



# BUAP

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

“Programa para el análisis de marcos de sección constante y variable  
basado en soluciones condensadas para el análisis estructural”

Tesis

Que para obtener el título de:

**“Ingeniero civil”**

Presenta:

**Edgar Roberto Rodríguez Ramírez**

Asesor:

**M. I. Edgar Iram Villagrán Arroyo**

Puebla, Puebla

Marzo 2016



**BUAP**

Oficio No. S.AC. 0800/16  
**ACEPTACIÓN TEMA TESIS**

**C. EDGAR ROBERTO RODRÍGUEZ RAMÍREZ**  
**PASANTE DE LA CARRERA DE**  
**INGENIERÍA CIVIL**  
**DE LA B.U.A.P.**  
**PRESENTE.**

En atención a la autorización del Tema de Tesis que puso Usted a consideración de esta Facultad, se turnó la misma al:

**M.I. HECTOR IVÁN SANTOS HERNÁNDEZ**  
**COORDINADOR DEL ÁREA DE ESTRUCTURAS**

Habiendo autorizado el tema denominado:

**“PROGRAMA PARA EL ANÁLISIS DE MARCOS DE SECCIÓN CONSTANTE Y VARIABLE BASADO EN SOLUCIONES CONDENSADAS PARA EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL”**

Por lo anterior hacemos de su conocimiento que se asigna como Asesor de esta tesis a: **M.I. EDGAR IRAM VILLAGRAN ARROYO.**

Sin otro particular de momento, me es grato quedar de usted.

ATENTAMENTE

“PENSAR BIEN PARA VIVIR MEJOR”

H. Puebla de Z., 23 de febrero de 2008

  
**M.I. ANA ELENA POSADA SÁNCHEZ**  
**SECRETARIA ACADÉMICA**



C.c.p.- Mesa de Exámenes Profesionales  
Asesor  
Archivo  
**M'EIVA/M'AEPS\***rba.

**60**  
**AÑOS DE**  
**AUTONOMÍA**  
**UNIVERSITARIA**

Facultad  
de Ingeniería

Blvd. Valsequillo y Av. San Claudio  
s/n, edif. ING 4, Col. San Manuel,  
Ciudad Universitaria,  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7610



**BUAP**

**ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN**

**M.I. ANA ELENA POSADA SÁNCHEZ  
SECRETARIA ACADÉMICA DE  
LA FACULTAD DE  
INGENIERÍA DE LA B.U.A.P.  
Presente.**

El suscrito: **M. I EDGAR IRAM VILLAGRAN ARROYO**, Asesor Interno del Tema de Tesis denominado:

**“PROGRAMA PARA EL ANÁLISIS DE MARCOS DE SECCIÓN CONSTANTE Y VARIABLE BASADO EN SOLUCIONES CONDENSADAS PARA EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL”**

Presentado por el **C. EDGAR ROBERTO RODRÍGUEZ RAMÍREZ**, Pasante de la Carrera de Ingeniería Civil, y en atención al oficio No. 0800/16, de fecha 23 de febrero del presente año, me permito informar a usted que **después de haber revisado cuidadosamente** el contenido temático, la metodología, la redacción y la ortografía de la tesis correspondiente, no tengo inconveniente **autorizar la impresión** de la misma.

Lo que hago de su conocimiento para los efectos legales a que haya lugar.

ATENTAMENTE

H. Puebla de Z., 26 de febrero de 2016

**M.I. EDGAR IRAM VILLAGRAN ARROYO  
ASESOR**

C.c.p.- Interesada  
Expediente  
rba

Facultad  
de Ingeniería

Bldv. Valsequillo y Av. San Claudio  
s/n, edif. ING 4, Col. San Manuel,  
Ciudad Universitaria,  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7610

---

Dedico esta tesis:

**A Dios y a la Santísima Virgen de Guadalupe**

Por brindarme a la mejor familia que existe en el mundo y la que quiero tanto, escuchar mis súplicas, auxiliarme durante todo el plan de estudios y llegar por fin a la meta de esta fase de mi vida.

A mis papás, los mejores del orbe:

**Profa. Montserrat Ramírez Taboada**

**Ing. Roberto Rodríguez Huerta**

Con todo mi amor y agradecimiento, pues con su ejemplo, grande esfuerzo, mucha dedicación, paciencia y sobretodo cariño, me proporcionaron preparación, me alentaron, ayudaron a lograr este gran paso y sueño, el concluir mis estudios.

---

---

A mis queridos hermanos:

**Gabriela Rodríguez Ramírez**

**José Francisco Rodríguez Ramírez**

Por siempre mostrarme su amor, apoyo y siempre recordarme que en cualquier situación cuento con su ayuda, muchas gracias.

A mis abuelitos paternos:

**Sra. Guadalupe Huerta Romero**

**Sr. Roberto Rodríguez Pérez**

Con mucho cariño, por su contribución y apoyo, pues me ayudaron a dar un gran paso para lograr este sueño que se materializa.

---

---

A mi abuelita materna:

**Sra. Ernestina Taboada Ferrer †**

Con todo cariño y como recuerdo, sé con toda seguridad que estaría orgullosa al ver que he logrado finalizar mis estudios.

A mi abuelito materno:

**Sr. Arturo Ramírez Cabañas**

Con mucho afecto, por darme su apoyo incondicional para llegar a la meta.

---

---

Mis más sinceros agradecimientos

**Al M. I. Edgar Iram Villagrán Arroyo**

Por haber aceptado asesorarme y por su valiosa colaboración para que pudiera realizar esta tesis.

**A la M. I. Ana Elena Posada Sánchez**

Por la disposición de ayudarme en cualquier duda y cualquier situación en la que pudiera brindarme ese apoyo.

**Al Ing. Marco Alfredo León Porquillo**

Por su colaboración.

---

## Programa para el análisis de marcos de sección constante y variable basado en soluciones condensadas para el análisis estructural

### Contenido

<b>Introducción</b> .....	9
Antecedentes .....	10
Justificación .....	10
Hipótesis básicas .....	10
<b>CAPÍTULO I. Parámetros elásticos y constantes de carga</b> .....	11
I.1. Desarrollo de expresiones .....	11
I.2. Formulario .....	40
I.3. Ejemplos .....	50
<b>CAPÍTULO II. Manual de ANESTRUM</b> .....	71
II.1. ¿Cómo realizar un análisis? .....	75
II.1.1. Análisis de caso individual .....	75
II.1.2. Análisis con Combinación de casos .....	78
<b>CAPÍTULO III. Comprobación de los resultados de programa</b> .....	80
III.1. Ejemplos analizados con el software .....	80
<b>Conclusiones</b> .....	94
<b>Anexos</b> .....	95
<b>Bibliografía</b> .....	111



## Introducción

Los marcos son un sistema estructural confiable, como consecuencia de esto se ha prolongado su uso en la actualidad, gran número de edificaciones son construidas usando los mismos, el empleo de esta estructuración se debió al desarrollo de nuevos materiales y sistemas de construcción, como el concreto armado o el acero soldado, y a nuevos modelos de análisis y dimensionamiento, como se mencionó antes se usan a menudo en edificios y se componen de vigas y columnas que están articuladas o empotradas en sus cimentaciones.

La carga en un marco provoca flexión en sus elementos, por las conexiones entre barras rígidas, éste es indeterminado desde el punto de vista del análisis.

Los marcos rígidos han ido tomando fuerza debido a que facilitan la estructuración de los edificios y más con el uso del acero, dan la posibilidad de cubrir grandes claros. Un ejemplo destacable es el uso de marcos en las naves industriales, independientemente de que puedan construirse de otra forma, pueden emplearse en este caso.

Podemos señalar que el avance de la investigación ha creado nuevas formas de empleo y variaciones de los mismos, optimizando la realización del proyecto, tenemos como ejemplo los marcos de sección transversal variable, que ofrecen la ventaja de que aumenta el peralte de los elementos del mismo en donde el valor del momento flector es mayor, brindando ventajas sobre otros sistemas.

Por otro lado, los grandes problemas que enfrenta el diseño en diferentes tipos de proyectos son los recursos y el tiempo que se le asigna en la mayoría de estos, por eso la necesidad de efectuar con rapidez los cálculos sin comprometer la calidad de los mismos, por otra parte debemos también considerar lo costosas que pueden ser las licencias de programas de computadora para el análisis y diseño en diferentes tipos de proyectos, en especial en el campo de las estructuras, tomando en cuenta que se necesita obligadamente capacitación en el uso de mismo.

En la actualidad la tecnología nos facilita la forma en la que se realizan cálculos y un sin número de actividades, además de la velocidad con que se hacen los mismos en comparación con periodos anteriores de la ingeniería, de ahí la importancia de incluirla.

### Antecedentes

La obra de “Pórticos y arcos, soluciones condensadas para el análisis estructural” de Valerian Leontovich (1), fue creada con el objetivo de proveer una herramienta para el análisis de marcos con miembros de sección transversal variable, esto se logró dando soluciones para las magnitudes de las distintas reacciones y fuerzas que vuelven hiperestático al marco.

Hay distintos métodos de análisis pero la forma de solución que propone la obra mencionada es una manera sencilla y rápida de solucionar este tipo de estructuras que tienen diversos usos, aún en nuestros días.

### Justificación

Por lo anteriormente dicho, hay textos que en su tiempo fueron muy útiles pero con el paso del tiempo su aplicación se vuelve poco práctica, como consecuencia del cambio de condiciones en las obras, además de las exigencias que implica esto y la evolución de los métodos de análisis. Tal es el caso de las soluciones condensadas para el análisis estructural sobre las que se basa esta tesis para transformarlas en un programa que se ejecute en la computadora; es aquí donde entra el proyecto propuesto para la actualización, automatizando el uso de las ecuaciones contenidas en las soluciones condensadas, además de crear una herramienta que sea de fácil comprensión y manejo para evitar errores o malas interpretaciones de los resultados.

### Hipótesis básicas

Es posible crear un programa basado en las ecuaciones presentadas por las soluciones condensadas para el análisis estructural, mismo que se basa en las hipótesis de comportamiento elástico – lineal del material, lo que agilizará el procedimiento para el cálculo de marcos estructurales de inercia variable.

## CAPÍTULO I. Parámetros elásticos y constantes de carga

### I.1. Desarrollo de expresiones

Las propiedades elásticas de los miembros rectos de sección transversal variable están definidas por tres parámetros:  $\alpha_n$ ,  $\alpha_m$  y  $\beta_n$ ; que caracterizan completamente a todas las propiedades elásticas del miembro.

Las propiedades del área de momentos del miembro cargado con sección transversal variable, quedan definidas por las dos constantes de carga,  $R_n$  y  $R_m$ .

Los valores numéricos de los parámetros dependen sólo de la forma del miembro, en tanto que los valores de las constantes de carga dependen de la forma del miembro y de la carga (1).

De acuerdo a las gráficas y tablas contenidas en las soluciones condensadas (1), incluidas en la sección de anexos de esta tesis, los valores de los parámetros están dados por diferentes ecuaciones.

$$\alpha_n = \frac{12}{l^3} \int \frac{I_o}{I} (l-x)^2 dx \quad \text{Para cualquier extremo de miembros simétricos y el extremo menor de miembros con una cartela} \quad (1)$$

$$\alpha_m = \frac{12}{l^3} \int \frac{I_o}{I} x^2 dx \quad \text{Para el extremo mayor de miembros con una cartela} \quad (2)$$

$$\beta_n = \frac{12}{l^3} \int \frac{I_o}{I} (l-x)x dx \quad \text{Para cualquier extremo de miembros simétricos y cualquiera con una cartela} \quad (3)$$

Donde:

$\alpha$  y  $\beta$  - Parámetros elásticos

$l$  - Longitud del elemento

$I_o$  - Momento de inercia de la sección mínima alrededor del eje neutro

$I$  - Momento de inercia de la sección transversal alrededor del eje neutro

Por otro lado están también las ecuaciones que definen los valores para las constantes de carga, estas son:

Para carga distribuidas:

$$R_n = \frac{12}{Wl^3} \int \frac{I_o}{I} M (l - x) dx \quad \text{Para cualquier extremo de miembros simétricos y el extremo menor de miembros con una cartela} \quad (4)$$

$$R_m = \frac{12}{Wl^3} \int \frac{I_o}{I} M x dx \quad \text{Para el extremo mayor de miembros con una cartela} \quad (5)$$

Para cargas concentradas:

$$R_n = \frac{12}{Pl^3} \int \frac{I_o}{I} M (l - x) dx \quad \text{Para el extremo izquierdo de miembros simétricos y extremo menor de miembros con una cartela} \quad (6)$$

$$R_m = \frac{12}{Pl^3} \int \frac{I_o}{I} M x dx \quad \text{Para el extremo derecho de miembros simétricos y extremo mayor de miembros con una cartela} \quad (7)$$

Donde:

$R$  – Constante de carga

$w$  y  $P$  – Carga total distribuida y concentrada respectivamente

$l$  – Longitud del elemento

$I_o$  – Momento de inercia de la sección mínima alrededor del eje neutro

$I$  – Momento de inercia de la sección transversal alrededor del eje neutro

$M$  – Momento inducido en el elemento por la fuerza

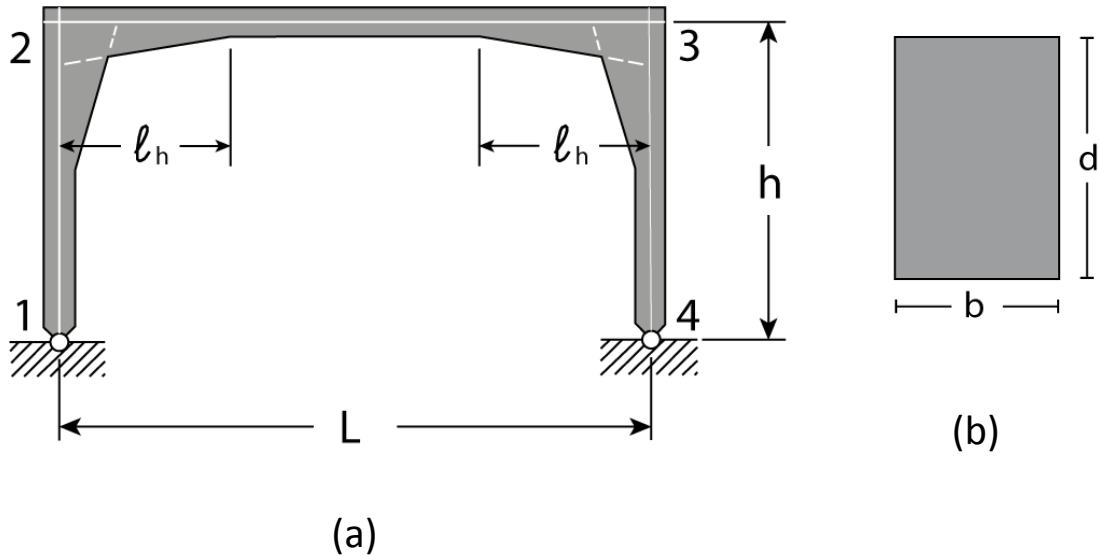


Figura 1. Elementos de un marco de sección transversal variable y dimensiones de la sección transversal de los elementos

De la figura anterior (Figura 1) se observan los siguientes datos:

$L$  – Claro del marco

$l_h$  – Longitud de la cartela en el elemento

$h$  – Altura del marco

$d$  – Peralte

$b$  – Ancho de sección

Suponiendo que el ancho de los miembros normal al plano del marco es  $b$  (Figura 1b) y reduciendo la estructura a sus miembros elementales para la realización del análisis, el marco queda de la forma que muestra la figura 2.

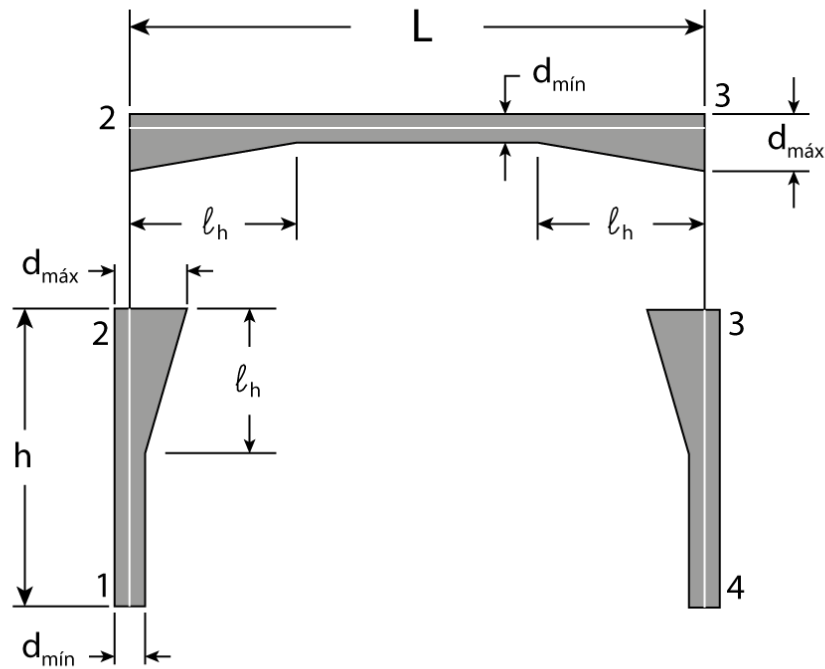


Figura 2. Forma y dimensiones de los miembros elementales de la estructura

En la figura anterior se muestran las siguientes partes:

$l_h$  – Longitud de la cartela

$d_{\text{máx}}$  – Peralte máximo del elemento

$d_{\text{mín}}$  – Peralte mínimo del elemento

Procediendo con los parámetros elásticos del miembro 1-2, tenemos que  $h$  y  $L$  para el análisis de las ecuaciones se convierte en  $l$  (Longitud total de elemento), con lo que respecta a las cartelas el elemento tiene una, suponiendo que el marco tiene elementos de ancho normal al plano de  $b$ , sabiendo lo anterior se procede con los cálculos de los tres parámetros ( $\alpha_n$ ,  $\alpha_m$  y  $\beta_n$ ) de los extremos del miembro.

Para el extremo menor la expresión que debe emplearse es la número (1).

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} (l-x)^2 dx \quad (8)$$

Donde, para una sección rectangular se tiene:

$$I_o = \frac{b \times d_{\min}^3}{12} \quad (9)$$

$$I = \frac{b \times [d(x)]^3}{12} \quad (10)$$

De la ecuación (10), el peralte del miembro 1-2 varía de acuerdo a la siguiente expresión:

$$d(x) = \begin{cases} d_{\max} = d_{\min}, & \text{si } x \leq l - l_h \\ \frac{d_{\max} - d_{\min}}{l_h} (x - l + l_h) + d_{\min}, & \text{si } x > l - l_h \end{cases} \quad (11)$$

Por tanto la ecuación (8) quedará de la siguiente forma:

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} (l-x)^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} (l-x)^2 dx \right) \quad (12)$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} (l-x)^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} (l-x)^2 dx \right) \quad (13)$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} (l-x)^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} (l-x)^2 dx \right) \quad (14)$$

Se resuelven las expresiones dentro del paréntesis en la ecuación (14), dando como resultado la siguiente expresión:

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l-l_h)^3}{3} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right) \quad (15)$$

Continuando, el parámetro siguiente es para el extremo mayor, por lo tanto, aplicando la ecuación (2) al elemento 1-2, ésta queda de la siguiente forma:

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} x^2 dx \quad (16)$$

Donde  $I_o$  e  $I$  equivalen a las ecuaciones (9) y (10) respectivamente y el peralte del elemento varía de acuerdo a la ecuación (11), por lo cual la ecuación (16) queda:

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} x^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} x^2 dx \right) \quad (17)$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} x^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} x^2 dx \right) \quad (18)$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} x^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} x^2 dx \right) \quad (19)$$


---



Efectuando las operaciones dentro del paréntesis en la ecuación (19), la misma queda de la siguiente forma:

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l-l_h)^3}{3} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \quad (20)$$

Para el parámetro  $\beta$  se aplicará la ecuación (3), para cualquier extremo.

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} (l-x)x dx \quad (21)$$

De la ecuación (21),  $I_o$  e  $I$  son iguales a las ecuaciones (9) y (10) respectivamente, por otro lado, el peralte en el elemento va variando como en la expresión (11), con esto se puede reescribir la ecuación (21) de la siguiente manera:

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} (l-x)x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} (l-x)x dx \right) \quad (22)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} (l-x)x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} (l-x)x dx \right) \quad (23)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l-l_h} (l-x)x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} (l-x)x dx \right) \quad (24)$$

Efectuando las operaciones dentro del paréntesis de la ecuación (24) y reduciendo los términos se obtiene:

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l + 2 l_h)(l - l_h)^2}{6} \right] + \left( \frac{d_{mín} l_h}{d_{máx} - d_{mín}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{máx}^2 l}{d_{mín}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{máx}}{d_{mín}} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{d_{máx} l}{d_{mín} l_h} + \frac{2 d_{máx}}{d_{mín}} - \frac{1}{2} \frac{d_{mín} l}{d_{máx} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} - \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{mín}}{d_{máx}} \right) \right) \right) \quad (25)$$

Ahora se buscarán las constantes de carga, éstas sólo aplican para el elemento cargado, por tal motivo y para realizar el análisis se necesita identificar este, al estar analizando el elemento 1-2 se supondrá que se encuentra bajo la acción de una carga.

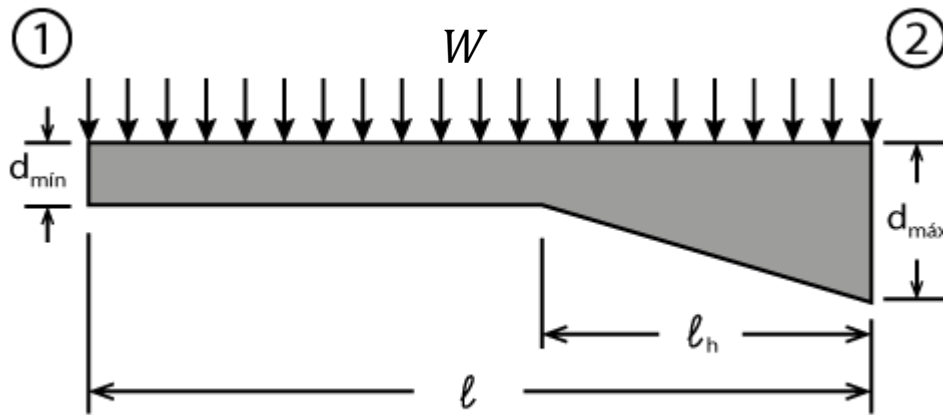


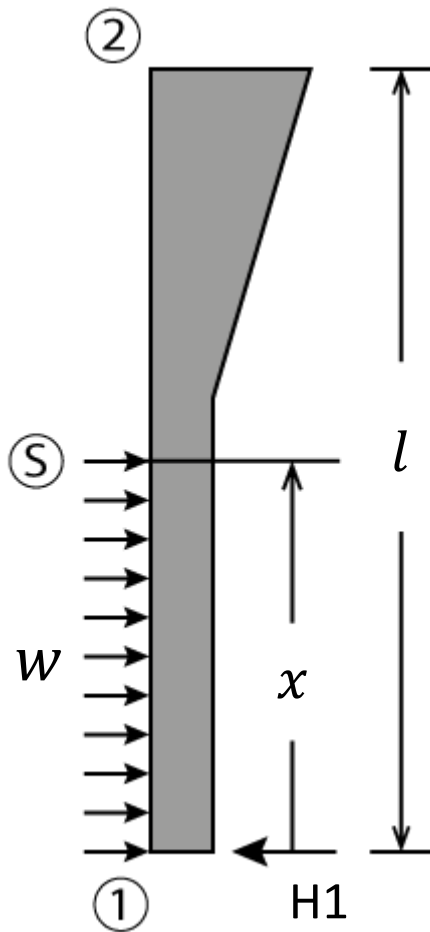
Figura 3. Elemento 1-2 mostrando la fuerza distribuida aplicada

Se comenzará con la constante de carga para una fuerza repartida como lo muestra la figura 3 y posteriormente se realizará para otro tipo.

