquí (señalando al no convexo) ¿Sandra? ¿Cuál es la definición de ángulo obtuso?

Lucas: Ángulo… mayor de 90

Profesora: mayor que 90 y menor de 180. ¿Ustedes pueden decirme que este ángulo es menor de 180?

Sandra: no

Profesora: no, entonces un ángulo que es mayo de 180° ¿ya?

Entonces, aparte de esta clasificación de los cuadriláteros, nosotros vamos a ver dos, este perdón, cuatro clases de cuadriláteros que van a salir de esto, mejor dicho que es más general que esto.

Los cuadriláteros pueden ser por un lado eeee, vamos a ponerle según el cruce de lados, pueden ser simples y complejos.

¿Qué significa según el cruce de lados? si nos podemos dar cuenta este es un cuadrilátero que tiene los lados cruzados, por eso forma como un triángulo, entonces a los que cruzan los lados se les va a llamar complejos y a los que no se le cruzan los lados, como pasa con el resto de cuadriláteros se le va a llamar simples ¿sí?

Sandra: ¿y esos que se quedan allí?

Profesora: En general, o sea esto es algo más general que trapecios, paralelogramos y trapezoides ¿ya? Entonces según el cruce de los lados hemos dicho simples o complejos ¿sí? ¿Hasta allí está claro? Ok, ahora, según eee, vamos a ponerle aquí, según la medida de ángulos, van a ver ángulos que se van a llamar los convexos y los no convexos.

Los convexos son aquellos que tienen los ángulos menores a 180, como todos los que están aquí, por ejemplo cualquiera de ellos, este (elige al trapezoide asimétrico) y los no convexos son los que van a tener un ángulo mayor a 180, no obtuso sino mayor a 180 (elige al no convexo) ¿ok?, ¿hasta allí está claro?

Entonces vamos a copiar la parte de acá y luego vemos el resto de cuadriláteros

Elías: ¿profesora allí ese ángulo no es obtuso?

Profesora: ¿este ángulo? (señalando al no convexo), no.

Elías: ¿Y qué ángulo se llamaría?

Julieta: no convexo

Profesora: es un ángulo no convexo o sea mayor de 180 y menor de 360 (los alumnos copian mientras la profesora recoge el material).

A ver nosotros tenemos esta, este, esta clasificación, vamos a decir, tradicional de los cuadriláteros, ahora lo que vamos a hacer, es ver, o sea, según lo que podamos observar, ¿Qué características tiene cada una de esas figuras? Tenemos los trapezoides, trapecios y paralelogramos.

Estos dos son trapezoides ¿sí? (tomando al simétrico y al asimétrico), estos dos son trapezoides ¿Qué características ven en esos dos cuadriláteros? ¡Chicos! Les voy a entregar más bien, les devuelvo la hoja (refiriéndose a la ficha que contiene los cuadriláteros que agruparon antes), sería el número 3 y el número 11, este es el número tres (la figura asimétrica) y este es el numero 11 (la figura simétrica) ¿Qué características tienen cada uno, según lo que podemos observar? (los chicos se toman su tiempo).

Si quieren ver medida de ángulos y medida de lados cojan una regla y midan los lados.

Sandra: ningún lado es igual, mide igual

Profesora: ¿Dónde ningún lado es igual?

Diana: en el asimétrico

Profesora: ¿y en el 11?

César: no lados paralelos

Profesora: ya, los trapezoides eran los que no tenían lados paralelos

Diana: un par tiene igual, o sea, un par es congruente

Profesora: Un par ¿de qué?

Diana: De lados.

Profesora: Qué par de lados son congruentes

Diana: Los que están seguidos

Profesora: estos dos y estos dos de acá (señalando los lados del trapezoide asimétrico). Este lado de aquí tiene dos pares de lados seguidos, consecutivos. Este de acá con este lado de acá, ¿y cómo se llama a ese trapezoide? Dentro del trapezoide había una clasificación también, ¿si recuerdan? ¿Cuál era?

Sandra: simétrico

Profesora: simétrico y asimétrico. Entonces el simétrico va a ser, una figura se llama simétrica cuando tiene un eje de simetría y la parte que está de un lado se parece a la otra, entonces el eje de simetría en esta figura sería este, este lado igual al de acá ¿ya? Este es simétrico y este asimétrico (titula cada cuadrilátero como corresponde).

Ahora vamos con los trapecios… estos tres. A ver Julieta ven adelante, coloca al lado qué características ves en estos. A ver aparte de decir lados paralelos, decimos trapecio y par de lados paralelos.

Puedes decir que los lados no paralelos son diferentes (se dirige solo a Julieta).

Elías adelante (Elías se acerca a la pizarra), las características de ese trapecio.

En el cuaderno van escribiendo todas las características que van saliendo hasta ahora ¿sí? con sus respectivas figuras. A ver, esta era la clasificación inicial que teníamos como general, antes de lo de acá, abajo simplemente coloquen este, como está allí, luego vamos a ver qué relación tienen con esto de acá que hemos hecho.

¿Ya? Nada más. Siéntate (dirigiéndose a Julieta)

César observa la figura número 6, vas a salir a hacer la descripción de las características.

¿Nada más? (dirigiéndose a Elías).

César adelante (La profesora pega cuatro cuadriláteros a un lado de la pizarra y los enumera).

¿Terminaron de copiar?

Ya. Tiene dos ángulos rectos y tiene un ángulo mayor de 90. ¿Nada más? Estos dos son rectos (señalando los ángulos rectos del trapecio rectángulo). A ver, chicos ¿no ven nada más aquí, en lo que han escrito sus compañeros?

Julieta: (No audible)

Profesora: No, qué es lo que, aparte de estas características hay alguna más que quieran añadir a estos.

Vamos a ver, a los trapecios que tienen dos lados, estos dos lados iguales (señalándolos e la figura), se les llaman isósceles, como los triángulos ¿sí? Tiene dos lados, bueno un par de lados paralelos por ser trapecio, lados no paralelos son iguales y tienen una base mayor y una base menor ¿ustedes recuerdan que los triángulos, qué pasaban con los ángulos que formaba con la base de los lados iguales?

Sandra: ángulos iguales

Profesora: ángulos iguales. Entonces en el isósceles, en el trapecio isósceles, este ángulo de aquí va a ser igual a este ángulo de acá ¿sí? Y el ángulo que está acá arriba también será igual al ángulo que esta acá (señalando al trapecio isósceles). ¿Sí? Se llama isósceles.

Este trapecio (señalando el escaleno) aparte de tener ningún lado congruente y tiene una base mayor y una base menor, a este tipo de trapecio se le llama escaleno ¿sí? Ningún lado es igual y bueno también una base mayor y una base menor, que es parte de los trapecios.

¿Si están copiando? ¿Ya? Y este trapecio de aquí que como ha dicho César tiene dos ángulos rectos un ángulo mayor a 90 y un ángulo menor de 90 se llama rectángulo, ¿sí? Entonces trapecio isósceles, trapecio escaleno y trapecio rectángulo. (La profesora se dirige a los alumnos y ojea lo que hacen en sus cuadernos).

Sandra adelante, el primer paralelogramo (Sandra se acerca a la pizarra y empieza a trabajar el primero).

¿Qué nombre tiene ese paralelogramo?

Sandra: cuadrado

Profesora: cuadrado.

Lucas: parece un rombo.

Profesora: ¿Parece un qué?

Lucas: Un rombo.

Profesora: Parece un rombo, yaaaa ¿Qué características tiene el cuadrado, qué características tiene el rombo? ¿Por qué parece un rombo?

Lucas: Porque tiene cuatro lados iguales.

Profesora: Porque tiene 4 lados iguales ¿Solo por eso parece un rombo? A ver lados, lados iguales, vamos a ver eso Lucas, ángulos rectos y sus diagonales miden igual.

Lucas el siguiente (Lucas se acerca a la pizarra)

Diana observa la imagen número 8 para que salgas a hacerla.

¿Qué nombre tiene esa figura Lucas?
Los demás vayan copiando las características que van saliendo.
¿Ya? (Lucas deja la tiza y se sienta)
Diana adelante (Diana se acerca a la pizarra)
¿Las diagonales de un cuadrado además de que miden iguales, Sandra, que más son?
Sandra: son iguales
Profesora: Ya. Miden igual, las diagonales son iguales. Aparte de eso
Sandra: forman ángulos rectos
Profesora: forman ángulos rectos, entonces son iguales y además perpendiculares ¿sí? Completen las características del cuadrado (cada uno trabaja en sus cuadernos mientras Diana está en la pizarra).
¿Nada más? (le pregunta a Diana)
Diana: no
Profesora: ya. A ver, en el rombo Lucas ha puesto que sus cuatro lados eran iguales, las diagonales perpendiculares; dos pares de lados iguales, los opuestos, este ángulo era igual al de acá y este ángulo de aquí igual al de acá (señalando los ángulos del rombo) ¿sí? Además, como podemos ver los ángulos no son rectos, los ángulos no son rectos, los únicos rectos son las, el cruce de las dos diagonales. Luego Diana ha descrito el rectángulo: sus lados paralelos son iguales, tienen ángulos que miden 90º y las diagonales son iguales ¿En el rectángulo las diagonales son perpendiculares?
Sandra: no
Profesora: no son perpendiculares. ¿Y la última figura cómo se llama? ¿Chicos?
Diana: paralelogramo
Profesora: ¿paralelogramo? ¿Qué otro nombre tiene esta figura?
César: ¿romboide?
Profesora: romboide. Ok, ojo el rectángulo es un paralelogramo, el rombo es un paralelogramo, el cuadrado también lo es, el romboide también, si no es que solamente el paralelogramo es el romboide, sino que todos estos cuatro son paralelogramo, por tener dos pares de lados paralelos ¿sí? A ver características del romboide. ¿César?
César: ummm
Profesora: ¿características del romboide?
Julieta: sus ángulos opuestos son iguales
Profesora: ángulos opuestos iguales
¿Los lados opuestos? ¿sus diagonales son perpendiculares? ¿Iguales?
Tampoco, entonces…y además, el romboide junto con el rombo no tienen ángulos rectos. ¿Ok?, todos sus ángulos son dos obtusos y dos agudos. Ok, ¿han terminado de copiar todas las características?
Profesora: Diana me preguntó hace un momento cómo se relacionaba, estos cuadriláteros con la clasificación que di inicialmente de simples y complejos ¿y de? ¿Qué clasificaciones di al inicio?
(Elías responde la pregunta mientras la profesora borra la pizarra)
Ya, entonces nosotros teníamos; según el cruce de los lados, teníamos dos ¿verdad? Teníamos dos: Los simples y los… ¿chicos?
Todos: complejos

Profesora: ya, ahora la otra característica, la otra clasificación era convexos y cóncavos, ustedes….
Los simples eran cualquier, cualquier esteee, cualquier cuadrilátero que no se cruzaran los lados.
Miren las características que les di al inicio, tienen allí en su hoja. A ver ¿dentro de los complejos o dentro de los simples yo puedo hablar ¿Dentro de qué grupo yo puedo hablar de cóncavos y no cóncavos? Perdón ¿de cóncavos y convexos?
Todos: simples
Profesora: dentro de los simples, entonces dentro de los simples yo puedo hablar de dos tipos: de no convexos o cóncavos y de convexos ¿sí? Esta es la figura de no convexo (pega un cuadrilátero cóncavo). Ahora, el convexo sigue siendo la misma figura, con las mismas características, que todos sus ángulos sean menores a 180 ¿verdad? Entonces puede ser cualquiera de las figuras que nosotros hemos descrito antes. Ahora, dentro de todas estas figuras que hemos descrito antes ¿Qué figura es la que tiene menos características o, por decirlo así, es la más general?
Voy a colocar aquí las imágenes (coloca en la pizarra todos los cuadriláteros trabajados durante la clase para que sean clasificados) Dentro de todos estos cuadriláteros de los que hemos visto las características ¿cuál es el que tiene? ¿Cuál es el más general, el que tiene menos características?
Sandra: el romboide
Profesora: el romboide, Sandra dice el romboide (Sandra defiende su postura pero no se escucha lo que dice)
¿De acuerdo o no de acuerdo?
Diana: el trapezoide
Profesora: el trapezoide, ¿por qué el trapezoide y no el romboide?
Diana: porque no tiene ningún lado paralelo, sus lados no son iguales
Sandra: No tiene nada (risas de todos)
Profesora: simplemente es un cuadrilátero ¿Ok? Ahora, de los trapezoides nosotros vimos dos tipos ¿sí?: el trapezoide simétrico y el asimétrico ¿Cuál de los dos es el que tiene menos características?
Sandra: asimétrico
Profesora: el asimétrico porque en el simétrico vemos que las diagonales se cortan perpendicularmente de que tiene dos lados iguales, dos pares de lados iguales, entonces, nosotros vamos a ver que dentro de todos lo paralelogramos es, perdón los paralelogramos, los trapezoides es el más esteee, el más general ¿sí? ¿Qué figura sigue?
Todos: El simétrico
Profesora: ¿sí? ¿Seguros? El trapezoide simétrico. En sus carpetas les he dejado unas reglas, como unas reglas ¿sí? Lo que van a ser es unir las reglas formando cuadriláteros, formen un trapezoide. Tienen diferentes medidas y estos chinches que se abren por la parte de atrás; ahora si lo van haciendo en la mesa y van formando con las reglas de cartulina.
A ver chicos un trapezoide asimétrico
César: este es un asimétrico

Profesora: (dirigiéndose al grupo de César conformado por éste, Lucas y Julieta) ya un asimétrico pero las naranjas (las tiras) tienen igual medida.-* A ver, dejémoslo allí, este sería el trapezoide simétrico ¿sí? ¿Ya está el trapezoide simétrico?

César ¿así?

Profesora: ya, aquí tenemos un simétrico, dos lados iguales, dos pares de lados iguales ¿sí? (Dirigiéndose al grupo de Elías conformado por éste, Diana y Sandra) hay dos tipos de celeste una más grande uno más chiquito, la idea es que los dos azules son iguales.

Julieta: ¿no hay más chinches miss?

Profesora: no solamente para formar una esté una nada más

Elías: ya está

Diana: un trapecio, ya ves (dirigiendo a Elías)

Profesora: ¿Ya? A ver, de un trapezoide Asimétrico ¿yo le puedo dar la forma para que llegue a ser un trapezoide simétrico?

Trabájenlo así no más sin los chinches pueden formar las figuras con las fichas de colores. A ver, tengo esto y yo puedo llegar a esto (de un trapezoide asimétrico a un simétrico, señala las figuras que tiene en la pizarra).

¿Qué pasa ustedes tienen a ver, aquí uno, dos, tres y? me falta una ficha…ya bueno vamos a ver vamos a doblar esto, tengo algo más pequeño ¿correcto? Chicos aquí tengo un trapezoide asimétrico ¿verdad? ¿Qué pasa si yo, estos dos los abro iguales y esto lo cambio por un azul (cambia una de las tiras por otra de distinta medida), paso de celeste a azul? Tengo esto definido que es un simétrico, lo tenía el grupo de acá que es simétrico (refiriéndose al grupo de César). Entonces, yo puedo, aumentado la medida de los lados llegar a un simétrico, cambiándole los lados, ¿sí?

Entonces, si yo al trapezoide asimétrico le coloco estos dos lados iguales, entonces tengo esto (señala primero los lados desiguales del asimétrico y los compara con los lados del simétrico) ¿sí? ¿No? ¿Duda? ¿Pregunta? ¿Contradicciones? ¿Me dicen que no, alguien dice que no?

Vamos a ir aumentando características pasamos de uno que no tiene lados iguales a una que tiene dos pares de lados iguales ¿ok?. Vamos a armar una red de cuadriláteros de tal forma que el que sigue tenga mayores características que el anterior ¿está claro? (afirman que si con un movimiento de cabeza) Ya

¿Del trapezoide simétrico a qué podemos pasar?

Diana: El trapecio

Profesora: ¿El trapecio tiene menos características que el paralelogramo?

Diana: Sí, tiene un lado paralelo

Profesora: Solamente tiene un par de lados …, entonces pasamos al trapecio. Formen con un trapezoide simétrico un trapecio. Tienes que formar un trapecio, de un trapezoide simétrico, formemos un trapecio. Ya, y de eso pasemos a un trapecio ¿Cómo pasan a un trapecio? ¿Qué hacen para pasar a un trapecio? (los alumnos trabajan en grupo y van comentando).

Puede reducirse la medida de los lados, puede ampliarse la medida de los lados.

(Profesora se dirige al grupo de César)

A ver, tú tenías inicialmente esto, si yo por ejemplo pongo estas dos paralelas, más o menos esto y eso de aquí, al de acá, bueno, hacemos esto y cerramos.

(Existe un inconveniente pues este grupo no tiene piezas iguales por ello la profesora decide doblar una de las reglas para que así hayan dos piezas del mismo tamaño y no exista inconveniente al formar el trapecio)

¿Sí? ¿Puedo pasar de un trapezoide simétrico a un trapecio? ¿Sí? ¿No? ¿Diana? ¿César? ¿Sí? Ya, entonces aquí tenemos a los trapecios en general ahora de los tres trapecios que hemos visto que son el escaleno, isósceles y el rectángulo ¿Cuál es el que tiene menos características?

