УДК 517.9
DOI: 10.15587/1729-4061.2021.238208

Знаходження умов існування обмежених розв'язків слабо нелінійних імпульсних систем

Ф. А. Асроров, О. В. Перегуда, В. В. Собчук, А. В. Сукретна

Процеси із скачкоподібними змінами спостерігаються у механіці (рух пружини при ударному впливі, робота годинникового механізму), в радіотехніці (генерація імпульсів), в біології (робота серця, поділ клітин). Тому якісне дослідження імпульсних систем є актуальною задачею в сучасній теорії математичного моделювання.

Досліджується проблема існування обмежених розв'язків на всій дійсній осі (на півосі) слабо нелінійних систем диференційних рівнянь з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу.

Введено поняття регулярної і слабо регулярної системи рівнянь для класу слабо нелінійних імпульсних систем диференційних рівнянь.

Отримані достатні умови існування обмеженого розв'язку для неоднорідної системи диференційних рівнянь у випадку слабо регулярності відповідної однорідної системи рівнянь.

Встановлено умови існування єдиності обмеженого розв'язку на всій осі для слабо нелінійних імпульсних систем. Отримані результати застосовані до дослідження обмежених розв'язків систем з імпульсною дією більш загального вигляду.

Отримані умови дозволяють застосувати класичні методи диференціальних рівнянь для одержання тверджень про розв'язність та неперервну залежність розв'язків від параметрів імпульсної системи.

Показано, що класичні якісні методи дослідження диференціальних рівнянь в основному природним чином переносяться на динамічні системи з розривними траєкторіями. Разом з тим, наявність імпульсної дії породжує ряд нових специфічних задач.

Теорія систем з імпульсним впливом має широке коло застосувань. Такі системи виникають при вивчені імпульсних систем автоматичного регулювання, при математичному моделюванні різноманітних механічних, фізичних, біологічних та інших процесів.

Ключові слова: диференціальні рівняння, імпульсна система, обмежені розв'язки, функція Гріна-Самойленка, регулярні розв'язки.

1. Вступ

Сучасний розвиток природознавства та техніки сприяє появі задач, що описуються системами диференційних рівнянь з розривними траєкторіями та, зокрема, до розвитку математичної теорії імпульсних систем.

При математичному моделюванні такого роду процесів, тривалістю таких збурень часто зручно можна зневажати, вважаючи, що вони мають характер імпульсу.

Така ідеалізація призводить до необхідності вивчення систем диференційних рівнянь, розв'язки яких стрибкоподібно змінюються. Але не тільки ідеалізація заміни короткочасних збурень на "миттєві" призводить до диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями. Часто розриви певних залежностей у досліджуваній системі є суттєвою її характеристикою.

Теорія нелінійних систем диференційних рівнянь з імпульсним впливом, до яких зводиться низка задач природознавства та техніки, в останні десятиліття збагатилася істотними результатами. Серед досліджуваних систем зустрічаються системи з імпульсною дією зі слабкою нелінійністю. Складність математичного формулювання проблеми для аналітичного дослідження такого виду систем обумовлена не гладкістю відповідних динамічних процесів. Це призводить до необхідності розвитку методів дослідження слабо нелінійних систем диференційних рівнянь з імпульсними впливами. Тому дослідження розв'язків систем даного типу є актуальною задачею.

Результати досліджень можна успішно застосовувати при дослідженні коливних процесів в різноманітних механічних і електромеханічних системах з розривними характеристиками, при дослідженні багаточастотних коливних процесів розривних систем та інших моделях природознавства.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

В роботі [1] встановлені умови, що гарантують гіперболічність систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Отримані умови гіперболічністі дозволяють досліджувати існування обмежених розв'язків неоднорідних багатовимірних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. В [2] отримані достатні умови існування асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду лінійного розширення динамічної системи на торі у випадку матриці системи, що комутує зі своїм інтегралом. Запропонований підхід застосовується до дослідження стійкості інваріантних множин деякого класу розривних динамічних систем.

В [3] проведено огляд найбільш сучасних методів дослідження стійкості розв'язків імпульсних диференціальних рівнянь та їх застосування до задач імпульсного керування. В [4] доведена експоненціальна стійкість тривіального тора для одного класу нелінійних розширень динамічних систем на торі. Отримані результати застосовані до дослідження стійкості тороїдальних множин імпульсних динамічних систем. В [5] розглянуто задачу побудови наближеного адаптивного керування, включаючи випадок імпульсного керування, для однієї нескінченновимірної задачі з цільовим функціоналом типу Немицького. Обґрунтовано метод усереднення для отримання наближеного адаптивного керування. В [6] вводиться поняття імпульсної неавтономної динамічної системи. Для неї досліджується існування і властивості імпульсної притягуючої множини. Отримані результати застосовані до дослідження стійкості двовимірної імпульсно-збуреної системи Нав'є-Стокса. В [7] вивчені рекурсивні властивості майже періодичних рухів імпульсних динамічних систем. Отримані результати застосовані до дослідження якісного поведінки дискретних систем. В [8] розглянуті властивості стійкості по відношенню до зовнішніх (керуючих) збурень для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Отримані необхідні та достатні умови стійкості для класів імпульсивних систем, що мають функцію типу Ляпунова. В [9] розглядається неавтономне еволюційне включення з імпульсними впливами у фіксовані моменти часу. Будується відповідна неавтономна багатозначна динамічна система, для якої доводиться існування компактного глобального атрактора у фазовому просторі. В [10] виявлено існування притягуючих множин складної структури у найпростіших еволюційних дисипативних систем, що описують динаміку типу реакція-дифузія. В [11] доведено існування глобальних атракторів в розривних нескінченновимірних динамічних системах, які можуть мати траєкторії з нескінченним числом імпульсних збурень. Отримані результати застосовані до дослідження асимптотичної поведінки імпульсних систем, породжених диференціальними рівняннями з многозначною правою частиною.