Para aplicar la ecuación tenemos que identificar el elemento cargado, éste es el 1-2, eligiendo el lado menor se aplica la ecuación (4), quedando:

$$R_{12} = \frac{12}{Wl^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} M (l - x) dx \quad (26)$$

Donde  $I_o$  e  $I$  equivalen nuevamente a las ecuaciones (9) y (10) respectivamente y el peralte del elemento varía de acuerdo a la expresión (11), la ecuación (26) tiene un nuevo término que es el valor del momento inducido por la fuerza.



Se encuentra la ecuación de momento del miembro 1-2 mostrado en la figura 4.

$$M = H1 \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2} \quad (27)$$

$$H1 = \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \quad (28)$$

$$M = \frac{w \cdot l}{2} \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2} \quad (29)$$

Donde:

$M$  – Momento inducido por la fuerza

$H1$  – Reacción horizontal en el apoyo 1

$l$  – Longitud total del elemento

$w$  – Fuerza distribuida por unidad de longitud

Figura 4. Elemento 1-2 con la ecuación de momento para la carga distribuida

Con lo anteriormente descrito y la ecuación (29), la ecuación (26) se reescribe en la siguiente forma:

$$R_{12} = \frac{12}{Wl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right) \quad (30)$$

$$R_{12} = \frac{12}{Wl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right) \quad (31)$$

$$R_{12} = \frac{12}{(w \times l)l^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{min}^3}{[d(x)]^3} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right) \quad (32)$$

Al resolver las integrales dentro del paréntesis de la ecuación (32) y reduciendo términos.

$$\begin{aligned}
 R_{12} = & \frac{12}{l^4} \left( \frac{(l^2 + 2 l l_h + 3 l_h^2)(l - l_h)^2}{24} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 l_h + \frac{(d_{\min} l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \right. \\
 & \left( \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l}{d_{\min}^2} - \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l_h}{d_{\min}^2} - \frac{5}{4} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}} + \frac{3}{2} \frac{d_{\max}^2 l_h}{d_{\min}} + \frac{7}{4} d_{\max} l - \frac{5}{4} d_{\max} l_h - \frac{3}{4} d_{\min} l \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} d_{\max} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right] \right) + \frac{3}{2} d_{\max} l_h \left( \ln \left[ \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right] \right) + \frac{1}{2} d_{\min} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right] \right) \right) \right) \quad (33)
 \end{aligned}$$

Para el extremo mayor se aplica la ecuación (5), quedando de la siguiente manera:

$$R_{21} = \frac{12}{Wl^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} M x dx \quad (34)$$

En la cual cada uno de sus términos significan lo mismo que los de la ecuación (26) y al ser la misma condición de carga, tiene la misma ecuación de momento, con esto la ecuación (34) se reescribe.

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & \frac{12}{Wl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] x dx \right. \\
 & \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] x dx \right) \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$R_{21} = \frac{12}{Wl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] x dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] x dx \right) \quad (36)$$

$$R_{21} = \frac{12}{(w \times l)l^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] x dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] x dx \right) \quad (37)$$

Resolviendo la expresión (37) queda:

$$R_{21} = \frac{12}{l^4} \left( \frac{(l + 3 l_h) (l - l_h)^3}{24} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 l_h + \frac{(d_{\min} l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \right. \\ \left( \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l^2}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^3 l}{d_{\min}^2} + \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l_h}{d_{\min}^2} - \frac{(d_{\max} l)^2}{d_{\min} l_h} + \frac{5}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}} - \frac{3}{2} \frac{d_{\max}^2 l_h}{d_{\min}} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l^2}{l_h} - \frac{7}{2} d_{\max} l + \frac{5}{4} d_{\max} l_h + \frac{1}{4} \frac{(d_{\min} l)^2}{d_{\max} l_h} - \frac{d_{\min} l^2}{l_h} + \frac{3}{2} d_{\min} l \right. \\ \left. \left. + d_{\max} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right] \right) + \frac{3}{2} d_{\max} l_h \left( \ln \left[ \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right] \right) + d_{\min} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right] \right) \right) \right) \quad (38)$$

Por otro lado está el caso de una carga concentrada en una parte de la columna.

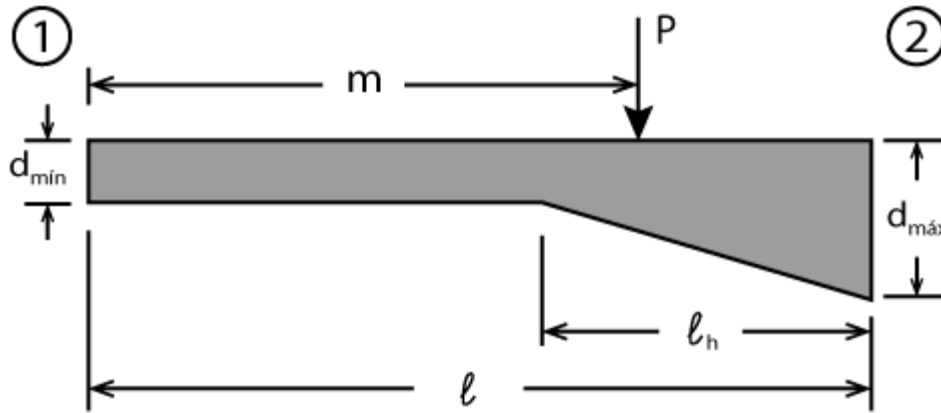
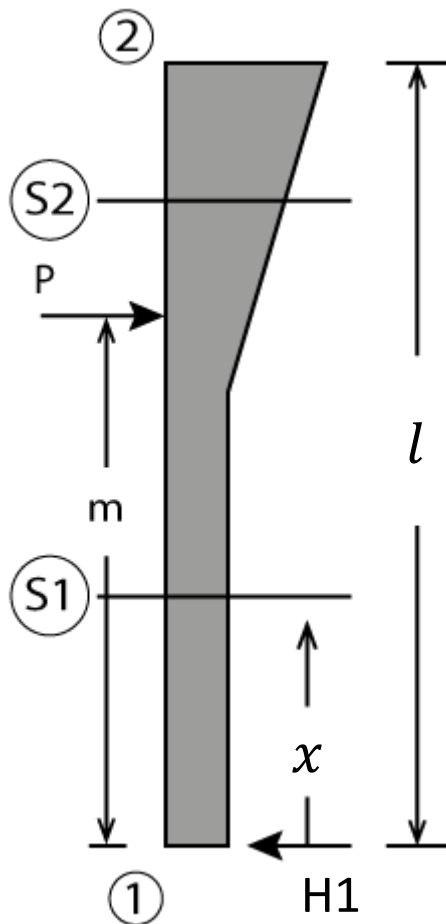


Figura 5. Elemento 1-2 mostrando la fuerza distribuida aplicada

Como en el anterior caso de la fuerza distribuida, el elemento sujeto a la acción de la fuerza es el miembro 1-2 del marco y comenzando nuevamente por el lado menor, la ecuación que se utiliza es la (6).

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \int_0^l \frac{I_0}{I} M (l - x) dx \quad (39)$$

Donde  $I_0$  e  $I$  equivalen nuevamente a las ecuaciones (9) y (10) respectivamente y el peralte del elemento varía de acuerdo a la expresión (11), en la ecuación (39) el momento se encuentra con la siguiente expresión:



Se obtiene la ecuación del momento en el elemento mostrado en la figura 6.

$$H1 = P \left[ \frac{l - m}{l} \right] \quad (40)$$

Si  $x \leq m$

$$M = P \left[ \frac{l - m}{l} \right] \cdot x \quad (41)$$

Si  $x > m$

$$M = P \left[ \frac{l - m}{l} \right] \cdot x - P(x - m) \quad (42)$$

Donde:

$M$  – Momento inducido por la fuerza

$H1$  – Reacción horizontal en el apoyo 1

$l$  – Longitud total del elemento

$P$  – Fuerza concentrada

$m$  – Distancia a la fuerza

Figura 6. Elemento 1-2 con la ecuación de momento para una carga concentrada

Para resolver esta condición de carga se presentan dos casos: el primero es cuando la carga se aplica al tramo donde la sección en el elemento es constante, y el segundo es cuando la fuerza se aplica al tramo de sección variable, por lo tanto, la ecuación se reescribiría de la forma que sigue:



Si  $m \leq l - l_h$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^m \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (43)$$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^m \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (44)$$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^m \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (45)$$

Efectuando las operaciones en la ecuación (45), resulta que  $R_{12}$  es igual a:

$$R_{12} = \frac{12}{l^3} \left( m \left( \left[ \frac{2l^3 - 3l^2m + lm^2 - 2l_h^3}{6l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2}{d_{\min}^2 l} - \frac{2d_{\max}}{d_{\min} l} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{3}{2l} + \frac{1}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right) \right) \quad (46)$$


---

Si  $m > l - l_h$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_{l-l_h}^m \frac{I_o}{I} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_m^l \frac{I_o}{I} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (47)$$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_{l-l_h}^m \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_m^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times [d(x)]^3}{12}} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (48)$$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_{l-l_h}^m \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx \right. \\ \left. + \int_m^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (49)$$

Efectuando las operaciones en la ecuación (43) y para facilitar el manejo del tamaño de la expresión, se separa de esta una parte, denominándola  $k$ , resulta que  $R_{12}$  es igual a la ecuación (51).

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m \quad (50)$$


---

$$\begin{aligned}
 R_{12} = & \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l-m)(l-l_h)^2(l+2l_h)}{6l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \right. \\
 & \left. \left( \frac{1}{2k^2} [(d_{\max} l_h)^2 + (d_{\max}^2 l_h m) - (d_{\max}^2 l l_h) + (d_{\max} d_{\min} l l_h) - d_{\max} d_{\min} l_h m] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{[d_{\max} l - 2 d_{\max} l_h - d_{\max} m - d_{\min} l + d_{\min} m]}{k} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{l}{l_h} + \frac{3 m}{2 l} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{m}{l_h} + \frac{m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\min} l_h}{k} \right) \right) \right) \quad (51)
 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (7) para el extremo mayor, ésta queda de la siguiente forma:

$$R_{21} = \frac{12}{Pl^3} \int_0^l \frac{I_0}{I} M x dx \quad (52)$$

Teniendo en cuenta que los términos de la ecuación (52) se refieren a los mismos términos que la ecuación (39), entonces:

Si  $m \leq l - l_h$

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^m \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \right. \\
 & \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \right) \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$R_{21} = \frac{12}{l^3} \left( m \left( \left[ \frac{l^3 - 3 l l_h^2 - l m^2 + 2 l_h^3}{6 l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2}{d_{\min}^2 l} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max}}{2 d_{\min} l_h} - \frac{1 d_{\min}}{2 d_{\max} l_h} - \frac{3}{2 l} + \frac{3}{2 l_h} + \frac{1}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right) \quad (54)$$

Si  $m > l - l_h$

$$R_{12} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx + \int_{l-l_h}^m \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx \right. \\ \left. + \int_m^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \right) \quad (55)$$

Al igual que en la ecuación (51), por su tamaño la ecuación (56) se separó, de manera que, la parte retirada es igual a la ecuación (50).

$$R_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l-m)(l-l_h)^3}{3 l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2 k^2} [-(d_{\max} l)^2 + 2 d_{\max}^2 l l_h \right. \right. \\ \left. \left. + d_{\max}^2 l m - (d_{\max} l_h)^2 - d_{\max}^2 l_h m + 2 d_{\max} d_{\min} l^2 - 2 d_{\max} d_{\min} l l_h \right. \right. \\ \left. \left. - 2 d_{\max} d_{\min} l m + d_{\max} d_{\min} l_h m - (d_{\min} l)^2 + d_{\min}^2 l m \right] \right. \\ \left. + \frac{[-2 d_{\max} l + 2 d_{\max} l_h + d_{\max} m + 2 d_{\min} l - d_{\min} m]}{k} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{a}x}^2 l m}{(d_{m\acute{m}n} l_h)^2} - \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{m}n}^2 l} + \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{m}n}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{m}n}} \right)^2 - \frac{d_{m\acute{a}x} l^2}{d_{m\acute{m}n} l_h^2} + \frac{3 d_{m\acute{a}x} l}{d_{m\acute{m}n} l_h} + \frac{d_{m\acute{a}x} l m}{d_{m\acute{m}n} l_h^2} \\
 & + \frac{2 d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{m}n} l} - \frac{3 d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{m}n} l_h} - \frac{2 d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{m}n}} - \frac{1 d_{m\acute{m}n} m}{2 d_{m\acute{a}x} l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{l_h} \right)^2 + \frac{2 l}{l_h} - \frac{1 l m}{2 l_h^2} - \frac{3 m}{2 l} + \frac{5 m}{2 l_h} \\
 & + \frac{m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{m}n}}{d_{m\acute{a}x}} + \ln \left( \frac{k}{d_{m\acute{m}n} l_h} \right) \right) \quad (56)
 \end{aligned}$$

Prosiguiendo, ahora se obtendrán las expresiones matemáticas de los parámetros elásticos y constantes de carga para el elemento simétrico 2-3, de la misma manera que se realizó para el 1-2.

A diferencia del elemento 1-2 con una cartela que tiene tres distintos valores de los parámetros, el elemento 2-3, tiene dos valores para los tres parámetros, los valores de los dos parámetros alfa son iguales, con lo cual, aplicando la ecuación (1), esta queda de la siguiente forma:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} (l-x)^2 dx \quad (57)$$

Donde  $I_o$  e  $I$  equivalen nuevamente a las ecuaciones (9) y (10) respectivamente, y el peralte del elemento varía de acuerdo a la expresión siguiente:

$$d(x) = \begin{cases} \frac{d_{m\acute{m}n} - d_{m\acute{a}x}}{l_h} (x) + d_{m\acute{a}x}, & \text{si } x \leq l_h \\ d_{m\acute{a}x} = d_{m\acute{m}n}, & \text{si } l_h < x \leq l - l_h \\ \frac{d_{m\acute{a}x} - d_{m\acute{m}n}}{l_h} (x - l + l_h) + d_{m\acute{m}n}, & \text{si } x < l_h \end{cases} \quad (58)$$

Por lo tanto la ecuación (57) quedará de la siguiente forma:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{I_o}{I} (l-x)^2 dx + \int_{l_h}^{l-l_h} (l-x)^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} (l-x)^2 dx \right) \quad (59)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times d(x)^3}{12}} (l-x)^2 dx + \int_{l_h}^{l-l_h} (l-x)^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{\min}^3}{12}}{\frac{b \times d(x)^3}{12}} (l-x)^2 dx \right) \quad (60)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{\min}^3}{d(x)^3} (l-x)^2 dx + \int_{l_h}^{l-l_h} (l-x)^2 dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{d(x)^3} (l-x)^2 dx \right) \quad (61)$$

Resolviendo las integrales y reduciendo los términos de la ecuación (61) tenemos:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l-l_h)^3 - l_h^3}{3} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \quad (62)$$

De la misma manera que el parámetro anterior, se aplica la ecuación (3), quedando de la siguiente manera:

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} (l-x) x dx \quad (63)$$

La ecuación (63) se desarrolla de la misma manera que la (57).

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{I_o}{I} (l-x) x dx + \int_{l_h}^{l-l_h} (l-x) x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} (l-x) x dx \right) \quad (64)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{\frac{b \times d_{min}^3}{12}}{\frac{b \times d(x)^3}{12}} (l-x) x dx + \int_{l_h}^{l-l_h} (l-x) x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{\frac{b \times d_{min}^3}{12}}{\frac{b \times d(x)^3}{12}} (l-x) x dx \right) \quad (65)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{min}^3}{d(x)^3} (l-x) x dx + \int_{l_h}^{l-l_h} (l-x) x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{min}^3}{d(x)^3} (l-x) x dx \right) \quad (66)$$

Desarrollando las expresiones dentro de la ecuación (66) y reduciendo los términos se obtiene:

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{1}{6} l^3 - l l_h^2 + \frac{2}{3} l_h^3 \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{l_h} - 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right) \quad (67)$$

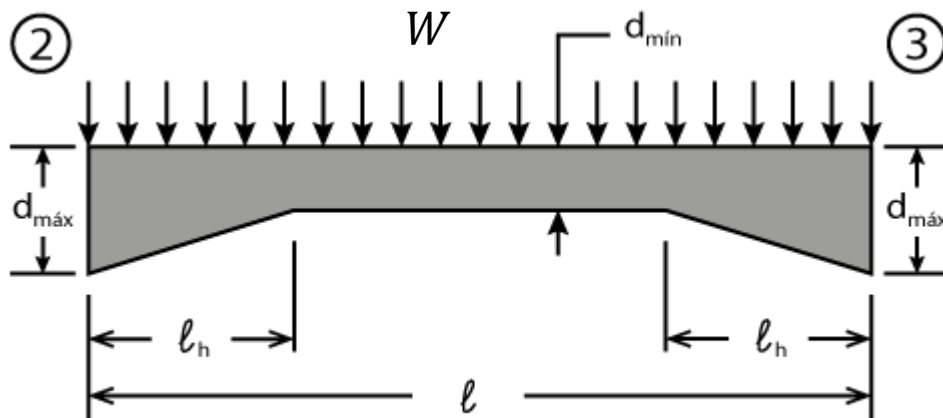


Figura 7. Elemento 2-3 mostrando la fuerza distribuida aplicada

Para el análisis, se harán los mismos pasos que se utilizaron para el elemento 1-2, pero con la aplicación para el 2-3, así, aplicando la ecuación (4) al elemento, resulta:

$$R_{23} = R_{32} = \frac{12}{W l^3} \int_0^l \frac{I_o}{I} M (l - x) dx \quad (68)$$

Para este elemento se aplica el mismo método que se ha aplicado para las demás expresiones.



$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} = & \frac{12}{Wl^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{I_o}{I} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right. \\
 & + \int_{l_h}^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \\
 & \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{I_o}{I} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right) \quad (69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} = & \frac{12}{(w \times l)l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right. \\
 & + \int_{l_h}^{l-l_h} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \\
 & \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ \left( \frac{w \cdot l}{2} \cdot x \right) - \left( \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \right] (l-x) dx \right) \quad (70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} = & \frac{12}{l^4} \left( \frac{l(-2l_h + l)(l^2 + 2ll_h - 2l_h^2)}{24} + \frac{(d_{\min} l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \left( \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l^2}{d_{\min}^2 l_h} \right. \right. \\
 & - \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l}{d_{\min}^2} - \frac{(d_{\max} l)^2}{d_{\min} l_h} + \frac{5}{4} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}} + \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l^2}{l_h} - \frac{7}{4} d_{\max} l + \frac{1}{4} \frac{(d_{\min} l)^2}{d_{\max} l_h} - \frac{d_{\min} l^2}{l_h} \\
 & \left. \left. + \frac{3}{4} d_{\min} l + \frac{1}{2} d_{\max} l \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \frac{1}{2} d_{\min} l \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right) \quad (71)
 \end{aligned}$$

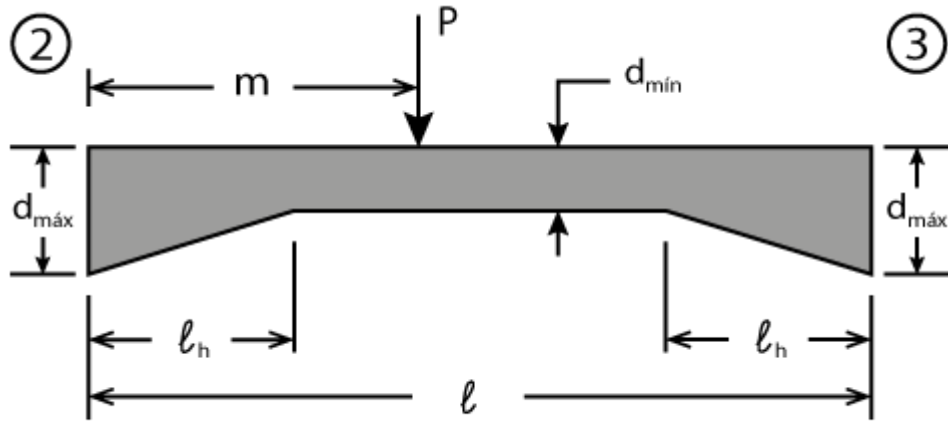


Figura 8. Elemento 2-3 mostrando la fuerza concentrada aplicada

Para el extremo izquierdo en la carga concentrada se tiene la ecuación (6) y aplicando los mismos pasos que con el caso anterior se tiene que:

Si  $m \leq l_h$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^m \frac{d_{\text{mín}}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx \right. \\
 & + \int_m^{l_h} \frac{d_{\text{mín}}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \\
 & + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \\
 & \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\text{mín}}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (72)
 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación (72), se obtiene una expresión grande que para facilitar su manejo ha sido separada, denominando como  $k$  a la siguiente expresión:

$$k = -d_{m\acute{a}x} l_h + d_{m\acute{a}x} m - d_{m\acute{i}n} m \quad (73)$$

$$R_{23} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{m(-2 l_h + l)(l^2 - l l_h + l_h^2)}{3 l} + \left( \frac{d_{m\acute{i}n} l_h}{d_{m\acute{a}x} - d_{m\acute{i}n}} \right)^3 \left( \frac{1}{2 k^2} [d_{m\acute{a}x}^2 l l_h - d_{m\acute{a}x}^2 l m - (d_{m\acute{a}x} l_h)^2 + d_{m\acute{a}x}^2 l_h m - d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l l_h + 2 d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l m - d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l_h m - d_{m\acute{i}n}^2 l m] + \frac{d_{m\acute{a}x} l - 2 d_{m\acute{a}x} l_h + d_{m\acute{a}x} m - d_{m\acute{i}n} l - d_{m\acute{i}n} m}{k} + \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{a}x}^2 l m}{(d_{m\acute{i}n} l_h)^2} + \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{i}n}^2 l} - \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{i}n}^2 l_h} - \frac{d_{m\acute{a}x} l m}{d_{m\acute{i}n} l_h^2} - \frac{4 d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{i}n} l} + \frac{3 d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{i}n} l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{i}n} l}{d_{m\acute{a}x} l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{i}n} m}{d_{m\acute{a}x} l_h} + \frac{1}{2} \frac{l}{l_h} + \frac{1}{2} \frac{l m}{l_h^2} + \frac{3 m}{l} - \frac{5 m}{2 l_h} - \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{i}n}} \right) + \ln \left( \frac{|k|}{d_{m\acute{a}x} l_h} \right) \right) \quad (74)$$

Si  $l_h < m \leq l - l_h$

$$R_{23} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{m\acute{i}n}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_{l_h}^m \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{m\acute{i}n}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{2 l^3 m - 3 (l l_h)^2 - 3 (l m)^2 + 2 l l_h^3 + 3 l l_h^2 m + l m^3 - 4 l_h^3 m}{6 l} \right. \\
 & + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right. \\
 & - \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\min} m}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} + \frac{3 m}{l} - \frac{3 m}{2 l_h} - \frac{3}{2} \\
 & \left. \left. + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right) \quad (76)
 \end{aligned}$$