Todos: el escaleno

Profesora: el escaleno, entonces del trapecio tengo el siguiente punto el escaleno. Luego, antes de esto ¿Cómo trapecio simétrico puedo pasarlo a un trapecio?

César: ¿del trapecio?

Profesora: ¿Del trapezoide simétrico paso a un trapecio?

Diana: sus lados son paralelos y son diferentes

Profesora: sus lados son diferentes o sea yo tengo esto sería como hacer esto de acá, tengo esto aquí paralelo a la base y estos dos lados distintos ¿ok?, ¿esto es un trapecio de que tipo? Escaleno.

Lo primero que obtenemos de un trapezoide es un trapecio escaleno ¿sí? Entonces de un trapezoide asimétrico pasamos a un trapecio escaleno. Del trapecio escaleno ¿qué obtenemos, qué le sigue? ¿Qué características le añadimos para que me de otro?

Diana: lados no paralelos sean iguales

Profesora: ¿Qué los lados no paralelos sean iguales? ¿Y me da el isósceles?

Isósceles ¿ok?, aquí vamos a ver que los lados no paralelos son iguales o pasan a ser iguales. Entonces, de este (trapecio escaleno) los lados no paralelos los pongo igual y me da el isósceles. ¿Y el rectángulo? ¿Y el rectángulo lo puedo obtener de un isósceles? ¿O el rectángulo lo obtengo del escaleno?

Del isósceles paso una línea aquí de este lado lo pongo acá, me va a quedar un poquito más largo se lo quitamos y tengo esto ¿sí?, entonces ¿de un trapecio isósceles paso a ¿un? (en la gráfica del trapecio isósceles traza una perpendicular que va desde la base hasta el vértice opuesto formando así el trapecio rectángulo)

César: rectángulo

Profesora: rectángulo, trapecio rectángulo y luego qué viene.

Entonces ya tenemos los trapezoides y los trapecios y ahora qué viene ¿Qué grupo nos falta?

Lucas: solamente puedo pasar... no puedo pasar de escaleno a (no audible)

Profesora: A ver eso les estoy diciendo, de donde a donde se pasa y ustedes me dicen de un trapecio isósceles paso a un trapecio rectángulo. Ahora ¿de un trapecio escaleno puedo pasar a un trapecio rectángulo?

Diana: nooo

Lucas: siiii

Profesora: también, si este lado lo pongo recto aquí, paso de un (trapecio) escaleno a un (trapecio) rectángulo (del trapecio escaleno traza una perpendicular desde un vértices hasta la base mayor, el procedimiento es el mismo que utilizó con el trapecio isósceles). Entonces yo puedo tener un rectángulo con dos lados distintos y puedo tener un rectángulo con dos lados iguales, bueno en realidad este lado como que es más chiquito.

A ver, ahora vamos, tenemos ahora los paralelogramos ¿sí? ¿De dónde paso a los paralelogramos? ¿Del isósceles o del rectángulo o de los dos? ¿Qué añado para que me dé el rectángulo? Perdón ¿el paralelogramo?

Sandra: Del rectángulo

Profesora: del rectángulo paso al paralelogramo ¿Qué le hago al rectángulo? (Los alumnos señalan al trapecio rectángulo, indicando hacer el mismo procedimiento que hicieron anteriormente).
De este lado, acá ¿y que tengo aquí? (en el trapecio rectángulo traza una perpendicular de la base al vértice opuesto)

Sandra: un rectángulo

Profesora: un rectángulo ¿y cuál es el paralelogramo con menos características? ¿El rectángulo?

Diana: No, el romboide

Profesora: ¿Por qué el romboide y no el rectángulo? ¿César, Julieta?

Diana: tienen un par de lados, no, un par de ángulos diferentes…los opuestos son iguales

Profesora: Los opuestos son iguales

Diana: en cambio en el rectángulo todos sus ángulos son iguales

Profesora: ya, ok yo puedo, a ver. Ustedes tienen allí, formen un romboide con las reglas de colores ¿sí? Si los unen con los chinches mejor, sino lo forman al menos solo con las fichas.
(Los estudiantes trabajan en grupo).
A ver el paralelogramo según las características que tenían escritas en el cuaderno era los lados opuestos paralelos iguales.
(Dirigiéndose a Lucas) aparte de paralelos, si pones tres naranjas tendrías tres iguales.
(Dirigiéndose a todos) ¿Ya? Lados opuestos iguales y paralelos, tenemos el romboide. ¿Sí? ¿Ya lo tienen?

Julieta: Sí

Profesora: Sí. Entonces ¿del romboide qué puedo formar?¿Un rectángulo?¿Qué le añado al romboide para que sea rectángulo?

Diana: ángulos rectos

Profesora: ya. Entonces de un romboide paso a rectángulo poniendo ángulos rectos ¿sí? ¿Qué más puedo hacerle a un romboide? ¿Qué puedo formar? O ¿del rectángulo que puedo formar? ¿Del rectángulo que puedo formar? O ¿del romboide que puedo formar?

Sandra: un rombo

Profesora: ¿un rombo de dónde? ¿Del rectángulo?

Diana: si ponemos lados…

Profesora: si se dan cuenta a todos hemos añadido una sola característica, o sea, un ejemplo al isósceles un lado, que sea perpendicular con el lado de acá (a la base menor). Si yo paso de romboide al, perdón si yo paso del rectángulo al rombo tendría que cambiar ¿qué? Tendría que cambiar los ángulos y tendría que cambiar los lados. Dos cosas dos características y ¿tiene que ser solamente una? ¿Cuál sería?

Diana: del romboide

Profesora: ¿del romboide, a dónde?

Diana: al rombo

Profesora: A ver del romboide al rombo

César: lados iguales
Profesora: lados iguales y paso al rombo. Y luego solamente me queda el cuadrado ¿A dónde va el cuadrado? ¿De dónde obtengo el cuadrado?
Diana: de los ángulos rectos podríamos…
Julieta: no del rombo
Profesora: ¿entonces del rombo que hago?
Diana: el rombo tiene sus lados iguales y el rectángulo sus ángulos rectos, entonces podríamos…
Profesora: de los dos, de los ángulos rectos del rectángulo y de los lados iguales del rombo ¿sí? Ok, parece como toda una mezcla pero en realidad si se dan cuenta yo voy añadiéndole características particulares a cada una de los cuadriláteros y voy obteniendo finalmente el cuadrado. ¿El cuadrado vendría a ser el cuadrilátero que tiene más o menos características? (Los chicos responden que más características). Más características tiene incluso, podemos darnos cuenta que arrastra característica de otro, el rombo tiene diagonales perpendiculares igual que el cuadrado ¿sí? El romboide tiene diagonales no perpendiculares como el rectángulo ¿sí? No solamente son de lados o de ángulos o lados sino también pueden ser, por ejemplo, de las diagonales ¿sí?
A ver copien ese esquema
Profesora: (dirigiéndose a todos los alumnos) por las características que le añaden a cada uno, que no solo basta que me digan que el cuadrado sale del rombo sino por qué sale del rombo.
Diana: podemos emplear los complejos
Profesora: los complejos en realidad sí porque no tienen, a ver, cómo unirías el complejo con alguno…es como los convexos, los convexos también están solos, perdón los no convexos o cóncavos están solos, no tienen, o dime tú qué… tienes una idea de cómo se uniría un complejo, un no convexo con alguno de los que hemos visto ¿Qué características le añades al complejo para que este...?
Sandra: no se puede
Profesora: no se puede, pero si alguien me dice miss ya no le cruzo los lados y lo convierto en simple, y entonces ya no partiríamos de cuadriláteros simples y complejos sino de complejo simple y esta fecha terminaría ¿sí?
Diana: (no audible)
Profesora: Claro la única característica es que los lados sean cruzados y tenemos el simple ¿ya? A este esquema le faltan las características que les van añadiendo, que tienen que ponerlas ustedes ¿sí?
(Los alumnos copian mientras la profesora ordena su pupitre)
¿Terminaste de copiar Julieta? ¿Preguntas? ¿Sugerencias?
¿Terminaste César?
¿Ya chicos? ¿Ya puedo sacarlos? (refiriéndose al material utilizado en la pizarra)
¿Elías si la clasificación que nosotros hemos visto inicialmente que es la que normalmente se utiliza era según el paralelismo de los lados, esta nueva clasificación, para llamarlo de una forma, que nombre tendría, según que criterio se puede establecer?
Elías: según los lados

Profesora: ¿según los lados? ¿Solamente hemos visto según los lados?

Sandra: generalización de características

Profesora: ya. Una generalización de características. Ahora, de menos características a más características podemos verla como una jerarquía. Desde lo más general a los más particular que es el cuadrado.

Bien chicos esa fue la clase de hoy para la próxima clase quiero el mapa que hemos hecho pero con todas las características que le han ido añadiendo, sobre las flechas tienen que colocarle que características le han añadido para que resulte el siguiente ¿sí? En una hoja aparte, las voy a recoger.

Profesora: (Autoevaluación) Era clasificación inclusiva de cuadriláteros para…yo la hice para primero de secundaria

César: ¿clasificación inclusiva?

Profesora: en realidad mi tema de sesión está como clasificación de cuadriláteros pero el tema asignado era clasificación inclusiva de cuadriláteros

Lucas: como inclusión social (haciendo una broma).

Profesora: si algo así Lucas y esteeee para primero de secundaria. Por eso es que partí de la clasificación que suele haber en un texto de quinto para a partir de las características que conocía que eran las básicas pudiéramos hacer la clasificación inclusiva.

Docente formadora: ¿Qué entonces ha revisado libros de texto de quinto y sexto? ¿o qué?

Profesora: sí

César: ¿de quinto y sexto?

Profesora: Sí. Quinto y sexto.

César: ¿de primaria?

Profesora: sí. En el de sexto se ven más de lo de las características de los ángulos, ¿no?, y quinto es como más de lados y ver si son paralelos o no, bueno y todas las figuras se ponen con la base horizontal y me di cuenta de la base horizontal ya cuando iba por los paralelogramos. Elías gracias

Julieta: ¿y qué libro…?

Profesora: Santillana. Santillana de quinto y sexto y Naquiche de primero

Lucas: ¿y Bruño?

Diana: pero Bruño es Naquiche

César: la editorial es Naquiche

Lucas: ¿y Norma?

Profesora: ¿Norma?

Lucas: Norma no pasa nada

Profesora: ha mejorado, años anteriores era el Retomate, cuando mi hermano estudiaba en el colegio era el Retomate y era un desastre

Sandra: y el Matrix también salió

Profesora: ahh no sé, ese no recuerdo pero el Retomate era…

Docente formadora: Retomate creo que era otro autor

César: ¿Retomate?

Profesora: porque te dan muchos ejercicios y no te pone teoría, te pone dos o tres líneas de teoría y luego te pone ejercicios y ejercicios, los chiquitos no saben de dónde.

César: es más para Pre

Julieta: ¿pero no viene un libro complementario?

Profesora: No, es solo un libro, te viene por ejemplo la parte de la imagen donde viene lo de puntos rectos y no sé qué, y te viene una llave, o unas pequeñas líneas de texto y luego te viene que es el punto y qué es la recta, que son segmentos y luego ya te vienen ejercicios de segmentos y no es mucho. Y además generalmente esteee, hay ejercicios propuestos y ejercicios resueltos, como resueltos vienen dos bien básicos, con los que no puedes resolver el resto y hay un montón complejos.

Lucas: es una pregunta de parcial, buena pregunta (bromean relacionando el diálogo anterior con el examen parcial)

Docente formadora: a ver Profesora

Profesora: Ya miss. A ver todo me salió confuso en el sentido de que yo plantee una clasificación inclusiva y la que he hecho en la pizarra no es esa, tiene mucho parecido

Docente formadora: o sea ¿con la que usted hizo en casa?

Profesora: la que yo hice en casa, le faltan cosas de las que están aquí en la pizarra

Docente formadora: ¿digamos que esta está más completa?

Profesora: Digamos de que o sea yo hice una clasificación en donde como que habían partes, por ejemplo yo no había relacionado el isósceles con el trapecio en un inicio cuando acá yo parto del… perdón del isósceles, del trapezoide simétrico y asimétrico. Del trapezoide asimétrico yo no pasaba al simétrico yo me saltaba al trapecio y no había visto la relación del simétrico, cuando ustedes ya me dicen; y por qué era mi duda, porque yo no sabía si es que al agregar una característica yo podía aumentar o reducir la medida de los lados, ya con la aclaración que me hicieron temprano ya pude dar pie a que ustedes me digan que del trapecio simétrico sale del asimétrico. ¿Qué más? Eee Qué difícil que es esta clasificación y…sí porque tienes que ponerte a pensar y ver todas las características que hay por eso es que yo pretendía que ustedes recordaran las características que habían estudiado años atrás, porque generalmente llegas a… los temas se repiten todos los años en quinto se ven cuadriláteros, en sexto ves los mismos cuadriláteros y en primero llegas a ver los mismos cuadriláteros (y generalmente te ponen la clasificación inicial que nosotros teníamos que ustedes me dijeron de un lado paralelo, dos par de lados paralelos y ningún lado paralelo.

Apéndice G:

Transcripción de la sesión de clase de Samuel
Clasificación de cuadriláteros

Responsable: Samuel
Fecha: 17 de noviembre de 2011
Grado: Cuarto **Duración:** 40 min

SAMUEL: buenos días
Todos: buenos días
SAMUEL: pónganse de pie por favor
(los alumnos se ponen de pie)
SAMUEL: ya muy bien, ¿qué tal les fue ayer?, ¿qué les tomaron? César qué tal te fue
César: bien, aunque siiii
SAMUEL: mucho trabajo
César: Sí
SAMUEL: entonces, hoy vamos a ver un tema muy interesante y por favor quiero que participen… bueno como la mayoría de sus compañeros aún no han venido espero que les sirva de apoyo para la participación, ¿Si? Entonces, pueden tomar asiento
(los alumnos se sientan)
SAMUEL: ehhhh bueno, a ver César, me puedes, a ver observa a tu alrededor, ¿sí?
¿Me puedes mencionar los objetos que tienen formas cuadrangulares?
Si recuerdan la clase pasada estábamos viendo lo que era concepto de cuadrilátero, hoy día nos toca un tema nuevo con respecto a los cuadrados, pero antes de empezar quiero que tú me menciones los objetos de tu entorno que tengan forma cuadrangular o que tengas forma de cuadrilátero (el SAMUEL traza una tabla de dos columnas en las que escribe “objetos” y “cuadriláteros”).
César: la pizarra
SAMUEL: A ver vamos a poner (pone en la pizarra objetos y cuadriláteros como un cuadro comparativo). Tú me has dicho la pizarra, ¿Qué forma tendrá la pizarra?
César: unnn rectángulo
SAMUEL: de un rectángulo, ¿Qué más? A ver otro objeto dime
César: las losetas
SAMUEL: ¿cómo?
César: las losetas del piso
SAMUEL: ya, entonces ponemos, y qué forma tienen las losetas del piso
César: cuadrado
SAMUEL: cuadrado (reafirmando). Algún otro objeto este… que recuerdes
César: las ventanas
SAMUEL: ¿y qué forma tiene?
César: cuadrada
SAMUEL: ¿cuadrada?
César: rectángulo

SAMUEL: cuadrado (reafirmando). Otro, un último, algún otro que recuerdes, que no puede estar aquí en el aula…
César: ahh…
SAMUEL: claro puedes encontrar (no audible), por ejemplo
César: mmm… por ejemplo este… puede ser una figura…
SAMUEL: a ver hay diversos objetos que tienen formas cuadrangulares
César: ajá
SAMUEL: otro, un último
César: puede ser la, la pantalla del televisor
SAMUEL: ya, pero me pueden nombrar otro objeto que tenga… que no pueda ser rectángulo ni cuadrado
César: mmm cosas que tiene forma de rombo
SAMUEL: forma de rombo
César: (no audible)
(Llegan DAVID y Martha)
DAVID: buenos días SAMUEL
SAMUEL: buenos días, pase, un poco más temprano por favor
(DAVID entra y se sienta)
SAMUEL: a ver para los que han llegado tarde, yo le he estado que como la clase pasada estuvimos viendo el concepto de cuadrilátero, entonces ahora vamos a ver un concepto relacionado también con los cuadriláteros, pero ahora quiero que ustedes me nombren algunos objetos que tengan forma cuadrangular, a ver Martha ¿Qué otro objeto aparte de los que están en la pizarra tienen una forma cuadrangular, que no sean rectángulos ni cuadrados?
Martha: ¿Qué no sean rectángulo ni cuadrado? ¿objetos que estén aquí?
SAMUEL: no, no necesariamente aquí, pueden estar en…
Martha: a veces los espejos
SAMUEL: ya
Martha: traen diferentes formas
SAMUEL: ya, entonces, ¿de qué forma me estarías hablando? ¿de qué cuadrilátero?
Martha: el que tiene mmm…el que tiene seis lados también
SAMUELa: ¿Cómo? ¿Cómo?
Martha: el que tiene seis lados pues
SAMUEL: pero estamos hablando de cuadriláteros…
Martha: A ya, ya
SAMUEL: a ver DAVID
Martha: puede ser un rombo
SAMUEL: ya, un espejo en forma de rombo
Martha: ujummm
DAVID: en las combis los chicos que suben una especie de trapecio
SAMUEL: yaaaa, ya
César: la baranda de los autos, está en forma de trapecio
SAMUELa: ya
DAVID: también (haciendo alusión a lo dicho por César)

SAMUEL: entonces ustedes conocen muchos objetos que tienen forma de cuadrilátero, me han enunciado los rectángulos, que tengan forma de rombos, por ahí salió objetos que tienen forma de trapecio. Entonces yo les voy a dar un… una serie de imágenes que les pueden complementar más la idea de objetos que tienen formas cuadrangulares. A ver…

(El SAMUEL pega en la pizarra un papelote con diferentes dibujos)

SAMUEL: a ver observen el siguiente papelote y digan si están de acuerdo o no con los objetos que tienen dicha forma. A ver, a ver DAVID ¿está de acuerdo usted con las imágenes presentadas que pueden tener formas cuadrangulares? ¿sí? ¿DAVID?