У роботах [1–11] викладені основи якісної теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. По суті були закладені основи якісної теорії імпульсних систем, що спираються на якісну теорію диференціальних рівнянь, методи асимптотичного інтегрування таких рівнянь, теорію різницевих рівнянь і узагальнених функцій. Разом з тим, питання існування розв'язків слабо нелінійних імпульсних систем ще не були досліджені в повній мірі. Загалом наявність імпульсної дії суттєво впливає на поведінку системи. Навіть у випадках простих лінійних систем імпульсний вплив може призвести до суттєво нелінійної поведінки. Відтак для кожної системи з імпульсною дією важливо глибоко досліджувати поведінку її розв'язків, зокрема й умови існування обмежених розв'язків таких систем.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є знаходження умов існування обмежених розв'язків на всій дійсній осі слабо нелінійних систем диференційних рівнянь з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу. Знайдені умови дозволяють моделювати та досліджувати динамічні системи різноманітних еволюційних процесів, параметри яких можуть змінюватися під впливом зовнішніх збурень.

Для досягнення поставленої мети вирішуються наступні завдання:

– знайти достатні умови існування обмежених розв'язків слабо нелінійної багатовимірної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією;

– встановити умови існування єдиності обмеженого розв'язку на всій осі для слабо нелінійних імпульсних систем;

– виконати апробацію можливості дослідження розв'язків на прикладі моделі «імпульсної вакцинації» SIR.

4. Матеріали та методи дослідження

Основним об'єктом даного дослідження є слабо нелінійна система диференціальних рівнянь з імпульсною дією. В основі дослідження систем цього виду лежать умови існування та єдиності обмежених розв'язків. Маючи умови існування та єдиності, можемо досліджувати поведінку розв'язків відповідних систем на многовидах. Застосування якісної теорії диференціальних рівнянь дає змогу встановити певний зв'язок між класом лінійних та слабо нелінійних систем з імпульсною дією. Використовуючи поняття регулярності для відповідної однорідної системи, отримаємо можливість для знаходження умов існування та єдиності розв’язку через коефіцієнти вихідної системи. Отримані результати проілюстровані на прикладі SIR-моделі імпульсної вакцинації. Розв’язок моделі адекватно відповідає отриманим результатам досліджень роботи.

5. Результати дослідження слабо нелінійних систем диференційних рівнянь з імпульсними збуреннями

5. 1. Достатні умови існування обмежених розв’язків слабо нелінійної системи з імпульсною дією

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau i} = B_i x + I_i(x), \end{aligned} \tag{1}$$

де функція $f(t,x)$, матриця $A(t)$ неперервна та обмежена при всіх $t \in R$, матриці B_i рівномірно по $i \in Z$ обмежені і такі, що

$$\begin{aligned} &imf\,\left|\det(E + B_i)\right| > 0, \\ &i \in Z. \end{aligned} \tag{2}$$

Функція $f(t,x)$ – кусково-неперервна по t із розривами першого роду в точках $t=\tau_i$, та задовольняють умову Ліпшиця по x рівномірно відносно $t \in R$. Цю саму умову задовольняє і функція $I_i(x)$:

$$\begin{aligned} &\| f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x-y\|, \\ &\|I_i(x) - I_i(y)\| \le L\|x-y\|, \end{aligned} \tag{3}$$

при всіх $t \in R$, $i \in Z$ та деякому $L>0$.

Послідовність моментів імпульсного збурення { τ_i } занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $i \to -\infty$. Вважаємо також, що рівномірно по $t \in R$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{i(t,t+T)}{T} = p < \infty. \tag{4}$$

Нас цікавить питання існування обмежених на всій осі розв’язків рівнянь (1) у припущенні, що відповідна лінійна система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x, \tag{5}$$

є слабо регулярною на R.

Розглянемо відповідне неоднорідне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ \ t \neq \tau_i,\ \ \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i. \tag{6}$$

Означення 1. Однорідну систему рівнянь (5) назвемо слабо регулярною на всій осі *R*, якщо неоднорідне рівняння (6) при кожній обмеженій вектор-функції *f(t)* має хоча б один обмежений на *R* розв’язок.

Систему рівнянь (5) назвемо регулярною на *R* якщо ця система має точно один обмежений на *R* розв’язок при кожній фіксованій обмеженій функції *f(t).*

Згідно теореми 1 [1], для довільних обмежених на R функцій *f(t)* та послідовності $\{a_i\}$ система рівнянь має єдиний обмежений на всій осі розв’язок.

Теорема 1. Нехай система рівнянь (5) слабо регулярна на всій числовій прямій, а функції *f(t,x)* та $I_i(x)$ задовольняють при всіх $t \in R$ та $i \in Z$ у деякій кулі $S_r=\{x \in R^n,\ \|x\| \leq r\}$ умовам:

$$C\|f(t,x)\| \leq r,\ \ C\|I_i(x)\| \leq r, \tag{7}$$

де *C* – константа слабкої регулярності (8). Тоді система рівнянь (1) має хоча б один обмежений на всій осі *R* розв’язок.