Si  $m > l - l_h$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{12}{P l^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_{l_h}^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx \right. \\
 & + \int_{l-l_h}^m \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx \\
 & \left. + \int_m^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] (l-x) dx \right) \quad (77)
 \end{aligned}$$

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l-m)(l^3 - 6ll_h^2 + 4l_h^3)}{6l} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [-d_{\max}^2 l l_h \right. \right. \\
 & + (d_{\max} l_h)^2 + d_{\max}^2 l_h m + d_{\max} d_{\min} l l_h - d_{\max} d_{\min} l_h m] + \frac{1}{k} [d_{\max} l - 2 d_{\max} l_h \\
 & + d_{\max} m - d_{\min} l - d_{\min} m] + \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \\
 & - \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3 d_{\max} m}{d_{\min} l_h} + \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} l}{2 d_{\max} l_h} + \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} + \frac{5 l}{2 l_h} + \frac{3 m}{l} - \frac{5 m}{2 l_h} - \frac{3}{2} \\
 & \left. \left. + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left[ \frac{(d_{\min} l_h)^2}{d_{\max} l_h} \right] - \ln(k) \right) \right) \quad (79)
 \end{aligned}$$

Para el extremo derecho en la carga concentrada se tiene la ecuación (7) y considera que:

Si  $m \leq l_h$

$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^m \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx \right. \\
 & + \int_m^{l_h} \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \\
 & + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \\
 & \left. + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \right) \quad (80)
 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación (80), se obtiene una expresión grande, nuevamente se define  $k$  equivalente a (73).

$$k = -d_{m\acute{a}x} l_h + d_{m\acute{a}x} m - d_{m\acute{i}n} m$$

$$R_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{m(l^3 - 6l l_h^2 + 4l_h^3)}{6l} + \left( \frac{d_{m\acute{i}n} l_h}{d_{m\acute{a}x} - d_{m\acute{i}n}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [(d_{m\acute{a}x} l_h)^2 - d_{m\acute{a}x}^2 l_h m + d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l_h m] + \frac{2 d_{m\acute{a}x} l_h - d_{m\acute{a}x} m + d_{m\acute{i}n} m}{k} - \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{i}n}^2 l} + \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{i}n}^2 l_h} + \frac{4 d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{i}n} l} - \frac{3 d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{i}n} l_h} - \frac{1 d_{m\acute{i}n} m}{2 d_{m\acute{a}x} l_h} - \frac{3 m}{l} + \frac{5 m}{2 l_h} + \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{i}n}}{d_{m\acute{a}x}} \right) + \ln \left( \frac{d_{m\acute{a}x} l_h}{|k|} \right) \right) \quad (81)$$

Si  $l_h < m \leq l - l_h$

$$R_{32} = \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{m\acute{i}n}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx + \int_{l_h}^m \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] (l-x) dx + \int_m^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx + \int_{l-l_h}^l \frac{d_{m\acute{i}n}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \right) \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{l^3 m - 2 l l_h^3 - 3 l l_h^2 m - l m^3 + 4 l_h^3 m}{6 l} \right. \\
 & + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( - \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} + \frac{1 d_{\max}^2 m}{2 d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 + \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} \right. \\
 & - \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} - \frac{3 m}{l} + \frac{3 m}{2 l_h} + \frac{3}{2} \\
 & \left. \left. + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right) \quad (83)
 \end{aligned}$$

Si  $m > l - l_h$

$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{Pl^3} \left( \int_0^{l_h} \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx + \int_{l_h}^{l-l_h} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx \right. \\
 & + \int_{l-l_h}^m \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x \right] x dx \\
 & \left. + \int_m^l \frac{d_{\min}^3}{[d(x)]^3} \left[ P \left( \frac{l-m}{l} \right) x - P(x-m) \right] x dx \right) \quad (84)
 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación (84), se obtiene una expresión grande que para facilitar su manejo ha sido separada, esta parte es la ecuación (78) y denominada como  $k$ :

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m$$

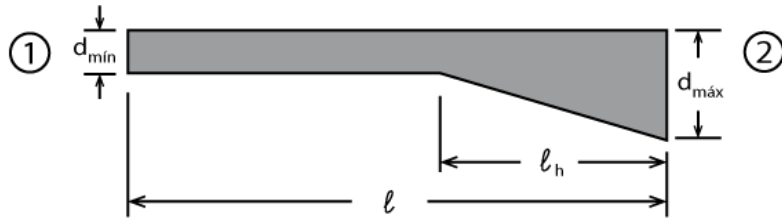
$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l-m)(-2l_h+l)(l^2-l l_h+l_h^2)}{3l} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [(d_{\max} l)^2 \right. \right. \\
 & + 2 d_{\max}^2 l l_h + d_{\max}^2 l m - (d_{\max} l_h)^2 - d_{\max}^2 l_h m + 2 d_{\max} d_{\min} l^2 \\
 & \left. \left. - 2 d_{\max} d_{\min} l l_h - 2 d_{\max} d_{\min} l m + d_{\max} d_{\min} l_h m - (d_{\min} l)^2 + d_{\min}^2 l m \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{k} [-2 d_{\max} l + 2 d_{\max} l_h + d_{\max} m + 2 d_{\min} l - d_{\min} m] + \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} \right. \\
 & \left. - \frac{1 d_{\max}^2 l m}{2 (d_{\min} l_h)^2} - \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} + \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{d_{\max} l m}{d_{\min} l_h^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max} m}{d_{\min} l_h} - \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} l}{2 d_{\max} l_h} - \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{l_h} \right)^2 - \frac{2 l}{l_h} \right. \\
 & \left. - \frac{1 l m}{2 l_h^2} - \frac{3 m}{l} + \frac{5 m}{2 l_h} + \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \ln \left[ \frac{d_{\max} l_h}{(d_{\min} l_h)^2} \right] + \ln(k) \right) \quad (85)
 \end{aligned}$$

## I.2. Formulario

A continuación se muestra el resumen con las fórmulas desarrolladas anteriormente, facilitando su uso e identificación.



## Resumen de las fórmulas para los parámetros elásticos (sección rectangular)



Las siguientes expresiones se desarrollaron bajo la suposición de que la variación del peralte en los elementos del marco es lineal y la sección transversal de los mismos es rectangular.

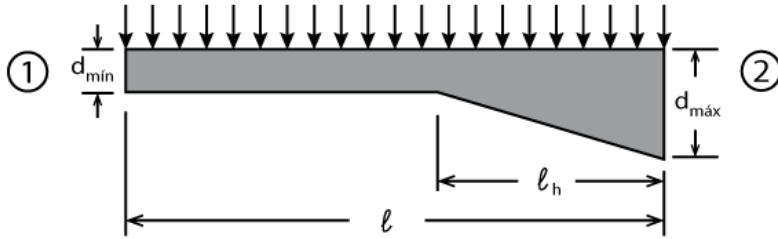
**Para la columna:**

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l + 2 l_h)(l - l_h)^2}{6} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3 d_{\max} l}{2 d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} - \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

### Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)

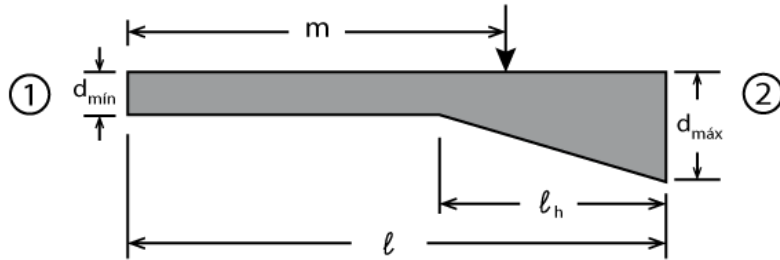


**Para la columna (carga distribuida):**

$$R_{12} = \frac{12}{l^4} \left( \frac{(l^2 + 2 l l_h + 3 l_h^2)(l - l_h)^2}{24} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 l_h + \frac{(d_{\min} l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \left( \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l}{d_{\min}^2} - \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l_h}{d_{\min}^2} - \frac{5}{4} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} \frac{d_{\max}^2 l_h}{d_{\min}} + \frac{7}{4} d_{\max} l - \frac{5}{4} d_{\max} l_h - \frac{3}{4} d_{\min} l + \frac{1}{2} d_{\max} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right] \right) + \frac{3}{2} d_{\max} l_h \left( \ln \left[ \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right] \right) + \frac{1}{2} d_{\min} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right] \right) \right) \right)$$

$$R_{21} = \frac{12}{l^4} \left( \frac{(l + 3 l_h)(l - l_h)^3}{24} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 l_h + \frac{(d_{\min} l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \left( \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l^2}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^3 l}{d_{\min}^2} + \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l_h}{d_{\min}^2} - \frac{(d_{\max} l)^2}{d_{\min} l_h} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}} - \frac{3}{2} \frac{d_{\max}^2 l_h}{d_{\min}} + \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l^2}{l_h} - \frac{7}{2} d_{\max} l + \frac{5}{4} d_{\max} l_h + \frac{1}{4} \frac{(d_{\min} l)^2}{d_{\max} l_h} - \frac{d_{\min} l^2}{l_h} + \frac{3}{2} d_{\min} l + d_{\max} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right] \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} d_{\max} l_h \left( \ln \left[ \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right] \right) + d_{\min} l \left( \ln \left[ \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right] \right) \right) \right)$$

### Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)



#### Para la columna (carga concentrada):

Si  $m \leq l - l_h$

$$R_{12} = \frac{12}{l^3} \left( m \left( \left[ \frac{2l^3 - 3l^2m + lm^2 - 2l_h^3}{6l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2}{d_{\min}^2 l} - \frac{2d_{\max}}{d_{\min} l} + \frac{3}{2l} + \frac{1}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right) \right)$$

Si  $m > l - l_h$

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m$$

$$R_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l-m)(l-l_h)^2(l+2l_h)}{6l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [(d_{\max} l_h)^2 + (d_{\max}^2 l_h m) - d_{\max}^2 l l_h + d_{\max} d_{\min} l l_h - d_{\max} d_{\min} l_h m] + \frac{[d_{\max} l - 2d_{\max} l_h - d_{\max} m - d_{\min} l + d_{\min} m]}{k} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3d_{\max} m}{2d_{\min} l_h} + \frac{2d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{l}{l_h} + \frac{3m}{2l} - \frac{m}{l_h} + \frac{m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\min} l_h}{k} \right) \right) \right)$$

## Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)

**Para la columna (carga concentrada):**

Si  $m \leq l - l_h$

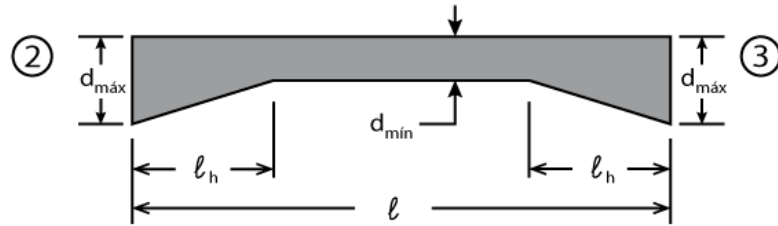
$$R_{21} = \frac{12}{l^3} \left( m \left( \left[ \frac{l^3 - 3 l l_h^2 - l m^2 + 2 l_h^3}{6 l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2}{d_{\min}^2 l} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max}}{2 d_{\min} l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min}}{d_{\max} l_h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{3}{2 l} + \frac{3}{2 l_h} + \frac{1}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

Si  $m > l - l_h$

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m$$

$$R_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l-m)(l-l_h)^3}{3 l} \right] + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2 k^2} [-(d_{\max} l)^2 + 2 d_{\max}^2 l l_h + d_{\max}^2 l m - (d_{\max} l_h)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2 d_{\max} d_{\min} l^2 - 2 d_{\max} d_{\min} l l_h - 2 d_{\max} d_{\min} l m + d_{\max} d_{\min} l_h m - (d_{\min} l)^2 + d_{\min}^2 l m \right] \right. \\ \left. + \frac{[-2 d_{\max} l + 2 d_{\max} l_h + d_{\max} m + 2 d_{\min} l - d_{\min} m]}{k} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l m}{(d_{\min} l_h)^2} - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} \right. \\ \left. + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{d_{\max} l m}{d_{\min} l_h^2} + \frac{2 d_{\max} m}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max} m}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} m}{d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{l_h} \right)^2 + \frac{2 l}{l_h} \right. \\ \left. \left. - \frac{1 l m}{2 l_h^2} - \frac{3 m}{2 l} + \frac{5 m}{2 l_h} + \frac{m}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \ln \left( \frac{k}{d_{\min} l_h} \right) \right) \right)$$

## Resumen de las fórmulas para los parámetros elásticos (sección rectangular)



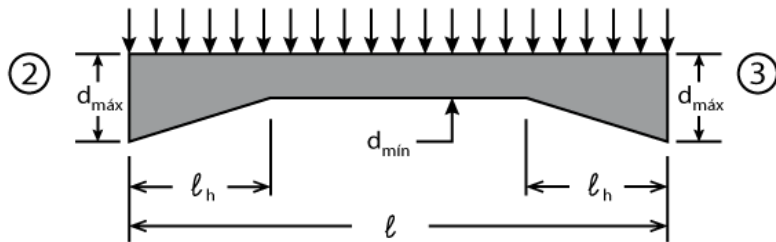
Las siguientes expresiones se desarrollaron bajo la suposición de que la variación del peralte en los elementos del marco es lineal y la sección transversal de los mismos es rectangular.

**Para la viga:**

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l - l_h)^3 - l_h^3}{3} \right] + \left( \frac{d_{mín} l_h}{d_{máx} - d_{mín}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{máx} l}{d_{mín} l_h} \right)^2 - \frac{d_{máx}^2 l}{d_{mín}^2 l_h} + \left( \frac{d_{máx}}{d_{mín}} \right)^2 - \frac{d_{máx} l^2}{d_{mín} l_h^2} + \frac{3 d_{máx} l}{d_{mín} l_h} - \frac{4 d_{máx}}{d_{mín}} + \frac{d_{mín} l^2}{d_{máx} l_h^2} + \frac{d_{mín} l}{d_{máx} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{mín} l}{d_{máx} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{máx}}{d_{mín}} \right) \right)$$

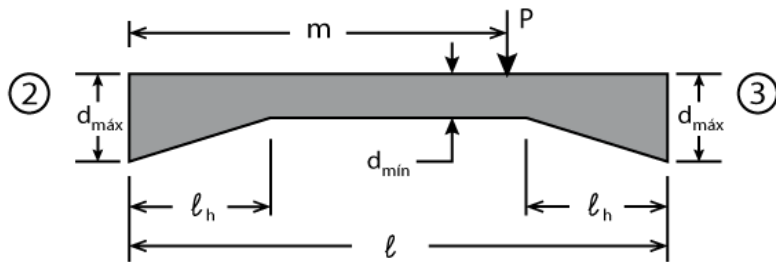
$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{1}{6} l^3 - l l_h^2 + \frac{2}{3} l_h^3 \right] + \left( \frac{d_{mín} l_h}{d_{máx} - d_{mín}} \right)^3 \left( \frac{d_{máx}^2 l}{d_{mín}^2 l_h} - \left( \frac{d_{máx}}{d_{mín}} \right)^2 - \frac{3 d_{máx} l}{d_{mín} l_h} + \frac{4 d_{máx}}{d_{mín}} - \frac{d_{mín} l}{d_{máx} l_h} + \frac{3 l}{l_h} - 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{mín}}{d_{máx}} \right) \right) \right)$$

### Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)



Para la viga (carga distribuida):

$$R_{23} = R_{32} = \frac{12}{l^4} \left( \frac{l(-2l_h + l)(l^2 + 2ll_h - 2l_h^2)}{24} + \frac{(d_{\min} l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \left( \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l^2}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{4} \frac{d_{\max}^3 l}{d_{\min}^2} - \frac{(d_{\max} l)^2}{d_{\min} l_h} + \frac{5}{4} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}} + \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l^2}{l_h} - \frac{7}{4} d_{\max} l + \frac{1}{4} \frac{(d_{\min} l)^2}{d_{\max} l_h} - \frac{d_{\min} l^2}{l_h} + \frac{3}{4} d_{\min} l + \frac{1}{2} d_{\max} l \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \frac{1}{2} d_{\min} l \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$



Para la viga (carga concentrada)

Si  $m \leq l_h$

$$k = -d_{\max} l_h + d_{\max} m - d_{\min} m$$

$$R_{23} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{m(-2l_h + l)(l^2 - ll_h + l_h^2)}{3l} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \right)$$

$$\left( \frac{1}{2k^2} [d_{\max}^2 ll_h - d_{\max}^2 lm - (d_{\max} l_h)^2 + d_{\max}^2 l_h m - d_{\max} d_{\min} ll_h + 2d_{\max} d_{\min} lm - d_{\max} d_{\min} l_h m - d_{\min}^2 lm] + \frac{d_{\max} l - 2d_{\max} l_h + d_{\max} m - d_{\min} l - d_{\min} m}{k} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 lm}{(d_{\min} l_h)^2} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{d_{\max} lm}{d_{\min} l_h^2} - \frac{4d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3d_{\max} m}{d_{\min} l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\min} m}{d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \frac{l}{l_h} + \frac{1}{2} \frac{lm}{l_h^2} + \frac{3m}{l} - \frac{5m}{2l_h} - \frac{3}{2} + \frac{2m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{|k|}{d_{\max} l_h} \right) \right)$$

## Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)

### Para la viga (carga concentrada):

Si  $l_h < m \leq l - l_h$

$$R_{23} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{2 l^3 m - 3 (l l_h)^2 - 3 (l m)^2 + 2 l l_h^3 + 3 l l_h^2 m + l m^3 - 4 l_h^3 m}{6 l} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{4}{d_{\min} l} \frac{d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3}{2} \frac{d_{\max} m}{d_{\min} l_h} + \frac{2}{d_{\min}} \frac{d_{\max}}{d_{\min} l} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\min} m}{d_{\max} l_h} + \frac{3}{2} \frac{l}{l_h} + \frac{3}{l} \frac{m}{l} - \frac{3}{2} \frac{m}{l_h} - \frac{3}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

Si  $m > l - l_h$

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m$$

$$R_{23} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - m)(l^3 - 6 l l_h^2 + 4 l_h^3)}{6 l} + \left( \frac{d_{\min} l_h}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2 k^2} [-d_{\max}^2 l l_h + (d_{\max} l_h)^2 + d_{\max}^2 l_h m + d_{\max} d_{\min} l l_h \right. \right. \\ \left. \left. - d_{\max} d_{\min} l_h m] + \frac{1}{k} [d_{\max} l - 2 d_{\max} l_h + d_{\max} m - d_{\min} l - d_{\min} m] + \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{d_{\min} l_h} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l} - \frac{4}{d_{\min} l} \frac{d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3}{d_{\min} l_h} \frac{d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{4}{d_{\min}} \frac{d_{\max}}{d_{\min} l} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\min} m}{d_{\max} l_h} + \frac{5}{2} \frac{l}{l_h} + \frac{3}{l} \frac{m}{l} - \frac{5}{2} \frac{m}{l_h} - \frac{3}{2} + \frac{2}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \left[ \frac{(d_{\min} l_h)^2}{d_{\max} l_h} \right] - \ln(k) \right) \right)$$

## Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)

**Para la viga (carga concentrada):**

Si  $m \leq l_h$

$$k = -d_{m\acute{a}x} l_h + d_{m\acute{a}x} m - d_{m\acute{m}n} m$$

$$\begin{aligned} R_{32} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{m(l^3 - 6ll_h^2 + 4l_h^3)}{6l} + \left( \frac{d_{m\acute{m}n} l_h}{d_{m\acute{a}x} - d_{m\acute{m}n}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [(d_{m\acute{a}x} l_h)^2 - d_{m\acute{a}x}^2 l_h m + d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{m}n} l_h m] \right. \right. \\ & + \frac{2d_{m\acute{a}x} l_h - d_{m\acute{a}x} m + d_{m\acute{m}n} m}{k} - \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{m}n}^2 l} + \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{m}n}^2 l_h} + \frac{4d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{m}n} l} - \frac{3d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{m}n} l_h} - \frac{1d_{m\acute{m}n} m}{2d_{m\acute{a}x} l_h} - \frac{3m}{l} + \frac{5m}{2l_h} + \frac{3}{2} \\ & \left. \left. + \frac{2m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{m}n}}{d_{m\acute{a}x}} \right) + \ln \left( \frac{d_{m\acute{a}x} l_h}{|k|} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Si  $l_h < m \leq l - l_h$

$$\begin{aligned} R_{32} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{l^3 m - 2ll_h^3 - 3ll_h^2 m - lm^3 + 4l_h^3 m}{6l} + \left( \frac{d_{m\acute{m}n} l_h}{d_{m\acute{a}x} - d_{m\acute{m}n}} \right)^3 \left( -\frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{m}n}^2 l} + \frac{1d_{m\acute{a}x}^2 m}{2d_{m\acute{m}n}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{m}n}} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{m}n} l} - \frac{3d_{m\acute{a}x} m}{2d_{m\acute{m}n} l_h} - \frac{2d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{m}n}} - \frac{1d_{m\acute{m}n} m}{2d_{m\acute{a}x} l_h} - \frac{3m}{l} + \frac{3m}{2l_h} + \frac{3}{2} + \frac{2m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{m}n}}{d_{m\acute{a}x}} \right) + \ln \left( \frac{d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{m}n}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$



## Resumen de las fórmulas de constantes de carga (sección rectangular)

**Para la viga (carga concentrada):**

Si  $m > l - l_h$

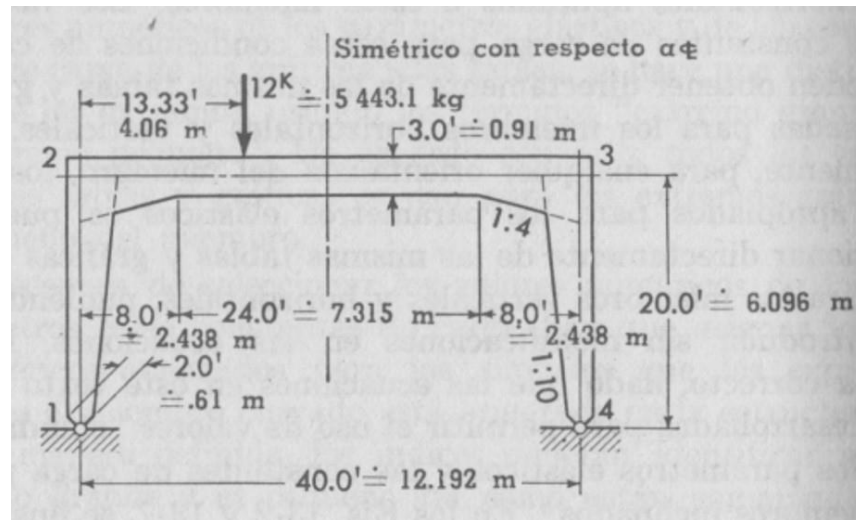
$$k = -d_{m\acute{a}x} l + d_{m\acute{a}x} l_h + d_{m\acute{a}x} m + d_{m\acute{i}n} l - d_{m\acute{i}n} m$$

$$\begin{aligned} R_{32} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l-m)(-2l_h+l)(l^2 - ll_h + l_h^2)}{3l} + \left( \frac{d_{m\acute{i}n} l_h}{d_{m\acute{a}x} - d_{m\acute{i}n}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [(d_{m\acute{a}x} l)^2 + 2d_{m\acute{a}x}^2 l l_h + d_{m\acute{a}x}^2 l m \right. \right. \\ & - (d_{m\acute{a}x} l_h)^2 - d_{m\acute{a}x}^2 l_h m + 2d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l^2 - 2d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l l_h - 2d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l m + d_{m\acute{a}x} d_{m\acute{i}n} l_h m - (d_{m\acute{i}n} l)^2 \\ & \left. \left. + d_{m\acute{i}n}^2 l m \right) + \frac{1}{k} [-2d_{m\acute{a}x} l + 2d_{m\acute{a}x} l_h + d_{m\acute{a}x} m + 2d_{m\acute{i}n} l - d_{m\acute{i}n} m] + \left( \frac{d_{m\acute{a}x} l}{d_{m\acute{i}n} l_h} \right)^2 - \frac{d_{m\acute{a}x}^2 l}{d_{m\acute{i}n}^2 l_h} - \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{a}x}^2 l m}{(d_{m\acute{i}n} l_h)^2} \right. \\ & - \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{i}n}^2 l} + \frac{d_{m\acute{a}x}^2 m}{d_{m\acute{i}n}^2 l_h} + \left( \frac{d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{i}n}} \right)^2 - \frac{d_{m\acute{a}x} l^2}{d_{m\acute{i}n} l_h^2} + \frac{3d_{m\acute{a}x} l}{d_{m\acute{i}n} l_h} + \frac{d_{m\acute{a}x} l m}{d_{m\acute{i}n} l_h^2} + \frac{4d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{i}n} l} - \frac{3d_{m\acute{a}x} m}{d_{m\acute{i}n} l_h} - \frac{4d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{i}n}} - \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{i}n} l}{d_{m\acute{a}x} l_h} \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{d_{m\acute{i}n} m}{d_{m\acute{a}x} l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{l_h} \right)^2 - \frac{2l}{l_h} - \frac{1}{2} \frac{lm}{l_h^2} - \frac{3m}{l} + \frac{5m}{2l_h} + \frac{3}{2} + \frac{2m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{i}n}}{d_{m\acute{a}x}} \right) + \ln \left[ \frac{d_{m\acute{a}x} l_h}{(d_{m\acute{i}n} l_h)^2} \right] + \ln(k) \right) \end{aligned}$$

### 1.3. Ejemplos

Para comprobar los resultados de los parámetros se utilizarán los ejemplos presentados en las soluciones condensadas en la sección de marcos de sección variable por el método que emplea las gráficas, las cuales se han incluido en este proyecto en la sección de anexos.