DAVID: Sí

SAMUEL: ¿César? (César mueve la cabeza afirmando)

SAMUEL: muy bien y ustedes por ejemplo acá vemos una señal de tránsito que tiene forma de un…

Estudiantes: rombo

SAMUEL: rombo (reafirmando). ¿El macetero de esta planta qué forma tiene?

DAVID: de un trapecio

SAMUEL: ¿el cometa?

DAVID: Rombo

SAMUEL: Ya

SAMUEL: o un cuadrado. ¿La plataforma de deportiva?

DAVID: rectangular

SAMUEL: rectangular, pero si lo vemos de este…(señala la figura)

Estudiantes: paralelogramo

SAMUEL: paralelogramo. ¿y este cartel del niño?

DAVID: forma rectangular

SAMUEL: ¿y este tendrá algún nombre? Esta… este cuadrilátero que se forma en este objeto, no es muy conocido ¿no? Muy bien entonces, hoy estos cuadriláteros que están aquí presentes tienden a agruparse según algunas características, así como por ejemplo, a ver les doy una… una idea. Si yo tengo por ejemplo a patitos, a gallinas, piedras, arena, entonces yo en ese conjunto que les doy voy a establecer que unos pertenecen a seres vivos y otros a seres no vivos. Igual acá, entonces yo puedo establecer que algunos cuadriláteros pertenecen a un tipo digamos, a un tipo de clasificación y otros a otro tipo, con respecto a unas características, ¿verdad? Entonces el tema de hoy ¿será? Lo que es, ¿alguien lo puede decir?

DAVID: Clasificación de cuadriláteros

SAMUEL: ya, muy bien. ¿De acuerdo todos? (Escribe el título en la pizarra: Clasificación de cuadriláteros)

Entonces nuestro tema de hoy es clasificación de cuadriláteros, a ver todos copian, ¿sí? Entonces los, lo que al finaLaura la clase yo quiero que ustedes presentan de manera general, pueden clasificar los cuadriláteros, ¿sí? En función de algunas características, además de poder diferenciar dichos cuadriláteros en función de las propiedades que presentan ellos y finalmente que analicen algunas situaciones sobre los cuadriláteros, de tal manera que lleguen consolidando las ideas sobre el tema. ¿Sí? A ver.

Vamos a trabajar entonces, a comenzar a trabajar con lo referido a los cuadriláteros. A ver… Laura hay que llegar más temprano ¿sí?

(El SAMUEL borra la pizarra y mueve el papelote a un costado de la pizarra, justo a los aprendizajes esperados).
Muy bien, entonces como el tema de hoy es la clasificación de cuadriláteros, entonces acá ven cuadriláteros que van a tener una clasificación según las características peculiares. *A ver, esteeee Laura, ¿cómo yo podría clasificar esos cuadriláteros y en función de qué?*
Laura: ehhhh deeeeeee, de longitud de los lados
SAMUEL: ya (escribiendo la pizarra lo que dijo Laura) según la longitud de los lados, ¿no?). Martha acá otra característica que a través de la cual podamos clasificar los cuadriláteros, ¿tendrá que ver con ángulos, ehhhh con la forma de los lados?
Martha: (no audible)
SAMUEL: con los ángulos, ya y que otra característica puede ser
Martha: según sus ángulos
SAMUEL: según sus ángulos (reafirmando). Entonces a esta parte, las ideas están muy buenas, ¿sí? Pero hay que mejorarlas un poco, con respecto a lo que dijo Laura según la longitud de los lados, esta, está muy bien, pero hay que cambiarle y ponerle según el paralelismo de sus lados (borra la idea y la corrige) (KoT3-D2.2). *Vayan tomando nota. Entonces según el paralelismo de sus lados, o según los ángulos internos, los ángulos internos van a tener una clasificación, ¿sí?*
Entonces esta la primera parte la vamos a dejar un poco para el final, pero primero vamos a centrarnos con respecto a la, a la, a la clasificación de cuadriláteros según sus ángulos interiores, ¿sí?
Laura: SAMUEL
SAMUEL: dígame, Laura
Laura:¿ por qué no hace clasificación de cuadriláteros según sus lados?
SAMUEL: claro, está bien, pero cuando yo establezco paralelismo, a ver si recordamos, ¿cuándo yo digo que, cuándo yo hablo de paralelismo? A ver Laura
Laura: cuando tiene lados paralelos
SAMUEL: ya, por ejemplo si yo tengo este rectángulo (dibujando un rectángulo en la pizarra), ¿este lado y este lado serán paralelos?
Laura: si
SAMUEL: ya, si son paralelos entonces puedo hablar en función del paralelismo de sus lados, la idea de ustedes es con respecto a la longitud, ¿sí? Pero trabajaremos con el paralelismo de sus lados ¿sí?. (KoT3-D2.2 y KoT1-PF3.1) A ver según los ángulos internos, un cuadrilátero… a ver observen la figura del papelote, de la señal de tránsito, a ver, qué, qué este, qué encuentra en, con respecto a los ángulos internos que presentan
DAVID: que los ángulos opuestos son iguales
SAMUEL: ya, pero, ya. ¿Qué más? Según la medida de sus ángulos, cómo son
Laura: ángulos…
César: ¿menos que 180?, ¿menor que 180?
SAMUEL: ya, entonces tenemos, ¿sí? Los ángulos son menores que 180; al igual podemos observar en el cometa, en el rectángulo que tiene el niño que son figuras o cuadriláteros que sus ángulos internos son menos que 180. Entonces a esos cuadriláteros tienen un nombre, que son los convexos, cuadriláteros convexos. Vayan anotando. Tenemos los cuadriláteros convexos. Entonces tomen nota, a ver, un

cuadrilátero es convexo, un cuadrilátero es convexo cuando sus ángulos interiores, cuando sus ángulos interiores son menos que 180°, ¿sí? Cuando sus ángulos interiores son menores que 180°. Ahora, hay otro tipo de cuadriláteros que se pueden clasificar también según la medida de sus ángulos internos, ¿si? Pero esos cuadriláteros no los podemos, en ese caso no lo he considerado ahí, pero es un cuadrilátero contrario al convexo, ¿sí? Entonces hablamos de un cuadrilátero no convexo y también recibe el nombre de cuadrilátero cóncavo (KoT1-PF1.13). Martha, qué decía el cuadrilátero convexo

Martha: que sus ángulos internos son menores que 180

SAMUEL: ya, que sus ángulos internos son menores que 180. *Entonces un cuadrilátero no convexo, quiere decir que no todos los ángulos, o al menos, o a lo mucho en uno va a cumplir esa condición* (KoT3-D1.15), ¿sí? Por ejemplo la siguiente imagen, a ver (dibuja un cuadrilátero cóncavo) a ver, primero veamos si es un cuadrilátero, a ver, tiene uno, dos, tres, cuatro lados, entonces todos estamos de acuerdo que es un cuadrilátero, ¿sí?; entonces con respecto a este ángulo, el ángulo “a”, ¿es un ángulo menor que 180?

Laura: Sí

SAMUEL: el ángulo “b” es menor que 180

Laura: Sí

SAMUEL: y el ángulo “c”, “d” perdón. Pero ¿qué pasa con el ángulo “c”?, se dan cuenta que es menor que 180

Laura: no

SAMUEL: no. Por lo tanto, *solo por la presencia de este ángulo que no es menor que 180°, entonces hablamos que es un cuadrilátero no convexo y hablamos de cuadriláteros cóncavos, ¿sí?*

Docente formadora: ¿Cómo sabe, cómo sabe que es no menor que 180 si no lo ha medido?

SAMUEL: lo que pasa, si nos fijamos en el ángulo externo, ¿Qué podemos ver?

DAVID: es menor

SAMUEL: por lo tanto, si nosotros sabemos, a ver, si yo trabajo mi plano en “XY” entonces, yo a este ángulo puedo ubicar, digámoslo así ¿no es así? (Dibuja el ángulo D en el plano cartesiano)

Docente formadora: ujum

SAMUEL: este trocito lo puedo ubicar acá, ¿sí? Como es menor que 180, pero qué pasa con el resto del ángulo, nos damos cuenta que puede ser esto y ustedes saben, ¿cuánto mide el ángulo de una vuelta?

Alumno: 360

SAMUEL: 360°, entonces nos damos cuenta que este ángulo de aquí es menor a comparación del ángulo que esta subrayado de amarillo, ¿no es así? Es por ese que establecemos que este ángulo va a ser mayor que 180° y este ángulo va a ser menor, ¿sí? ¿De acuerdo docente formadora con la respuesta? (KPM2-MG4)

Docente formadora: ujum, ujum

SAMUEL: entonces, qué es un cuadrilátero no convexo, anoten, un cuadrilátero es no convexo, un es cuadrilátero no convexo cuando presenta un ángulo interno, cuando presenta un ángulo interno mayor de 180°, ¿sí? Es un ángulo, decimos que es un cuadrilátero no convexo cuando presenta un ángulo mayor de 180°.

Laura: SAMUEL
SAMUEL: dígame
Laura: ¿solo un ángulo?
SAMUEL: claro, porque imagínate si yo hablara de dos ángulos, a ver, imagínate esta figura, para empezar veamos si tiene cuatro lados; uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis; ¿es un cuadrilátero, si tiene seis lados?
Alumnos: no
SAMUEL: por lo tanto vemos aquí que tiene dos ángulos cóncavos, ¿no es así? Pero no cumple el, la, digamos la misma función que este (comparando el cuadrilátero y el hexágono) por qué, porque este es un cuadrilátero y este es un polígono de seis lados, por lo tanto solamente tiene o cumple cuando solamente uno, un ángulo es mayor que 180°
Docente formadora: un pregunta, usted ha dibujado allí un hexágono, ¿no?
SAMUEL: ya
Docente formadora: pero cómo me demuestra a mí que en un cuadrilátero solo puede haber un ángulo cóncavo
SAMUEL: ¿con respecto al hexágono?
Docente formadora: no, el hexágono es el hexágono; pero ¿cómo prueba que en un cuadrilátero cóncavo solo puede haber un ángulo cóncavo y no más?
SAMUEL: lo que pasa, bueno, una propiedad fundamental en un cuadrilátero, es que la suma de sus ángulos interno suman 360° (KoT1-PF1.20), entonces este ángulo, más este ángulo, más este ángulo, van a sumar cierta cantidad que agregada a esta de acá (ángulo concavo)
Docente formadora: ujum
SAMUEL: justamente va a dar 360, porque qué pasa si yo, pongamos que existiera una figura de, cómo el caso del hexágono que yo hablo de dos ángulos cóncavos, como que van a sobre pasar un poco más de los 360, agregándole la suma de los demás ángulos, por lo tanto, solamente se cumple de esa forma, ¿sí? (KPM2-MG4.1)Ya muy bien. Entonces ¿ya puedo borrar? ¿Copiaron el ejemplo?
Laura: no, no
SAMUEL: a ver cópienlo… ¿sí, terminaron? ¿Puedo borrar?
Laura: si
SAMUEL: entonces, ahora nos toca ver los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados
Laura: SAMUEL, me puedo cambiar de sitio
SAMUEL: Sí, sí. Siéntese aquí a ver
Laura: no, me voy a ver.
SAMUEL: Pero ¿si alcanza a ver?
Laura: Sí, sí
SAMUEL: entonces, según el paralelismo de los lados, si vemos el caso de… si vemos el caso del cartel que tiene el niño, entonces nos damos cuenta que estos lados opuestos son paralelos (KoT1-PF3.4), ¿sí? Porque además tengo la presencia de estos ángulos rectos, ¿sí? Igual este lado de acá con este lado de acá serían paralelos. Entonces, estas que pueden corresponderse con el paralelismo de sus lados hablamos de tres tipos; hablamos cuando son los llamados paralelogramos, ¿sí? También si nos damos cuenta en el macetero qué podemos ver, aunque no se puede visualizar bien, pero qué forma tiene

César: trapecio

SAMUEL: ya usted ha dicho forma de trapecio, los podemos clasificar también, pueden ser trapecios y finalmente si observan la, la, la imagen del carrito que está, de este carrito de compras que lo está empujando dicha persona tiene también una forma cuadrangular, pero este cuadrilátero responde a un tipo que se le conoce como trapezoide, ya vamos a ver por qué. (KoT1-PF4.6)

Entonces ya vamos a centrarnos en lo que es paralelogramos, entonces los paralelogramos, vamos a ver qué es un paralelogramo; un paralelogramo, es un cuadrilátero, un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales, cuyos lados opuestos son iguales. A ver vamos a borrar esto para luego, para que nos de espacio para desarrollar lo que son los paralelogramos. Entonces un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son iguales. (KoT3-D1.13) ¿Ustedes creen que el cartel, que la forma que tiene el cartel es un paralelogramo?

Laura: SAMUEL, SAMUEL no entiendo (no audible)

SAMUEL: ya, lo que pasa, según el paralelismo de sus lados, le podemos agregar lado o longitud de sus lados, ¿sí? No hay ningún problema, ¿sí? Entonces nos damos cuenta que el cartel, los lados opuestos miden igual, ¿sí? Y los lados verticales también. En el caso del, de la…cometa ¿también, no?

¿Y en el caso del, de la señal de tránsito, ¿podemos decir también? Entonces pero ¿qué nombre recibe la figura del, del cartel que tiene el niño, que nombre recibe?

Laura: un rectángulo

SAMUEL: ya entonces dentro de los paralelogramos encontramos a los rectángulos, vayan tomando nota; encontramos a luos rectángulos, ¿sí? ¿a quién más? ¿a quién más podemos encontrar?

Laura: al cuadrado (el SAMUEL no lo escribe en el siguiente punto inferior, sino que deja este y escribe en el siguiente)

SAMUEL: yaaa (anotándolo en la pizarra). ¿Y a quién más?

Laura: y al rombo

SAMUEL: y al rombo (reafirmando). ¿Si?, entonces dentro de los paralelogramos encontramos a tres cuadriláteros que son también paralelogramos, que son los rectángulos, el rombo y el cuadrado (KoT1-PF4.5)

A ver anoten, ¿qué es, qué es un rectángulo? Un rectángulo es un paralelogramo, es un paralelogramo que tiene un ángulo recto, es un paralelogramo que tiene un ángulo recto. Alumno *DAVID ¿está de acuerdo con la definición que le he dado? Que un rectángulo es un cuadrilátero que tiene… es un paralelogramo que tiene un ángulo recto, Usted que me dice*

DAVID: no

SAMUEL: no, ¿por qué?

DAVID: porque ahí en la figura aparecen dos (señalando la pizarra)

SAMUEL: pero usted cree que para un cuadrilátero, en este caso que para un rectángulo (dibuja un rectángulo en la pizarra), vamos a suponer, a ver, si este, si yo solamente le digo que tiene un ángulo recto, ¿no es así?

(DAVID afirma moviendo la cabeza)

SAMUEL: entonces… por propiedad que se cumple en un rectángulo, los ángulos consecutivos siempre van a ser suplementarios, es decir, suman…

Alumnos: 180

SAMUEL: entonces si esto vale 90, ¿cuánto suma el de acá?

Laura: 90

*SAMUEL: entonces, por eso decimos que también se forma un triángulo con un ángulo recto, ¿no es así? Y este a su vez también por consecuencia de la propiedad también tiene que sumar 180, igual para este lado, ¿sí? Entonces no habría necesidad de poder definir a un rectángulo que presenta cuatro ángulos rectos, ¿si? Cuando en realidad solo basta decir con un ángulo recto, esteeee se puede formar el resto de ángulos, ¿sí? (KoT3-D3.3)*Si Martha de acuerdo, ¿o tiene alguna duda?

Martha: tengo una duda

SAMUEL: a ver dígame

Martha: porque aquí dice es un paralelogramo que tiene un ángulo recto

SAMUEL: ujum

Martha: y yo también puedo dibujar un cuadrado (KoT1-PF1.24)

SAMUEL: claro en un cuadrado se cumple, ¿sí? Entonces, ahora vamos a ver

Laura: SAMUEL

SAMUEL: dígame

Laura: y si en un cuadrado también se cumple, ¿cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rectángulo

SAMUEL: ya vamos a ver ese caso más adelante, ¿sí? Pero primero ya*… con respecto al rectángulo, a ver entonces, la primera característica que tiene el rectángulo es que presenta ángulos rectos, así como en los polígonos trazamos diagonales*, ¿esto será un (refiriéndose a un rectángulo dibujado en la pizarra) para empezar, esto será un polígono

Laura: Sí

SAMUEL: ya, entonces puedo trazar diagonales

Laura: Sí

SAMUEL: entonces desde… vamos a trazar las diagonales (el SAMUEL traza las diagonales)

Laura: SAMUEL

SAMUEL: diga alumna

Laura: ¿Cuadriláteros no lleva tilde?