Доведення. Нехай *A* – многовид початкових значень обмежених на всій осі розвя’зків рівнянь (5) та $P{:}R^n \to A$ – проектор, що проектує R^n в *A*. Згідно теореми 1 [1], при будь-якій обмеженій кусково-неперервній функції *f(t)* та обмеженій послідовності $\{a_i\}$ система рівнянь (6) має єдиний обмежений на всій осі розв’язок $x=\phi(t)$ який задовольняє умові $P\phi(0)=0$ та нерівності

$$\sup_{t\in R}\|\phi(t)\| \leq C\max\left\{\sup_{t\in R}\|f(t)\|,\ \sup_{i\in Z}\|a_i\|\right\}. \tag{8}$$

У просторі всіх кусково-неперервних та обмежених функцій з розривами першого роду в точках τ_i розглянемо множину B_r таких функцій $\psi(t)$, для кожної з яких

$$\sup_{t\in R}\|\phi(t)\| \leq r,$$

де *r* – число, що фігурує в умові теореми 2. В силу нерівностей (7) для будь-якої функції $\psi(t) \in B_r$ функція $f(t,\psi(t))$ буде кусково-неперервною та обмеженою на всій числовій прямій. Обмеженою буде також послідовність $\{I_i(\psi(\tau_i))\}$.

На множині функцій B_r визначимо оператор *F*, що ставить у відповідність кожній функції $\psi(t)$ з B_r обмежений розв’язок $\psi(t)$ системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, \psi(t)), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(\psi(\tau_i)), \tag{9}$$

що задовольняє умову $P\phi(0)=0$, а значить і нерівність

$$\sup_{t\in R}\|\phi(t)\| \leq C \max\left\{\sup_{t\in R}\|f(t,\psi(t))\|, \sup_{t\in R}\|I_i(\psi(\tau_i))\|\right\}. \tag{10}$$

В силу нерівностей (7) та (10) отримаємо, що множина функцій B_r інваріантна відносно оператора F, тобто $FB_r \leq B_r$ Множина B_r є опуклою, обмеженою та замкненою множиною у просторі всіх кусково-неперервних функцій, що мають розриви першого роду у точках $t=\tau_i$. Впевнимось, що оператор $F:B_r \to B_r$ неперервний, а, отже, має хоча б одну нерухому точку $\phi^*(t)=F\phi^*(t)$, тобто система рівнянь (1) має хоча б один обмежений на всій осі розв'язок.

Припустимо, що послідовність функцій $\{\psi_m(t)\} \subset B_r$ $(m=1,2,\ldots)$ збігається до функції $\psi(t)$ при $m \to \infty$. Безпосередньо перевіряється, що $\psi(t) \in B_r$. Покажемо, що послідовність функцій $\{\phi_m(t)\}=\{F\psi_m(t)\}$ $(m=1,2,\ldots)$ збігається до функції $\phi(t)=F\psi(t)$ при $m \to \infty$.

Для цього позначимо через $I^{(q)}$ для будь-якого натурального числа q відрізок $I^{(q)}=\{t \in R : |t| \leq q\}$.

Встановимо збіжність послідовності функцій $\{f_m(t)\}=\{f(t),\psi_m(t)\}$ $(m=1,2,..)$ до функції $f_0(t)=f(t,\psi(t)\}$ при $m \to \infty$ в топології простору всіх кусково неперервних функцій з розривами в точках $t=\tau_i$. Це рівносильно тому, що послідовність функцій $\{f_m(t)\}$ збігається до функції $f_0(t)$ при $m \to \infty$ рівномірно на будь-якому відрізку $I^{(q)}$, $q=1,2,\ldots$.

Фіксуємо відрізок $I^{(q)}$. Точки $\{\tau_i\}$ розбивають цей відрізок на кінцеве число відрізків $I^{(q)} = I_1^{(q)} \cup I_2^{(q)} \cup \ldots \cup I_{rq}^{(q)}$. Розглянемо довільний відрізок $I_j^{(q)}$ $(1 \leq j \leq r_q)$. При будь-яких $x \in R^n$ та $m \in N$ функції $f(t,x)$, $\psi_m(t)$ та $\psi(t)$ неперервні на проміжку $\hat{I}_j^{(q)}$, що збігається з відрізком $I_j^{(q)}$ без його лівого кінця. Більш того, ці функції рівномірно неперервні на проміжку $\hat{I}_j^{(q)}$, оскільки звуження вказаних функцій на $\hat{I}_j^{(q)}$ припускає неперервне продовження на весь відрізок $I_j^{(q)}$. Звідси випливає, що функція $f(t,x)$ рівномірно неперервна на множині $\hat{I}_j^{(q)} \times B_r$.

Зауважимо, що послідовність $\{\psi_m(t)\}$ збігається до функції $\psi(t)$ при $m \to \infty$ рівномірно на проміжку $\hat{I}_j^{(q)}$. Тому при будь-якому додатному ε знайдеться таке натуральне число m_0, що при будь-яких $t \in \hat{I}_j^{(q)}$ та $m \geq m_0$, $m \in N$ справедлива нерівність

$$\|f(t,\psi(t)) - f(t,\psi_m(t))\| < \varepsilon.$$

Оскільки число відрізків $I_j^{(q)}$ $(1 \le j \le r_q)$ скінчене, то остання нерівність виконуватиметься при всіх досить великих $m \in N$ та при всіх $t \in I^{(q)}$. Отже, послідовність функцій $\{f_m(t)\}$ збігається до функції $f_0(t)=f(t,\psi(t)\}$.