**Ejemplo 1.-** Obtener los valores de los parámetros elásticos y constantes de carga del siguiente marco.



Además supóngase que el ancho de los miembros normal al plano del dibujo es de 45.72 cm.

Usando la notación de las gráficas, la longitud de la parte variable en el miembro 1-2 se designa  $l_h$  y su longitud total  $l$ . La relación  $v$ , entre las longitudes:

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{6.096}{6.096} = 1$$

$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.61}{1.22} \right)^3 = 0.125$$

En la gráfica 6 y tomando los valores  $v$  y  $t$ , el parámetro elástico  $\alpha_{21} = 0.82$ .

Usando el mismo procedimiento para el miembro 2-3

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{2.438}{12.192} = 0.1999 \approx 0.2$$

$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.91}{1.52} \right)^3 = (0.6)^3 = 0.216$$

De las gráfica 1 y 2 se obtienen los siguientes valores  $\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.92$  y

$$\beta_{23} = \beta_{32} = 1.82$$

Las tablas 1 y 2, dan los valores de las constantes de los miembros de sección transversal variable para la carga unitaria concentrada sobre el miembro. Para una carga aplicada sobre el tercio del claro medido desde el soporte izquierdo y con  $v = 0.2$  y  $t = 0.216$ , se obtienen por interpolación los siguientes valores numéricos para las constantes de carga:

Para el extremo izquierdo  $R_{23} = 0.680$ , para el derecho  $R_{32} = 0.557$ .

Ahora utilizando las fórmulas:

Se aplica la fórmula para la columna,  $h = l$  (longitud total del elemento).

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \frac{(d_{\min} \times l_h)^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{6.096^3} \left( \frac{(6.096 - 6.096)^3}{3} + \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 - 0.6096} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192 \times 6.096}{0.6096 \times 6.096} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1.2192^2 \times 6.096}{0.6096^2 \times 6.096} + \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{1.2192 \times 6.096^2}{0.6096 \times 6.096^2} + \frac{3 \times 1.2192 \times 6.096}{0.6096 \times 6.096} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} + \frac{0.6096 \times 6.096^2}{1.2192 \times 6.096^2} + \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 \times 6.096} - \frac{1}{2} \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 \times 6.096} \right)^2 - \frac{3 \times 6.096}{6.096} \right. \right. \\ \left. \left. + 1.5 + 0.69314 \right) \right) = \frac{12}{226.5348} (226.5348(2 - 4 + 2 - 2 + 6 - 4 + 0.5 + 0.5 \\ - 0.125 - 3 + 1.5 + 0.69314) = 12(0.06814)$$

$\alpha_{21} = 0.81768$
-------------------------

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l - l_h)^3 - l_h^3}{3} \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{3 l}{l_h} \right. \right. \\ \left. \left. + 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{12.192^3} \left( \frac{(12.192 - 2.4384)^3 - 2.4384^3}{3} + \left( \frac{0.9144 \times 2.4384}{1.524 - 0.9144} \right)^3 \right. \\ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1.524 \times 12.192}{0.9144 \times 2.4384} \right)^2 - \frac{1.524^2 \times 12.192}{0.9144^2 \times 2.4384} + \left( \frac{1.524}{0.9144} \right)^2 - \frac{1.524 \times 12.192^2}{0.9144 \times 2.4384^2} \right. \\ \left. + \frac{3 \times 1.524 \times 12.192}{0.9144 \times 2.4384} - \frac{4 \times 1.524}{0.9144} - \frac{1}{2} \left( \frac{0.9144 \times 12.192}{1.524 \times 2.4384} \right)^2 + \frac{0.9144 \times 12.192^2}{1.524 \times 2.4384^2} \right. \\ \left. + \frac{0.9144 \times 12.192}{1.524 \times 2.4384} - \frac{3 \times 12.192}{2.4384} + 3 + 2 \ln \left( \frac{1.524}{0.9144} \right) \right)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{1812.2782} (304.4627 + 48.9315(34.7222 - 13.8889 + 2.7778 \\ - 41.667 + 25 - 6.667 - 4.5 + 15 + 3 - 15 + 3 + 1.0217)) \\ = \frac{12}{1812.2782} (304.4627 + 48.9315(2.7988))$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.9228$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{1}{6} l^3 - l l_h^2 + \frac{2}{3} l_h^3 \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{l_h} - 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{12.192^3} \left( \frac{12.192^3}{6} - (12.192 \times 2.4384^2) + \frac{2 \times 2.4384^3}{3} \right. \\ \left. + \left( \frac{0.9144 \times 2.4384}{1.524 - 0.9144} \right)^3 \left( \frac{1.524^2 \times 12.192}{0.9144^2 \times 2.4384} - \left( \frac{1.524}{0.9144} \right)^2 - \frac{3 \times 1.524 \times 12.192}{0.9144 \times 2.4384} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 \times 1.524}{0.9144} - \frac{0.9144 \times 12.192}{1.524 \times 2.4384} + \frac{3 \times 12.192}{2.4384} - 3 + 2 \ln \left( \frac{0.9144}{1.524} \right) \right)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{1812.2782} (302.0464 - 72.4911 + 9.6655 + 48.9315(13.8889 - 2.7778 \\ - 25 + 6.667 - 3 + 15 - 3 - 1.0217)) = \frac{12}{1812.2782} (239.2208 + 48.9315(0.7564))$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = 1.8291$$

$$R_{23} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{2 l^3 m - 3 (l l_h)^2 - 3 (l m)^2 + 2 l l_h^3 + 3 l l_h^2 m + l m^3 - 4 l_h^3 m}{6 l} \right. \\ \left. + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1 d_{\max}^2 l}{2 d_{\min}^2 l_h} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{1 d_{\max}^2 m}{2 d_{\min}^2 l_h} - \frac{1 (d_{\max})^2}{2 (d_{\min})^2} - \frac{3 d_{\max} l}{2 d_{\min} l_h} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} l}{2 d_{\max} l_h} + \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} + \frac{3 m}{l} - \frac{3 m}{2 l_h} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right)$$

$$R_{23} = \frac{12}{12.192^3} \left( \frac{1}{6 \times 12.192} ((2 \times 12.192^3 \times 4.06) - 3 (12.192 \times 2.4384)^2 \right. \\ \left. - 3 (12.192 \times 4.06)^2 + 2(12.192 \times 2.4384^3) + 3(12.192 \times 2.4384^2 \times 4.06) \right. \\ \left. + 12.192 \times 4.06^3 - 4(2.4384^3 \times 4.06) \right) + \left( \frac{0.9144 \times 2.4384}{1.524 - 0.9144} \right)^3 \left( \frac{1.524^2 \times 12.192}{2 \times 0.9144^2 \times 2.4384} \right. \\ \left. + \frac{1.524^2 \times 4.06}{0.9144^2 \times 12.192} - \frac{1.524^2 \times 4.06}{2 \times 0.9144^2 \times 2.4384} - \frac{1 (1.524)^2}{2 (0.9144)^2} - \frac{3 \times 1.524 \times 12.192}{2 \times 0.9144 \times 2.4384} \right)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{4 \times 1.524 \times 4.06}{0.9144 \times 12.192} + \frac{3 \times 1.524 \times 4.06}{2 \times 0.9144 \times 2.4384} + \frac{2 \times 1.524}{0.9144} - \frac{0.9144 \times 12.192}{2 \times 1.524 \times 2.4384} \\ & + \frac{0.9144 \times 4.06}{2 \times 1.524 \times 2.4384} + \frac{3 \times 12.192}{2 \times 2.4384} + \frac{3 \times 4.06}{12.192} - \frac{3 \times 4.06}{2 \times 2.4384} - \frac{3}{2} \\ & + \frac{2 \times 4.06}{12.192} \ln\left(\frac{1.524}{0.9144}\right) + \ln\left(\frac{0.9144}{1.524}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{23} &= \frac{12}{1812.2782} (86.4237 + 48.9315(6.9444 + 0.9250 - 2.3125 - 1.3889 \\ & - 12.5 - 2.22 + 4.1626 + 3.3333 - 1.5 + 0.4995 + 7.5 + 0.9990 - 2.4975 - 1.5 \\ & + 0.3402 - 0.5108)) = \frac{12}{1812.2782} (89.2727 + 48.9315(0.2743)) \end{aligned}$$

$$R_{23} = 0.68$$

$$\begin{aligned} R_{32} &= \frac{12}{l^3} \left( \frac{l^3 m - 2 l l_h^3 - 3 l l_h^2 m - l m^3 + 4 l_h^3 m}{6 l} + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( -\frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} \right. \right. \\ & + \frac{1 d_{\max}^2 m}{2 d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 + \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} - \frac{3 m}{l} + \frac{3 m}{2 l_h} \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln\left(\frac{d_{\min}}{d_{\max}}\right) + \ln\left(\frac{d_{\max}}{d_{\min}}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{32} &= \frac{12}{12.192^3} \left( \frac{1}{6 \times 12.192} (12.192^3 \times 4.06 - 2(12.192 \times 2.4384^3) \right. \\ & - 3(12.192 \times 2.4384^2 \times 4.06) - (12.192 \times 4.06^3) + 4(2.4384^3 \times 4.06)) \\ & + \left( \frac{0.9144 \times 2.4384}{1.524 - 0.9144} \right)^3 \left( -\frac{1.524^2 \times 4.06}{0.9144^2 \times 12.192} + \frac{1.524^2 \times 4.06}{2 \times 0.9144^2 \times 2.4384} + \frac{1}{2} \left( \frac{1.524}{0.9144} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{4 \times 1.524 \times 4.06}{0.9144 \times 12.192} - \frac{3 \times 1.524 \times 4.06}{2 \times 0.9144 \times 2.4384} - \frac{2 \times 1.524}{0.9144} - \frac{0.9144 \times 4.06}{2 \times 1.524 \times 2.4384} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{3 \times 4.06}{12.192} + \frac{3 \times 4.06}{2 \times 2.4384} + 1.5 + \frac{2 \times 4.06}{12.192} \ln \left( \frac{0.9144}{1.524} + \ln \left( \frac{1.524}{0.9144} \right) \right)$$

$$R_{32} = \frac{12}{1812.2782} (75.7451 + 48.9315(-0.9250 + 2.3125 + 1.3889 + 2.22 - 4.1626 - 3.3333 - 0.4995 - 0.9990 + 2.4975 + 1.5 - 0.3402 + 0.5108))$$

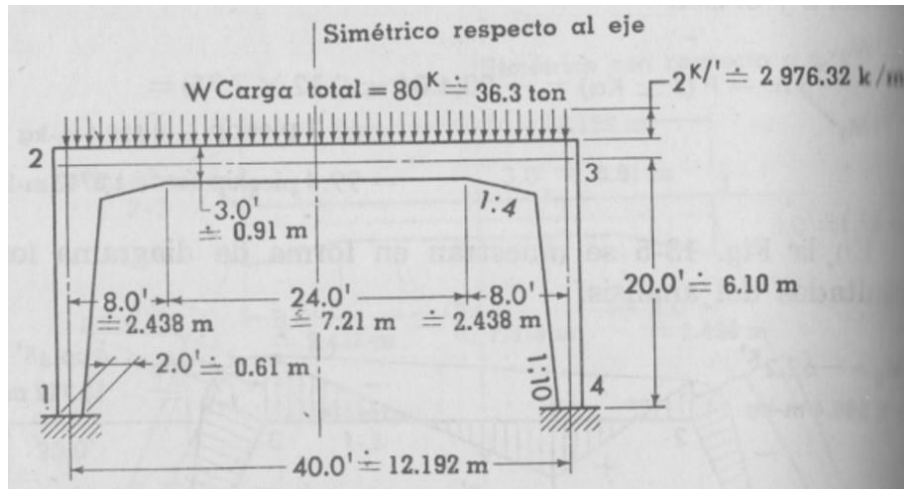
$$= \frac{12}{1812.2782} (75.7451 + 48.9315(0.1701))$$

$R_{32} = 0.5567$

	Por gráficas	Por fórmulas
$\alpha_{21}$	0.82	0.81768
$\alpha_{23} = \alpha_{32}$	2.92	2.9228
$\beta_{23} = \beta_{32}$	1.82	1.8291
$R_{23}$	0.680	0.68
$R_{32}$	0.557	0.5567

Tabla 1. Comparación de valores de los parámetros del ejemplo 1

**Ejemplo 2.-** Obtener los valores de los parámetros elásticos y constantes de carga del siguiente marco.



Observando que la forma y dimensiones de los miembros de la estructura son las mismas que las de la estructura considerada en el ejemplo anterior:

$$v = 1$$

$$t = 0.125$$

El valor del parámetro elástico  $\alpha$  para el extremo menor del miembro se encuentra en la gráfica 5 el cual es  $\alpha_{12} = 2.32$ . El valor del parámetro elástico  $\alpha_{21}$ , para el extremo mayor del miembro se encuentra en la gráfica 6, cuyo valor es  $\alpha_{21} = 0.82$ , de la misma manera con la gráfica 7 se obtiene  $\beta_{12} = 0.69$ .

Aplicando el mismo razonamiento para el elemento 2-3:

$$v = 0.2$$

$$t = 0.216$$

Y de las gráficas 1 y 2 se obtendrán los siguientes parámetros elásticos:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.92$$

$$\beta_{23} = 1.82$$

Las constantes de carga deberán determinarse en la etapa siguiente, para la carga dada sobre la viga. Como el miembro 2-3 y su carga son simétricos con respecto a la línea central del miembro, las constantes de carga son idénticas para ambos extremos del mismo. De la gráfica 11 se obtiene para  $v = 0.2$  t  $t = 0.216$  los valores de las constantes de carga resultan ser:

$$R_{23} = R_{32} = 0.457$$



$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \frac{(l_h \times d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{6.096^3} \left( \frac{(6.096 - 6.096)^3}{3} + \frac{(0.6096 \times 6.096)^3}{(1.2192 - 0.6096)^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{226.5348} (226.5348(2 - 4 + 1.5 + 0.6931)) = \frac{12}{226.5348} (43.7439)$$

$$\alpha_{12} = 2.3172$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \frac{(l_h \times d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{6.096^3} \left( \frac{(6.096 - 6.096)^3}{3} + \frac{(0.6096 \times 6.096)^3}{(1.2192 - 0.6096)^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192 \times 6.096}{0.6096 \times 6.096} \right)^2 - \frac{1.2192^2 \times 6.096}{0.6096^2 \times 6.096} + \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{1.2192 \times 6.096^2}{0.6096 \times 6.096^2} + \frac{3 \times 1.2192 \times 6.096}{0.6096 \times 6.096} - \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} + \frac{0.6096 \times 6.096^2}{1.2192 \times 6.096^2} + \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 \times 6.096} - \frac{1}{2} \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 \times 6.096} \right)^2 - \frac{3 \times 6.096}{6.096} \right) \right)$$

$$+ 1.5 + 0.69314) = \frac{12}{226.5348} (226.5348(2 - 4 + 2 - 2 + 6 - 4 + 0.5 + 0.5 - 0.125 - 3 + 1.5 + 0.69314)) = 12(0.06814)$$

$$\alpha_{21} = 0.81768$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l + 2 l_h)(l - l_h)^2}{6} \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} - \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

$$\beta_{12} = \frac{12}{6.096^3} \left( \frac{(6.096 + 2 \times 6.096)(6.096 - 6.096)^2}{6} + \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 - 0.6096} \right)^3 \right. \\ \left( \frac{1.2192^2 \times 6.096}{2 \times 0.6096^2 \times 6.096} - \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{3 \times 1.2192 \times 6.096}{2 \times 0.6096 \times 6.096} + \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} \right. \\ \left. \left. - \frac{0.6096 \times 6.096}{2 \times 1.2192 \times 6.096} + \frac{3 \times 6.096}{2 \times 6.096} - 1.5 + \ln \left( \frac{0.6096}{1.2192} \right) \right) \right)$$

$$\beta_{12} = \frac{12}{6.096^3} (226.5348(2 - 2 - 3 + 4 - 0.25 + 1.5 - 1.5 - 0.6931))$$

$\beta_{12} = 0.6828$
-----------------------

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l - l_h)^3 - l_h^3}{3} \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{3 l}{l_h} \right. \right. \\ \left. \left. + 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{1812.2782} (304.4627 + 48.9315(34.7222 - 13.8889 + 2.7778 - 41.667 + 25 - 6.667 - 4.5 + 15 + 3 - 15 + 3 + 1.0217))$$

$$= \frac{12}{1812.2782} (304.4627 + 48.9315(2.7988))$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.9228$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{1}{6} l^3 - l l_h^2 + \frac{2}{3} l_h^3 \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{l_h} - 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{1812.2782} (302.0464 - 72.4911 + 9.6655 + 48.9315(13.8889 - 2.7778 - 25 + 6.667 - 3 + 15 - 3 - 1.0217)) = \frac{12}{1812.2782} (239.2208 + 48.9315(0.7564))$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = 1.8291$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{12}{l^4} \left( \frac{l(-2 l_h + l)(l^2 + 2 l l_h - 2 l_h^2)}{24} + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^4} \left( \frac{1 d_{\max}^3 l^2}{4 d_{\min}^2 l_h} - \frac{1 d_{\max}^3 l}{4 d_{\min}^2} - \frac{(d_{\max} l)^2}{d_{\min} l_h} + \frac{5 d_{\max}^2 l}{4 d_{\min}} + \frac{3 d_{\max} l^2}{2 l_h} - \frac{7}{4} d_{\max} l + \frac{1 (d_{\min} l)^2}{4 d_{\max} l_h} - \frac{d_{\min} l^2}{l_h} + \frac{3}{4} d_{\min} l + \frac{1}{2} d_{\max} l \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \frac{1}{2} d_{\min} l \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} = & \frac{12}{12.192^4} \left( \frac{12.192}{24} (-2 \cdot 2.4384 + 12.192)(12.192^2 + 2(12.192 \cdot 2.4384) \right. \\
 & - 2 \cdot 2.4384^2) + \frac{(0.9144 \times 2.4384)^3}{(1.524 - 0.9144)^4} \left( \frac{1.524^3 \times 12.192^2}{4 \times 0.9144^2 \times 2.4384} - \frac{1.524^3 \times 12.192}{4 \times 0.9144^2} \right. \\
 & - \frac{(1.524 \times 12.192)^2}{0.9144 \times 2.4384} + \frac{5 \times 1.524^2 \times 12.192}{4 \times 0.9144} + \frac{3 \times 1.524 \times 12.192^2}{2 \times 2.4384} \\
 & - \frac{7}{4}(1.524 \times 12.192) + \frac{(0.9144 \times 12.192)^2}{4 \times 1.524 \times 2.4384} - \frac{0.9144 \times 12.192^2}{2.4384} \\
 & \left. \left. + \frac{3}{4}(0.9144 \times 12.192) + \frac{1.524 \cdot 12.192}{2} \ln\left(\frac{0.9144}{1.524}\right) + \frac{0.9144 \cdot 12.192}{2} \ln\left(\frac{1.524}{0.9144}\right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} = & \frac{12}{12.192^4} (729.1448 + 80.2682(64.516 - 12.9032 - 154.8384 + 38.7096 \\
 & + 139.3546 - 32.5161 + 8.3613 - 55.7418 + 8.3613 - 4.7457 + 2.8474)
 \end{aligned}$$

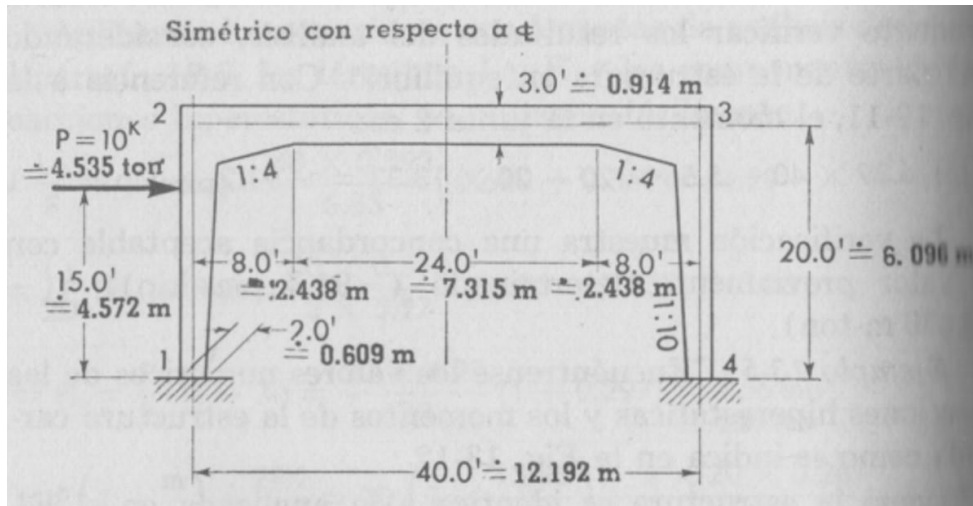
$$R_{23} = R_{32} = \frac{12}{12.192^4} (729.1448 + 80.2682(1.405))$$

$$R_{23} = R_{32} = 0.4572$$

	Por gráficas	Por fórmulas
$\alpha_{12}$	2.32	2.3172
$\alpha_{21}$	0.82	0.81768
$\beta_{12}$	0.69	0.6828
$\alpha_{23} = \alpha_{32}$	2.92	2.9228
$\beta_{23}$	1.82	1.8291
$R_{23} = R_{32}$	0.457	0.4572

Tabla 2. Comparación de valores de los parámetros del ejemplo 2

**Ejemplo 3.-** Obtener los valores de los parámetros elásticos y constantes de carga del siguiente marco.



Como la estructura es idéntica a la analizada en el ejemplo anterior, resulta aparente que los parámetros elásticos son los mismos que los determinados en dicho ejemplo.

