MAp Journal
Mathematics & Applications
UIN IMAM BONJOL PADANG
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

NULLITAS MAKSIMUM MATRIKS HERMITIAN DIGAMBARKAN OLEH GRAF G

THE MAXIMUM NULL OF HERMITIAN MATRICES DESCRIBED BY A GRAPH

Mohamad Syafi'i[1§], Darvi Mailisa Putri[2], Alfit Rahman[3]
[1]Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang [Email: mohamadsyafii@uinib.ac.id]
[2]Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang [Email: darvimailisa@uinib.ac.id]
[3]Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang
[§]*Corresponding Author*

Received Mei 2021; Accepted Juni 2021; Published Juni 2021;

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan sebuah pola matriks Hermitian yang digambarkan graf G. Tentunya banyak kemungkinan matriks Hermitian yang didapatkan. Dengan berbantuan program Matlab, peneliti merumuskan pola matriks Hermitian yang didapatkan dengan tujuan memperoleh nullitas maksimum. Pada penilitian ini nullitas terbesar (maksimum) dari matriks Hermitian yang digambarkan graf G dapat dituliskan dengan $M(G) = maks\{null(A): A \in H(G), \mathcal{G}(A) = G)$. Adapun graf yang digunakan pada penelitian adalah graf komplit, graf lintasan, graf sikel, graf bipartisi komplit, dan graf star. Teorema pendukung yang digunakan dalam penelitian ini untuk menentukan $M(G)$ adalah $M(G) + mr(G) = |G|$, dengan $mr(G)$ adalah minimum rank dari matriks Hermite yang digambarkan oleh graf G dan $|G|$ adalah order dari G atau banyaknya sisi pada Graf G. Adapun hasil pada penelitian ini adalah:

1. $M(H_{K_n}) = n - 1, n \in N$, dan $n \geq 2$
2. $M(H_{P_n}) = 1, n \in N$, dan $n \geq 2$
3. $M(H_{C_n}) = 2, n \in N$, dan $n \geq 3$
4. $M(H_{K_{m,n}}) = m + n - 2, m, n \in N$
5. $M(H_{S_n}) = n - 2, n \in N$

Kata Kunci: Graf, Nullitas Maksimum, Matriks Hermitian, Minimum Rank

Abstract

The Purpose of this research to obtain a Hermitian matrices pattern described by a graph G. Many possible Hermitian matrices to be obtained. With the help of the Matlab program, the researcher formulated the Hermitian matrices pattern which was obtained with the aim of obtaining maximum nullity. In this research, the largest (maximum) nullity of the Hermitian matrix described by the graph G can be written as $(G) = maks\{null(A): A \in H(G), \mathcal{G}(A) = G)$. The graphs used in this study are complete graphs, path graphs, cycle graphs, complete bipartition graphs, and star graphs. The supporting theorem used in this study to determine $M\ (G)$ is $(G) + mr(G) = |G|$, where $mr(G)$ is the minimum rank of the Hermite matrix represented by the graphs G and $|G|$is the order of G or the number of edges on Graph G. The results in this research are:

1. $M(H_{K_n}) = n - 1, n \in N$, *and* $n \geq 2$
2. $M(H_{P_n}) = 1, n \in N$, *and* $n \geq 2$
3. $M(H_{C_n}) = 2, n \in N$, *and* $n \geq 3$
4. $M(H_{K_{m,n}}) = m + n - 2, m, n \in N$
5. $M(H_{S_n}) = n - 2, n \in N$

Keywords*: Graph, The Maximum Nullity, Hermitian Matrices, Rank Minimum*

1. Pendahuluan

Perkembangan keilmuan matematika pada saat ini mengalami perkembangan pesat, salah satunya terkait penerapan teori Graf dalam bidang keilmuan Aljabar. Pada penelitian ini, peneliti membahas tentang pengembangan representasi graf dalam matriks. Misalkan terdapat suatu graf G, dari graf tersebut dibentuk dalam matriks *adjacency* atau matriks keterhubungan. Matriks *adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, memuat nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung.