Аналогічно, при будь-якому $i \in Z$ послідовність $\left\{a_i^{(m)}\right\} = \left\{I_i(\psi_m(\tau_i))\right\}$, $m \in N$ збігається до вектора $a_i=I_i(\psi(\tau_i))$ при $m\to\infty$. Це випливає з того, що при будь-якому $i \in Z$ функція $I_i(x)$ неперервна та $\|\psi(\tau_i) - \psi_m(\tau_i)\| \to 0$ при $m\to\infty$.

В силу умов (7) функції $f_m(t)=f(t,\psi_m(t))$ та послідовності $\left\{a_i^{(m)}\right\} = \{I_i(\psi_m(\tau_i))\}$, $i \in Z$, $m \in N$ рівномірно обмежені, що спричинює обмеженість граничної функції $f_0(t)=f(t,\psi(t))$ та послідовності $\{a_i\}=\{I_i(\psi(\tau_i))\}$.

В такому разі рівняння (6) має єдиний обмежений розв'язок $\phi(t) = F\psi(t)$, що задовольняє умову $P\phi(0)=0$.

За означенням оператора F, функції $\phi_m(t)=F\psi_m(t)$ є розв'язками рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_m(t),\ t \ne \tau_i,\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i^{(m)}, \tag{11}$$

які задовольняють умову $P\phi(0)=0$ та нерівності

$$\sup_{t\in R}\|\phi_m(t)\| \le C\max\left\{\sup_{t\in R}\|f_m(t)\|, \sup_{i\in Z}\left\|a_i^{(m)}\right\|\right\}.$$

Отже, послідовність функцій $\{\phi_m(t)\}$, $m \in N$ є рівномірно обмежена на всій числовій осі, а послідовність їх похідних $\left\{\dfrac{d\phi_m(t)}{dt}\right\}$, $m \in N$ є рівномірно обмеженою на будь-якому проміжку (τ_i,τ_{i+1}), $i \in Z$.

Зауважимо, що при будь-якому $i \in Z$ звуження на проміжку (τ_i,τ_{i+1}) функцій $\phi_m(t)$ та їх похідних припускають неперервне продовження не весь відрізок $[\tau_i,\tau_{i+1}]$. Таким чином, при будь-якому $i \in Z$ послідовність звужень $\{\phi_m(t)/(\tau_i,\tau_{i+1}))\}$ компактна.

Отже, при будь-якому $q \in N$ послідовність звужень функцій $\{\phi_m \setminus I^{(q)}\}$, $(m \in N)$ компактна, звідки випливає компактність послідовності функцій $\{\phi_m(t)\}$.

Оскільки послідовність функцій $\{\phi_m(t)\}$, $m \in N$ складається з розв'язків відповідних рівнянь (11), які задовольняють умову $P\phi_m(0)=0$, то будь-яка гранична функція цієї послідовності задовольняє граничне рівняння (6) та умову $P\phi_m(0)=0$. Але таку властивість має єдиний знайдений раніше розв'язок $\phi(t)=F\psi(t)$. Отже, послідовність функцій $\{\phi_m(t)\}=\{F\psi_m(t)\}$, $m \in N$ збігається до функції $\phi(t)=F\psi(t)$ при $m\to\infty$. Отримали неперервність оператора F.

Компактність оператора F доводимо аналогічними міркуваннями. Для цього достатньо показати, що множина FB_r відносно компактна. Як показано вище, множина функцій FB_r рівномірно обмежена на всій осі, а за означенням оператора F та умови (7) з рівняння (9) випливає, що множина похідних цих функцій рівномірно обмежена на будь-якому проміжку (τ_i,τ_{i+1}), $i\in Z$. Аналогічним чином, при будь-якому $q\in N$ множин звужень функцій $\{(\phi(t)\,|\,I^{(q)}):\phi(t)\in FB_r\}$ відносно компактне. Отже маємо відносну компактність множини FB_r.

Тоді за теоремою Брауера про нерухому точку, оператор F має хоча б одну нерухому точку $F\phi(t)=\phi(t)$, а отже, рівняння (1) має хоча б один обмежений на всій осі розв'язок. Теорему доведено.

5. 2. Існування единості обмеженого розв'язку слабо нелінійних імпульсних систем

Теорема 2. Нехай система рівнянь (5) слабо регулярна на всій числовій осі R, функції $f(t,x)$ і $I_i(x)$ задовольняють нерівності (3) з константою Ліпшиця $L<\dfrac{1}{C}$ (C – константа слабкої регулярності рівнянь (5)) в кулі B_r, де число $r>0$ задовольняє нерівність

$$C\cdot\max\left\{\sup_{t\in R}\|f(t,0)\|,\sup_{i\in Z}\|I_i(0)\|\right\}+CLr\le r. \tag{12}$$

Тоді рівняння (1) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок $x=\phi(t)$, що задовольняє умову $P\phi(0)=0$ та $\sup\limits_{t\in R}\|\phi(t)\|\le r$.

Доведення. Зауважимо, що якщо константа Ліпшиця $L<\dfrac{1}{C}$, то знайдеться число $r>0$, яке задовольняє нерівність (12).