Aislando al miembro 1-2 y obteniendo las constantes geométricas del miembro:

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{6.096}{6.096} = 1 \qquad t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.61}{1.22} \right)^3 = 0.125$$

Las constantes de carga se determinan de las tablas 5 y 6, resumiendo:

$$R_{12} = 0.164$$

$$R_{21} = 0.154$$

$$\alpha_{12} = 2.32$$

$$\beta_{12} = 0.69$$

$$\alpha_{21} = 0.82$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \frac{(l_h \times d_{\text{mín}})^3}{(d_{\text{máx}} - d_{\text{mín}})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\text{máx}}}{d_{\text{mín}}} \right)^2 - \frac{2 d_{\text{máx}}}{d_{\text{mín}}} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\text{máx}}}{d_{\text{mín}}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{226.5348} (226.5348(2 - 4 + 1.5 + 0.6931)) = \frac{12}{226.5348} (43.7439)$$

$$\alpha_{12} = 2.3172$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l + 2 l_h)(l - l_h)^2}{6} \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1}{2} \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} - \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

$$\beta_{12} = \frac{12}{6.096^3} (226.5348(2 - 2 - 3 + 4 - 0.25 + 1.5 - 1.5 - 0.6931))$$

$$\beta_{12} = 0.6828$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{(l - l_h)^3}{3} + \frac{(l_h \times d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 - \frac{3 l}{l_h} + \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)$$

$$\alpha_{21} = \frac{12}{226.5348} (226.5348(2 - 4 + 2 - 2 + 6 - 4 + 0.5 + 0.5 - 0.125 - 3 + 1.5$$

$$+ 0.69314) = 12(0.06814)$$

$$\alpha_{21} = 0.81768$$

$$k = -d_{\max} l + d_{\max} l_h + d_{\max} m + d_{\min} l - d_{\min} m$$

$$R_{12} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l - m)(l - l_h)^2(l + 2 l_h)}{6 l} \right] + \left( \frac{l_h d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2 k^2} [(d_{\max} l_h)^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. - (d_{\max}^2 l l_h) + (d_{\max}^2 l_h m) + (d_{\max} d_{\min} l l_h) - d_{\max} d_{\min} l_h m \right] \right.$$

$$\left. + \frac{[d_{\max} l - 2 d_{\max} l_h - d_{\max} m - d_{\min} l + d_{\min} m]}{k} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{l}{l_h} + \frac{3 m}{2 l} - \frac{m}{l_h} \right)$$

$$+ \frac{m}{l} \ln \left( \frac{d_{m\acute{a}x}}{d_{m\acute{i}n}} + \ln \left( \frac{d_{m\acute{i}n} l_h}{k} \right) \right)$$

$$k = -(1.2192 \times 6.096) + (1.2192 \times 6.096) + (1.2192 \times 4.572) + (0.6096 \times 6.096) - (0.6096 \times 4.572) = 6.5032$$

$$R_{12} = \frac{12}{6.096^3} \left[ \frac{((6.096 - 4.572) (6.096 - 6.096)^2 (6.096 + 2 \times 6.096))}{6 \times 6.096} \right] + \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 - 0.6096} \right)^3 \left( \frac{1}{2(6.5032)^2} [(1.2192 \times 6.096)^2 - (1.2192^2 \times 6.096 \times 6.096) + (1.2192^2 \times 6.096 \times 4.572) + (1.2192 \times 0.6096 \times 6.096 \times 6.096) - (1.2192 \times 0.6096 \times 6.096 \times 4.572)] + \frac{1}{21.3677} [(1.2192 \times 6.096) - (2 \times 1.2192 \times 6.096) - (1.2192 \times 4.572) - (0.6096 \times 6.096) + (0.6096 \times 4.572)] + \frac{1.2192^2 \times 6.096}{2 \times 0.6096^2 \times 6.096} + \frac{1.2192^2 \times 4.572}{2 \times 0.6096^2 \times 6.096} - \frac{1.2192^2 \times 4.572}{2 \times 0.6096^2 \times 6.096} - \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{3 \times 1.2192 \times 6.096}{2 \times 0.6096 \times 6.096} - \frac{2 \times 1.2192 \times 4.572}{0.6096 \times 6.096} + \frac{3 \times 1.2192 \times 4.572}{2 \times 0.6096 \times 6.096} + \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} + \frac{6.096}{6.096} + \frac{3 \times 4.572}{2 \times 6.096} - \frac{4.572}{6.096} + \frac{4.572}{6.096} \ln \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right) + \ln \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{6.5032} \right)$$

$$R_{12} = \frac{12}{226.5348} (226.5348(0.011822(55.2382 - 55.2382 + 41.4287 + 27.6191 - 20.7143) + 0.15377(7.4322 - 14.8645 - 5.5742 - 3.7161 + 2.7871) + 2 + 1.5 - 1.5 - 2 - 3 - 3 + 2.25 + 4 + 1 + 1.125 - 0.75 + 0.5199 - 0.5596)$$

$$R_{12} = 12(0.5714 - 2.1429 + 1.5853)$$

$R_{12} = 0.1656$

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l-m)(l-l_h)^3}{3l} \right] + \left( \frac{l_h d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^3 \left( \frac{1}{2k^2} [-(d_{\max} l)^2 + 2 d_{\max}^2 l l_h \right. \right. \\
 & + d_{\max}^2 l m - (d_{\max} l_h)^2 - d_{\max}^2 l_h m + 2 d_{\max} d_{\min} l^2 - 2 d_{\max} d_{\min} l l_h \\
 & \left. \left. - 2 d_{\max} d_{\min} l m + d_{\max} d_{\min} l_h m - (d_{\min} l)^2 + d_{\min}^2 l m \right] \right. \\
 & + \frac{[-2 d_{\max} l + 2 d_{\max} l_h + d_{\max} m + 2 d_{\min} l - d_{\min} m]}{k} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} \\
 & + \frac{2 d_{\max} m}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max} m}{d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{l_h} \right)^2 + \frac{2 l}{l_h} - \frac{1 l m}{2 l_h^2} - \frac{3 m}{2 l} \\
 & \left. + \frac{5 m}{2 l_h} + \frac{m}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \ln \left( \frac{k}{d_{\min} l_h} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & \frac{12}{6.096^3} \left( \frac{(6.096 - 4.572)(6.096 - 6.096)^3}{3 \times 6.096} + \left( \frac{0.6096 \times 6.096}{1.2192 - 0.6096} \right)^3 \right. \\
 & \left( \frac{1}{2(6.5032)^2} (-(1.2192 \times 6.096)^2 + 2(1.2192^2 \times 6.096 \times 6.096) \right. \\
 & + (1.2192^2 \times 6.096 \times 4.572) - (1.2192 \times 6.096)^2 - (1.2192^2 \times 6.096 \times 4.572) \\
 & + 2(1.2192 \times 0.6096 \times 6.096^2) - 2(1.2192 \times 0.6096 \times 0.6096 \times 0.6096) \\
 & - 2(1.2192 \times 0.6096 \times 6.096 \times 4.572) + (1.2192 \times 0.6096 \times 6.096 \times 4.572) \\
 & \left. - (0.6096 \times 6.096)^2 + (0.6096^2 \times 6.096 \times 4.572) \right) + \frac{1}{6.5032} (-2(1.2192 \times 6.096) \\
 & + 2(1.2192 \times 6.096) + (1.2196 \times 4.572) + 2(0.6096 \times 6.096) - (0.6096 \times 4.572)) \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192 \times 6.096}{0.6096 \times 6.096} \right)^2 - \frac{1.2192^2 \times 6.096}{0.6096^2 \times 6.096} + \frac{2 \times 1.2192 \times 4.572}{0.6096 \times 6.096} - \frac{3 \times 1.2192 \times 4.572}{0.6096 \times 6.096} \\
 & - \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} - \frac{0.6096 \times 4.572}{2 \times 1.2192 \times 6.096} + \frac{1}{2} \left( \frac{6.096}{6.096} \right)^2 + \frac{2 \times 6.096}{6.096} - \frac{6.096 \times 4.572}{2 \times 6.096^2} \\
 & \left. - \frac{3 \times 4.572}{2 \times 6.096} + \frac{5 \times 4.572}{2 \times 6.096} + \frac{4.572}{6.096} \ln \left( \frac{0.6096}{1.2192} \right) + \ln \left( \frac{6.5032}{0.6096 \times 6.096} \right) \right)
 \end{aligned}$$



$$R_{21} = \frac{12}{226.5348} (226.5348(0.0118(-55.2382 + 110.4765 + 41.4287 - 55.2382 - 41.4287 + 55.2382 - 55.2382 - 41.4287 + 20.7143 - 13.8096 + 10.3572) + 0.1538(-14.8645 + 14.8645 + 5.5742 + 7.4322 - 2.7871) + 2 - 4 - 1.5 - 1.5 + 3 + 2 - 2 + 6 + 1.5 + 3 - 4.5 - 4 - 0.1875 + 0.50 - 2 - 0.375 - 1.125 + 1.875))$$

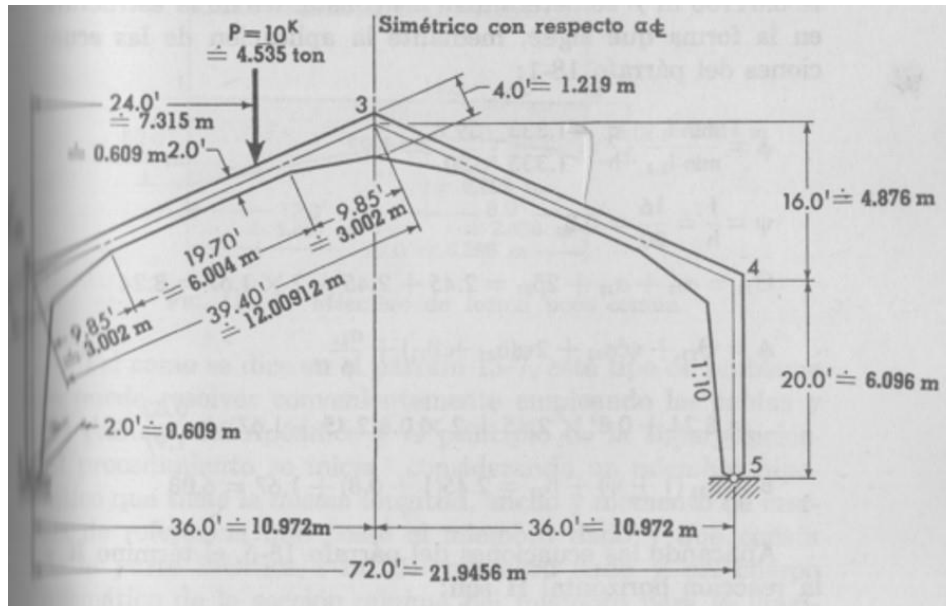
$$R_{21} = 12(0.011822(-24.1667) + 0.15377(10.2193) - 1.2727) = 12(0.01302)$$

$R_{21} = 0.1562$

	Por gráficas	Por fórmulas
$\alpha_{12}$	2.32	2.3172
$\alpha_{21}$	0.82	0.81768
$\beta_{12}$	0.69	0.6828
$R_{12}$	0.164	0.1656
$R_{21}$	0.154	0.1562

Tabla 3. Comparación de valores de los parámetros del ejemplo 3

**Ejemplo 4.-** Obtener los valores de los parámetros elásticos y constantes de carga del siguiente marco.



Observando que para el miembro 2-3

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{3.002}{12.00912} = 0.25$$

$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.61}{1.22} \right)^3 = 0.125$$

Se obtendrán de las gráficas 1 y 2 los siguientes valores de los parámetros elásticos:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.45 \quad \beta_{23} = \beta_{32} = 1.67$$

Inmediatamente usando las relaciones geométricas del miembro 2-3, determinadas arriba, se obtienen de las tablas 1 y 2 las constantes de carga para la posición dada de la carga.

Para el extremo izquierdo  $R_{23} = 0.521$ , para el derecho  $R_{32} = 0.623$ .

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{(l - l_h)^3 - l_h^3}{3} \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max} l}{d_{\min} l_h} \right)^2 - \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{d_{\max} l^2}{d_{\min} l_h^2} + \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} - \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} + \frac{d_{\min} l^2}{d_{\max} l_h^2} + \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 l}{l_h} + 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{12.00912^3} \left( \frac{(12.00912 - 3.00228)^3 - 3.00228^3}{3} + \left( \frac{0.6096 \times 3.00228}{1.2192 - 0.6096} \right)^3 \right. \\ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192 \times 12.00912}{0.6096 \times 3.00228} \right)^2 - \frac{1.2192^2 \times 12.00912}{0.6096^2 \times 3.00228} + \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{1.2192 \times 12.00912^2}{0.6096 \times 3.00228^2} \right. \\ \left. + \frac{3 \times 1.2192 \times 12.00912}{0.6096 \times 3.00228} - \frac{4 \times 1.2192}{0.6096} + \frac{0.6096 \times 12.00912^2}{1.2192 \times 3.00228^2} + \frac{0.6096 \times 12.00912}{1.2192 \times 3.00228} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{0.6096 \times 12.00912}{1.2192 \times 3.00228} \right)^2 - \frac{3 \times 12.00912}{3.00228} + 3 + 2 \ln \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right) \right)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{1731.9428} (234.5339 + 27.0616(32 - 16 + 4 - 32 + 23.9999 - 8 + 8 \\ + 2 - 2 - 12 + 3 + 1.3863))$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{12}{1731.9428} (353.2315)$$

$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.4474$
--------------------------------------

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{l^3} \left( \left[ \frac{1}{6} l^3 - l l_h^2 + \frac{2}{3} l_h^3 \right] + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{d_{\max}^2 l}{d_{\min}^2 l_h} - \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 d_{\max} l}{d_{\min} l_h} + \frac{4 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{d_{\min} l}{d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{l_h} - 3 + 2 \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{12.00912^3} \left( \left[ \frac{1}{6} (12.00912)^3 - 12.00912 \times 3.00228^2 + \frac{2}{3} 3.00228^3 \right] + \frac{(0.6096 \times 3.00228)^3}{(1.2192 - 0.6096)^3} \left( \frac{1.2192^2 \times 12.00912}{0.6096^2 \times 3.00228} - \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 \right) - \frac{3 \times 1.2192 \times 12.00912}{0.6096 \times 3.00228} + \frac{4 \times 1.2192}{0.6096} - \frac{0.6096 \times 12.00912}{1.2192 \times 3.00228} + \frac{3 \times 12.00912}{3.00228} - 3 + 2 \ln \left( \frac{0.6096}{1.2192} \right) \right)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{12}{1731.9428} (198.4518 + 27.0616(16 - 4 - 23.9999 + 8 - 2 + 12 - 3 - 1.3863)) = \frac{12}{1731.9428} (242.1238)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = 1.6776$$

$$R_{23} = \frac{12}{l^3} \left( \frac{2 l^3 m - 3 (l l_h)^2 - 3 (l m)^2 + 2 l l_h^3 + 3 l l_h^2 m + l m^3 - 4 l_h^3 m}{6 l} + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( \frac{1 d_{\max}^2 l}{2 d_{\min}^2 l_h} + \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} - \frac{1 d_{\max}^2 m}{2 d_{\min}^2 l_h} - \frac{1 (d_{\max})^2}{2 (d_{\min})^2} - \frac{3 d_{\max} l}{2 d_{\min} l_h} - \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} + \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} + \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} l}{2 d_{\max} l_h} + \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} + \frac{3 l}{2 l_h} + \frac{3 m}{l} - \frac{3 m}{2 l_h} - \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \right) \right)$$

$$m = \frac{7.3152}{\cos \theta} = \frac{7.3152}{10.9728/12.00912} = 8.00608$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{12}{12.00912^3} \left( \frac{1}{6 \times 12.00912} (2 \times 12.00912^3 \times 8.00608 \right. \\
 & - 3(12.00912 \times 3.00228)^3 - 3(12.00912 \times 8.00608)^2 + 2(12.00912 \times 3.00228^3) \\
 & + 3(12.00912 \times 3.00228^2 \times 8.00608) + 12.00912 \times 8.00608^3 \\
 & - 4(3.00228^3 \times 8.00608) \left. + \frac{(0.6096 \times 3.00228)^3}{(1.2192 - 0.6096)^3} \left( \frac{1.2192^2 \times 12.00912}{2 \times 0.6096^2 \times 3.00228} \right. \right. \\
 & + \frac{1.2192^2 \times 8.00608}{0.6096^2 \times 12.00912} - \frac{1}{2} \frac{1.2192^2 \times 8.00608}{0.6096^2 l_h} - \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1.2192 \times 12.00912}{0.6096 \times 3.00228} \\
 & - \frac{4 \times 1.2192 \times 8.00608}{0.6096 \times 12.00912} + \frac{3 \times 1.2192 \times 8.00608}{2 \times 0.6096 \times 3.00228} + \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} \\
 & - \frac{0.6096 \times 12.00912}{2 \times 1.2192 \times 3.00228} + \frac{0.6096 \times 8.00608}{2 \times 1.2192 \times 3.00228} + \frac{3 \times 12.00912}{2 \times 3.00228} + \frac{3 \times 8.00608}{12.00912} \\
 & \left. \left. - \frac{3 \times 8.00608}{2 \times 3.00228} - 1.5 + \frac{2 \times 8.00608}{12.00912} \ln \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right) + \ln \left( \frac{0.6096}{1.2192} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{12}{1731.9428} (64.4801 + 27.0616(8 + 2.667 - 5.3333 - 2 - 12 - 5.3333 + 8 \\
 & + 4 - 1 + 0.667 + 6 + 2 - 4 - 1.5 + 0.9242 - 0.6931)) = \frac{12}{1731.9428} (75.2641)
 \end{aligned}$$

$$R_{23} = 0.5215$$

$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{l^3} \left( \frac{l^3 m - 2 l l_h^3 - 3 l l_h^2 m - l m^3 + 4 l_h^3 m}{6 l} + \frac{(l_h d_{\min})^3}{(d_{\max} - d_{\min})^3} \left( - \frac{d_{\max}^2 m}{d_{\min}^2 l} \right. \right. \\
 & + \frac{1 d_{\max}^2 m}{2 d_{\min}^2 l_h} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right)^2 + \frac{4 d_{\max} m}{d_{\min} l} - \frac{3 d_{\max} m}{2 d_{\min} l_h} - \frac{2 d_{\max}}{d_{\min}} - \frac{1 d_{\min} m}{2 d_{\max} l_h} - \frac{3 m}{l} + \frac{3 m}{2 l_h} \\
 & \left. \left. + \frac{3}{2} + \frac{2 m}{l} \ln \left( \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) + \ln \left( \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{12.00912^3} \left( \frac{1}{6 \times 12.00912} (12.00912^3 \times 8.00608 - 2(12.00912 \times 3.00228^3) \right. \\
 & - 3(12.00912 \times 3.00228^2 \times 8.00608) - (12.00912 \times 8.00608^3) \\
 & \left. + 4(3.00228^3 \times 8.00608) \right) + \frac{(0.6096 \times 3.00228)^3}{(1.2192 - 0.6096)^3} \left( - \frac{1.2192^2 \times 8.00608}{0.6096^2 \times 12.00912} \right. \\
 & + \frac{1.2192^2 \times 8.00608}{2 \times 0.6096^2 \times 3.00228} + \frac{1}{2} \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right)^2 + \frac{4 \times 1.2192 \times 8.00608}{0.6096 \times 12.00912} - \frac{3 \times 1.2192 \times 8.00608}{2 \times 0.6096 \times 3.00228} \\
 & - \frac{2 \times 1.2192}{0.6096} - \frac{1}{2} \frac{d_{min} \times 8.00608}{1.2192 \times 3.00228} - \frac{3 \times 8.00608}{12.00912} + \frac{3 \times 8.00608}{2 \times 3.00228} + \frac{3}{2} \\
 & \left. + \frac{2 \times 8.00608}{12.00912} \ln \left( \frac{0.6096}{1.2192} \right) + \ln \left( \frac{1.2192}{0.6096} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{32} = & \frac{12}{1731.9428} (73.8348 + 27.0616(-2.667 + 5.3333 + 2 + 5.3333 - 8 - 4 \\
 & - 0.667 - 2 + 4 + 1.5 - 0.9242 + 0.6931))
 \end{aligned}$$

$R_{32} = 0.6245$

	Por gráficas	Por fórmulas
$\alpha_{23} = \alpha_{32}$	2.45	2.4474
$\beta_{23} = \beta_{32}$	1.67	1.6776
$R_{23}$	0.521	0.5215
$R_{32}$	0.623	0.6245

Tabla 4. Comparación de valores de los parámetros del ejemplo 4

## CAPÍTULO II. Manual de ANESTRUM

### ANESTRUM (Análisis estructural de marcos)

La siguiente parte es una sección ideada para el mejor conocimiento de la interface de usuario y pretende ser una guía para entender el uso del programa.

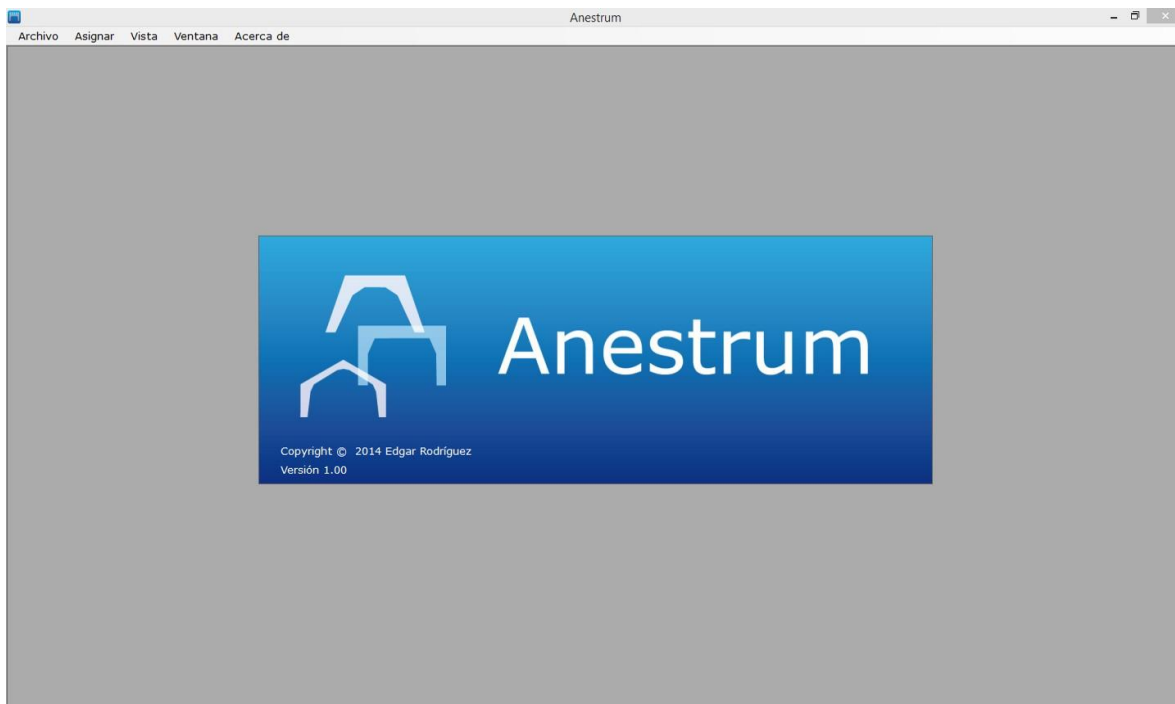


Figura 9. Ventana de inicio de ANESTRUM

La ventana de inicio está compuesta de cinco menús, el primero controla las funciones básicas de un archivo como guardar y crear un nuevo proyecto, el segundo maneja la configuración del análisis como número de tramos por elemento y la asignación de cartelas en elementos de sección variable; el tercero controla lo relacionado con la visualización de resultados del análisis, el cuarto con el orden de las ventanas y posición en el área de trabajo y el último presenta la información del programa.