Matriks *adjacency* merupakan matriks simetri. Jika dari matriks *adjacency* dirubah menjadi matriks Hermite, yang mana unsur-unsurnya adalah bilangan kompleks taknol jika antar titik dalam graf tersebut terhubung langsung dan nol jika antar titik graf tersebut tidak terhubung langsung, sedangkan unsur diagonalnya diabaikan. Setelah dibentuk menjadi beberapa matriks Hermite, maka dapat dicari nullitas dari matriks Hermite tersebut, karena pemberian unsur-unsur bilangan kompleks bersifat *random*, maka dapat diperoleh nullitas maksimum dari matriks Hermite yang digambarkan graf G.

Penelitian sebelumnya adalah menentukan rank minimum matriks Hermite yang digambarkan graf G, pada penelitian ini dilanjutkan dengan menentukan nullitas maksimum matriks Hermite yang digambarkan graf G. Adapun jenis graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf komplit, graf *path* (lintasan), graf sikel, graf bipartisi komplit dan graf *star*.

2. Landasan Teori

Graf

Definisi 2.1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di G yang disebut sebagai sisi[1].

Definisi 2.2

Misal G graf. **Order** dari graf G adalah banyaknya titik (*vertices*) pada suatu graf G [2].

Definis 2.3

Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ adalah sebuah sisi di G, Graf terhubung G adalah graf tidak berarah G jika untuk setiap pasang simpul u dan v dalam himpunan e terdapat lintasan dari u ke v dan jika tidak, maka G disebut sebagai graf tidak terhubung [3].

2.1 Jenis-jenis Graf

Graf Komplit

Graf G adalah komplit jika setiap titik terhubung langsung ke setiap titik yang lain. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n [4].

Graf Lintasan

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan graf lintasan order n dan ditulis dengan P_n [5].

Graf Sikel

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut graf sikel dan ditulis dengan C_n [5].

Graf Bipartisi Komplit

Graf bipartisi adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y; X dan Y disebut himpunan partisi [6].

Suatu Graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain.

Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain, dapat ditulis dengan $K_{m,n}$ [5].

Graf Bintang

Graf star (bintang) disebut dengan graf bipartisi komplit $K_{1,n}$, mempunyai order $(n+1)$, ukuran n dan dinotasikan dengan S_n [7].

2.2 Matriks Simetri

Suatu matriks bujur sangkar A disebut matriks simetri jika matriks tersebut sama dengan transposenya $(A = A^T)$ [8].

2.3 Matriks Hermite

Jika A merupakan matriks dengan unsur kompleks, maka tranpose sekawan A, yang dinyatakan oleh A^*, dapat didefinisikan sebagai

$$A^* = \bar{A}^T$$

Matriks bujur sangkar dengan unsur kompleks disebut *Hertmite*, jika $A = A^*$ [8].

2.4 Matriks *Adjacency*

Matriks Adjacency dari suatu graf adalah matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, jika\ titik\ i\ dan\ j\ saling\ terhubung \\ 0, jika\ titik\ i\ dan\ j\ tidak\ saling\ terhubung \end{cases}$$

[9].

2.5 Nullitas

Kernel dari matriks A, dinotasikan dengan $\ker(A)$, adalah himpunan dari semua solusi persamaan homogen $Ax = 0$. Kernel dari matriks A disebut juga dengan ruang null dari A dan dimensinya disebut nulitas dari A, dan dinotasikan dengan $null(A)$ [10].

2.6 Rank

Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut *rank* dari A dan dinyatakan sebagai $rank(A)$ [8].