При будь-якій функції $\psi(t)\in B_r$, функція $f(t,\psi(t)\}$ - кусково-неперервна та обмежена. Обмеженою є послідовність $\{I_i(\psi(\tau_i))\}$. Дійсно, з нерівностей (3) випливає, що

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in R}\|f(t,\psi(t))\|\le\sup_{t\in R}(\|f(t,0)\|+\|f(t,\psi(t))-f(t,0)\|\le\\&\le\sup_{t\in R}\|f(t,0)\|+\sup_{t\in R}L\|\psi(t)\|\le\sup_{t\in R}\|f(t,0)\|+L\cdot r,\end{aligned} \tag{13}$$

відповідно

$$\begin{aligned}&\sup_{i\in Z}\|I_i(\psi(\tau_i))\|\le\sup_{i\in Z}(\|I_i(0)\|+\|I_i(\psi(\tau_i))-I_i(0)\|\le\\&\le\sup_{i\in Z}\|I_i(0)\|+\sup_{i\in Z}L\left\|\psi\left(\tau_i\right)\right\|\le\sup_{i\in Z}\|I_i(0)\|+L\cdot r.\end{aligned} \tag{14}$$

Таким чином на множині B_r можна розглядати оператор F, побудований при доведенні попередньої теореми. При цьому якщо $\phi(t)=F\psi(t)$, де $\psi(t)\in B_r$, то в силу нерівностей (10), (12)–(14) маємо

$$\sup_{t\in R}\|\phi(t)\| \le c\max\left(\sup_{t\in R}\| f(t,\psi(t))\|, \sup_{i\in Z}\|I_i(\psi(\tau_i))\|\right) \le$$
$$c\cdot\max\left(\sup_{t\in R}\| f(t,0)\|, \sup_{i\in Z}\|I_i(0)\|\right) + c\cdot Lr \le r,$$

тобто $\sup_{t\in R}\|\phi(t)\| \le r$.

Таким чином, $FB_r \subseteq B_r$.

Множина B_r обмежена та замкнена. Покажемо, що оператор $F:B_r \to B_r$ є оператором стиску. Справді, нехай $\phi_1(t)$, $\phi_2(t) \in B_r$ і $\phi_1(t)=F\psi_1(t)$, $\phi_2(t)=F\psi_2(t)$, тобто функції $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ є обмеженими розв'язками відповідних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,\psi_j(t)), \quad t \ne \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(\psi_j(\tau_i)), \quad (j=1,2). \end{aligned} \tag{15}$$

Функція $\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$ є обмеженим на всій осі розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,\psi_2(t) - f(t,\psi_1(t)), \quad t \ne \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(\psi_2(\tau_i)) - I_i(\psi_1(\tau_i)), \end{aligned}$$

що задовольняє умову $P\phi(0)=0$. В силу теореми 1[1] та умов (3) маємо оцінку

$$\sup_{t\in R}\|F\psi_2(t) - F\psi_1(t)\| \le c\max\left\{\sup_{t\in R}\| f(t,\psi(t)) - f(t,\psi_1(t))\|,\right.$$
$$\left.\sup_{i\in Z}\|I_i(\psi_2(\tau_i)) - I_i(\psi_1(\tau_i))\|\right\} \le c\cdot L\cdot\sup_{t\in R}\|\psi_2(t) - \psi_1(t)\|.$$

Якщо константа Ліпшиця $L < \dfrac{1}{c}$, то оператор $F:B_r \to B_r$ є оператором стиску. За теоремою Банаха про нерухому точку відображення F має єдину нерухому точку. Отже, існує єдиний обмежений на всій осі розв'язок $\phi(t)$ рівняння (1), що задовольняє умови $P\phi(0)=0$ та $\sup_{t\in R}\|\phi(t)\| \le r$. Теорема доведена.

Доведену теорему можна використовувати при дослідженні існування обмежених на всій осі розв'язків систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + g(t,x,\varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \\
&\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i + I_i(x,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Тут матриці $A(t)$, B_i та моменти часу τ_i такі ж, як у рівняннях (1); $f(t)$ – обмежена на всій осі неперервна (кусково-неперервна з розривами першого роду при $t=\tau_i$) функція; $\{a_i\}$ – обмежена послідовність. Функція $g(t,x,\varepsilon)$ неперервна (кусково-неперервна з розривами першого роду при $t=\tau_i$) по t, неперервна по x та ε, причому по x задовольняють умову Ліпшиця. Функції $I_i(x,\varepsilon)$ також неперервні по сукупності своїх змінних та задовольняють умову Ліпшиця по x, ε – малий додатній параметр.

Припустимо також, що

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}\|g(t,0,\varepsilon)\| \le L(\varepsilon), \quad \sup_{i\in Z}\|I_i(0,\varepsilon)\| \le L(\varepsilon), \\
&\|g(t,x_1,\varepsilon) - g(t,x_2,\varepsilon)\| \le l(\varepsilon)\|x_1 - x_2\|,
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\|I_i(x_1,\varepsilon) - I_i(x_2,\varepsilon)\| \le l(\varepsilon)\|x_1 - x_2\|, \tag{18}
$$

для всіх x_1, x_2 таких, що $\|x_1\| \le r$, $\|x_2\| \le r$, де $L(\varepsilon)$ *та* $l(\varepsilon)$ – невід'ємні неспадаючі функції параметру ε, причому $L(\varepsilon)\to 0, l(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 3. Нехай система рівнянь (5) слабо регулярна на всій дійсній прямій і число $r > C\cdot\max\left\{\sup_{t\in R}\|f(t)\|, \sup_{i\in Z}\|a_i\|\right\}$, де C – константа слабкої регулярності рівнянь (5). Тоді можна вказати таке додатнє число ε_0, що при будь-якому $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ система рівнянь (16) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок $\phi(t,\varepsilon)$, що задовольняє умови $P\phi(0,\varepsilon)=0$ та $\sup_{t\in R}\|\phi(t,\varepsilon)\| \le r$.