SAMUEL: claro sí, tiene razón (corrige un tilde que le faltaba a cuadriláteros). Muy bien me gusta que esté muy atenta a la clase.

Entonces nosotros trazamos las diagonales de este cuadrilátero ABCD. ¿sí? Entonces qué pasa, que este cuadrilátero ¿las diagonales serán iguales o no? Laura, qué dice

(Laura afirma con la cabeza)

SAMUEL: entonces al ser iguales las diagonales se van a cortar en su punto medio, entonces al cortarse en el punto medio, ¿qué creen que ocurrirá? A ver César, ¿qué creen que ocurrirá con los lados BE y ED

César: iguales

SAMUEL: por ende, serán iguales ¿sí?. ¿y AE y EC, serán iguales?

César: Sí

SAMUEL: claro, entonces decimos que las diagonales al intersecarse digamos se bisecan entre sí, ¿sí? (KoT1-PF1.15)

Otra propiedad que podemos encontrar en este cuadrilátero, ¿qué puede ser? Que forman cuántos, cuántos esteee... ¿ustedes ven la formación de triángulos? Uno, dos, tres, cuatro ¿Entonces que podemos decir?

Alumnas: hay dos iguales

SAMUEL: a ver en el caso si yo trazara, si yo he trazado aquí la diagonal y acá también ¿yo podría decir que este, el triángulo ABC es congruente al triángulo ADC? Martha ¿puedo decir eso?

Martha: perdón

SAMUEL: debe estar más atenta. ¿el triángulo ABC es congruente al triángulo ADC?

Martha: Sí

SAMUEL: ya ¿y el triángulo BCD es congruente al triángulo BAD?

Martha: Sí

SAMUEL: Sí. Muy bien entonces las diagonales formarían triángulos congruentes KoT1-PF1.15 ¿sí? Ahora vamos con el rombo

Laura: un ratito profe

SAMUEL: a ver copien (les da un tiempo). ¿Ya? A ver cómo van (se acerca a ver el cuaderno de los alumnos)

Laura: ya

SAMUEL: ¿sí? Ahora vamos con el rombo, a ver anoten el concepto, un rombo, ¿ya? Es un paralelogramo, es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos congruentes, es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos congruentes (KoT3-D1.13), ¿sí? *Entonces yo trazaría aquí mi rombo a ver (traza un rombo en la pizarra). A ver qué me dice la definición esteee... César ¿puede leerla?*

César: es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos

SAMUEL: ya, es un cuadrilátero que tiene dos lados consecutivos congruentes, ¿no? Entonces qué quiere decir que este lado, le vamos a poner ABCD, es decir, el lado AB es congruente al lado BC, igual podemos decir que AD es congruente al lado DC. ¿sí? Por lo tanto establezco que todos los lados del rombo ¿son?

Laura: iguales (KoT3-D3.2)

SAMUEL: iguales (asiente con la cabeza). *Y ustedes a ver algo que les quería decir es que, ustedes o todos nosotros siempre la imagen que hemos visto es de esta forma (señalando el rombo que dibujó en la pizarra, el cual está apoyado sobre uno de sus vértices).* O sea, tal como está ¿sí? Dondeeee digamos este piquito está sobre esta base (refiriéndose al eje horizontal). *Ustedes creen que ¿si yo a esta figura la giro y la pongo de tal manera que AD quede sobre la base horizontal seguirá siendo rombo o no? Si yo giro esta figura, ¿seguirá siendo rombo si yo a A le doy un giro de tal manera que me quede de esta forma, a ver A, B, C, D (dibuja el rombo apoyado sobre el eje imaginario horizontal), a ver...*

Laura: no

SAMUEL: si yo le doy este giro ¿ustedes creen que seguirá siendo rombo?

Laura: no

SAMUEL: ¿por qué? (KFLM2-D1.1)

Laura: porque es un cuadrado porque tiene los lados iguales y los ángulos rectos

SAMUEL: pero acá también hemos dicho que tienen ángulos rectos

Laura: (no audible)

SAMUEL: pero si te das cuenta si tú lo trasladas tiene esta forma, si tú le das este giro
Laura: claro pero… supongo que los lados no son rectos
SAMUEL: no estás suponiendo, yo les he dicho en un momento que presentan ángulos rectos
Laura: ya, está bien pero… lo que yo veo en la figura es que tiene ángulos rectos
SAMUEL: ya…
Laura: estoy suponiendo
SAMUEL: Puede suponer.
La idea es que Martha, si yo esta figura le doy ese giro, ¿seguirá siendo rombo?
Martha: Bueno yo pienso que por lo que usted dijo que los lados son iguales y creo que esa figura tiene lados iguales
SAMUEL: ya
Alumna: entonces si lo pongo así puedo… yo puedo asumir que es cuadrado porque sus lados son iguales
SAMUEL: pero estamos viendo en lo anterior que es un rombo, ¿sí?
Alumna: si pero no nos han enseñado bien que es un cuadrado
SAMUEL: ah, ¿no les han enseñado?
Laura: nos han enseñado qué es un cuadrado
SAMUEL: ya, pero necesariamente ¿todo rombo siempre es un cuadrado?
Eso lo vamos a ver en unas situaciones que ustedes mismos lo van a deducir, pero la idea es que si esta figura le doy ese giro, ¿seguirá siendo rombo? ¿Qué dicen César?
César: Sí
SAMUEL: ¿sí? ¿Están de acuerdo? ¿Qué forma tiene esta, esta cajita de tizas?
Laura: un rectángulo
SAMUEL: un rectángulo si yo lo pongo de esta posición como ya lo estamos acostumbrados a ver (posición horizontal), ¿qué pasa si la pongo así (inclinada)? No pasa nada, ¿sí? Sigue siendo un rectángulo, entonces con el caso del rombo ocurre lo mismo la posición no me dice que es no un rectángulo, sino que el cambio de posición solamente es de manera convencional, o sea puedes decir un rombo con la base estándar o un rombo con el piquito como base, digámoslo así seguirá siendo rombo (KoT3-D2.1). Entonces ¿qué propiedad cumplirá un rombo? ¿También puedo trazar diagonales o no?
Laura: Sí.
SAMUEL: entonces trazamos las diagonales AC y BD, ¿sí? Pero en todo rombo se cumple la propiedad que estos, que estas diagonales se cortan perpendicularmente, es decir, que van a formar un ángulo de… 90° (KoT1-PF1.15), aunque no se… a ver aquí para que no se confundan (traza un rombo que visualmente, no tiene ángulos rectos) porque puede ser un, un cuadrado; a ver ahí lo pueden visualizar mejor*. Entonces este lado, este lado, este lado y este lado son iguales (los lados del rombo) entonces en un, en un rombo las diagonales una siempre va a ser mayor y otra siempre va a ser menor, ¿sí? Generalmente, entonces BD va a ser la diagonal mayor y AC va a ser la diagonal menor*
Laura: SAMUEL ¿siempre o generalmente?
SAMUEL: hay casos en los que no necesariamente van a ser igual… van a ser distintos (rectificándose), ¿sí? Ya vamos a ver más adelante, lo estoy dejando para el final, ¿sí? ¿Martha?
Martha: Sí

SAMUEL: Ya. Entonces si esas diagonales se interceptan entonces digamos ¿puede decirse que este lado de acá y el lado de acá son iguales si se interceptan en puntos medios? ¿Qué dices este DAVID, esteeee… DAVID

DAVID: Sí

SAMUEL: ¿Sí? Entonces y este lado de acá (los de la diagonal mayor), ¿van a ser iguales estos de acá? ¿Sí? Y esa es la propiedad que se cumple en este tipo de paralelogramo, igual ocurre con el rectángulo, ¿sí? Ehhhhh ¿alguna pregunta?

A ver, otra cosa que ustedes sepan es que siempre las diagonales de un… que son trazadas de un vértice al otro vértice opuesto, en este caso en un rombo siempre las diagonales van a cumplir la función de bisectriz, es decir, que dividen a los ángulos en dos ángulos (KoT1-PF1.15)… iguales… ya vaya y regrese rápido (después que alguien pidió permiso para salir), ¿sí? César… César, ¿sí? Que las diagonales también cumplen la función de bisectriz, entonces ahora vamos a ver lo qué es un cuadrado

(el SAMUEL dibuja en la pizarra un cuadrado)

Laura: SAMUEL

SAMUEL: dígame

Laura: ¿puedo ir al baño?

SAMUEL: que regrese su compañera.

Entonces tenemos aquí un cuadrado que se va a caracterizar por la presencia de tener ángulos rectos. A ver, dígame esteee… César, los lados de este, de este cuadrado, ¿son paralelos?

César: si

SAMUEL: ya ¿presenta ángulos rectos?

César: si

SAMUEL: ya, ahora, ¿los lados son iguales?

César: también

SAMUEL: entonces, lea a definición de un rectángulo, ¿puedes este…César, César?

DAVID: un paralelogramo que tiene un ángulo recto

SAMUEL: ¿cumple la propiedad el cuadrado de tener un ángulo recto? Ya hemos visto que de un ángulo se puede formar cuatro, entonces ¿cumple la propiedad de una ángulo recto? Martha, no se me duerma, ¿cumple la propiedad el rectángulo de tener ángulos rectos?

Martha: Sí

SAMUEL: Sí, ¿de acuerdo? Ahora lea lo que dice un rombo

DAVID: un rombo es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos congruentes.

SAMUEL: Entonces este lado (remarca los vértices), el lado AB es congruente con el lado BC como lo indica en la figura

DAVID: Sí

SAMUEL: ¿y el lado CD es congruente con el lado AD? entonces que conclusión me pueden sacar de esto si cumple las mismas cualidades del rombo y de un rectángulo, entonces ¿a qué conclusión llego?

DAVID: es un paralelogramo si tiene un ángulo recto… y dos lados consecutivos congruentes

SAMUEL: perfecto, ¿sí? A ver copien esa definición qué es un cuadrado (KMT3-DM1.5)

Laura: SAMUEL ya puedo ir

SAMUEL: bueno

A ver un cuadrado, a ver Mario toma nota por favor, un cuadrado es un paralelogramo que tiene un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes (KoT3-D1.13), es un paralelogramo que tiene un ángulo recto y dos ángulos consecutivos congruentes (dictándole a los alumnos).
Entonces, ¿qué puedo yo hablar del cuadrado con respecto al rombo y al rectángulo? ¿Las diagonales serán iguales en este caso?
Alumno: Sí
SAMUEL: las diagonales en este caso serian iguales
DAVID: y funcionan como bisectrices
SAMUEL: y a la vez funcionan como bisectrices, ¿verdad? ¿Y ustedes creen que también al cortarse en su punto medio?
Alumno: forman un ángulo recto
SAMUEL: ¿ángulo recto? Ángulo recto, claro (KoT1-PF1.15). Cumple igual que pasaría en el rombo, ¿no es así? Entonces si se dan cuenta el lado BO sería igual al lado OD; y el lado AC seria igual al lado OC… AO sería igual al lado OC (rectificándose)
Alumno: si
SAMUEL: por lo tanto, en este caso los lados serían iguales todos.
Ahora yo voy al hecho de que qué conclusión al final o qué puedo decir del cuadrado con respecto al rombo y al rectángulo. César venga por favor a la pizarra
(César se acerca)
SAMUEL: Como usted ya está en cuarto de secundaria, desde sexto han visto el tema de conjunto, ¿no es así? Entonces, mediante un diagrama de Venn establezca una relación que puede existir del cuadrado, del rombo y del rectángulo, escriba con esta (le da la tiza). Considerar que son parte del paralelogramo
(César comienza a hacer en la pizarra)
SAMUEL: a ver vayan pensando sus demás compañeros si está correcto lo que César está haciendo, ¿ya?
Recuerda que hemos visto que las propiedades se cumplen esas dos en un cuadrado, por eso que conclusión puede sacar mediante ese ejemplo, mediante un diagrama de eso.
A ver, ustedes vayan desarrollándolo también, ¿sí? Vayan desarrollando, vayan haciendo un diagrama de lo que ustedes creen conveniente que se relacionen esta parte de la presentación (señalando los paralelogramos), ¿sí?
¿Ya terminaron ustedes? (mirando el cuaderno de DAVID y diciéndole a él). ¿Pero esto lo pueden relacionar? ¿Cómo sería? Vaya trabajando DAVID por favor
SAMUEL: ¿ya César? A ver
César: en los conceptos de paralelogramo que ustedes nos ha dado…
SAMUEL: a ver escuchen, a ver escuchen
César: tienen sus lados, tienes sus lados opuesto iguales
El rectángulo que tiene sus lados opuesto iguales. Sumando esas propiedades… y el rombo, el rombo también que tiene sus lados opuesto iguales, que tiene lados congruentes iguales, entonces sumando esos dos conceptos, uniendo esos dos conceptos puedo obtener eso (haciendo referencia al diagrama)
SAMUEL: ¿y el rectángulo? Usted ha puesto paralelogramo más rectángulo
César: no, está mal, es rombo
SAMUEL: ya, ¿y el rectángulo dónde queda? Usted me ha dicho del (señalando el rombo)

SAMUEL: no, yo le dicho todo

César: ah ya (borra todo)

Mario: Profe ya lo tengo. (El SAMUEL se acerca a Mario pero la conversación es no audible).

SAMUEL: a ver, tú has llegado un poco tarde (dirigiéndose a Mario) y ahí en las definiciones hemos concreto al final que en un cuadrado se cumple las propiedades de un rectángulo con un rombo, abajo *tenía que hacer un diagrama, digamos un diagrama de Venn donde se pueden relacionar esos tres conceptos, incluyendo el paralelogramo sería como conjunto universal.*

Mario: ya

(El SAMUEL monitoria el trabajo de los estudiantes y les va dando instrucciones)

(César termina de hacer el diagrama) (KPM2-MG3.1)

SAMUEL: a ver, explíquelo, los demás ponen atención a su compañero a ver, para poder validar si es correcto o no lo que va a explicar

César: a ver, los paralelogramos es un concepto general donde pertenece el rectángulo, el rombo, el cuadrado. Tanto el rectángulo como el rombo eh… es la, digamos tienen un concepto, tienen un concepto eh… común para que se cumpla que es el cuadrado, lo que tiene el rectángulo con el rombo, digamos tienen un concepto que los va a unir para que puedan ser una sola figura (KM2-MG4.2)

SAMUEL: entonces usted está diciendo que, ¿un cuadrado puede ser rombo y rectángulo a la vez? Con lo que ha hecho ahí

Mario: bueno yo

SAMUEL: a ver Mario

Mario: bueno yo entiendo según el gráfico que me parece correcto, de que el cuadrado reúne a una, reúne una característica del rectángulo y a una característica del rombo porque el rectángulo tiene ángulos rectos y el rombo tiene lados iguales, entonces el cuadrado tiene ambas

SAMUEL: entonces yo le digo a usted, ¿un cuadrado es un rombo y rectángulo a la vez?

Laura: Sí

SAMUEL: ¿Sí?, está bien claro porque la intersección única que es común. ¿Sí Laura? ¿Sí Martha? ¿Sí DAVID? Muy bien César (César se sienta). Entonces qué sacan como conclusión, que un cuadrado es a la vez un rombo y un rectángulo ¿si? (KMT3-DM1). Anoten, conclusión en su cuaderno, a ver Martha, a ver Laura pongan conclusión, copien el diagrama y abajito del diagrama ponen conclusión.

Un cuadrado

Laura: (no audible)

SAMUEL: ¿Cómo?

Laura: un ratito

SAMUEL: ah ya… pero las conclusiones las pueden sacar ustedes mismos, un cuadrado puede ser a la vez un rombo y un rectángulo… un cuadrado puede ser a la vez un rombo y un rectángulo, ¿ya puedo borrar? ¿Si Mario?