2.7 Hubungan Matriks dan Graf

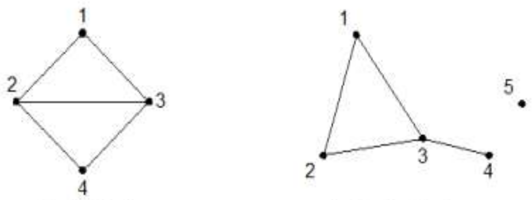
Misal G graf dengan order $p\ (p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan semua titik $V(G)$. Matriks keterhubungan (Matriks *Adjaceny*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$. Matriks *Adjacency* dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = [a_{ij}]$$

dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, jika\ titik\ i\ dan\ j\ saling\ terhubung \\ 0, jika\ titik\ i\ dan\ j\ tidak\ saling\ terhubung \end{cases}$$

Contoh:



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Gambar 1. Graf dan Matriks *Adjacency*

Dengan melihat adanya keterhubungan antara matriks dan graf, maka dapat dikembangkan dengan mensubtitusi elemen dari matriks *Adjacency* dengan elemen bilangan kompleks yang memenuhi matriks Hermite. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Diketahui graf G
2. Membentuk matriks *Adjacency* dari graf tersebut.
3. Membentuk matriks Hermite dari matriks *Adjacency*, dengan aturan sebagai berikut:
   a. Elemen diagonal diabaikan nilainya
   b. Unsur nol selain di diagonal utamanya harus nol.
   c. Unsur tak nol pada matriks dirubah dengan unsur tak nol dengan semesta bilangan komplek dan

diberikan secara random [11]

Berdasarkan langkah-langkah diatas maka terdapat banyak kemungkinan matriks Hermite yang didapatkan. Matriks-matriks tersebut tentunya memiliki nullitas masing-masing. Sehingga dapat ditentukan nullitas maksimal yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

Nullitas maksimum dari matriks Hermite yang digambarkan graf G dapat didefinisikan:

$$M(H_G) = maks\{null(A): A \in H_G\}$$

[12].

Adapun teorema-teorema yang mendukung penelitian ini adalah:

Teorema 2.1

Untuk graf G dengan order n, maka berlaku

$$M(G) + mr(G) = |G|$$

Dengan $|G|$ merupakan order dari graf G atau banyaknya titik pada suatu graf G [13].

Teorema 2.2

Jika K_n graf Komplit dengan n titik dimana $n \in N$ dan $n \geq 2$, maka $mr\left(H_{K_n}\right) = 1$ [11]

Teorema 2.3

Jika P_n graf Lintasan dengan n titik dimana $n \in N$ dan $n \geq 2$, maka $mr\left(H_{P_n}\right) = n - 1$ [11].

Teorema 2.4

Jika C_n graf Sikel dengan n titik dimana $n \in N$ dan $n \geq 3$, maka $mr\left(H_{C_n}\right) = n - 2$ [11].

Teorema 2.5

Jika $K_{m,n}$ graf Bipartisi Komplit dengan $n + m$ titik dimana $m, n \in N$, maka $mr\left(H_{K_{m,n}}\right) = 2$ [11].

Teorema 2.6

Jika S_n graf Bintang dengan $n \in N$, maka $mr\left(H_{S_n}\right) = 2$ [11].

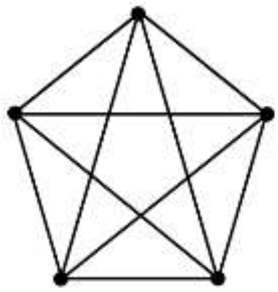
3. Metode Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan jenis/pendekatan penelitian yang berupa Studi Kepustakaan (*Library Research*). Studi kepustakaan merupakan suatu studi yang digunakan dalam mengeumpulkan informasi dan data dengan bantuan berbagai macam material yang ada di perpustakaan seperti dokumen, buku, majalah, kisah-kisah sejarah, dsb. Studi kepustakaan juga berarti teknik pengumpulan data dengan melakukan penelaahan terhadap buku, literatur, catatan, serta berbagai laporan yang berkaitan dengan masalah yang ingin dipecahkan [14].