Крім того, функція $\phi(t,\varepsilon)$ неперервна по ε та $\lim_{\varepsilon\to 0}\phi(t,\varepsilon) = \phi_0(t)$, де $\phi_0(t)$ – обмежений на всій осі розв'язок рівняння (6) що задовольняє умову $P\phi_0(0)=0$.

Сформульована теорема є наслідком попередньої теореми. Так як $L(\varepsilon)\to 0$, $l(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то знайдеться таке число $\varepsilon_0>0$, що при будь-якому $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ рівняння (16) задовольняє умову теореми 2.

Таким чином рівняння (16) при будь-якому $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ має єдиний обмежений при всіх $t\in R$ розв'язок $\phi(t,\varepsilon)$, що задовольняє умови $P\phi(0,\varepsilon)=0$ та $\sup_{t\in R}\|\phi(t,\varepsilon)\| \le r$. У такому разі при будь-якому $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ функція $\psi(t,\varepsilon)= \phi(t,\varepsilon)- \phi(t,0)$ є обмеженим на всій осі розв'язком системи рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t,\phi(t,\varepsilon),\varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \\
&\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(\phi(\tau_i,\varepsilon),\varepsilon),
\end{aligned}
$$

що задовольняє умову $P\psi(0,\varepsilon)=0$.

В силу теореми 1 [1] справедлива оцінка

$$\sup_{t\in R}\|\phi(t,\varepsilon)-\phi_0(t)\|\le C\cdot\max\left\{\sup_{t\in R}\|g(t,\phi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|,\right.$$
$$\left.\sup_{i\in Z}\|I_i(\phi(\tau_i,\varepsilon),\varepsilon)\|\le C\cdot(L(\varepsilon)+l(\varepsilon)r).\right.$$

Оскільки $L(\varepsilon)\to 0$, $l(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то функція $\phi(t,\varepsilon)$ рівномірно по $t\in R$ прямує до $\phi_0(t)$ при $\varepsilon\to 0$.

5. 3. SIR-модель «імпульсної вакцинації»

Існує багато математичних моделей для ефективної діагностики інфекційного захворювання, прогнозування та дослідження динаміки патологічного процесу, які сучасна медицина активно використовує. Однією з таких епідеміологічних моделей є SIR-модель, запропонована [12]. Вона поділяє населення на три групи:

– здорові особи, які знаходяться в групі ризику і можуть підхопити інфекцію (позначають, як S — susceptible);

– інфіковані особи, які є переносниками вірусу (позначають, як I — infected);

– одужавші особи, які набули постійний імунітет до даної хвороби (позначають, як R — recovered).

Розглянемо SIR-модель для стратегії «імпульсної вакцинації» Цей підхід полягає у щепленні певної частки p сприятливого населення S через регулярні проміжки часу T. Основна ідея цієї стратегії полягає в тому, щоб вакцинувати достатню кількість сприятливого населення, і робити це настільки часто, щоб підтримувати відсоток сприйнятливих пацієнтів нижче порога, необхідного для початку епідемії (рис. 1).

На рис. 1 показана схема імпульсної вакцинації для сприйнятливого населення на деякому інтервалі часу. Тут $P_1,\dots,P_n$ – імпульси вакцинації, які здійснюються кожні T років, S_c – поріг епідемії.

З точки зору моделі SIR, математична складова описується системою диференціальних рівнянь з імпульсним впливом:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=m-(\beta I+m)S,\\[4pt] \dfrac{dI}{dt}=\beta IS-(m+g)I,\\[4pt] \dfrac{dR}{dt}=gI-mR,\\[4pt] S(t_n)=(1-p)S(t_n-0),\end{cases}\qquad t_{n+1}=t_n+T.$$

де,

t_n – момент часу, в який застосовуємо n-й імпульс вакцинації,

$t_n - 0$ – момент часу безпосередньо перед застосуванням n -го імпульсу,

p – частка сприйнятливого населення, яким вакцина прищеплена в момент часу $t=t_n$,

T – період між двома послідовними вакцинаціями.