#### Menú Archivo

Contiene los apartados clásicos dentro del menú, como Nuevo, Abrir archivo, guardar el mismo y una función de exportación de los gráficos en forma de distintos formatos de imagen.

Al seleccionar “nuevo” se mostrará la ventana para hacer un análisis de algún tipo de marco y tendrá el siguiente aspecto:

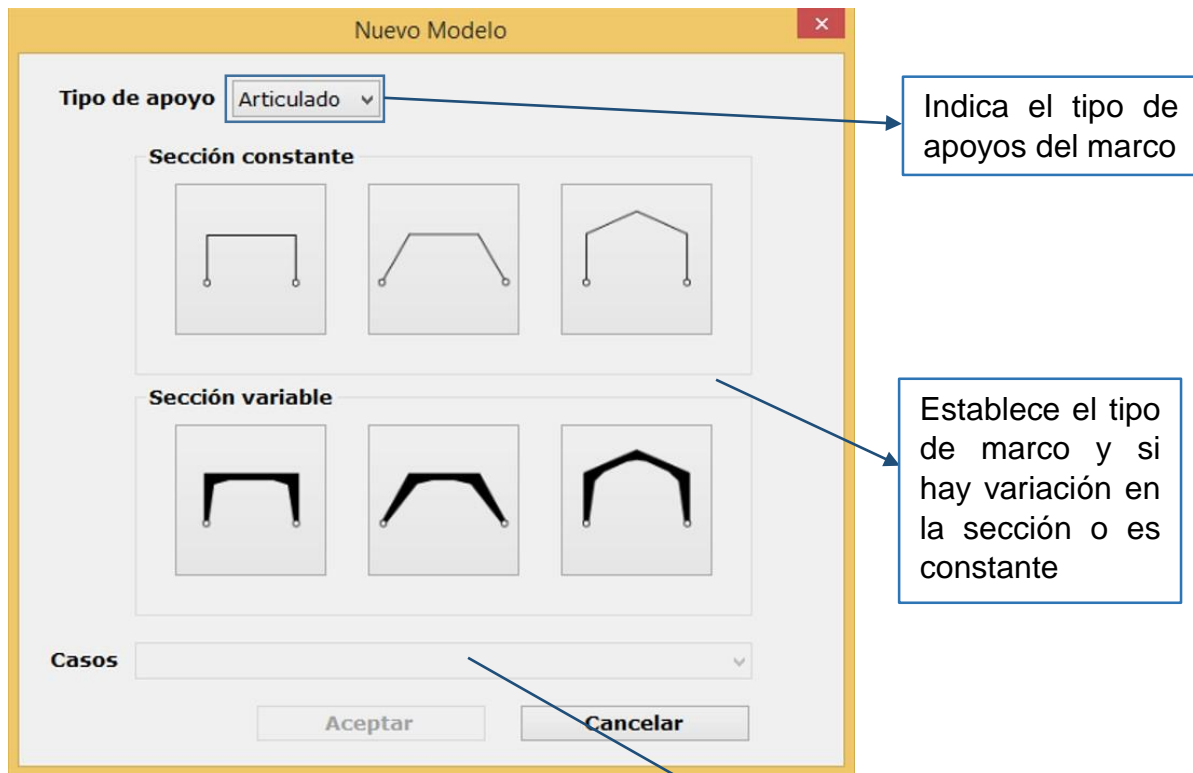


Figura 10. Ventana de nuevo modelo

En esta parte se selecciona el caso a analizar

### Menú Asignar

Las opciones contenidas en este menú son dos, la primera es “Configuración” la cual indica las unidades del momento de inercia de los elementos del marco y el número de segmentos en que se dividirán estos en el análisis.

Al presionar esta opción se abrirá una ventana como se muestra en la figura 11, donde se solicitará sean especificados los datos para la consideración de estos en el siguiente análisis, al haber realizado éste antes de haber cambiado la configuración, se tendrá que volver realizar.



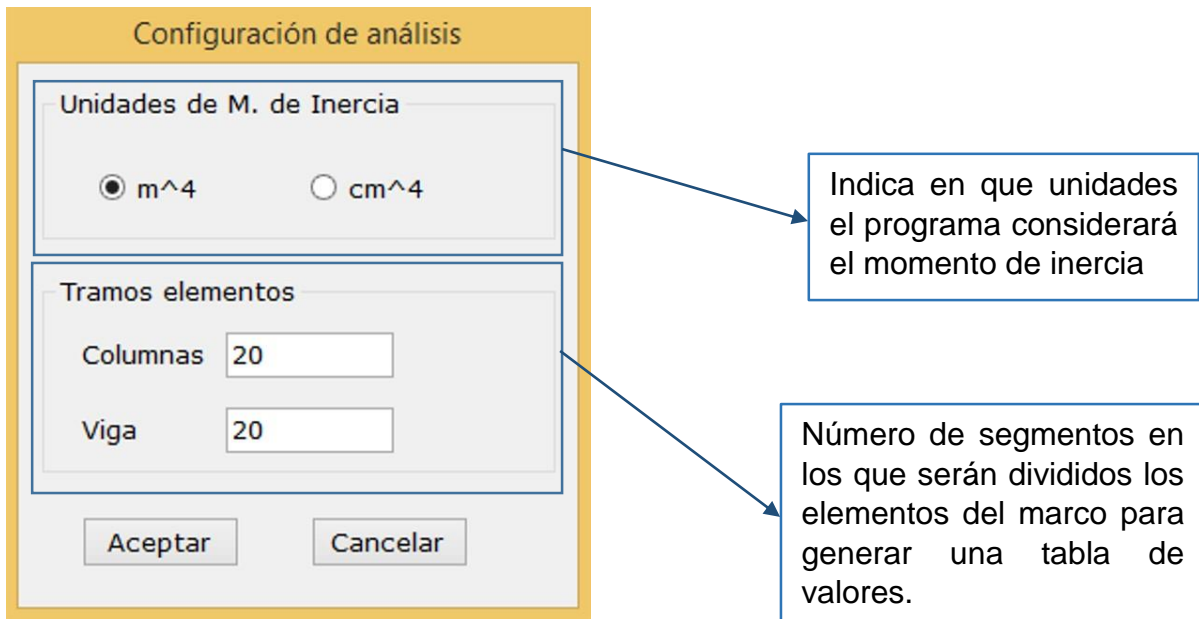


Figura 11. Ventana de configuración

Posteriormente, se encuentra la opción de “cartelas”, esta estará disponible en el caso de haber elegido el análisis de un marco de sección transversal variable, esta función establece las dimensiones de las cartelas y el cambio de una sección a otra de los elementos del marco. La ventana que se abrirá se muestra en la figura siguiente.

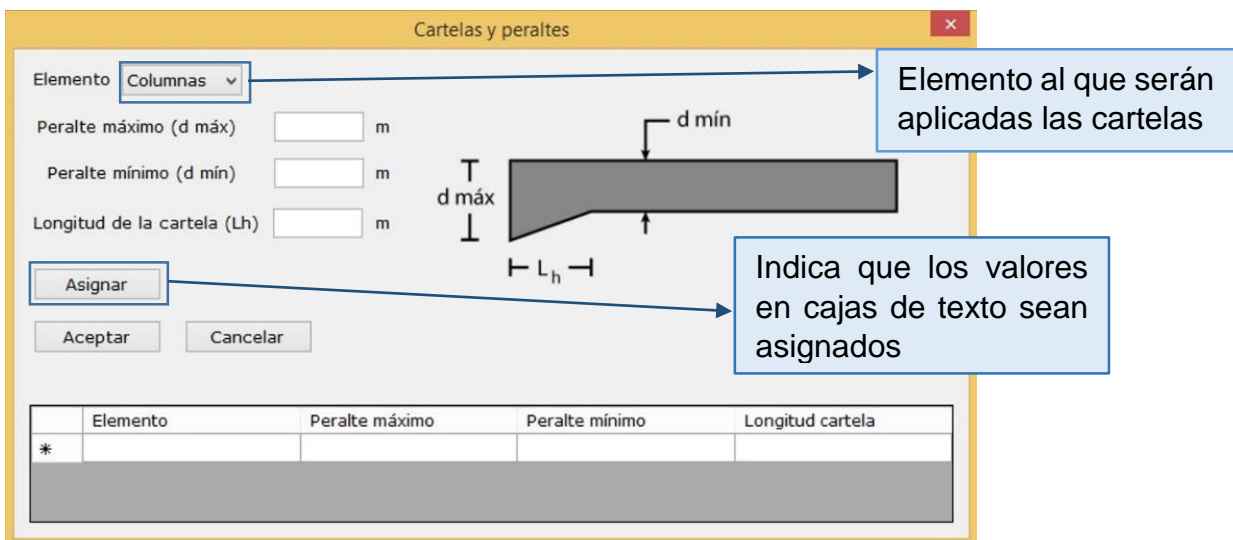


Figura 12. Ventana para asignar cartelas

## Menú Vista

Este tiene que ver con la ayuda en la presentación de los resultados del análisis pudiendo hacer que se muestren solamente determinados diagramas del marco y funciones de acercamiento y alejamiento de pantalla.

## Menú ventana

La primera opción que tiene este menú es la de “Posición inicial”, el programa presenta los resultados del análisis en otra ventana en el área gris del mismo, por cualquier razón esta puede desplazarse y quedar fuera del área de visualización, al ocurrir esto en la ventana contenedora aparecerán la barras comunes de desplazamiento, pero hay que moverlas para volver a tener a la vista la ventana, por esta razón, la opción mencionada está disponible.

Lo que hace es posicionar la esquina izquierda superior de la ventana en la esquina homóloga de la región gris de la ventana de inicio sin tener que mover las barras de desplazamiento.

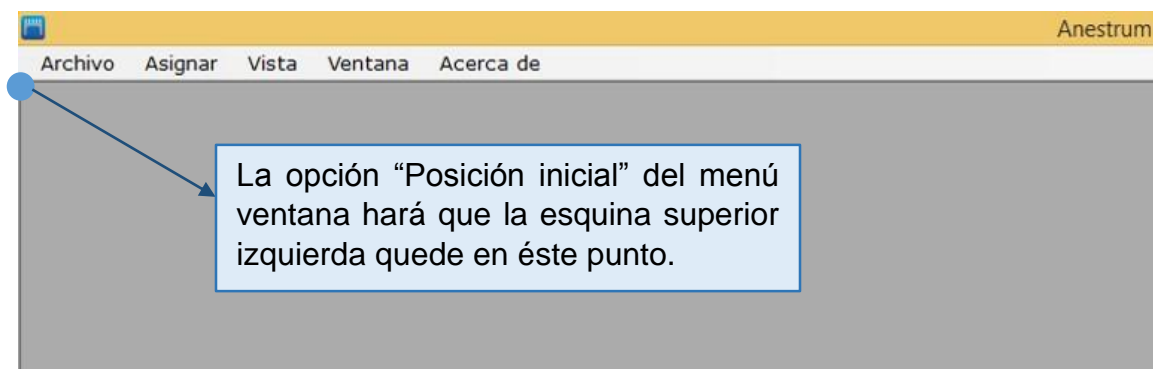


Figura 13. Ventana de inicio sin ventana abierta

Al utilizar esa función la ventana de análisis se verá de la siguiente forma:

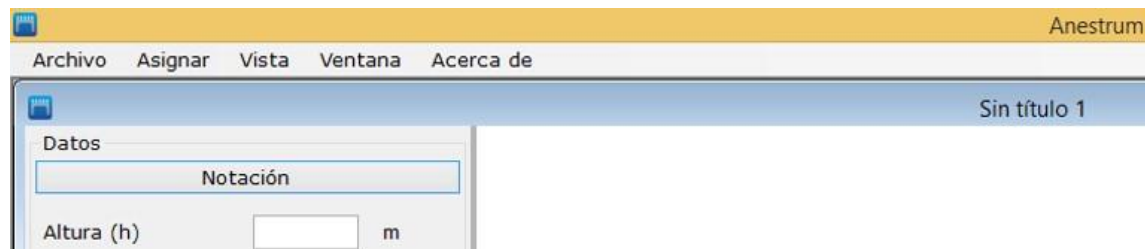


Figura 14. Ventana colocada

## II.1. ¿Cómo realizar un análisis?

Para hacerlo se hay que iniciar un nuevo modelo, con lo cual se deben seguir estos pasos:

1. En el menú archivo seleccionar nuevo o en la pantalla de inicio, presionar las teclas CTRL + N, al hacer esto aparecerá la ventana de nuevo modelo.
2. Seleccionar el tipo de apoyo del marco
3. Seleccionar el marco presionando el botón con el marco deseado para el análisis
4. Desplegar la lista y seleccionar el caso
5. Presionar el botón Aceptar

De esta parte hay dos opciones, el análisis de un caso o el de combinación. Si se realiza un análisis con combinación, consultar la sección relacionada con el mismo.

### II.1.1. Análisis de caso individual

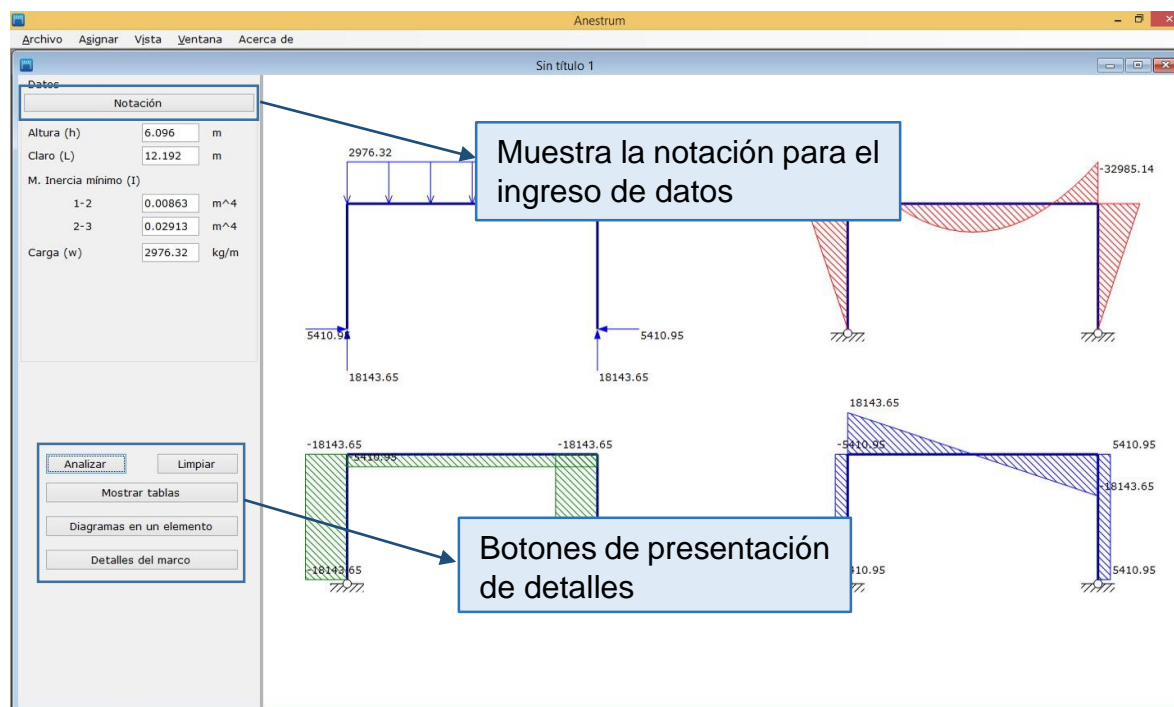


Figura 15. Ventana de análisis individual

El botón notación tiene la función de mostrar una ventana con un diagrama donde está indicado el significado de cada una de las partes necesarias para realizar el análisis.

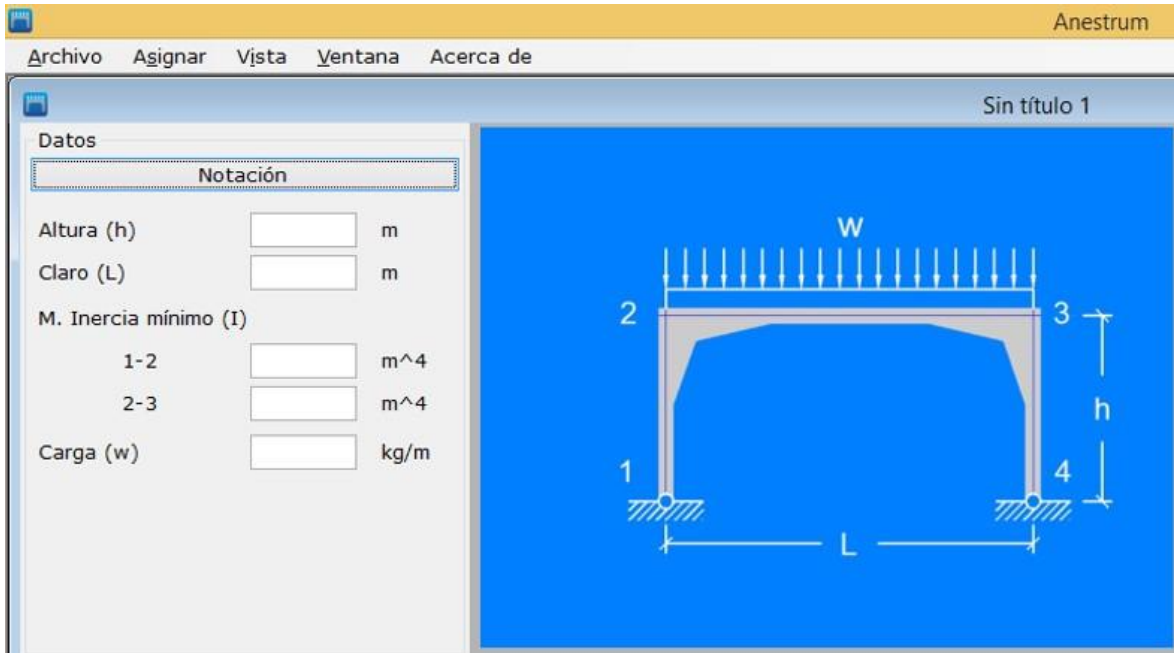


Figura 16. Ventana de ayuda al presionar el botón notación

1. Colocar los datos necesarios en los campos
  - a. En caso de estar analizando un marco de sección transversal variable es necesario indicar las dimensiones de las cartelas en el menú Asignar > Cartelas
2. Presionar el botón Aceptar
3. Al haber hecho los anteriores pasos el programa mostrará los resultados en el espacio de dibujo como se muestra en la imagen 15 y se podrán consultar los detalles.

El grupo de botones de detalles, muestran diferentes datos, el primero de ellos es mostrar tablas, al presionarlo abrirá una tabla con el número de tramos indicado en la sección configuración en el menú asignar, el segundo es el botón de diagramas en un elemento determinado, al presionarlo aparecerá una ventana como la que muestra la figura 17.

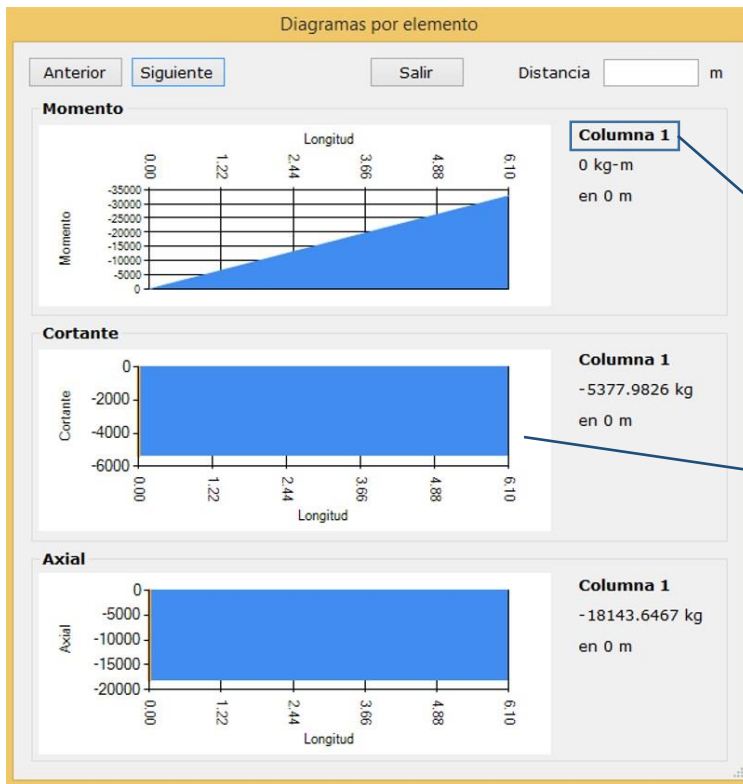


Figura 17. Ventana de detalles de diagramas

Elemento actual visualizado

Diagramas en el elemento seleccionado

En la imagen anterior se muestra la ventana de detalles de diagramas, en la parte superior derecha, se localiza un campo donde si es colocada una distancia determinada dentro de la longitud del elemento visualizado, se mostrará el valor que tiene en la misma cada uno de los diagramas.

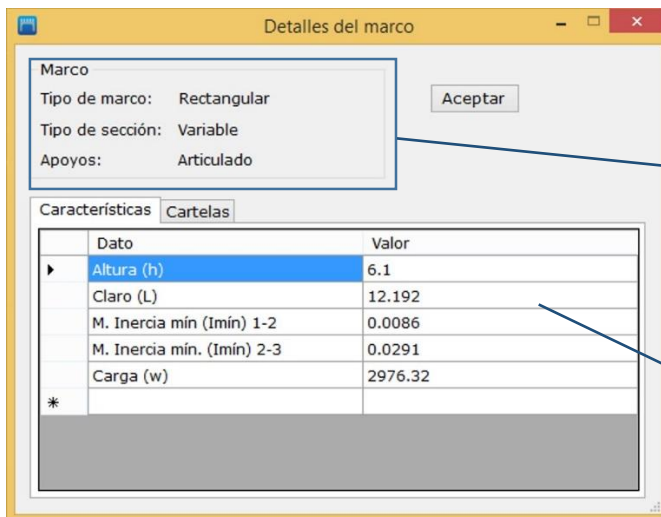


Figura 18. Ventana detalles de marco

Información general del marco

Datos asignados

Por último el botón de detalles del marco, este muestra las características que le fueron dadas al inicio del análisis como altura, claro, momentos de inercia, etc., estos detalles son mostrados con se puede observar en la figura 18.