Melalui studi kepustakaan ini penulis melakukan pengamatan dan menganalisa pada buku referensi, artikel, dan jurnal penelitian sebelumnya yang berkaitan nulllitas maksimum pada matriks yang digambarkan Graf G untuk digunakan sebagai dasar teori. Adapun jenis graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf komplit, graf lintasan, graf sikel, graf bipartisi komplit, dan graf star (bintang).

4. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini konsep nullitas maksimal pada matriks Hermite yang digambarkan graf G, diterapkan pada graf komplit, graf lintasan, graf sikel, graf bipartisi komplit dan graf star. Adapun salah satu contoh penerapan pada penelitian ini, diambil graf K_5 yang merupakan contoh dari graf komplit dengan 5 titik



Gambar 2. Graf K_5

Adapun matriks *Adjacency* dari K_5 adalah

$$A_{K_5}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah dibentuk matriks *Adjacency*, matriks tersebut dibentuk dalam matriks Hermite sesuai dengan langkah-langkah yang terdapat pada landasan teori. Berdasarkan arah penelitian ini,

dimana akan ditentukan nullitas maksimum, maka kemungkinan matriks Hermite yang terbentuk sangat banyak, oleh karena itu perlu adanya pola matriks Hermite sehingga didapatkan nullitas maksimum.
Berdasarkan matriks *Adjacency* dapat dikembangkan matriks-matriks Hermite dari K_5 serta diperoleh rank dan nullitasnya, Adapun beberapa kemungkinan matriks Hermite yang terbentuk adalah sebagai berikut:

1. $H_1 = \begin{bmatrix} i & -i & -i & -i & -i \\ i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i \\ i & i & i & i & i \end{bmatrix}$

   Dengan $rank\ (H_1) = 2$ dan $null(H_1) = 3$

2. $H_2 = \begin{bmatrix} 3i & -3i & -3i & -3i & -3i \\ -3i & 3i & -3i & -3i & -3i \\ -3i & -3i & 3i & -3i & -3i \\ -3i & -3i & 3i & -3i & -3i \\ -3i & -3i & -3i & -3i & 3i \end{bmatrix}$

   Dengan $rank(H_2) = 4\ dan\ null(H_2) = 1$

3. $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & -i & -i & -i & -i \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Dengan $rank(H_3) = 1\ dan\ null(H_3) = 4$

Berdasarkan semua kemungkinan matriks Hermite yang didapatkan, diperoleh nullitas maksimal dari Graf K_5 adalah 4. Berdasarkan contoh di atas peneliti mengembangkan penelitian untuk nullitas maksimal matriks Hermite yang di gambarkan graf K_n diperoleh:

Teorema 4.1
Jika K_n merupakan graf komplit, dengan $n \geq 2, n \in N$ dan n merupakan banyaknya titik dan pada graf K_n.
Maka $M(K_n) = n - 1$.

Bukti
Diketahui untuk graf komplit K_n dengan $n \geq 2, n \in N$ dan matriks *Adjacendy* yang dapat dibentuk dari graf komplit K_n adalah sebagai berikut:

$$A_{K_n}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $M(K_n) = 1$
Berdasarkan teorema 2.1

$$M(G) + mr(G) = |G|$$

Dimana $|G|$ merupakan order dari graf G dari order dari graf $K_n = n$, maka diperoleh

$$M(H_{K_n}) + mr(H_{K_n}) = n$$

Berdasarkan teorema 2.2 diperoleh

$$mr(H_{K_n}) = 1$$

Sehingga di peroleh

$$M(H_{K_n}) + 1 = n$$
$$M(H_{K_n}) = n - 1$$

Untuk lebih menegaskan bahwa

$$M(H_{K_n}) = n - 1$$

Ambil matriks hermite dengan pola sebagai berikut:

$$H_{K_n}: \begin{bmatrix} a & -ai & -ai & \cdots & -ai \\ ai & a & a & \cdots & a \\ ai & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ai & a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Dengan $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ dan $i = \sqrt{-1}$

Dengan bantuan matlab diperoleh nullitas dari matriks $H_{K_n} = n - 1$.
Berdasarkan teorema 2.1, teorema 2.2, dan pola matriks H_{K_n} yang sudah didapatkan maka terbukti bahwa $M(H_{K_n}) = n - 1$.