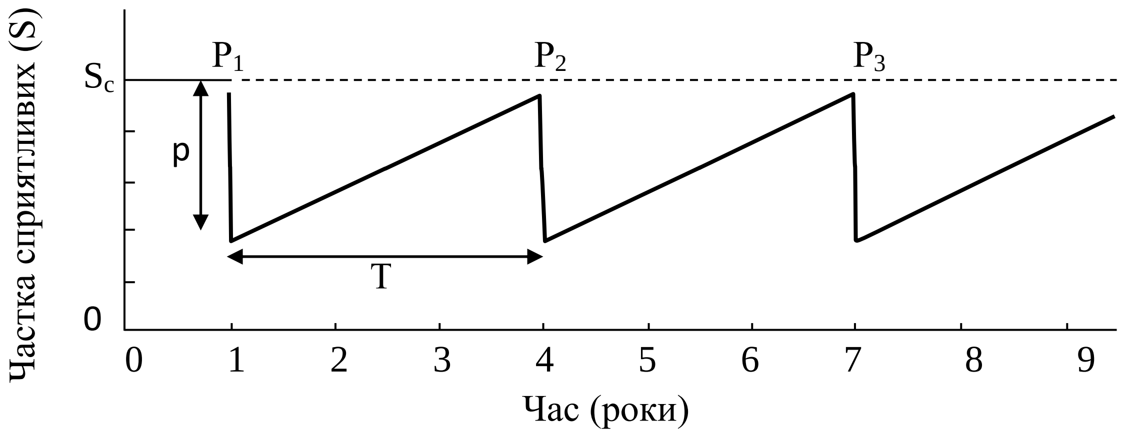

Рис. 1. Схема імпульсної вакцинації

Типовий розв'язок SIR-моделі зі стратегією імпульсної вакцинації показано на рис. 2. Можемо спостерігати, як частка населення, що знаходиться в групі ризику $S(t)$ коливається в стабільному циклі при застосуванні імпульсної вакцини ($p=0,5$ і $T=2$). Сприятливі притягуються до періодичного розв'язку "без інфекції". Лінія $S_c \approx 0,0556$ означає "поріг епідемії".

На відміну від цього, частка інфікованого населення $I(t)$ швидко зменшується до нуля так, як відображено на рис. 3.

Класична SIR-модель в реальних умовах не завжди точно може описувати результати реальної ситуації. Коефіцієнти моделі в залежності від вхідних даних, можуть відхилятися від класичної умови. Тому є необхідність дослідження відповідних систем, що містять слабку нелінійність. Отримані результати дозволяють визначити та аналізувати розв'язки відповідних систем.

Тому, якщо у нас достатньо вакцин для боротьби з інфекційною хворобою, то розумно було б, щоб сприйнятливе населення, що вакцинується кожного разу, було пропорційним кількості сприйнятливих осіб. Однак таке наближення не може відобразити реальний випадок. Зазвичай кількість сприйнятливих осіб, які потребують вакцинації, може перевищувати можливості місцевих медичних умов через дефіцит вакцини та лікарів.

Варто зазначити, що в роботі [13] отримано точний аналітичний розв'язок SIR моделі у параметричній формі. Використовуючи точний розв'язок, досліджено деякі явні моделі, що відповідають фіксованим значенням параметрів, і показано, що числовий розв'язок відтворює саме аналітичний розв'язок. Показано, що узагальнення SIR моделі, описане нелінійною системою диференціальних рівнянь, може бути зведене до рівняння типу Абеля, що дозволяє значно спростити аналіз її властивостей.

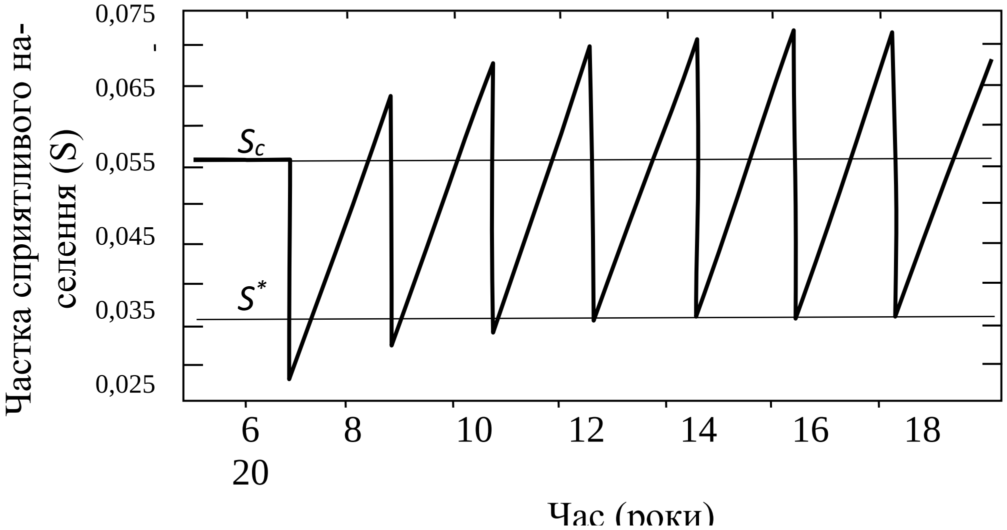

Рис. 2. Розв’язок SIR-моделі зі стратегією імпульсної вакцинації для групи ризику *S(t)*

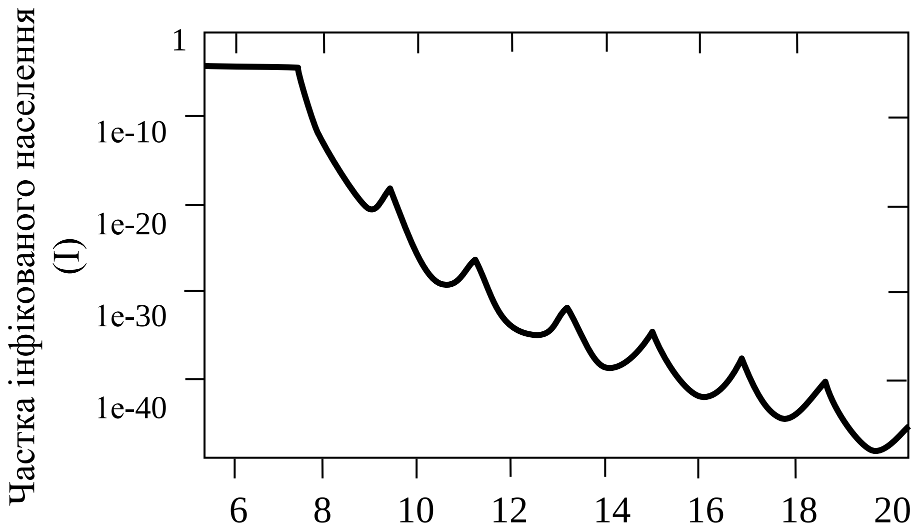

Рис. 3. Розв’язок SIR-моделі зі стратегією імпульсної вакцинації для групи інфікованих осіб *I(t)*