Entonces ahora vamos, esto es con respecto a los paralelogramos, ahora vamos a ver otro tipo de cuadriláteros que se pueden clasificar también según la longitud de sus lados o paralelismo de sus lados, entonces hablamos de un segundo tipo que son los… (escribe en la pizarra) que son los trapecios, ¿ no es así? Entonces DAVID, DAVID me

dijo la forma que tenía el macetero era en forma de un trapecio, ¿no es así? Entonces, según esa definición, según el gráfico, usted ¿qué me puede decir de un trapecio?
DAVID: tiene dos lados paralelos
SAMUEL: dos lados paralelos, ya. ¿Usted Martha, está de acuerdo con lo que dice?
Laura: Sí es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos
SAMUEL: ¿sí? ¿César está de acuerdo con la idea?
César: Sí, tiene lados paralelos
SAMUEL: ¿yy Mario?
Mario: Sí y tiene dos lados no paralelos
SAMUEL: ya, y usted Laura
Laura: tiene dos lados distintos
SAMUEL: ¿dos lados distintos?
Laura: tiene lados distintos
SAMUEL: pero con respecto… a ver, la forma que tiene el macetero (dibuja la forma) es esta, ¿no? yo tengo A, B, C, D; entonces, usted siempre defiende su postura respecto a lados, me parece bien; pero ¿qué pasa con BD y AC?
Laura: son distintos
SAMUEL: son distintos pero a la vez son…
Laura: paralelos
SAMUEL: paralelos (reafirmando), ¿si? Por eso que aquí establezco también según el paralelismo de sus lados.
Entonces anoten, qué era un trapecio. A ver, qué es un trapecio, un trapecio es un paralelogramo… perdón es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos, que tiene dos lados paralelos (KoT3-D1.13), ¿sí? Entonces si yo digo que tiene dos lados paralelos, si yo les dibujo el siguiente… a ver vamos a poner, este es un rombo, ¿ya? Entonces yo les he representado lados paralelos (en el trapecio dibujado), en este caso de acá, en el rombo, ¿presentará también dos lados paralelos?
Alumna: Sí
SAMUEL: Sí, el rombo también presenta dos lados paralelos, ¿no es así? Este con este (señalando los lados), pero a la vez están diciendo también que el trapecio presenta dos lados paralelos; entonces ¿yo puedo decir, aunque parezca medio complicado pero, yo puedo decir que un rombo es un trapecio, según la definición que les he dado?
Laura: si (KFLM2-D1.3)
SAMUEL: ¿sí?
Laura: pero el rombo tiene más lados paralelos que (no audible)
SAMUEL: entonces, pero ¿tiene dos lados paralelos?, entonces ¿Sería trapecio?
Laura: según la definición, sí
SAMUEL: ¿está de acuerdo Docente formadora? ¿Sí?
Entonces según ustedes ¿un rombo puede ser un trapecio? Les suena medio raro, ¿no? pero si es según la definición que les he dado. ¿y si yo tengo un cuadrado también sería un trapecio?
Laura: si
SAMUEL: ¿y si yo tengo un rectángulo también sería un trapecio?
Laura: si (KSM-CC1.3)

SAMUEL: entonces un cuadrado puede ser rombo y rectángulo a la vez sino que también esas figuras pueden ser trapecio según la definición, ¿si Mario? A ver le veo cara de…

Docente formadora: este… Mario dijo ahora que un trapecio tenía dos lados paralelos y dos no paralelos, bajo la definición de Mario, ¿ese rombo es un trapecio?

SAMUEL: ¿con respecto a si tiene un par de lados no paralelos?

Docente formadora: claro

SAMUEL: pero, la idea fundamental es que digamos, esto puede ser un trapecio (el rombo) pero no un trapecio seria…

Docente formadora: no, no me está entiendo, imagínese que a Mario siempre le enseñaron el trapecio de esa forma que usted la ha dibujado, entonces él dice, para que sea trapecio siempre debe tener esa forma, por lo tanto solo puede tener un par de lados paralelos y un par no paralelos. Entonces bajo esas consignas, ¿ese rombo es un trapecio?

SAMUEL: lo que pasa es que ehh… puede decirse que un trapecio tiene al menos un par de lados paralelos

Docente formadora: eso es lo que usted está definiendo, yo le estoy diciendo bajo la definición de Mario, un par de lados paralelos y un par no paralelos

SAMUEL: ujum

Docente formadora: ¿ese rombo es un trapecio?

SAMUEL: Sí

Docente formadora: anote allí lo que le digo, un par de lados paralelos (Samuel anota en la pizarra)

SAMUEL: ya

Docente formadora: y un par no paralelos (Samuel anota)

SAMUEL: ya

Docente formadora: ya, entonces cuando él (refiriéndose al alumno Mario) quiere discriminar si una figura es o no un trapecio, él se fija que cumpla ambas condiciones, ¿de acuerdo? ¿El rombo cumple ambas condiciones?

SAMUEL: no, porque solo presenta un par paralelos

Docente formadora: ya, entonces bajo la definición de él (de Mario), ¿ese rombo es un trapecio?

SAMUEL: no

Docente formadora: ya está. Entonces cuando uno discrimina entre una figura y otra tiene que partir de una definición y según esa definición es que dice si es o no es, ¿de acuerdo?

SAMUEL: Sí.

Laura: SAMUEL entonces, ¿Qué es un trapecio?

SAMUEL: a ver, entonces coloquen o agréguenle a un trapecio presenta un par de lados paralelos y, y… perdón, presenta dos lados paralelos y… y dos lados no paralelos

Docente formadora: ¿Por qué cambia la definición que dio? Porque esa no es la que usted había dado

SAMUEL: a ver alumna deje la definición ahí, disculpe.

Ya entonces ahora, dentro de los trapecios encontramos unos tipos de trapecios. (KoT1-PF4.5) A ver si nos damos cuenta. A ver, cuando yo hablaba de… a ver, yo tengo tipos de trapecios, ¿sí? Tengo el trapecio, vamos a ponerlo de esta forma ABCD, si ya establezco que este lado y este lado son iguales, ¿Qué puedo decir, qué nombre puede *recibir este trapecio? Si ustedes lo asemejan mucho a un triángulo que tiene los lados iguales.*

Laura: isósceles

SAMUEL: isósceles, cuando un triángulo tiene lados iguales es un isósceles, ¿no es así? Entonces cuando un trapecio tiene lados iguales, ¿también sería isósceles?

(Alumno asintiendo con la cabeza si) (KSM1-CC1.6)

¿Sí, de acuerdo? Entonces, el primer tipo de trapecio es el trapecio isósceles donde este ángulo va a ser igual a este ángulo (los inferiores) y este ángulo de acá (KoT1-PF4.5), el ángulo B también sería igual al ángulo C entonces al yo trazar las diagonales, ¿las diagonales serían iguales, en este trapecio isósceles?

DAVID: Sí

SAMUEL: Sí sería igual, ¿sí? (KoT1-PF1.15)

Luego de haber visto el primer trapecio también hablamos de… *este es el primer trapecio (pone en la pizarra trapecio isósceles a la figura), también hablamos de otro tipo de trapecio (dibuja otro trapecio en la pizarra).*

Si yo le pongo que estos lados son distintos (señala los lados no paralelos), si yo lo relaciono mucho con este triángulo que tiene los lados distintos puedo decir… ¿qué nombre tiene este triángulo en este caso, cuando tienen lados distintos?

Alumnos: escaleno

SAMUEL: escaleno, entonces si este trapecio tiene lados distintos ¿puedo decir que es escaleno?

Alumno: Sí

SAMUEL: si entonces, el segundo tipo de trapecios es un trapecio escaleno (escribe en la pizarra en el trapecio) (KSM1-CC1.6), ¿sí? No les voy a definiciones, solamente lo define la… el nombre y la gráfica; entonces el trapecio… al ser un trapecio escaleno, este ángulo y este ángulo van a ser distintos (los inferiores), ¿sí? Y por ende las diagonales también serán distintas, (KoT1-PF1.17) ¿sí? Ahora hay un caso muy curioso que dentro de este trapecio escaleno está…¿puedo borrar este trapecio (trapecio isósceles), sí? ¿César puedo borrar esta figura? ¿DAVID? Si (borra la figura).

Entonces, si yo dibujo la siguiente, el siguien… la siguiente imagen, a ver si este ángulo (inferior izquierdo) es recto, ¿el de acá (superior izquierdo) será recto?

DAVID: Sí

Mario: si, porque los dos lados son paralelos

SAMUEL: ¿los dos lados son paralelos?

Mario: los lados son paralelos

SAMUEL: claro son paralelos, este (inferior izquierdo) es 90, como son complementarios, este… suplementarios suman 180. A ver, yo les pongo esta figura, ¿yo puedo decir que estos lados son distintos (AB y CD) o no? claro, si este la do es recto (AB), este lado es oblicuo (DC) y nos damos cuenta que este es un poquito más grande, entonces se puede decir que son distintos, entonces estee… triángulo… esteee trapecio representa ángulos rectos, ¿es también un escaleno? ¿Qué dicen ustedes? Bajo la idea de este, que tenia los lados distintos, entonces este de acá, al tener estos lados ¿se diferencia del escaleno? Al formar ángulos rectos. Laura qué dice

Laura: Sí

SAMUEL: ¿sí? ¿De acuerdo? *Entonces este trapecio recibe un nombre que es el trapecio rectangular, porque presenta en este caso ángulos rectos, dos ángulos rectos y además los lados son distintos, por lo tanto dentro del trapecio escaleno un tipo es el trapecio rectangular*, ¿sí? ¿Alguna duda? Ya

¿Sí copiaron? ¿Mario? A ver (no audible) tiene que graficar, ¿ya Laura? A ver tomen nota ¿ya puedo borrar?

Laura no se duerma, se ha amanecido estudiando, ¿ya? ¿Ya puedo borrar? ¿Mario?

Mario: Sí

(el SAMUEL borra la pizarra)

SAMUEL: entonces eso era con respecto a los trapecios.

Y un tercer y último punto dentro de la clasificación de este tipo tenemos a los llamados trapezoides, entonces ¿qué características va a cumplir este tipo, estee cuadrilátero?

A ver si nos fijamos en la imagen de acá (del papelote), a ver todos, en la del carrito que está empujando en este caso esta persona, es un cuadrilátero, entonces… si nosotros lo dibujamos acá (traza un trapezoide), tendría esta forma, ¿no es así? Entonces, vamos a ponerle A, B, C, D a los vértices. Entonces, por qué me dicen que es un trapezoide, porque, qué otra manera (no audible) respecto a sus lados

Laura: sus lados son distintos

SAMUEL: ehh… qué peculiaridad ve Martha en este cuadrilátero

Alumna: que los lados son diferentes

SAMUEL: entonces todos de acuerdo, ¿DAVID? ¿César? ¿Mario?

Laura: no tiene ángulos rectos

SAMUEL: ¿y tiene?

Laura: no tiene ángulos rectos

SAMUEL: ah ya entonces

DAVID: no tiene lados paralelos

SAMUEL: no tiene lados paralelos (reafirmando), entonces por eso un trapezoide se caracterizan por no tener lados paralelos y aparte son distintos, pero ¿puede ser este un cuadrilátero convexo Martha?

SAMUEL: eh… DAVID, DAVID

DAVID: ¿convexo?

SAMUEL: si, según la definición que dimos de convexos. ¿César? ¿sí? ¿Laura?

Laura: sí

SAMUEL: ya muy bien.

Entonces en este caso, si AB es distinto, si AB no es paralelo a BC y tampoco AD no es paralelo a BC, entonces decimos que dicho caso es un… trapezoide, ¿sí? Mario

Mario: ¿solamente es así?

SAMUEL: ¿Cómo así?

PFI5no: O sea ¿solamente esas dos condiciones que usted ha dicho?

SAMUEL: claro, ¿conoce alguna figura u otra que quiera agregar?

Mario: ¿qué tal si… no sé si… pero usted dice también, no sé si es verdad pero, también dice usted que los lados son de distintas medida?

SAMUEL: claro

Mario: (No audible)

SAMUEL: (no audible), muy buen punto, ¿sí?

Mario: ¿me podría decir si, AB es distinto… si AB no es paralelo a BC? AB no toma en cuenta los puntos o es, es por ejemplo… no sé, romboide

SAMUEL: ujum… pero la condición es que los lados no son paralelos y las medidas son distintas, ¿de acuerdo todos? ya muy bien. Entonces...esto era con respecto a los trapezoides.

Docente formadora: si esa figura tiene dos lados iguales, ¿tiene algún nombre especial?

SAMUEL: ¿si tuviera dos lados iguales?

Docente formadora: ¿tiene algún nombre especial?

(el SAMUEL dibuja en la pizarra una figura)

SAMUEL: este lado y este lado serían iguales, ¿a eso se refiere?

Docente formadora: ujum

SAMUEL: este lado y este lado son iguales.

Claro dentro de los trapezoides encontramos a otros dos tipos de trapezoides, ¿sí? Con el caso de la Docente formadora tiene razón, si este lado y este lado son iguales, entonces yo al trazar mi diagonal, ¿qué digo? Que estos lados también podrían ser iguales pero con distinta longitud.

O sea, distinta longitud con respecto a este lado, ¿sí? Entonces este… al trazar mi diagonal va a formar dos triángulos congruentes, ¿sí? Entonces ese tipo de propiedad de la diagonal trazada de un vértice al vértice opuesto de un trapezoide al formar triángulos congruentes recibe el nombre de trapezoide simétrico, ¿sí? A ver anoten…

Trapezoide simétrico, es decir que esta figura de acá (un triángulo), sería igual a esta de acá (segundo triángulo formado por la diagonal) ¿si Mario? Este triángulo seria igual a este triángulo de acá y obviamente. lo opuesto de esto seria, un trapezoide asimétrico, es decir, no se cumple esta propiedad, aquí podemos poner nuestro primer caso, donde este lado es distinto a este lado (todos los lados), este es distinto a este y este es muy distinto, ¿sí? Cuando los lados son distintos es un trapezoide asimétrico, no hay asimetría. En este caso donde hay asimetría (el primero) puedo hacer esta diagonal, ¿sí? ¿De acuerdo todos? ¿César? ¿Si? Muy bien, entonces eso es con respecto a la clasificación de cuadriláteros

Ahora esteee… Laura va a trabajar con Mario, ¿sí? Si se ubica mejor, a ver. No, no, gire las carpetas que van a trabajar en pares, Martha trabaje con DAVID y alumna (docente formadora) trabaje con César

(Se forman las parejas y el SAMUEL reparte el material)

Martha: SAMUEL (le hace una consulta)

(Comienzan a trabajar los alumnos)

SAMUEL: a ver, las, la primera pregunta la van a desarrollar bajo las definiciones que yo he dado, ¿sí?

(Siguen trabajando)

Martha: SAMUEL (Martha levanta la mano y SAMUEL se acerca a su grupo) (no audible)

SAMUEL: Ese es el paralelogramo propiamente dicho.

(Laura levanta la mano y SAMUEL se acerca a su grupo)

SAMUEL: a ver ahí, a ver si escuchan un ratito, allí se me ha pasado algo en la parte en cuanto al paralelogramo, en un momento les di la definición pero corresponde su imagen, sería este tipo ¿no? en donde los ángulos son opuesto serian iguales, este con este

son iguales (dibuja un paralelogramo en la pizarra) y este con este es igual, ¿si? ¿y al trazar yo las diagonales serian iguales o distintas?
Alumnos: distintas
SAMUEL: serían distintas, también se bisecan entre sí ¿sí? *Entonces ese es un paralelogramo propiamente dicho o también llamado romboide.* ¿Ya terminaron la primera parte?
(no responden)
SAMUEL: ¿a ver terminaron la primera parte?
Laura: SAMUEL, ¿ya me puedo retirar o todavía?
SAMUEL: todavía, no hemos terminado. ¿Ya terminaron ustedes, si? ¿Terminaron la primera parte ustedes? (a otro grupo) ya ¿ustedes terminaron?
(Solo la pareja de Laura y Mario ya terminaron) (Docente formadora le está explicando a César, con quien trabajó)
SAMUEL: ¿ya terminaron? ¿Ya a ver terminaron? ¿Sí? A ver, para la primera parte, ¿todos los cuadriláteros son trapezoides?
Laura: falso
SAMUEL: ¿falso? ¿Sí? ¿Algunos cuadrados son trapecios?
Mario y Laura: verdadero
Docente formadora: falso
Alumnos: falso
Docente formadora: ¿por qué verdadero?
Mario: bueno yo dije que es falso pero mi compañera…
(Docente formadora shsssssss, pidiendo silencio)
Laura: yo dije que es verdadero porque el SAMUEL cuando dio la definición de trapecio dijo que tenía dos ángulos
SAMUEL: dos lados paralelos
Laura: ya tienen dos lados paralelos y son laaa… lo del rombo y también hizo mención al cuadrado, por eso yo puse verdadero
Docente formadora: ya, ¿por qué ustedes dicen que… lo contrario (dirigiéndose a los demás alumnos)?
Martha: porque eso es lo que afirmaba el en un principio pero este eh, después viendo las características que tiene el trapecio llegaron a la conclusión de que el rombo mismo es el trapecio, por eso es que aquí dice…
(bulla)
Docente formadora: ¿saben por qué es falso? Porque todos los cuadrado tienen siempre las mismas características, entonces la proposición no debería ser algunos cuadrados, sino todo los cuadrados… porque si el SAMUEL ha definido que un trapecio tiene un par de lados paralelos por lo menos, un cuadrado siempre tendrá, cualquier cuadrado siempre tendrá por lo menos ese par de lados paralelos, entonces si yo digo que algunos cuadrado son trapecios estoy diciendo que hay distintos tipos de cuadrados o ¿no?
(Alumnos asintiendo con la cabeza)
Docente formadora: ¿se dan cuenta?
SAMUEL: bien, ¿algunos rombos son cuadrados?
Docente formadora: esa es la pregunta de la asignatura
SAMUEL: a ver esteee el grupo, el grupo dos, a ver que han puesto