Selain menentukan $M(H_{K_n})$, nullitas maksimal juga diterapkan pada graf lain, yaitu graf lintasan, graf sikel, graf bipartisi komplit dan graf star. Adapun nullitas maksinal $M(G)$ masing-masing graf tersebut adalah sebagai berikut:

Teorema 4.2
Jika P_n merupakan graf lintasan, dengan $n \geq 2, n \in N$ dan n merupakan banyaknya titik dan pada graf P_n.
Maka $M(P_n) = 1$.

Bukti
Diketahui untuk graf lintasan P_n dengan $n \geq 2, n \in N$ dan matriks *Adjacendy* yang dapat dibentuk dari graf lintasan P_n adalah sebagai berikut:

$$A_{P_n}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $M(P_n) = 1$
Berdasarkan teorema 2.1

$$M(G) + mr(G) = |G|$$

Dimana $|G|$ merupakan order dari graf G dari order dari graf $P_n = n$, maka diperoleh

$$M(H_{P_n}) + mr(H_{P_n}) = n$$

Berdasarkan teorema 2.3 diperoleh

$$mr(H_{P_n}) = n - 1$$

Sehingga di peroleh

$$M(H_{P_n}) + (n-1) = n$$
$$M(H_{P_n}) = n - (n-1)$$
$$M(H_{P_n}) = 1$$

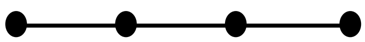
Untuk lebih menegaskan bahwa

$$M(H_{P_n}) = 1$$

Ambil matriks hermite dengan pola sebagai berikut:

$$H_{P_n}: \begin{bmatrix} ai & ai & 0 & \cdots & 0 \\ -ai & 0 & ai & \cdots & 0 \\ 0 & -ai & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -ai \end{bmatrix}$$

Dengan $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ dan $i = \sqrt{-1}$
Dengan bantuan matlab diperoleh nullitas dari matriks $H_{P_n} = 1$.
Berdasarkan teorema 2.1, teorema 2.3, dan pola matriks H_{P_n} yang sudah didapatkan maka terbukti bahwa $M(H_{P_n}) = 1$.
Contoh:



Gambar 3. Graf P_4

Adapun matriks *adjacency* dari graf P_4 adalah

$$A_{P_4}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Adjacency* dapat dikembangkan matriks-matriks Hermite dari A_{P_4} serta diperoleh rank dan nullitasnya. Salah satu kemungkinan matriks Hermite yang terbentuk dari graf P_4 adalah sebagai berikut:

$$H_{P_4}: \begin{bmatrix} 2i & 2i & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 2i & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -2i & -2i \end{bmatrix}$$

Diperoleh $mr(H_{P_4}) = 3$ dan $M(H_{P_4}) = 1$.

Teorema 4.3
Jika C_n merupakan graf sikel, dengan $n \geq 3, n \in N$ dan n merupakan banyaknya titik dan pada graf C_n.
Maka $M(C_n) = 2$.

Bukti
Diketahui untuk graf sikel C_n dengan $n \geq 3, n \in N$ dan matriks *Adjacendy* yang dapat dibentuk dari graf sikel C_n adalah sebagai berikut:

$$A_{C_n}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $M(C_n) = 2$
Berdasarkan teorema 2.1

$$M(G) + mr(G) = |G|$$

Dimana $|G|$ merupakan order dari graf G dari order dari graf $C_n = n$, maka diperoleh

$$M(H_{C_n}) + mr(H_{C_n}) = n$$

Berdasarkan teorema 2.4 diperoleh

$$mr(H_{C_n}) = n - 2$$

Sehingga di peroleh

$$M(H_{C_n}) + (n-2) = n$$
$$M(H_{C_n}) = n - (n-2)$$
$$M(H_{C_n}) = 2$$

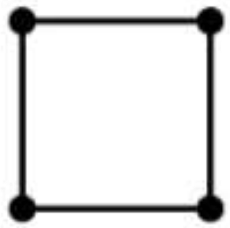
Untuk lebih menegaskan bahwa

$$M(H_{C_n}) = 2$$

Ambil matriks hermite dengan pola sebagai berikut:

1. Untuk $n = 3$, graf C_3 sama dengan graf K_3, sehingga $M(H_{C_3}) = 2$
2. Untuk $n \equiv 0 \mod 4$, pilih $A_{C_n} + diag\ (0, -1, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0 - 1, 0, 1)$.
3. Untuk $n \equiv 1 \mod 4$, pilih $A_{C_n} + diag\ (-1, -1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$.
4. Untuk $n \equiv 2 \mod 4$, pilih $A_{C_n} + diag\ (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$.
5. Untuk $n \equiv 3 \mod 4$, pilih $A_{C_n} + diag\ (1, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Dengan menggunakan program Matlab diperoleh $M(H_{C_n}) = 2$
Berdasarkan teorema 2.1, teorema 2.4, dan pola matriks H_{C_n} yang sudah didapatkan maka terbukti bahwa $M(H_{C_n}) = 2$.
Contoh:



Gambar 4. Graf C_4

Adapun matriks *adjacency* dari graf C_4 adalah

$$A_{P_4}:\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Adjacency* dapat dikembangkan matriks-matriks Hermite dari A_{C_4} serta diperoleh rank dan nullitasnya. Salah satu kemungkinan matriks Hermite yang terbentuk dari graf C_4 adalah sebagai berikut:

$$H_{C_4}:\begin{bmatrix}0&i&0&i\\i&0&i&0\\0&i&0&i\\i&0&i&0\end{bmatrix}$$

Dengan $i=\sqrt{-1}$, diperoleh $mr(H_{C_4})=2$ dan $M(H_{C_4})=2$.

Teorema 4.4

Jika $K_{m,n}$ merupakan graf bipartisi komplit, dengan $m,n\in N$ dan $m+n$ merupakan banyaknya titik dan pada graf $K_{m,n}$.
Maka $M(K_{m,n})=m+n-2$.

Bukti

Diketahui untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dengan $m+n$ titik dan $m,n\in N$, sehinggamatriks *Adjacendy* yang dapat dibentuk dari graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

$$A_{K_{m,n}}:\begin{array}{c} \\ 1\\2\\ \vdots\\ m\\ m+1\\ m+2\\ \vdots\\ m+n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}1&2&\dots&m&m+1&m+2&\dots&m+n\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&\dots&0&1&1&\dots&1\\0&0&\dots&0&1&1&\dots&1\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0&1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1&0&0&\dots&0\\1&1&\dots&1&0&0&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1&0&0&\dots&0\end{bmatrix}\end{array}$$

Akan dibuktikan bahwa $M(K_{m,n})=m+n-2$
Berdasarkan teorema 2.1

$$M(G)+mr(G)=|G|$$

Dimana $|G|$ merupakan order dari graf G dari order dari graf $K_{m,n}=m+n$, maka diperoleh

$$M(H_{K_{m,n}})+mr(H_{K_{m,n}})=m+n$$

Berdasarkan teorema 2.5 diperoleh

$$mr(H_{C_n})=2$$

Sehingga di peroleh

$$M(H_{C_n})+2=m+n$$
$$M(H_{C_n})=m+n-2$$

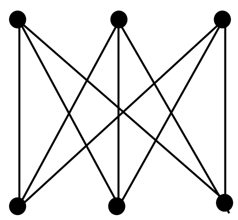
Untuk lebih menegaskan bahwa

$$M(H_{C_n})=m+n-2$$

Ambil matriks hermite dengan pola sebagai berikut:

$$H_{K_{m,n}}:\begin{bmatrix}0&\dots&0&ai&\dots&ai\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&ai&\dots&ai\\-ai&\dots&-ai&0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-ai&\dots&-ai&0&\dots&0\end{bmatrix}$$