### II.1.2. Análisis con Combinación de casos

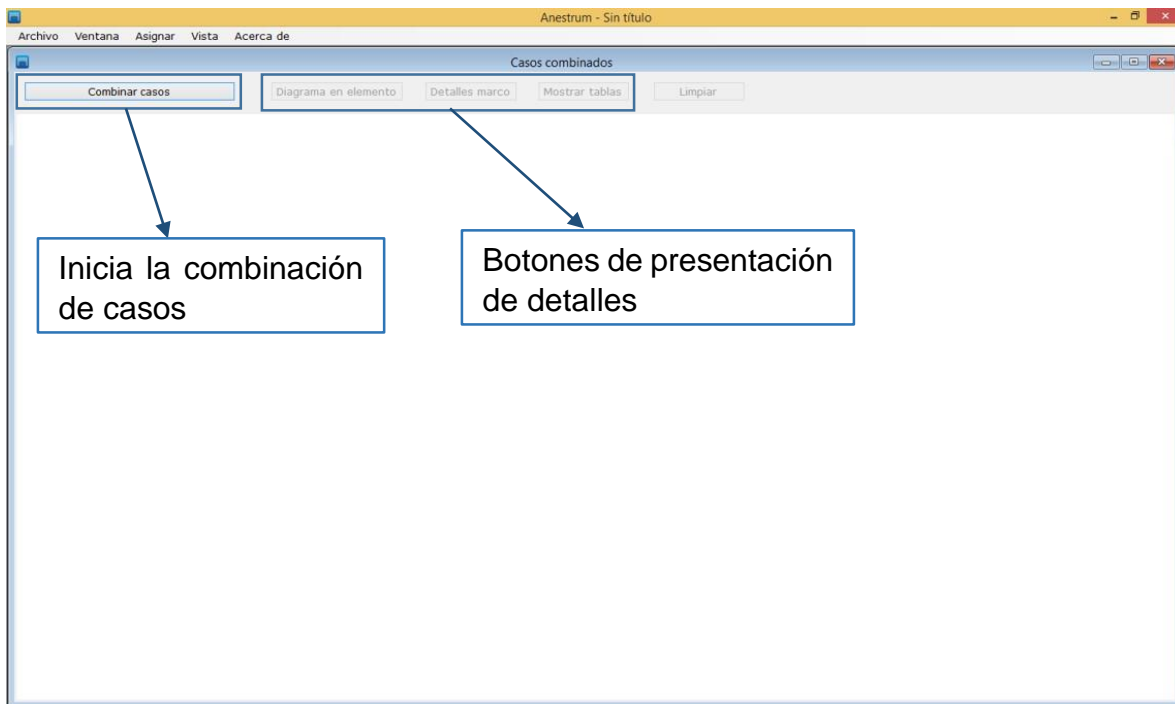


Figura 19. Ventana de Combinación de casos

Realizar los pasos uno al cuatro de la sección ¿cómo hacer un análisis?, al abrir la ventana de nuevo modelo (figura 10):

1. Desplegar la lista de casos, en la parte final hay una opción de combinación, seleccionarla
2. Presionar el botón Aceptar

Con esta acción se presentará una ventana como la de la figura 19.

- a. En caso de estar haciendo una combinación de casos de un marco de sección transversal variable, asignar las dimensiones de las cartelas en el menú Asignar > Cartelas
3. Presionar el botón Combinar casos

Aparecerá una ventana que gestiona la combinación, en esta parte se hace lo mismo que en la ventana de análisis de un caso individual (Figura 15), se llenan los campos indicados con los datos de las características del marco y de la lista desplegable se seleccionan los casos que se quieran incluir en la combinación.

4. Al haber seleccionado la condición de carga y llenado los campos, presionar el botón agregar para registrar

Para cada condición hay que proporcionar los datos, si se elimina algún caso basta con seleccionar la fila del caso en la tabla y presionar el botón eliminar.

5. Teniendo todos los casos necesarios registrados se procede a realizar el análisis presionando el botón Analizar

Finalmente se verá la ventana de combinaciones y aparecerán los diagramas en el espacio de dibujo ya trazados.

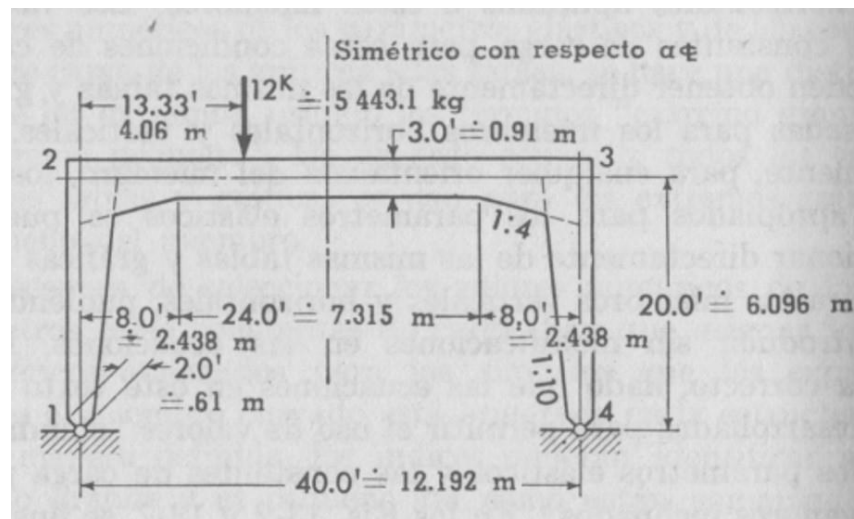
## CAPÍTULO III. Comprobación de los resultados de programa

### III.1. Ejemplos analizados con el software

En la siguiente parte se presenta la comprobación de los resultados obtenidos por el programa comparándolos con los ejemplos proporcionados en las soluciones condensadas para la comprensión de la aplicación de las mismas en la sección de marcos con elementos de sección variable.

Al ser demasiados casos se ha omitido la inclusión de todos en el presente proyecto pero se hicieron las revisiones pertinentes para asegurar el correcto cálculo y funcionamiento del programa y descartar cualquier posibilidad de error que se pueda dar.

**Ejemplo 1.-** Una estructura rígida en pórtico de la forma y dimensiones presentadas en la figura, soporta una carga concentrada vertical 5443.10 kg sobre la viga. Suponiendo que el ancho de los miembros normal al plano del dibujo es de 45.72 cm, determínese la magnitud de los momentos de flexión en las juntas 2 y 3.



Usando la notación de las gráficas, la longitud de la parte variable en el miembro 1-2 se designa  $l_h$  y su longitud total  $l$ . La relación  $v$ , entre las longitudes:

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{6.096}{6.096} = 1 \qquad t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.61}{1.22} \right)^3 = 0.125$$



En la gráfica 6 y tomando los valores  $v$  y  $t$ , el parámetro elástico  $\alpha_{21} = 0.82$ . Usando el mismo procedimiento para el miembro 2-3

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{2.438}{12.192} = 0.1999 \approx 0.2 \quad t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.91}{1.52} \right)^3 = 0.216$$

De las gráfica 1 y 2 se obtienen los siguientes valores  $\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.92$  y  $\beta_{23} = \beta_{32} = 1.82$ .

Las tablas 1 y 2, dan los valores de las constantes de los miembros de sección transversal variable para la carga unitaria concentrada sobre el miembro. Para una carga aplicada sobre el tercio del claro medido desde el soporte izquierdo y con  $v = 0.2$  y  $t = 0.216$ , se obtienen por interpolación los siguientes valores numéricos para las constantes de carga:

Para el extremo izquierdo  $R_{23} = 0.680$ , para el derecho  $R_{32} = 0.557$ .

$$\text{mín } I_{1-2} = \frac{(0.6096)^3 \times 0.4572}{12} = 0.00863 \text{ m}^4$$

$$\text{mín } I_{2-3} = \frac{(0.9144)^3 \times 0.4572}{12} = 0.02913 \text{ m}^4$$

Determinando los valores de las fórmulas proporcionadas por las soluciones condensadas.

$$\phi = \frac{\text{mín } I_{1-2}}{\text{mín } I_{2-3}} \cdot \frac{L}{h} = \frac{0.00863}{0.02913} \cdot \frac{12.192}{6.096} = 0.5925$$

$$\theta_{23} = 2(\alpha_{23} + \beta_{23}) = (2.92 + 1.82) = 9.48$$

$$A = \theta_{23} + \frac{2\alpha_{21}}{\phi} = 9.48 + \frac{2 \times 0.82}{0.5925} = 12.248$$

$$K = \frac{L}{A} (R_{23} + R_{32}) = \frac{12.192}{12.248} (0.680 + 0.557) = 1.2313$$

$$H_1 = H_4 = \frac{PK}{h} = \frac{5443.1 \times 1.2313}{6.096} = 1099.42 \text{ kg}$$

$$V_1 = P \left(1 - \frac{m}{L}\right) = 5443.1 \left(1 - \frac{4.06}{12.192}\right) = 3630.52 \text{ kg}$$

$$V_4 = P - V_1 = 5443.1 - 3630.52 = 1812.58 \text{ kg}$$

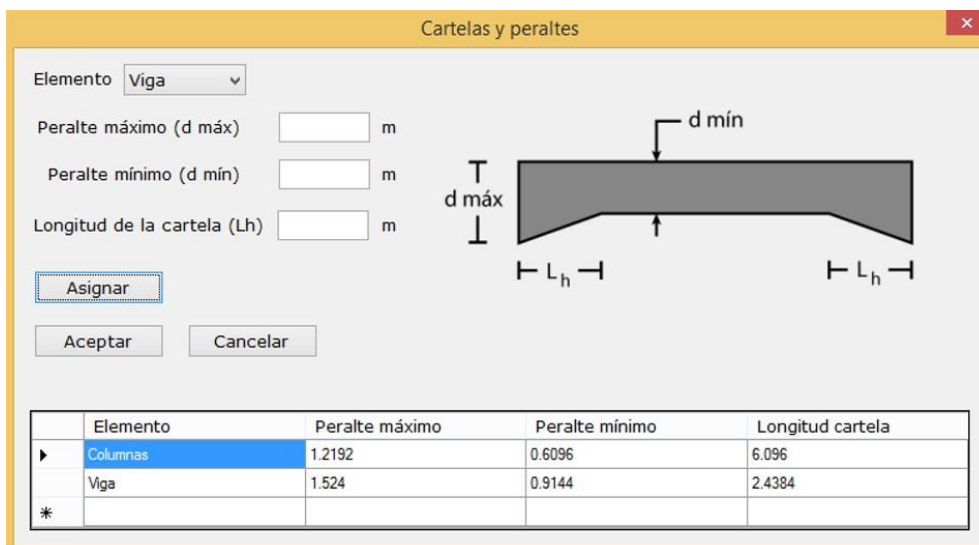
$$M_2 = M_3 = -PK = -(5443.1 \times 1.2313) = -6702.089 \text{ kg} - m$$

### Realizando el ejemplo en ANESTRUM

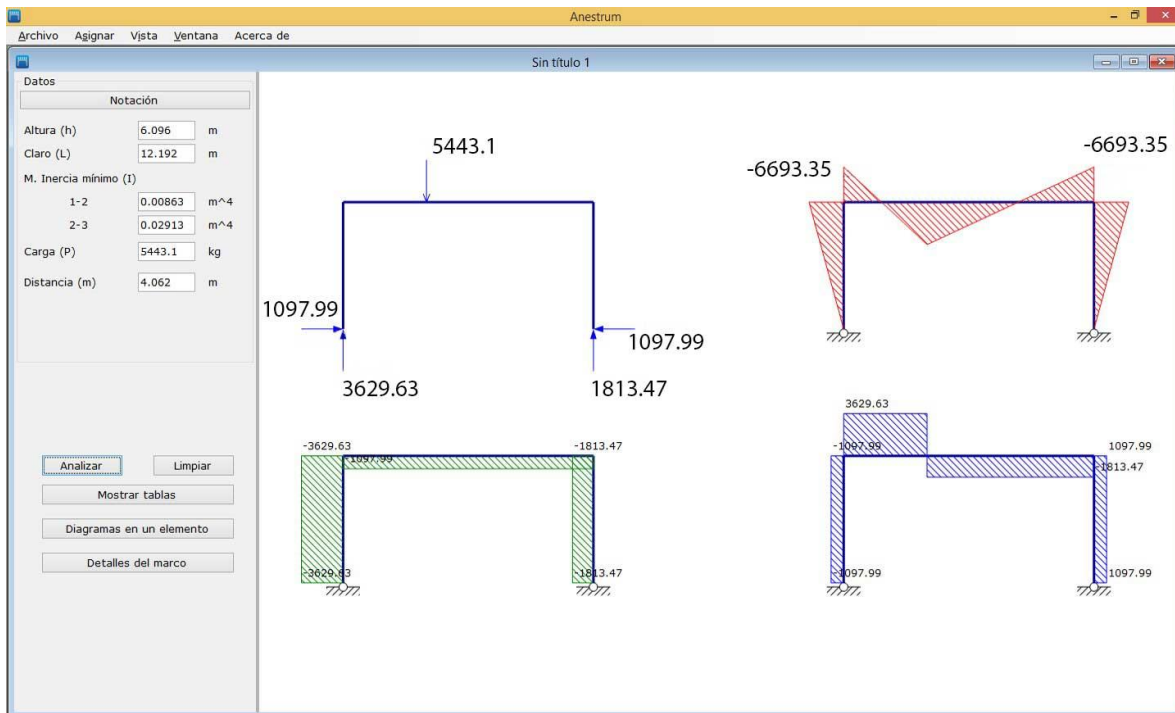
1. Seleccionar en el menú Archivo > Nuevo
2. En la ventana Nuevo modelo, seleccionar apoyos articulados, marco rectangular con sección variable y en la lista desplegable de casos, vertical concentrada sobre cualquier punto de la viga.
3. Indicar los datos del marco en los campos de altura, claro, etc.
4. Seleccionar en el menú Asignar > Cartelas
5. Aparecerá la ventana que solicitará otros datos, indicar las cartelas de la columna y de la viga, para cada uno presionar el botón Asignar
6. Presionar el botón Aceptar

Se regresará a la ventana de los datos

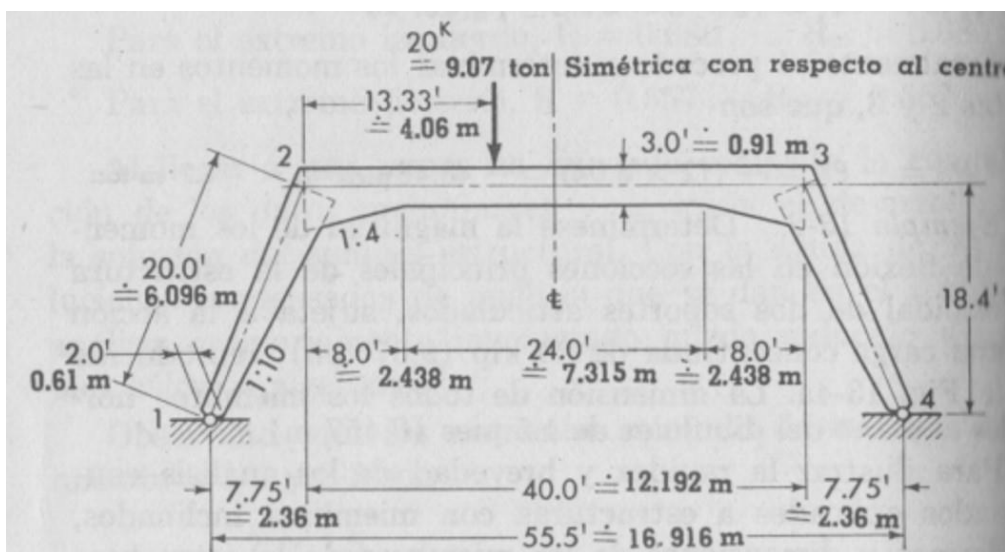
7. Presionar el botón Analizar



Programa para el análisis de marcos de sección constante y variable basado en soluciones condensadas para el análisis



**Ejemplo 2.-** Determine la magnitud de los momentos de flexión en las secciones principales de la estructura trapezoidal de dos soportes articulados, sujeta a la acción de una carga concentrada de 9071.8 kg. La dimensión de todos los miembros normales al plano del dibujo es de 0.4572 m.



Al tener los miembros de la estructura de este ejemplo las mismas dimensiones que los del ejemplo anterior, los valores numéricos de los parámetros elásticos y las constantes de carga determinados en el ejemplo anterior son los siguientes:

$$\alpha_{21} = 0.82$$

$$\alpha_{23} = 2.92$$

$$\beta_{23} = 1.82$$

$$R_{23} = 0.680$$

$$R_{32} = 0.557$$

$$\text{mín } I_{1-2} = \frac{(0.6096)^3 \times 0.4572}{12} = 0.00863 \text{ m}^4$$

$$\text{mín } I_{2-3} = \frac{(0.9144)^3 \times 0.4572}{12} = 0.02913 \text{ m}^4$$

Determinando los valores de las fórmulas

$$\phi = \frac{\text{mín } I_{1-2}}{\text{mín } I_{2-3}} \cdot \frac{b}{q} = \frac{0.00863}{0.02913} \cdot \frac{12.192}{6.096} = 0.5925$$

$$\theta_{23} = 2(\alpha_{23} + \beta_{23}) = (2.92 + 1.82) = 9.48$$

$$A = \theta_{23} + \frac{2\alpha_{21}}{\phi} = 9.48 + \frac{2 \times 0.82}{0.5925} = 12.248$$

$$J = \frac{b}{A} (R_{23} + R_{32}) = \frac{12.192}{12.248} (0.680 + 0.557) = 1.2313$$

$$K = \frac{b - 2m}{2L} = \frac{12.192 - (2 \times 4.06)}{2 \times 16.916} = 0.1203$$

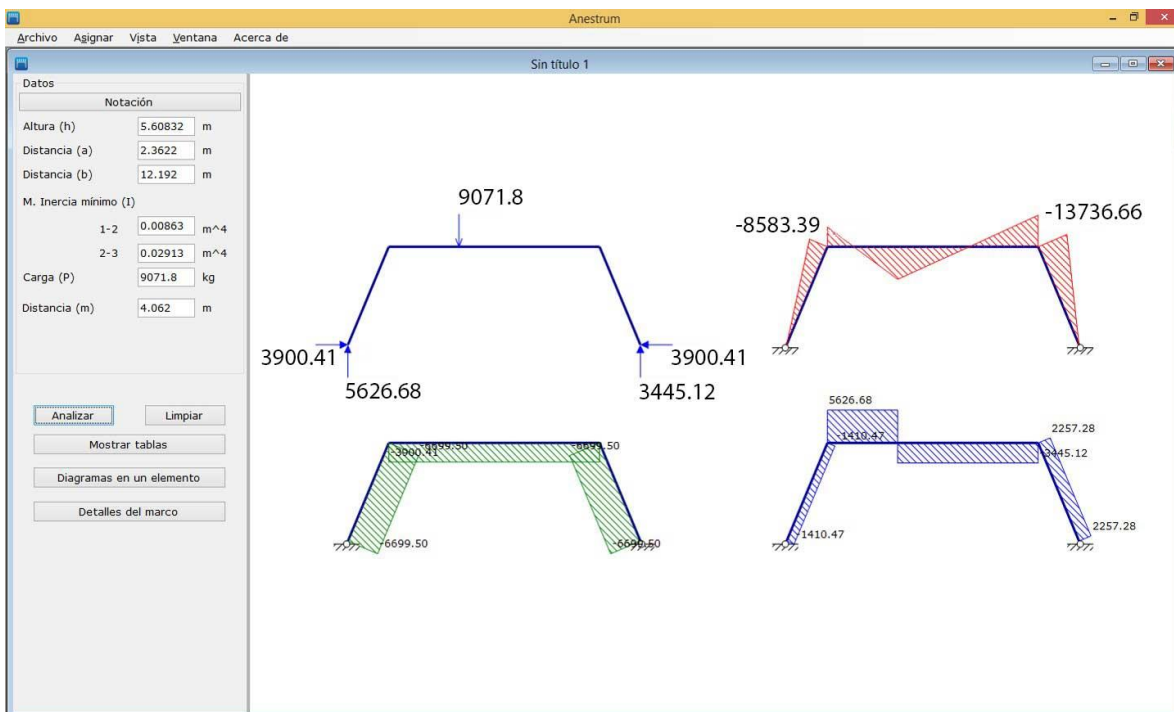
$$H_1 = H_4 = \frac{P}{2h} (2J + a) = \frac{9071.8}{2 \times 5.608} (2 \times 1.2313 + 2.36) = 3900.6475 \text{ kg}$$

$$V_1 = \frac{P}{2} (1 + 2K) = \frac{9071.8}{2} (1 + 2 \times 0.1203) = 5627.2375 \text{ kg}$$

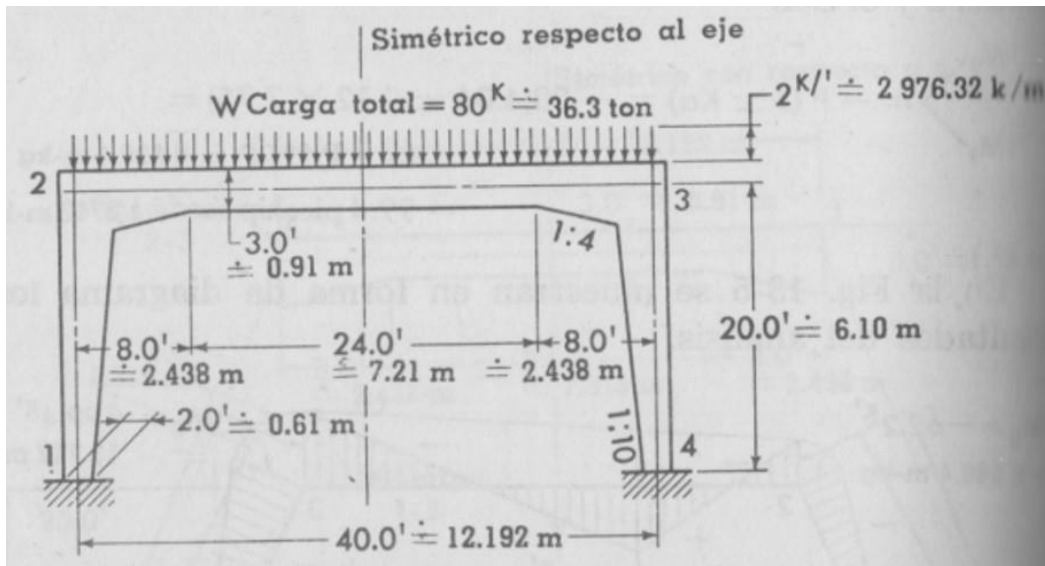
$$V_4 = \frac{P}{2} (1 - 2K) = \frac{9071.8}{2} (1 - 2 \times 0.1203) = 3444.5625 \text{ kg}$$

$$M_2 = -P(J - Ka) = -9071.8(1.2313 - 0.1203 \times 2.36) = -8594.5507 \text{ kg} - m$$

$$M_3 = -P(J + Ka) = -9071.8(1.2313 + 0.1203 \times 2.36) = -13745.6639 \text{ kg} - m$$



**Ejemplo 3.-** Una estructura rígida en pórtico de la forma y dimensiones presentadas en la figura, soporta una carga vertical uniformemente repartida de 2976.32 kg/m. Suponiendo que el ancho de los miembros normal al plano de dibujo es de 0.4572 m, encuéntrase la magnitud de los momentos de flexión de la estructura.