Laura: ¿nosotros somos uno, no?
SAMUEL: si si, grupo uno. A ver, ¿algunos rombos son cuadrados?
DAVID: ¿falso?
SAMUEL: ¿falso?
SAMUEL: (no audible porque Docente formadora está hablando con César)
Laura: (no audible porque Docente formadora está hablando con César)
SAMUEL: ahora ¿un cuadrado es un rectángulo y un rombo?
Laura: ¿un cuadrado qué?
SAMUEL: ¿un cuadrado es un rectángulo y un rombo?
Laura: no SAMUEL, algunos rombos
SAMUEL: ah, ¿algunos rombos son rectángulos y no son cuadrados?
Laura: no
SAMUEL: falso. A ver, ¿un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo?
DAVID: verdadero
SAMUEL: ¿un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo? Usted lo hizo en la pizarra? (a César)
César: no lo había escuchado
SAMUEL: si, si ¿de acuerdo?
Laura: ¿un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo?
Laura: verdadero.
SAMUEL: ahora, ¿un trapecio tiene por lo menos un par de lados paralelos? Ustedes que han considerado (a Laura y Mario)
Laura: al menos un par de lados
DAVID: un trapecio dice un par de lados paralelos
Docente formadora: pero tampoco dice solo dos lados paralelos
Laura: dos lados paralelos
Docente formadora: a ver, es lo mismo decir ¿dos lados paralelos, solo dos lados paralelos?
Laura: no
SAMUEL: O sea puede tener al menos un par de lados paralelos, es verdadera la proposición
Docente formadora: porque no les están diciendo por ejemplo cuando Mario definió, un par de lados paralelos y un par no paralelos, su definición si está negando cualquier posibilidad de que un paralelogramo sea un trapecio
Laura: entonces como la definición no está negando ni afirmando nada es verdadero
Docente formadora: es que el si dice al menos, ¿no?
SAMUEL: claro
Docente formadora: o no, cuando definió dijo un par de lados paralelos, al no usar la palabra solo, deja abierta la posibilidad de que sean dos pares de lados paralelos
SAMUEL: ¿sí?
Laura: Docente formadora debería dar otra clase sobre esto, es muy confuso
Docente formadora: no, lo que pasa es que si ustedes revisan los libros de texto normalmente las definiciones se hacen de forma excluyente, ¿y que ocasiona eso? Que luego a ustedes les cueste tanto establecer relaciones, ¿por qué? Porque entienden que una figura es esto y no lo de acá; en cambio ¿por qué el SAMUEL da la definición… ¿SAMUEL ya terminó?
SAMUEL: Sí

Docente formadora: ya
SAMUEL: no, todavía
Docente formadora: ya termine luego les digo
SAMUEL: ya miren a ver alumno Mario usted que llegó un poquito tarde, ¿me puede decir que percibió en la clase, o sea que hemos visto hoy?
Mario: la clasificación de los cuadriláteros
SAMUEL: ya, usted Laura
Laura: las características
SAMUEL: ya Martha, los paralelogramos, ¿en que los podemos clasificar?
Martha: SAMUEL usted ha dicho el rombo, el cuadrado, el rectángulo
SAMUEL: César según un trapezoide puede ser, según el paralelismo de sus lados
César: simétrico o asimétrico
SAMUEL: ¿Cuándo digo que es simétrico?
César: cuando tiene dos lados, cuando tiene dos lados iguales, dos lados consecutivos iguales
SAMUEL: ya y…
César: y asimétrico no tiene lados iguales
SAMUEL: pero la diagonal del trapezoide simétrico determina ¿Qué?U
César: ah las simetrías
SAMUEL: ya, pero qué determina, (no audible) a la figura
César: ah en triángulos iguales
SAMUEL: ¿sí? Entonces es así el tema con respecto a la clasificación de los cuadriláteros, estudien para la práctica del día miércoles que va a venir sobre este tema, más, gracias.

APÉNDICE H:

Transcripción de la sesión de clase de Marta Definición de polígono y su clasificación

Responsable: Marta
Fecha: 17 de noviembre de 2011
Grado: no indica **Duración:** 60 Min

Profesora: (Habiendo pegado un papelote con las definiciones de polígonos dadas en el cuestionario, dice:) Sus compañeros de la otra aula han definido polígonos y esos son justamente las definiciones, los conceptos que ellos han dado entonces, en esta vez nosotros vamos a construir la definición de polígono pero para eso, vamos a trabajar en grupo, van a trabajar en grupo los tres y vamos a realizar la actividad que está aquí, dice: con tus saberes previos analiza de qué cierto tienen estas definiciones, qué de cierto. A partir de ello realiza un gráfico para cada una.

Leo la primera definición que me ha dado su compañero Pablo, dice: El polígono es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares. La segunda definición dice: Un ángu, un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales. Gaby nos dice: Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180° su fórmula sería 180°(n-2). Y Luis: Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de tres o más puntos que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

Entonces, lo que van a hacer ustedes es, allí en el papelote es, analizar con sus conocimientos previos cada una de esas definiciones y ver qué de cierto tiene cada una y después, a partir de lo que ustedes hagan, van a hacer el gráfico correspondiente. Para ello van a tener veinte minutos, veinte o quince, ¿ya? Yo les voy a dar el material. ¿Sí SAMUEL?

SAMUEL: Este, cuando me dice, a partir de ello realice un gráfico, o sea, a partir de lo que vamos a plantear aquí, de lo que dice cada alumno cuando (la profesora no lo deja terminar e interviene).

Profesora: Claro, o sea según esto (señalando el papelote con las definiciones para analizar)

SAMUEL: ¿Un gráfico de polígono?

Profesora: Sí, ya, los quiero ver trabajar.

Docente formadora: ¿Un gráfico de cada definición que está allí?

Profesora: Sí

Docente formadora: Ah, ¿no es de lo queee, de lo que ellos (los EPM en su rol de estudiantes) digan que es cierto o no?

Profesora: Claro. O sea lo que quiero darles a entender es que, bueno la primera (refiriéndose a la consigna) no hay discusión, ¿no? Luego dice: A partir de ello realiza un gráfico para cada una. Es… (interviene otro estudiante) la analizo

DAVID: A ¿A partir de la que nosotros hacemos? (La profesora interviene mientras él concluye su pregunta).

Profesora: La analizo y tú planteas tu gráfico según tu análisis.

DAVID: Ah ya.
Docente formadora: ¿Qué sería, qué sería un polígono para cada alumno (de las definiciones dadas), eso?
Profesora: Claro
Docente formadora: Ah ya.
DAVID: ¿En grupo?
Profesora: Sí, en grupo, por eso le he dado papelotes.
(Los alumnos se disponen para realizar el trabajo)
Profesora: A ver, como van a tener que plantear ehhh y hacer los gráficos, aquí tienen hojas Art color (Les entrega el material a los alumnos)
SAMUEL: (dirigiéndose a sus compañeros) Ya a ver, pónganse para trabajar. A ver, Pablo, a ver qué dice Pablo: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. ¿Es un cuerpo geométrico?
DAVID: Cuerpo geométrico (mirando a SAMUEL)
Profesora. Si no les alcanza, aquí hay otro papelote, ahí tienen tijeras, goma (mientras la profesora entrega el material los alumnos comentan las definición)
DAVID: De que tengan lados y ángulos diferentes (no audible) eso sí.
ABEL: No pero es un cuerpo geométrico (no audible)
SAMUEL: Lados y ángulos diferentes no.
(Realizan comentarios no audibles)
SAMUEL: O sea, lo único que tomaríamos que ha hecho bueno sería la clasificación.
ABEL: Es un cuerpo geométrico que pueden ser cóncavo, convexo, regulares e irregulares.
SAMUEL: ¿Pero es un cuerpo geométrico? (SAMUEL mira a la docente formadora esperando su aprobación)
(Comentan entre ellos, no audible y se miran sin saber qué colocar)
ABEL: Sí (refiriéndose a que sí es un cuerpo geométrico).
SAMUEL: Entonces ¿Es un cuerpo geométrico? (dirigiéndose a ABEL)
ABEL: Sí. Figura geométrica mejor. Es una figura geométrica.
SAMUEL: No es que hay que ponerle…
ABEL: Cuerpo geométrico (SAMUEL escribe: es un cuerpo geométrico que puede ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares, mientras ABEL le dicta). Bueno cuando dice cóncavos, convexos, regulares e irregulares, ahí plantea cuatro tipos, pero no (no audible, comentan y pasan a la siguientes definición).
DAVID. Ana.
SAMUEL: Ana dice un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales.
DAVID: No necesariamente. Es una figura geométrica sí pero lo otro no.
SAMUEL: ¿Solo es una figura geométrica? (ABEL le comenta algo, no audible) que tiene lados y ángulos nada más ¿Sí?
DAVID: Sí ¿pero con lo que está allí?, tiene lados y ángulos de medidas iguales.
SAMUEL: Pero analiza qué de cierto tienen estas definiciones.
ABEL: Ah, hay que hacer un comentario.
SAMUEL: (mira a la docente formadora como diciendo: ¿qué hacemos?) ¿Profesora?
Profesora: ¿Sí?

SAMUEL: Profesora, una pregunta (ABEL comenta algo con SAMUEL sobre la definición de Ana, la profesora se acerca a los alumnos)
Profesora: ¿Sí?
SAMUEL: Profesora, nosotros estamos trabajando, digamos, poniendo lo que son…lo que tiene de cierto cada definición, por ejemplo, Pablo dice el concepto pero nosotros pensamos que puede ser esto nada más, ¿es así?
Profesora: Sí
SAMUEL: Ah ya
ABEL: Y no es decir, a ver
SAMUEL: ¿No es hacer un comentario?
ABEL: Analizar es eso, es…
Profesora: Por eso, también hay que
ABEL: Por ejemplo, Ana, es una figura geométrica que tiene….un análisis puede ser
SAMUEL: O sea hay que explicar si es o no un polígono (el diálogo es superpuesto, las idea no se terminan e intervienen los alumnos en simultáneo)
ABEL: Ana toma como polígono
Profesora: Por ejemplo, ¿Pablo qué dice? Es un cuerpo geométrico que tiene ángulos de medidas diferentes. Hasta ahí no más. Al analizar yo con mis saberes previos digo: El polígono ¿es cierto que es un cuerpo geométrico o no? (SAMUEL la mira sin saber contestar)
DAVID: Sí
Profesora: ¿Entonces? Si hasta aquí no solamente (acercándose al papelote), entonces, la definición, si hasta aquí está bien entonces Pablo, entonces es un cuerpo geométrico. Luego dice, que tiene ángulos, lados y ángulos diferentes ¿es correcto o no?
(Los alumnos retoman el trabajo y analizan la definición de Ana)
SAMUEL: ¿Es una figura geométrica?
DAVID. Sí (SAMUEL escribe)
ABEL: Es una figura geométrica con ángulos y lados nada más.
SAMUEL: Gaby dice es una figura geométrica cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180° su fórmula sería ... No posee más de dos lados.
DAVID: ¿un polígono?
SAMUEL: Por lo menos tres lados.
DAVID: Más de dos pues.
SAMUEL: No, pero si da a entender que…
ABEL: Sí, más de dos
SAMUEL: Yo lo entiendo como que tiene de dos a más.
ABEL: A ver, un polígono es una figura geométrica que posee más de dos …¿no?, más de dos es tres, cuatro, cinco, seis.
SAMUEL: ¿Pero se toma el dos?
ABEL: No
SAMUEL: Pero cuando dices “por lo menos dos”, tomas el dos
DAVID: Puede tener dos, tres, cuatro. Ya pues aquí dice “más de dos” (En simultáneo SAMUEL dice: más de dos)
ABEL: Más de dos

DAVID: O sea dos no puede poseer, tiene que tener más de dos. O sea por decirte tres, cuatro (murmullos) (KoT5.C1.1)

SAMUEL: Entonces…

DAVID: Figura geométrica la cual posee más de dos lados, hasta allí es verdadero…Y sus ángulos miden ¿pero qué ángulos?

SAMUEL: Entonces no le ponemos

ABEL: Y sus ángulos miden más de 180°…

SAMUEL: Eso de 180° era la suma de ángulos interiores creo…180°(n-2) (KoT4-P1)

ABEL: Sí es suma de los ángulos interiores de un triángulo ¿no?

DAVID: La fórmula es de la suma de ángulos interiores pero que los ángulos midan más de 180° (la profesora se acerca a los alumnos para ver cómo va su trabajo)

ABEL: Más de 180° no

SAMUEL: (Pregunta para escribir) ¿es una figura geométrica que tiene más de dos lados)

DAVID: Sí (SAMUEL escribe y la profesora se retira nuevamente)

SAMUEL. Ya ¿y el otro?

DAVID: (Lee) Su fórmula es 180°(n-2)

SAMUEL: Ya pero no está especificando de qué es. (Comentarios no audibles)

DAVID: Ahí dice, sus ángulos miden… sus ángulos, pero a qué se refiere, ¿a los ángulos? ¿si son interiores no pueden medir?

SAMUEL: Luis dice: es una figura geométrica cerrada compuesta por la unión de tres puntos que ocupan un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse. (DAVID hace un trazado sobre la mesa con sus dedos, intentando comprender lo último, SAMUEL vuelve a leer la definición en voz baja, como analizando)

DAVID: ¿los puntos o los segmentos?

SAMUEL: Ah, porque los puntos siempre se ubican de diferente manera, igual se va a trazar (DAVID hace un dibujo en su cuaderno, SAMUEL mira lo que dibuja). Segmentos sería. Entonces ¿qué pondría? Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de tres o más puntos, que ocupa un lugar en el plano. (Le da el papelote para que ABEL escriba)

SAMUEL: Hay que dibujar

DAVID: Ah verdad

(Hacen comentarios entre ellos sobre buscar en wikipedia)

DAVID: No es confiable el wikipedia

ABEL: compuesto por la unión de tres o más puntos, ¿sí? Hasta ahí. Que ocupan un lugar en el plano.

Profesora: Allí coloquen su nombre.

SAMUEL: (Dirigiéndose a DAVID) alcánzame el papelote. (Dirigiéndose a la profesora) ¿Dónde dibujamos, en este?) (no audible).

DAVID: (Dirigiéndose a la profesora) Si decimos que es cóncavo, convexo, regular e irregular, ¿tenemos que dibujar cada uno, o sea, si es cóncavo un polígono cóncavo, si es convexo, un polígono convexo. ¿Así?

SAMUEL: No, o sea, hay que dibujar de acuerdo a lo que Pablo me está diciendo en la definición.

ABEL: Ya, eso está diciendo

SAMUEL: Pero, es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Puede ser cóncavos, convexos, regulares, …(ABEL le dice algo, no audible) No, pero es que ahí

DAVID: Los dibujos salen de ahí ¿cierto? (dirigiéndose a la profesora y señalando el trabajo que han realizado)

SAMUEL: No de ahí (señalando la pizarra)

ABEL: ¿total?

Profesora: ¿Qué están haciendo?

SAMUEL: (dirigiéndose a la profesora y señalando el papelote en el que han trabajado) esto es lo cierto que hemos considerado de cada uno.

Profesora: Ya

SAMUEL ¿pero para dibujar tenemos que tomar el concepto de cada uno?

Profesora: Claro.

SAMUEL: Ya pues (los alumnos se miran sin estar convencidos)

ABEL: Total, ¿las figuras salen de aquí o de allá? (Señalando su papelote de trabajo y luego el de la pizarra)

SAMUEL: De allá

Profesora: Las figuras salen de allá (señalando el papelote de la pizarra)

ABEL: Ah de allá. ¿Entonces esto ya lo dejamos?

Profesora: Lo dejan allí, por eso les he dado el otro papelote para que pongan los dibujos.

ABEL: Yo hago un cóncavo, tú un convexo, regular e irregular ¿sí? (distribuye el trabajo)

SAMUEL: (mira la pizarra como analizando) que tiene ángulos lados y ángulos diferentes.

ABEL: convexo, cóncavo, regulares e irregulares.

(Inician el trazado de las figuras y comentan entre ellos, no audible)

SAMUEL: Pero no cumple, nunca existe un polígono regular que tenga lados y ángulos diferentes. (KoT1-PF2.4)

DAVID: Entonces sería cóncavo y… cóncavo no más. ¿Cóncavo irregular?

(ABEL ha cortado un cuadrilátero cóncavo)

SAMUEL: (Sobre la figura de ABEL) tiene lados y ángulos diferentes. Ya, ahí hay una.

DAVID: Ese es el cóncavo.

SAMUEL: Ahora un cóncavo, a ver

DAVID: Ese es cóncavo (señalando el recortado por ABEL)

SAMUEL: Este…convexo, qué hablo. Ah claro.

Profesora: las van pegando (las figuras) en el papelote.

ABEL: Ahí pongo Pablo, tal.

Profesora: Luego eso me lo voy a llevar, eso tiene nota.

SAMUEL: Ahora es de Ana. Dice que tiene lados y ángulos iguales. (Mirando a sus compañeros) Un cuadrado es un polígono que tiene lados y ángulos iguales (No se notan muy convencidos y SAMUEL sigue pensando).

Profesora: Les queda cinco minutos.

SAMUEL: Ya, la de Gaby. Más de 180°.

ABEL: Más de 180°.

DAVID: Sus ángulos ¿más de 180°? ¿puede tener uno, dos, tres?

ABEL: O sea ya pues, una estrella.