Dengan $a\in\mathbb{R}, a\neq 0$ dan $i=\sqrt{-1}$
Dengan bantuan matlab diperoleh nullitas dari matriks $H_{K_{m,n}}=m+n-2$.
Berdasarkan teorema 2.1, teorema 2.5, dan pola matriks $H_{K_{m,n}}$ yang sudah didapatkan maka terbukti bahwa $M(H_{K_{m,n}})=m+n-2$.
Contoh:



Gambar 5. Graf $K_{3,3}$

Adapun matriks *adjacency* dari graf $K_{3,3}$ adalah

$$A_{K_{3,3}}:\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Adjacency* dapat dikembangkan matriks-matriks Hermite dari $A_{K_{3,3}}$ serta diperoleh rank dan nullitasnya. Salah satu kemungkinan matriks Hermite yang terbentuk dari graf $K_{3,3}$ adalah sebagai berikut:

$$H_{K_{3,3}}:\begin{bmatrix}0&0&0&4i&4i&4i\\0&0&0&4i&4i&4i\\0&0&0&4i&4i&4i\\-4i&-4i&-4i&0&0&0\\-4i&-4i&-4i&0&0&0\\-4i&-4i&-4i&0&0&0\end{bmatrix}$$

Diperoleh $mr(H_{K_{3,3}}) = 2$ dan $M(H_{K_{3,3}}) = 4$.

Teorema 10

Graf S_n merupakan graf yang berbentuk graf $K_{1,m}$, Jika S_n merupakan graf bintang (star), dengan $n \in N$ dan $1 + m$ merupakan banyaknya titik dan pada graf S_n.

Maka $M(S_n) = n - 2$.

Bukti

Diketahui untuk graf star S_n dengan n titik dan $n \in N$, sehingga matriks *Adjacendy* yang dapat dibentuk dari graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

$$A_{S_n}:\begin{bmatrix}0&1&1&1&\dots&1\\1&0&0&0&\dots&0\\1&0&0&0&\dots&0\\1&0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $M(S_n) = n - 2$

Berdasarkan teorema 2.1

$$M(G) + mr(G) = |G|$$

Dimana $|G|$ merupakan order dari graf G dari order dari graf $S_n = 1 + n$, maka diperoleh

$$M(H_{S_n}) + mr(H_{S_n}) = n$$

Berdasarkan teorema 2.6 diperoleh

$$mr(H_{S_n}) = 2$$

Sehingga di peroleh

$$M(H_{S_n}) + 2 = n$$
$$M(H_{S_n}) = n - 2$$

Untuk lebih menegaskan bahwa

$$M(H_{S_n}) = n - 2$$

Ambil matriks hermite dengan pola sebagai berikut:

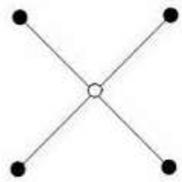
$$H_{S_n}:\begin{bmatrix}0&ai&ai&ai&\dots&ai\\-ai&0&0&0&\dots&0\\-ai&0&0&0&\dots&0\\-ai&0&0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-ai&0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}$$

Dengan $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ dan $i = \sqrt{-1}$

Dengan bantuan matlab diperoleh nullitas dari matriks $H_{K_{m,n}} = n - 2$.

Berdasarkan teorema 2.1, teorema 2.6, dan pola matriks $H_{K_{m,n}}$ yang sudah didapatkan maka terbukti bahwa $M(H_{K_{m,n}}) = n - 2$.

Contoh:



Gambar 6. Graf S_5

Adapun matriks *adjacency* dari graf S_5 adalah

$$A_{S_5}:\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Adjacency* dapat dikembangkan matriks-matriks Hermite dari A_{S_5} serta diperoleh rank dan nullitasnya. Salah satu kemungkinan matriks Hermite yang terbentuk dari graf A_{S_5} adalah sebagai berikut:

$$H_{S_5}:\begin{bmatrix}0&3i&3i&3i&3i\\-3i&0&0&0&0\\-3i&0&0&0&0\\-3i&0&0&0&0\\-3i&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Diperoleh $mr(H_{S_5}) = 2$ dan $M(H_{K_{m,n}}) = 3$.

5. Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang didapatkan pada penelitian ini adalah:

1. Nullitas maksimum matriks Hermite yang

digambarkan graf K_n adalah $n-1$ atau $M\left(H_{K_n}\right)=n-1$;
2. Nullitas maksimum matriks Hermite yang digambarkan graf P_n adalah 1 atau $M\left(H_{P_n}\right)=1$;
3. Nullitas maksimum matriks Hermite yang digambarkan graf C_n adalah 2 atau $M\left(H_{C_n}\right)=2$;
4. Nullitas maksimum matriks Hermite yang digambarkan graf $K_{m,n}$ adalah $m+n-2$ atau $M\left(H_{k_{m,n}}\right)=m+n-2$;
5. Nullitas maksimum matriks Hermite yang digambarkan graf S_n adalah $n-2$ atau $M\left(H_{S_n}\right)=n-2$;

6. Daftar Pustaka

[1] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Second Edi. California: a Division of Wadsworth Inc, 1986.
[2] S. Fallat and L. Hogben, "The Minimum Rank of Symmetric Matrices Described by a Graph," *A Surv. Linear Algebr. Its Appl.*, vol. 462, no. 2–3, pp. 558–582, 2007, doi: 10.1016/j.laa.2007.05.036.
[3] R. A. M. Makalew, C. E. J. C. Montolalu, and M. L. Mananohas, "Lintasan Hamiltonian pada Graf 4-Connected," *d'CARTESIAN*, vol. 9, no. 2, p. 181, 2021, doi: 10.35799/dc.9.2.2020.29735.
[4] S. Lipschutz and M. L. Lipson, *Matematika Diskrit*. Jakarta: Penerbit Salemba Teknika, 2002.
[5] Abdussakir, N. N. Azizah, and F. F. Nofandika, *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press, 2009.
[6] R. J. Wilson and J. J. Walkins, *Graphs an Intoductory Approach: A First Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1990.
[7] Z. Amri *et al.*, "Pelabelan harmonis ganjil pada graf 2Sn(C4,n)," vol. 4, no. 1, pp. 87–91, 2018, doi: https://doi.org/10.30596/edutech.v4i1.1952.
[8] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga, 2004.
[9] N. Selvia, "Sifat Nilai Eigen Matriks Anti Adjacency Dari Graf Simetrik," vol. 10, no. 2, pp. 154–161, 2017, doi: http://dx.doi.org/10.30998/faktorexacta.v10i2.1284.
[10] L. Hogben, *Handbook of Linier Algebra*. Boca Raton: Chapman & hall/CRC Taylor & Francis Group, 2007.
[11] M. Syafi'i, "Rank Minimum Matriks Hermite," *Fibonacci J. Pendidik. Mat. dan Mat.*, vol. 4, no. 2, pp. 97–104, 2018, doi: 10.24853/fbc.4.2.97-104.
[12] F. Barioli *et al.*, "On the minimum rank of not necessarily symmetric matrices: A preliminary study," *Electron. J. Linear Algebr.*, vol. 18, no. February, pp. 126–145, 2009, doi: 10.13001/1081-3810.1300.
[13] E. Vatandoost and K. Nozari, "Maximum nullity and zero forcing number of graphs with rank at most 4," *Cogent Math. Stat.*, vol. 5, no. 1, p. 1437668, 2018, doi: 10.1080/23311835.2018.1437668.
[14] A. T. Mirzaqon and B. Purwoko, "Studi Kepustakaan Mengenai Landasan Teori Dan Praktik Konseling Expressive Writing Library," *J. BK UNESA*, vol. 8, no. 1, pp. 1–8, 2017.