6. Обговорення результатів знаходження обмежених розв’язків слабо нелінійних систем з імпульсною дією

Задача знаходження та дослідження обмежених розв’язків для нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією є досить важливою та маловивченою в загальному випадку. Класичні роботи в цьому напрямку були зосереджені в основному на аналізі одновимірних і двовимірних систем рівнянь. При дослідженні багатовимірних систем виникла потреба розробити інший метод, що базується на аналізі якісних властивостей (регулярність) відповідних лінійних однорідних систем. Ці властивості, з одного боку, можуть бути ефективно перевірені для широких класів імпульсних систем, а з іншого – дають можливість довести ряд властивостей якісного характеру для неоднорідних імпульсно-збурених систем. Перевага отриманого методу полягає в тому, що, умови існування обмежених розв’язків лінійних диференціальних рівнянь можуть бути поширені на класи слабо нелінійних імпульсних систем (Теорема 1). Також отримані умови (Теорема 2), при виконанні яких гарантується існування та єдиність обмежених розв’язків для слабо нелінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Результати теореми 2 поширені на більш загальний випадок кусково-неперервних функцій з розривами першого роду (Теорема 3).

Отримані результати можуть бути корисними при дослідженні динаміки патологічних процесів та для формування стратегій імпульсних вакцинацій в компартментальній SIR-моделі. Отримані умови існування обмежених розв’язків характеризують порогові значення динаміки реакції імпульсних щеплень на процес поширення інфекцій та можуть слугувати маркерами корекції обраної стратегії вакцинації як способу протидії поширення інфекції у враженій популяції.

Надалі на основі розробленого методу планується дослідження стійкості нелінійних імпульсних систем.

7. Висновки

1. Використовуючи поняття регулярності однорідної системи, отримано умови існування обмеженого розв’язку для слабо нелінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Отримані умови є достатніми. Зауважимо, що умови виражаються безпосередньо через коефіцієнти початкової задачі.

2. Для слабо нелінійної багатовимірної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією встановлено умови єдиності обмеженого розв’язку. Отримані умови дозволяють проводити якісний аналіз розв’язків відповідних систем.

3. Для розглянутої SIR-моделі, отримано розв’язок у випадку імпульсної вакцинації. Так для випадку p=0,5 (частина сприйнятливого населення, що вакцинується) і T=2 (період між двома послідовними вакцинаціями) показано, що поріг епідемії $S_c \approx 0{,}0556$. Частина населення $S(t)$, що знаходиться в групі ризику, коливається в стабільному циклі при імпульсній вакцинації.

Література

1. Asrorov, F., Sobchuk, V., Kurylko, O. (2019). Finding of bounded solutions to linear impulsive systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6 (4 (102)), 14–20. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.178635

2. Asrorov, F., Perestyuk, Y., Feketa, P. (2017). On the stability of invariant tori of a class of dynamical systems with the Lappo–Danilevskii condition. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 72, 15–25. URL: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/MDEMP/vol72/vol72-2.pdf

3. Wang, Y., Lu, J. (2020). Some recent results of analysis and control for impulsive systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 80, 104862. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104862

4. Kapustyan, O. V., Asrorov, F. A., Perestyuk, Y. M. (2019). On the Exponential Stability of a Trivial Torus for One Class of Nonlinear Impulsive Systems. Journal of Mathematical Sciences, 238 (3), 263–270. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04234-9

5. Kapustian, O. A., Sobchuk, V. V. (2018). Approximate Homogenized Synthesis for Distributed Optimal Control Problem with Superposition Type Cost Functional. Statistics, Optimization & Information Computing, 6 (2). doi: https://doi.org/10.19139/soic.v6i2.305

6. Bonotto, E. M., Bortolan, M. C., Caraballo, T., Collegari, R. (2016). Impulsive non-autonomous dynamical systems and impulsive cocycle attractors. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40 (4), 1095–1113. doi: https://doi.org/10.1002/mma.4038

7. Bonotto, E. M., Gimenes, L. P., Souto, G. M. (2017). Asymptotically almost periodic motions in impulsive semidynamical systems. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 49 (1). doi: https://doi.org/10.12775/tmna.2016.065

8. Dashkovskiy, S., Feketa, P. (2017). Input-to-state stability of impulsive systems and their networks. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 26, 190–200. doi: https://doi.org/10.1016/j.nahs.2017.06.004

9. Perestyuk, M. O., Kapustyan, O. V. (2012). Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 56, 89–113. URL: http://emis.impa.br/EMIS/journals/MDEMP/vol56/vol56-5.pdf

10. Kapustyan, O. V., Kasyanov, P. O., Valero, J. (2015). Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation. Applied Mathematics & Information Sciences, 9 (5), 2257–2264.

11. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O., Romaniuk, I. (2017). Global attractors of impulsive parabolic inclusions. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 22 (5), 1875–1886. doi: https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017111

12. Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. Lond., 115, 700–721. doi: https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

13. Harko, T., Lobo, F. S. N., Mak, M. K. (2014). Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. Applied Mathematics and Computation, 236, 184–194. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030