SAMUEL: Y sus ángulos miden más de …pero

ABEL: Ah no

SAMUEL: cuando dice ángulos se refiere a todos.
ABEL: Ya, una cruz
SAMUEL y DAVID: No todos.
ABEL: ¿Sus ángulos interiores o exteriores?
SAMUEL: Me imagino que interiores. (ABEL le comenta algo, no audible) Sus ángulos me imagino que todos
DAVID: No necesariamente todos
SAMUEL: ¿no necesariamente todos?
DAVID: Esa figura que está allí (señalando el cuadrilátero que ya han trazado) tiene un solo ángulo.
SAMUEL: No pero está diciendo que “la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°”
DAVID: Yo creo que puede tener dos, tres ángulos de 180° o que midan más.
ABEL: Ay avancen porque ya queda cinco minutos.
(Mientras DAVID y ABEL trazan polígonos, SAMUEL sigue pensando en voz alta la definición dada por Luis.)
Profesora: ¿por dónde van? (Se acerca a mirar su trabajo)
(SAMUEL le da a ABEL una figura con lado curvo)
SAMUEL: Es que no me dice…(no audible) es una figura cerrada.
(Algo hace ABEL a la figura)
SAMUEL: No, era del otro lado, para que se vea la unión de los puntos (ABEL y DAVID sonríen). Ya profesora (entrega el papelote).
Profesora: Ahora sí, bueno, (mira el papelote en el que tiene escritos los objetivos de la clase) vamos a tener que alcanzar en el día de hoy, en la clase es justamente deducir el concepto de polígono a través de las definiciones dadas, ¿no? Las que propiamente ustedes van a hacer. Van a utilizar sus conocimientos para poder clasificar los polígonos.(KMLS2-NL1) Bueno ahora, esto lo vamos a dejar a un ladito, vamos a ponerlo aquí ¿ya? (no audible). Ahora sí, eh, quiero que escojan un papelito (se acerca a sus alumnos y tira los papeles sobre la mesa para determinar quién expone). ¿Tú ABEL?
ABEL: Sí
Profesora: Ya. Chicos, van a tener que pegar su papelote en la pizarra y como han trabajado en grupo, ABEL vas a tener que explicar lo que ustedes han trabajado. A ver, DAVID…aquí hay para que puedan pegar (DAVID y SAMUEL van hacia la pizarra para pegar el papelote). DAVID (lo vuelve a llamar para que ayude a pegar el papelote). A ver ABEL, adelante. Muy bien chicos, ahora sí ABEL (DAVID y SAMUEL se sientan y ABEL se queda de pie para exponer). Bueno, lo que va a hacer ABEL es explicar por qué en la definición de Pablo por qué, de Pablo por qué es que ha puesto cada, cada, cada…por qué ha definido así lo que ustedes han acordado en grupo y además los gráficos que han hecho. A ver, empezamos ABEL (la profesora se queda de pie, a un lado del aula)
ABEL: A ver, ya, lo que hemos hecho es lo siguiente. (Lee la instrucción). Con lo que (no audible) de tus saberes previos analiza qué de cierto tienen esas definiciones. A ver, Pablo nos dice, en un primer momento, Pablo nos dice: Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser cóncavos, convexos, regulares e

irregulares. Lo cierto aquí es que Pablo, lo cierto de esta definición es, afirmamos: es un cuerpo geométrico, está bien; tiene lados y ángulos diferentes, aquí, ángulos y lados diferentes, vimos y analizamos un poco en grupo, nos dice: no necesariamente un polígono va a tener lados y ángulos diferentes puesto que, puede haber un polígono que tiene lados y ángulos iguales llamados ¿sí? Regulares. Ya, Pablo: es un cuerpo geométrico que pueden ser cóncavo, convexo, regulares o irregulares (señala lo que consideran cierta de la definición de Pablo).

Profesora: A ver todos, ¿Ustedes también coinciden con lo mismo, es un cuerpo geométrico DAVID? ¿Es un cuerpo geométrico? ¿Es lo mismo decir que, bueno si yo digo, es una figura geométrica, que cuerpo geométrico? ¿Es lo mismo?

SAMUEL: Cuerpo geométrico no

Profesora: No, ¿por qué no SAMUEL?

SAMUEL: parece que los cuerpos geométricos (ABEL levanta la mano pidiendo la palabra)

ABEL: Un cuerpo geométrico es como un sólido.

Profesora: YYY, entonces ¿es cierto lo que dice acá?

(no audible)

ABEL: es la unión de tres o más puntos ¿sí, cierto?

SAMUEL: La que están allí pero falta (no audible)

Profesora. Muy bien, entonces. Y a ver explicamos

(ABEL pasa a explicar los gráficos trazados)

ABEL: A partir de ello realiza un gráfico para cada uno, a partir de ello vamos a analizar. A ver. Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Puede ser cóncavo, convexo, regular. Al decir que es regular se contradice, por lo tanto, no hemos tomado regulares e irregulares. Los regulares no hemos tomado. Porque al ser regular, sus ángulos y lados son iguales por eso, hemos… un cóncavo y un convexo.

Profesora: Ya

ABEL: Ya ahora, Ana…un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales: el cuadrado, ángulos de 90° y lados iguales.

Gaby, es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180

Profesora: 180 ¿qué? (KoT5.C1)

ABEL: grados. (Señala una figura con forma de cruz y va comentando) Posee más de dos lados, sus ángulos miden más de 180. Hemos expuesto…

Profesora: qué ¿algunos?

ABEL: todos

Marta: ¿Todos? ¿Todos, DAVID?

DAVID: algunos, no todos porque hay algunos de 90°.

ABEL: sí, algunos.

Profesora: ya

ABEL: Y Luis…es una figura geométrica cerrada (señala la elipse que han trazado), compuesta por la unión de 3 o más puntos (señala y cuenta los 4 puntos que han marcado en la figura) y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

Profesora: Muy bien ABEL. (La profesora reordena los papelotes que se han pegado sobre la pizarra para tener un espacio donde escribir). Como verán chicos… (Sigue reordenando mientras los chicos conversan). Muy bien, entonces, según la actividad que hemos realizado, el tema del día de hoy ¿cuál sería? Obviamente el tema de polígonos (escribe el título en la pizarra). Muy bien, entonces, para construir una definición de lo que es polígono, hemos tenido que desarrollar la actividad que yo les he planteado. Ahora, ustedes han llegado a la conclusión, a ver chicos, si prestan atención.

Profesora: En lo que dice Pablo: es cuerpo geométrico que puede ser cóncavo, convexo, regulares e irregulares. Como les hacía la aclaración, el polígono ¿es un cuerpo geométrico?

SAMUEL: No

Profesora: No verdad, no es un cuerpo geométrico. Entonces, la definición de Pablo hasta aquí no va (señala al final de cuerpo geométrico) ¿verdad? porque no cumple…bueno es un polígono. Luego dice, que tiene lados y ángulos diferentes ¿siempre va a hacer eso?

SAMUEL. No

Profesora: No verdad, tampoco. (KoT1-PF1.1) ¿Pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares? Si lo leemos así, que los polígonos pueden ser cóncavos, convexos...

DAVID: Sí

Profesora: estoy analizando de aquí a acá, luego parto de aquí acá y acá hay un punto y dice: ¿pueden ser los polígonos cóncavos, convexos, regulares e irregulares?

Grupo: sí

Profesora: sí, sí pueden ser. Entonces lo único válido que puedo sacar de aquí ¿qué es? Que pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares. KoT1-PF1.2) *Muy bien, ahora, con respecto a la segunda, la de Ana, ustedes me dicen que es una figura geométrica, ¿solamente eso está bien?*

Grupo: Sí

Profesora: ya veamos, un polígono es una figura geométrica, exactamente. Luego dice, que tiene lados y ángulos de medidas iguales. ¿Será cierto eso?

SAMUEL: No

Profesora: No necesariamente, ¿verdad? Porque según los ejemplos que ustedes han dado puede que este polígono tenga los lados y los ángulos iguales ¿verdad? Pero si yo tengo esta otra figura (pega un rectángulo) ¿tendrá los ángulos y los lados iguales?

ABEL: los ángulos

Profesora: ¿Y los lados serán iguales?

DAVID: No (KMT2-A1)

Profesora: No, ¿verdad? Entonces eso no va. (KoT1-PF1.1) Entonces solamente me quedaría con que es una figura geométrica. (Escribe en la pizarra) Es una figura geométrica…muy bien (KoT1-PF1-2). Ahora, con lo que afirma Gaby dice: es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°. Su fórmula sería 180° (n-2). Lo que ustedes concluyen: es una figura geométrica que tiene más de 2 lados. Lo que dice Gaby y lo que dice Ana coinciden ¿verdad? Porque coinciden en que el polígono es una figura geométrica. Luego, ella (por Gaby) nos está dando otro dato: posee más de dos lados. El polígono, para que sea un polígono ¿cuántos lados como mínimo debe de tener?

SAMUEL: Tres

Profesora: Tres verdad, y ¿En qué figura tiene tres lados, D?

DAVID: En el triángulo

Profesora: Muy bien, el triángulo (KoT1-PF1.2). Entonces, el triángulo… El triángulo, entonces el triángulo es una figura que puede tener más de dos lados, es una figura que tiene tres lados. Luego, solamente entonces, *el dato que podría salvar de la definición de Gaby es que posee más de dos lados. Y sus ángulos miden más de 180° ¿podría yo afirmar esto?*

SAMUEL: no.

Profesora: ¿podría yo afirmar esto, que sus ángulos miden más de 180°? No ¿verdad? (KoT1-PF1.1)

Profesora: Su fórmula sería 180°(n-2).

(SAMUEL mueve la cabeza diciendo "no", los demás no dicen nada, la profesora solo los mira)

Profesora: Entonces ¿con qué parte de la definición de Gaby yo puedo rescatar?

DAVID: Con la fórmula

Profesora: ¿Con la fórmula?

DAVID: La parte que dice que es una figura geométrica la cual posee más de dos lados

Profesora: Ya, entonces…

ABEL: Srta. ¿Y la fórmula está mal allí?

(La profesora termina de anotar la idea que han rescatado de la definición de Gaby y luego contesta a la pregunta de ABEL)

Profesora: Esa fórmula es para la suma de ángulos interiores de un polígono (KoT4-P1), pero eso es otro tema que luego lo vamos a tratar, ahorita solamente quiero que se concentren en el concepto de polígono (KFLM3-ST1.1), ¿ya? Ahora, vamos con la siguiente definición. (Repasa la definición de Gaby) Es una figura geométrica…bueno eso ya está, por eso es que aquí ya no lo vuelvo a poner, ¿ya? Lo que dice Luis, ahora…bueno ¿y qué dijeron ustedes con respecto a lo que dijo Gaby? (Lee lo que han escrito) Muy bien, es una figura geométrica que tiene más de dos lados. Con respecto a lo que dice Luis: es una figura geométrica cerrada compuesta por la unión de 3 o más puntos que ocupan un lugar en el plano (vuelve a leer la definición)… lo puntos no deben cruzarse.

Profesora: ¿Por qué acá no ponen "los puntos ya no deben cruzarse"? ¿DAVID?

(DAVID se sonríe sin saber qué decir)

Profesora: ¿están de acuerdo con esa definición?

SAMUEL: No

Profesora: ¿Por qué?

SAMUEL: porque no me especifica que…o sea lo único que podemos rescatar allí es que "es una figura geométrica cerrada"

Profesora: otro dato ¿verdad? Ya no nos dicen que es solamente una figura geométrica.

SAMUEL: ahora, compuesta por la unión de tres o más puntos, ocupa un lugar en el plano, pero eso es lo rescatable…(KoT1-PF1.2) pero, según lo que hemos… Ahora, con respecto a la segunda actividad, nos pide trazar un gráfico de…bueno, lo que nosotros hemos entendido es que no me especifica es que la unión de sus puntos siempre se va a hacer en línea recta, por eso es que lo hemos hecho como curvo, digámoslo así, hemos hecho la unión pero en una pequeña curva.

Profesora: Entonces ¿con qué parte de la definición solamente se quedan?

SAMUEL: Es una figura geométrica

Profesora: (Escribe) es una figura geométrica cerrada, ¿qué más?

SAMUEL. Compuesta por la unión de tres o más puntos.

ABEL: Compuesta por la unión de dos

(Profesora sigue anotando en la pizarra sin tomar en cuenta lo que ha dicho ABEL)

Profesora: …por la unión de tres o más puntos….ya, que ocupan un lugar en el plano. Entonces ¿quiere decir que estos puntos son coplanares?

SAMUEL: Sí

Profesora: Porque dice que ocupa un lugar en el plano, entonces tres o más puntos coplanares. (KoT5-C1)

SAMUEL: Pero allí profesora, no entiendo eso de que los punto no deben cruzarse.

Profesora: tengo 3 puntos, 3 o más puntos (y los traza en la pizarra), lo que tú has hecho… entonces cuando él dice (Luis) los puntos no deben cruzarse, yo me imagino (y traza y traza una especie de dos triángulos unidos por un vértice de forma opuesta, ver figura) que al unir los puntos, el segmento que une los puntos…(KFLM2-D2.1)

SAMUEL: Entonces la idea sería los segmentos, los segmentos y no los puntos…o los lados (DAVID también comentar simultáneamente algo parecido)

Profesora: A ver ¿con qué parte de la definición se van a quedar?

SAMUEL: Es la unión de puntos coplanares

DAVID: Los puntos…

Profesora: ¿Los puntos…?

DAVID: No pueden cruzarse, ¿no?

Profesora: Solamente me quedaría hasta aquí: Es una figura geométrica cerrada compuesta por la unión de 3 o más puntos coplanares.(KoT1-PF1.2) Bien, ahora…Lo que vamos a hacer ahorita, ya no vamos a trabajar grupal.

ABEL: ¿Individual? Grupo de uno.

Profesora. A ver (reparte una hoja). Según las ideas que yo he podido rescatar de todo esto, formulen el concepto de polígono. Luego vamos a pasar a… ¿A, ya?

(La profesora pega las tres hojas en la pizarra y cada alumno va leyendo su definición).

SAMUEL: Es una figura geométrica cerrada que posee más de 2 lados, formada por la unión de 3 o más puntos coplanares. Los polígonos pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

Profesora: A ver ¿DAVID qué opinas?

DAVID: Está bien

Profesora: (vuelve a enunciar) Es una figura geométrica cerrada que posee más de 2 lados, formada por la unión de 3 o más puntos coplanares…

DAVID: Pueden ser cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

Profesora: Al decir que está formada por la unión de 3 o más puntos

SAMUEL: no colineales

Profesora: Ya… ¿podría yo decir que puede estar formada por la unión de 3 o más segmentos?

SAMUEL: Sí, pero en la idea está puntos (se refiere a todas las ideas válidas señaladas de cada definición y que están en la pizarra)

Profesora: ¿Pero se dan cuenta?

SAMUEL: Sí, sí.

Profesora: (Pasa a otra definición) A ver ABEL qué nos dice: Es una figura geométrica cerrada compuesta por la unión de al menos 3 lados. Pueden ser cóncavos (le falta la tilde y se lo hace notar, termina de leerla en voz baja). Ya, ¿Y por qué no pones coplanares?

(ABEL no responde)

Profesora: O ¿Esa idea la descartas? (ABEL no responde) ¿o piensas que ya no es necesario ponerla?

ABEL: sí es necesario ponerla (KPM2-MG1.1)

Profesora: (pasa a leer la definición de DAVID) Polígono es una figura geométrica cerrada compuesta por la unión de 3 o más puntos coplanares. Pueden ser convexos, cóncavos, regulares e irregulares.

Muy bien chicos, a esto nos vamos a quedar con una sola definición.

Profesora: A ver, DAVID definición ¿es una figura geométrica cerrada?

DAVID: Sí

Profesora: Entonces complementamos (ella va escribiendo)

ABEL: ¿Qué es una figura geométrica cerrada?

Profesora: ¿Qué?

(ABEL repite la pregunta)

Profesora: Las figuras geométricas son aquellas que nosotros hemos visto desde el colegio por ejemplo el triángulo, el cuadrado, el rectángulo, en cambio por ejemplo, ¿se acuerdan de lo que planteaba Pablo, que cuerpo geométrico? Un cuerpo geométrico no es igual que una figura geométrica porque si yo tengo una figura geométrica, puedo tener esta (traza un cuadrado) pero cuando yo hablo de un cuerpo geométrico es una figura que está en 3 dimensiones por ejemplo, yo tengo esto (traza un cubo y DAVID comenta con ABEL la diferencia porque mientras trabajó en grupo, él tenía esa duda). El cubo ¿es una figura o es un cuerpo geométrico?

Grupo: un cuerpo geométrico.

Profesora: Entonces yo no puedo decir que el polígono es un cuerpo geométrico.(KMT3-D1.2)

SAMUEL: Pero un círculo es una figura geométrica y cerrada.

Profesora: También

SAMUEL: Entonces un círculo es un polígono.

Profesora: No porque si yo me quedo con esta definición (señala lo que ha escrito) que es una figura geométrica, ya puedo asumir que esto (dibuja un círculo) es una figura geométrica, lo que tú me dices, pero por eso la definición no termina allí.

Docente formadora: No, que eso (refiriéndose al círculo) es un polígono ¿no? Que usted podría asumir que eso es un polígono.

Profesora: No, esto no es un polígono.

Docente formadora: Ya, es que usted dice: si yo me quedo en esa definición, o sea un polígono es una figura geométrica, si solo me quedo con eso, eso de allí tendría que ser un polígono.

Profesora: claro

Docente formadora: Ya, lo que pasa es que Ud. Ha dicho “eso de allí sería una figura geométrica”

(Profesora regresa a la definición)

Profesora: Otra vez regresando a la definición…es una figura geométrica cerrada que posee más de dos lados. Con lo que nos ha dicho DAVID: es una figura geométrica compuesta por la unión de tres o más (va escribiendo) compuesta por tres o más segmentos coplanares y que pueden ser…bueno esto ya es…solamente (termina de escribir, sin enunciar: cóncavos, convexos, regulares e irregulares). Muy bien chicos, ahora si pueden copiar la definición que la hemos construido con sus saberes previos y analizando más que todo, las definiciones que nos han dado los chicos de la otra sección.

(Los alumnos le hacen notar algunas repeticiones en lo que ha escrito en la pizarra)

DAVID: compuesta por tres o más segmentos coplanares? La unión no va?

(La profesora corrige y borra lo repetido, dejando compuesta por la unión de 3 o más segmentos coplanares)

SAMUEL: Entonces profesora ¿una figura cruzada es un polígono?

Profesora: sí, pero esos son polígonos especiales, que ahorita, esos son polígonos especiales y ahorita por el tiempo no vamos a tener el espacio suficiente para poder tratarlos, pero sí existen esos polígonos.

SAMUEL: pero sí son polígonos

Profesora: Claro, pero son polígonos especiales

ABEL: qué son polígonos especiales

Profesora: esos polígonos especiales, por ejemplo a ¿ustedes han escuchado hablar sobre polígonos estrellados? Esa es otra clase, esa es otra parte de donde esos polígonos (KPM2-MG2, KoT3-D3.3), pero a esas figuras se les llama polígonos pero ahorita lo que nosotros vamos, solamente lo que quiero es que les quede claro la definición de polígono porque cuando les pregunto qué es un polígono definan de esta manera, no cosas al aire, así como un alumno lo puede definir como cuerpo geométrico pero de repente no tiene la idea de qué es un cuerpo geométrico, ¿ya? Entonces quiero que tengan claro esto. Bueno, ahora tengo estas figuras (la profesora pega unas siluetas de octágono, pentágono, triángulo, rectángulo y cuadrado y apoya el triángulo sobre un vértice y los demás sobre la base horizontal. Todos son convexos y prototípicos (KoT2-R1.2)). Ahora, sí quiero que se levanten y vengan hacia la pizarra. Lo que vamos a hacer ahorita es, ustedes según su criterio clasifiquen esas figuras, por el criterio que ustedes crean conveniente, puede ser por sus ángulos, puede ser por sus lados…según lo que ustedes crean conveniente; (KoT1-PF3.3) a ver, ya (mueva la mano como llamándolos a que se paren y vayan hacia la pizarra), a ver DAVID, ¿ya? SAMUEL, ya levántense. A ver, ABEL, ayúdale a tus compañeros.

SAMUEL: clasificar estas figuras

ABEL: Según sus lados

DAVID: No.

ABEL: Los ángulos y lados.

SAMUEL: Ya

Profesora: Bueno, para guiarse pueden tomar de lo que han puesto en la definición ¿en la definición qué dice? Cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

SAMUEL: cóncavos no hay, convexos son todos. (KoT1-PF4.1)

Profesora: Aquí en su dibujo (tomando el papelote donde trabajaron) también han hecho figuras. A ver chicos, aquí también han planteado figuras (Les alcanza el papelote) Tendrían que dibujarlas porque ya están pegadas.

ABEL: (señalando el triángulo pregunta a la profesora) ¿este es equilátero, escaleno….?

(La profesora no contesta, solo mueve la cabeza como diciendo que no sabe o no interesa el nombre. Luego, SAMUEL dibuja los cóncavos que pusieron en el papelote, los demás miran y comentan algo. Empiezan por los convexos, donde agrupan todas las siluetas dadas por la profesora. Como cóncavos dibujan un cuadrilátero y la cruz. Para los regulares dibujan un cuadrado, triángulo pero tomando como referencia las siluetas que clasifican todas como convexos. Como irregulares dibujan un trapecio, un triángulo y una cruz (a la que también identifican como cóncavo).

Profesora: Han puesto convexos, cóncavos, regulares e irregulares.

ABEL: ¿Y por los segmentos? (pensando en otro criterio de clasificación)

Profesora: también puede ser ¿verdad? También los puedo clasificar por su número de lados.

(Los alumnos se sientan) (KoT1-PF3.3)

Profesora: Ahora sí, ustedes según su criterio han clasificado las figuras por polígonos convexos, cóncavos, regulares e irregulares. Ahora por motivos de tiempo, ya no nos va a alcanzar el tiempo para realizar ejemplos, lo que sí quiero es que ustedes grafiquen lo que ustedes han hecho en la pizarra y eso lo vamos a tratar, igualito que los polígonos, la próxima clase.

SAMUEL: Profesora ¿Sí están bien los polígonos irregulares? ¿Las gráficas?

Profesora: ¿Qué entiendes tú por polígono irregular?

SAMUEL: que tiene medidas y ángulos diferentes

Profesora: ¿Y este polígono que tú has hecho, los lados son diferentes? ¿Las medidas de los lados y de los ángulos son diferentes?

SAMUEL: Sí

Profesora: Para que sea un polígono regular, bueno adelantándoles, para que sea un polígono regular ¿qué tiene que cumplirse? Si tú has dibujado un cuadrado eso quiere decir que los lados y los ángulos…eso todavía lo voy a explicar la próxima clase (KMLS3-ST1) pero más o menos para que tengan una idea, los polígonos regulares tienen que cumplir dos condiciones a la vez, tienen que tener sus lados y sus ángulos iguales. (KoT1-PF1.8) Si los lados son iguales entonces todos los ángulos tienen que ser iguales, si yo tengo un polígono que solamente tiene los lados iguales y lo ángulos son diferentes entonces, no es un polígono regular.(KoT-PF1.8)

SAMUEL: Un irregular profesora, tiene…

Profesora: el irregular puede tener lados iguales pero los ángulos no, o sea no cumple las mismas condiciones que los regulares, los regulares tienen que cumplir las dos condiciones a la vez.

SAMUEL: ¿si un irregular cumple solo una?

Profesora Es que si cumple las dos condiciones ya no es irregular.

SAMUEL: ya, está bien, pero si solo cumple una condición.

Profesora: es irregular, no puede ser regular

SAMUEL: y si no cumple ninguna condición ¿sigue siendo irregular?

Profesora: claro, porque no cumple ninguna condición de los polígonos regulares (KoT1-PF2.3). Lo que les quiero dar a entender es que… solamente he querido plantear esto de la clasificación con las figuras, entonces por eso necesito que copien tal y como han hecho (refiriéndose a la clasificación propuesta por los alumnos) para la próxima clase trabajar lo mismo. Esto (recogiendo los papelotes) me lo voy a llevar porque esto

sí lo voy a evaluar. Cuando terminen de copiar, me avisan para dictarles lo que tienen que hacer de tarea para la próxima clase.
(Los chicos avisan que han terminado de copiar)
Profesora: en el libro de texto que ustedes manejan esta definición que hemos visto no está, hay otra definición que está incompleta, entonces con la que vamos a manejar es con la que nosotros hemos construido hoy día (KMT1-RM1). Lo que sí quiero que lean para la próxima clase es la clasificación de polígonos y la siguiente clase vamos a tratar sobre la clasificación. A ver DAVID ¿terminaste? ¿Qué te ha parecido hoy día la clase? ¿Cómo te ha parecido hoy día la clase? ¿Qué has podido aprender acerca de los polígonos?
DAVID: Que son figuras geométricas cerradas que están compuestas a partir de… no, que están compuestas de tres (ABEL le señala que lea lo que dice en la pizarra) o más, tres o más segmentos que están, tres o más segmentos que vienen a ser coplanares.
Profesora: Ya. SAMUEL ¿para qué crees que nos puede servir el tema de polígonos?
SAMUEL: ¿Para qué nos puede servir?
Profesora: ¿O crees que solo lo estudiamos por …?
SAMUEL: No, sí sé. Por ejemplo, muchas veces en las épocas antiguas [no audible]. Generalmente los polígonos están muy ligados a la parte artística, porque por ejemplo en obras de arte generalmente se usa el polígono del rectángulo para trazar allí las imágenes.
Profesora: ABEL ¿estás de acuerdo con lo que dice SAMUEL?
SAMUEL: Y a parte, las construcciones toman muy en cuenta eso, para darle forma. (KoT1-PF1.9)
Profesora: Muy bien, ABEL ¿estás de acuerdo con lo que dice SAMUEL o algo más que agregar?
ABEL: Síí….como dice SAMUEL [no audible, pero parece que hace referencia a las formas cotidianas como la pizarra].
Profesora: ¿Alguna vez ustedes han definido polígono como lo han definido sus compañeros de la otra sección?
ABEL: ¿De qué sección son?
Profesora: No, no les puedo decir. Bueno chicos, prácticamente lo que dice SAMUEL es importante porque en las construcciones, en las edificaciones, tanto de los edificios, aquí en esta misma facultad es muy importante el tema de polígonos. Y sin ir muy lejos, en nuestra casa de repente si nos ponemos un día a observar podemos encontrar varios objetos que tienen esa forma: Los espejos, las señales de tránsito, qué se yo, una mesa, un cuadro, eso es muy importante porque no hay que desligarlo de la vida real en la que nosotros estamos inmersos, ¿no? (KoT1-PF1.9) Entonces, la próxima clase continuamos, ¿ya?
(Termina la clase y se procede a evaluar la sesión, la profesora se autoevalúa)
Profesora: He tratado de que, de construir el conocimiento de la definición de polígono con los aportes de las definiciones que habían establecido los otros chicos y además de las opiniones de los propios alumnos, no. Yo sé que este tema, no puede pasar, yo no puedo definir el concepto en cinco minutos, demanda tiempo, yo creo que he tratado de que salga de las ideas de los chicos, de los alumnos. En un momento las indicaciones no estuvieron claras, eso sí lo asumo para qué cry tomaron un poco de confusión, ¿no? Pero lo que sí, lo que sí yo me he planteado era, he tratado de que

ellos en el momento de la motivación trabajen, identifiquen y analicen las ideas de los otros chicos y vean si es que tienen algo de cierto o no, y a partir de eso, desarrollar lo que es la definición de polígono. Yo creo que me faltó poner más ejemplos con lo que respecta a las definiciones, estaban los ejemplos de ellos pero, lo traté de hacer de tal manera que ellos puedan entender, no tratar de hacerlos confundir ni nada.(KoT1-PF4, KoT2-R1) Sé que es un tema muy corto, que el concepto de polígono dure en hora y media para el concepto de polígono y clasificación, diría un profesor mucho, ¿no? Pero la actividad tenía que hacerla de esta manera y lleva tiempo. De allí en lo que es conceptual, he tratado de dar la definición lo más clara, lo otro de la clasificación ya no se pudo, solamente tenía la idea de que ellos clasifiquen según su criterio, lo que tenían en la definición y nada más.

Docente formadora: DAVID, evalúe a María.

Evaluación de DAVID: Bueno, eh (no audible) la actividad estuvo buena porque así el trabajo, bueno trabajamos más que el profesor, teniendo en cuenta la, el, los conceptos (interviene la profesora)

Profesora: las definiciones de los compañeros de la otra aula, ¿no? Que la profesora (refiriéndose a la docente formadora) entonces ha ido construyendo nuestro conocimiento porque, porque los errores que nosotros cometimos sobre cuerpo geométrico y otras cositas, entonces, con la (no audible) del profesor ya fuimos mejorando hasta llegar a la definición que hemos obtenido, ¿no? Eh, la, sobre la actividad ha estado muy buena, bueno como dice la profesora aunque falta figuras no porque igual nosotros hemos hecho nuestras figuras pero, claro unas yo creo, unas cuantas figuras más, hubiera sido posible ¿no? para evitarnos dibujar y (no audible) coger nosotros para pegar. (KOT1-PF4) Y yo creo que si tu objetivo era construir el conocimiento yo creo que sí lo logró. Y bueno…

Docente formadora: ABEL

ABEL: Este….Yo le recomiendo que no le deje todo al alumno, lo que tienes es que avivar a los alumnos, ser una guía más que todo porque… ¿qué grado es? (le pregunta a la profesora)

Profesora: (No audible)

ABEL: cuarto, para eso que le enseñan en quinto grado de primaria (KMLS1-CM1.1), creo que sí está muy blando pero, hay que ayudarle bastante, lo importante es la construcción sí, muy bien pero hay que guiarlo porque si no entiende o no se acuerda, no le va a tomar mucho interés en eso. Las definiciones cuando le preguntaba qué era una figura geométrica distes ejemplos y no precisaste bien la definición sino que (no audible) lo ejemplos más que todo. Nada más. (KoT3-D3)

Docente formadora: SAMUEL

SAMUEL: Bueno, con respecto a la actividad que, con la que iniciaste me pareció bien porque eso nos ayudó a dar la definición al final, que no está digamos, no está fuera de lugar porque es una definición que se adecúa a lo que puede ser un polígono. Eh, lo que sí esteee, digamos hay un poco más de seguridad, porque no dudar por ejemplo, yo te pregunté sobre polígonos irregulares (no audible), ya luego te diste cuenta pero (no audible). Entonces, cuando, el trabajo en grupo debiste digamos, aunque éramos tres aquí en nuestro caso pero, en un aula por ejemplo, debías estar monitoreando, cómo van, (no audible) no nos dejes mucho porque un alumno te puede hacer cualquier cosa y no puede cumplir las expectativas que tú tienes planteadas. Bueno, y el resto sí me ha parecido bien.

Docente formadora: ¿Nada más?

SAMUEL: No.

(Al final de la crítica de sus compañeros, la docente formadora hace la evaluación de la sesión y en una de sus réplicas deja ver su idea de qué es una definición matemática)

Docente formadora: Esteee, yo creo que aunque por allí ha titubeado un poquito sí se ha notado como dominio de contenido. En la definición lo que no me parece es que coloque lo último, el “puede ser” porque ya es parte de una clasificación, no de una definición.

Profesora: Claro, sino que yo lo asumí justamente para poder enganchar lo que los alumnos iba a hacer con las figuras por eso es que en un momento yo dudé en ponerla, yo decía “la pongo o no la pongo”, pero si no la voy a poner entonces ellos (los alumnos) me iban a preguntar “miss por qué no pone lo que nosotros hemos puesto”.

Docente formadora: porque no es parte de la definición. O sea, usted para definir un polígono no necesita decir si es convexo o si es cóncavo, ¿ya? eso. Entonces, cuando uno define lo que tiene que escribir es lo mínimo pero lo necesario para distinguir si es o no un objeto geométrico ¿Ya? Luego, las siluetas están bien pero debieron ser más variadas, lo que pasa es que nos ha puesto los polígonos a los que estamos acostumbrados, entonces, luego cuando se encuentran una figura rara, no saben si es o no polígono por qué, porque no se parece a lo que estamos acostumbrados, ¿no? por ejemplo, lo de la cruz…bueno pero la hicieron ellos, está bien, pero no sé, una forma más rara. Además, todas las que ha dibujado usted son convexas, no cóncavas. Fíjese que está yendo por la misma tendencia de siempre: solo polígonos convexos y solo los que parecen normalitos, los “regulares” que yo a veces les digo, no, porque no tienen nada de extraño, entonces, está parcelando otra vez el conocimiento ¿ya? Luego falto sí monitorearlos, porque ellos empezaron a tener dudas, ¿no? (DAVID asiente), entonces si usted los hubiese monitoreado, a lo mejor, les lanzaba más preguntas y les generaba una discusión más interesante allí, aunque igual estaban discutiendo, pero los podía orientar un poco o lanzarles algunas pistas que los saquen de esa confusión ¿Ya? ABEL y DAVID estuvieron jugando con las gomas, con el material que usted ha dejado allí, y yo no sé si lo hicieron adrede o no se dieron cuenta pero, si lo hicieron adrede me imagino que la intención era decirle. Oye, no has recogido el material, que debió recogerlo ¿ya? Esteeee, qué más.

Les pudo decir, ABEL me parece que hizo esa parte, que no era necesario volver a trazar casi las mismas figuras en irregulares cuando al lado de cóncavo podía decir que esas eran irregulares, porque son irregulares los que tienen de cóncavos, incluso hay convexos que son irregulares, entonces establecer un poquito de conexión, aunque no iba a profundizar en el tema por el tiempo.

Profesora: pero justamente yo los dejé que escriba porque mi intención era que si yo trabajaba esa parte, igual, o sea, ellos vean la diferencia en que no se va a repetir las mismas figuras sino que también pueden tener otras características de las otras.

Docente formadora: Ya, pero, por eso mismo ¿por qué como varios grupos? O cuestionarles un poquito si algunos de los convexos podía ser irregular y eso. ¿Ya? Bueno, terminamos.