Observando que la forma y dimensiones de los miembros de la estructura son las mismas que las de los ejemplos anteriores las constantes geométricas del miembro 1-2 son:

$$v = 1$$

$$t = 0.125$$

El valor del parámetro elástico  $\alpha_{12} = 2.32$  obtenido de la gráfica 5, el valor de  $\alpha_{21} = 0.82$  obtenido de la gráfica 6. En forma similar se determina  $\beta_{12} = 0.69$  de la gráfica 7.

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.92$$

$$\beta_{23} = 1.82$$

Como el miembro 2-3 y su carga son simétricos con respecto a la línea central del miembro, las constantes de carga son idénticas para ambos extremos del miembro. De la gráfica 11 se obtienen para  $v = 0.2$  y  $t = 0.216$  los valores de las constantes de carga, resultan ser:

$$R_{23} = R_{32} = 0.457$$

$$\text{mín } I_{1-2} = \frac{(0.6096)^3 \times 0.4572}{12} = 0.00863 \text{ m}^4$$

$$\text{mín } I_{2-3} = \frac{(0.9144)^3 \times 0.4572}{12} = 0.02913 \text{ m}^4$$

Sustituyendo en las fórmulas tomadas de la obra de soluciones condensadas los datos, se tienen los siguientes valores:

$$\theta_{12} = \alpha_{12} + \alpha_{21} + 2\beta_{12} = 2.32 + 0.82 + 2 \times 0.69 = 4.52$$

$$\theta_{23} = 2(\alpha_{23} + \beta_{23}) = 2 \times (2.92 + 1.82) = 9.48$$

$$\phi = \frac{\text{mín } I_{1-2}}{\text{mín } I_{2-3}} \cdot \frac{L}{h} = \frac{0.00863}{0.02913} \cdot \frac{12.192}{6.096} = 0.5925$$

$$A = \frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{0.69}{2.32} = 0.2974$$

$$B = 2\theta_{12} + \theta_{23}\phi = 2 \times 4.52 + 9.48 \times 0.5925 = 14.6569$$

$$D = \frac{B}{2} - 2\phi\beta_{23} = \frac{14.6569}{2} - 2 \times 0.5925 \times 1.82 = 5.1717$$

$$F = B - \frac{2(\alpha_{12} + \beta_{12})^2}{\alpha_{12}} = 14.6569 - \frac{2(2.32 + 0.69)^2}{2.32} = 6.8465$$

$$K = \frac{2L\phi R_{23}}{F} = \frac{2 \times 12.192 \times 0.5925 \times 0.457}{6.8465} = 0.9644$$

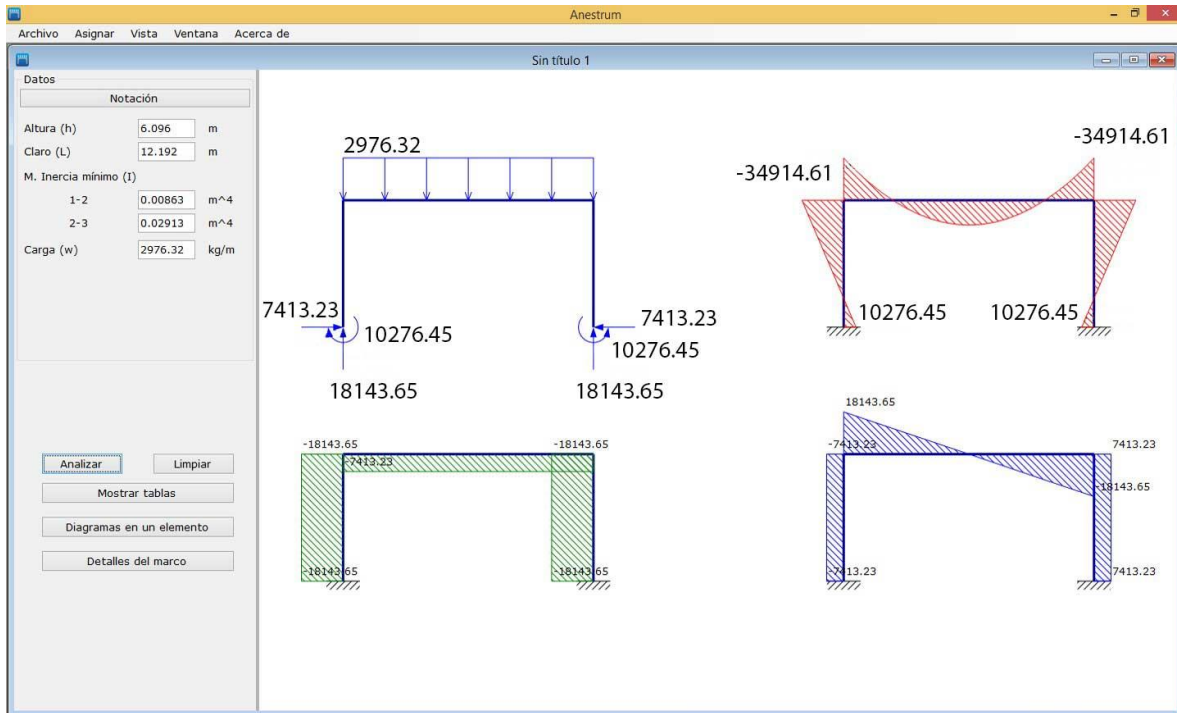
$$H_1 = H_4 = \frac{WK(1 + A)}{h} = \frac{36287.2934 \times 0.9644(1 + 0.2974)}{6.096} = 7448.0179 \text{ kg}$$

$$V_1 = V_4 = \frac{W}{2} = \frac{36287.2934}{2} = 18143.6467 \text{ kg}$$

$$M_2 = M_3 = -WK = -(36287.2934 \times 0.9644) = -34995.4657 \text{ kg} - m$$

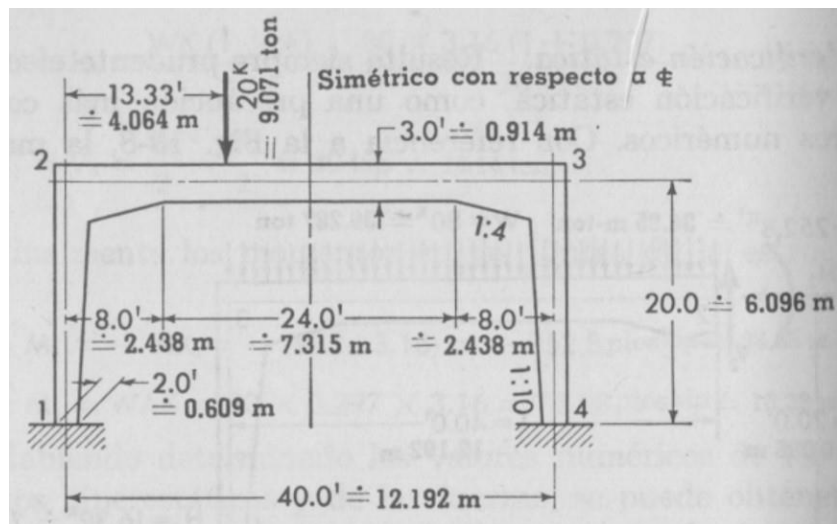
$$M_1 = M_4 = -WAK = -(36287.2934 \times 0.2974 \times 0.9644) = -10407.6515 \text{ kg} - m$$

Programa para el análisis de marcos de sección constante y variable basado en soluciones condensadas para el análisis





**Ejemplo 4.-** Encuéntrese las magnitudes hiperestáticas de la estructura rígida en pórtico con las dimensiones dadas en la figura y soportando una carga vertical concentrada de 9071.8 kg sobre la viga. El ancho de todos los miembros, normal al plano de dibujo es de 0.475 m.



Como la estructura en este ejemplo es igual a la del anterior los valores de las ecuaciones son los siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= 4.52 & \theta_{23} &= 9.48 & \phi &= 0.5925 \\ A &= 0.2974 & B &= 14.6569 & D &= 5.1717 \\ & & F &= 6.8465 \end{aligned}$$

Los valores numéricos de las constantes de carga para la carga concentrada sobre la viga, se pueden obtener de las tablas 1 y 2, empleando las constantes geométricas de la viga. Para  $v = 0.2$  y  $t = 0.216$  los valores de estas constantes determinados por interpolación son:

Para el extremo izquierdo  $R_{23} = 0.680$ , para el derecho  $R_{32} = 0.557$ .

Aplicando las ecuaciones condensadas de análisis proporcionadas en la obra se obtiene:

$$\begin{aligned} J &= \frac{L\phi}{F} (R_{23} + R_{32}) = \frac{12.192 \times 0.5925}{6.8465} (0.680 + 0.557) = 1.3052 \\ K &= \frac{L\phi}{2D} (R_{23} - R_{32}) = \frac{12.192 \times 0.5925}{2 \times 5.1717} (0.680 - 0.557) = 0.0859 \end{aligned}$$

$$H_1 = H_4 = \frac{PJ}{h} (1 + A) = \frac{9071.8 \times 1.3052}{6.096} (1 + 0.2974) = 2519.9938 \text{ kg}$$

$$V_1 = P \left(1 - \frac{m}{L}\right) + \frac{2PK}{L} = 9071.8 \left(1 - \frac{4.064}{12.192}\right) + \frac{2 \times 9071.8 \times 0.0859}{12.192} = 6175.6993 \text{ kg}$$

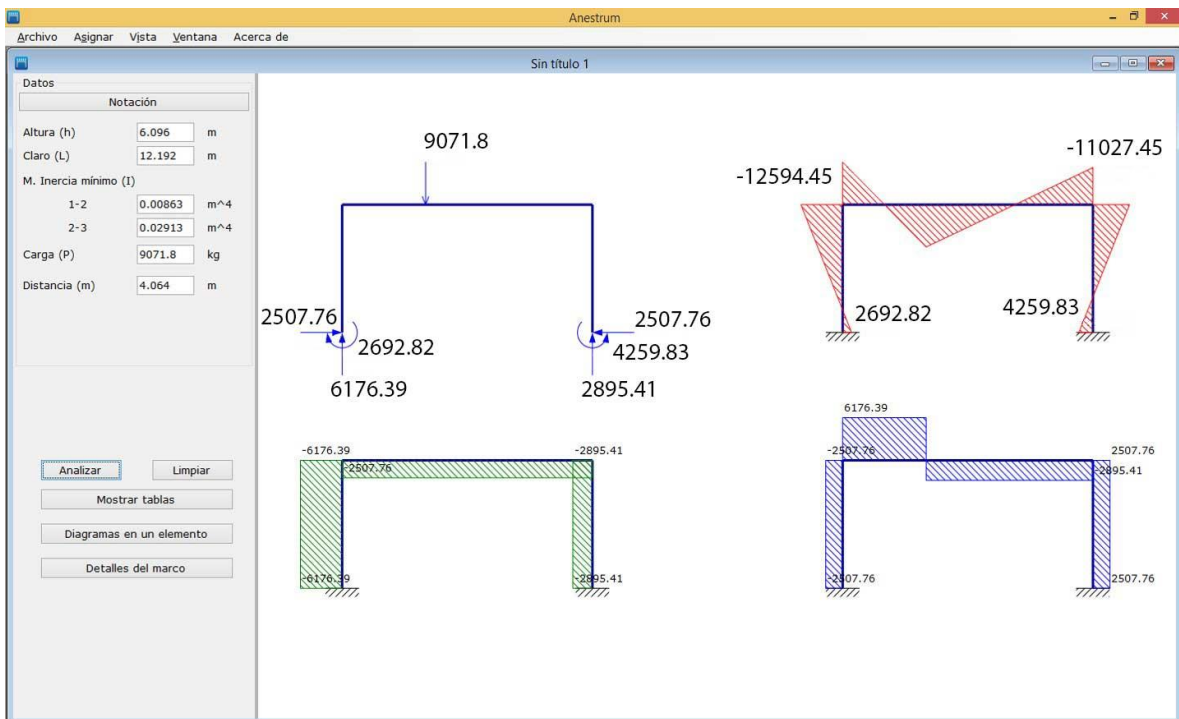
$$V_4 = P - V_1 = 9071.8 - 6175.6993 = 2896.1007 \text{ kg}$$

$$M_2 = -P(J + K) = -9071.8(1.3052 + 0.0859) = -12619.7809 \text{ kg} - m$$

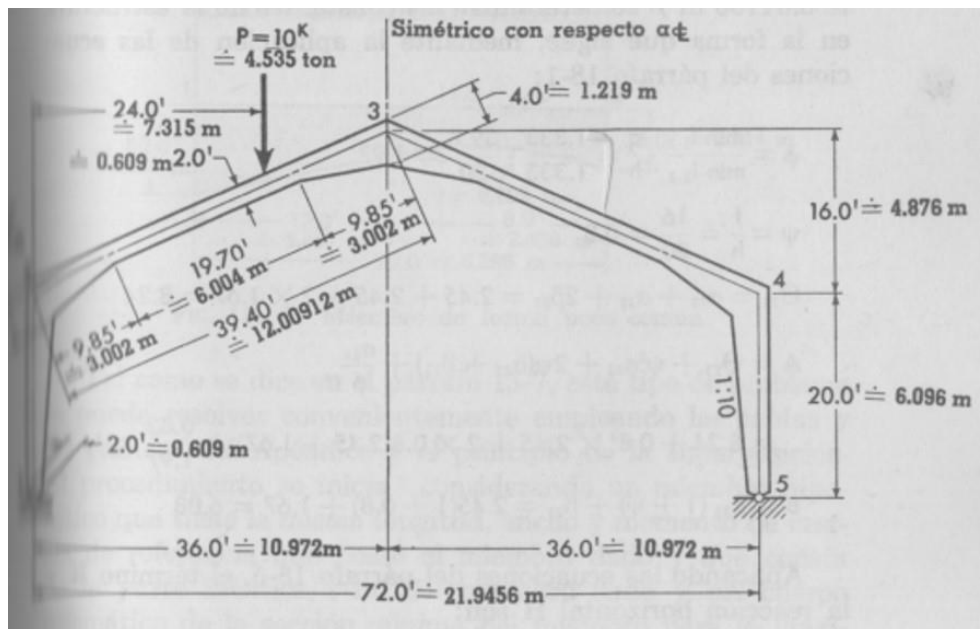
$$M_3 = -P(J - K) = -9071.8(1.3052 - 0.0859) = -11061.2457 \text{ kg} - m$$

$$M_1 = P(AJ + K) = -9071.8(0.2974 \times 1.3052 - 0.0859) = 2742.1011 \text{ kg} - m$$

$$M_4 = P(AJ - K) = -9071.8(0.2974 \times 1.3048 + 0.0859) = 4299.5571 \text{ kg} - m$$



**Ejemplo 5.-** La estructura rígida de dos vertientes de la figura está articulada en los soportes y tiene una carga concentrada vertical única de 4535.9 kg. Calcúlense los valores numéricos de los momentos de flexión y las reacciones horizontal y vertical en las juntas de la estructura. Se supone que el ancho de todos los miembros normal al plano de dibujo sea de 0.61 m y la sección transversal en la base de las columnas es de 0.61 x 0.61 m



Observando que para el miembro 2-3

$$v = \frac{l_h}{l} = \frac{3.002}{12.00912} = 0.25 \qquad t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3 = \left( \frac{0.61}{1.22} \right)^3 = 0.125$$

Se obtendrán de las gráficas 1 y 2 los siguientes valores de los parámetros elásticos:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 2.45 \qquad \beta_{23} = \beta_{32} = 1.67$$

Inmediatamente y usando las relaciones geométricas del miembro 2-3, determinadas arriba, se obtienen de las tablas 1 y 2 las constantes de carga para la posición dada de la carga.

Para el extremo izquierdo  $R_{23} = 0.521$ , para el derecho  $R_{32} = 0.623$ .

Notando que los momentos mínimos de inercia de la columna y la viga son idénticos.

$$\text{mín } I_{1-2} = \text{mín } I_{2-3} = \frac{(0.6092)^3 \times 0.6092}{12} = 0.0115 \text{ m}^4$$

$$\phi = \frac{\text{mín } I_{1-2}}{\text{mín } I_{2-3}} \cdot \frac{q}{h} = \frac{0.0115}{0.0115} \cdot \frac{12.00912}{6.096} = 1.97$$

$$\psi = \frac{f}{h} = \frac{4.876}{6.096} = 0.8$$

$$\theta_{23} = \alpha_{23} + \alpha_{32} + 2\beta_{23} = 2.45 + 2.45 + 2 \times 1.67 = 8.24$$

$$A = \theta_{23} + \psi^2 \alpha_{32} + 2\psi(\alpha_{32} + \beta_{23}) + \frac{\alpha_{21}}{\phi}$$

$$= 8.24 + 0.8^2 \times 2.45 + 2 \times 0.8(2.45 + 1.67) + \frac{0.82}{1.97} = 16.82$$

$$B = \alpha_{32}(1 + \psi) + \beta_{23} = 2.45(1 + 0.8) + 1.67 = 6.08$$

Aplicando las ecuaciones

$$K = R_{23} + R_{32}(1 + \psi) = 0.521 + 0.623(1 + 0.8) = 1.6424$$

$$H_1 = H_5 = \frac{P}{4Ah} (2Bm + KL)$$

$$= \frac{4535.9}{4 \times 16.82 \times 6.096} (2 \times 6.08 \times 7.315 + 1.6424 \times 21.9456) = 1382.36 \text{ kg}$$

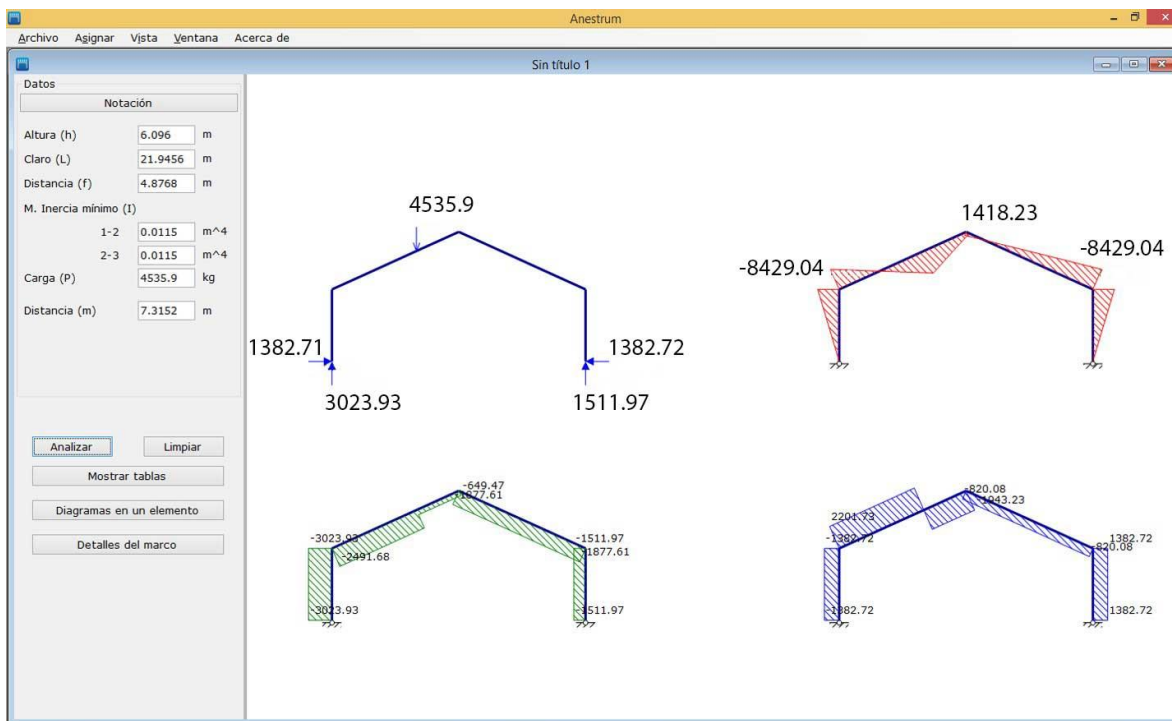
Finalmente los momentos de flexión en las juntas 2 y 3 son

$$M_2 = -H_5 h = -1382.36 \times 6.096 = -8426.87 \text{ kg} - m$$

$$M_3 = \frac{Pm}{2} - H_5 h(1 + \psi)$$

$$= \frac{4535.9 \times 7.315}{2} - 1382.36 \times 6.096(1 + 0.8) = 1421.6944 \text{ kg} - m$$

# Programa para el análisis de marcos de sección constante y variable basado en soluciones condensadas para el análisis



## Conclusiones

En la obra de Valerian Leontovich, se presentan las ecuaciones que definen los valores de los parámetros elásticos y constantes de carga, pero la misma no tiene información a detalle del manejo de estas expresiones, volviendo este proceso largo y tedioso, pues no se tiene claro de qué manera empezar y solamente explica el uso de las gráficas, esta tesis tiene la intención de mostrar el uso de las ecuaciones para aclarar más su implementación, brindando una herramienta para la aplicación con otros casos, no sólo los que se presentan, sino que posteriormente puede desarrollarse más fórmulas para otro tipo de casos.

Con los ejemplos mostrados en el capítulo anterior, se puede observar que no hay un gran margen de diferencia entre los resultados de la aplicación de las gráficas y la implementación de las fórmulas desarrolladas en esta tesis, los valores de los parámetros elásticos y constantes de carga prácticamente son iguales.

Por otro lado, se puede visualizar el uso de la tecnología para revitalizar métodos que han sido poco usados en la actualidad gracias al desarrollo de nuevas técnicas que producen nuevas formas y métodos de análisis, con esto se demuestra que procesos desarrollados muchos años atrás pueden ser implementados nuevamente.

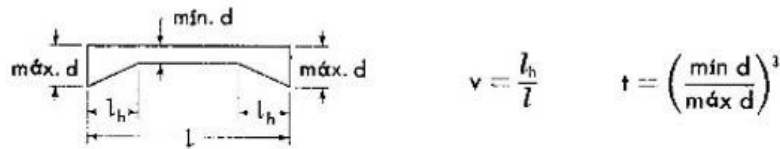
Además se puede decir, que el método para el cálculo de los parámetros y constantes de carga, por medio de las gráficas tiene determinada probabilidad de causar errores en los cálculos, pues es un procedimiento que implica la vista, si se toma en cuenta que cada persona tiene distinta percepción, dependiendo del desarrollo de los sentidos, el error puede estar en la mala interpretación de los valores en las gráficas, lo cual iría transmitiendo el error hacia las fórmulas más adelante de las soluciones condensadas, provocando obtener valores distantes a los verdaderos dando como resultado valores erróneos a determinado grado.

El programa tiene la finalidad de evitar la limitación que se tiene en las gráficas, pues es una herramienta que agiliza la obtención de cada uno de los valores de las expresiones, los parámetros y las constantes de carga son una parte de vital importancia dentro del análisis de los marcos de inercia variable, pues son los que toman en cuenta la variación del peralte de los elementos, introduciendo la misma y otras propiedades geométricas importantes en los elementos, utilizando expresiones matemáticas para obtener los valores.

## Anexos

Las siguientes tablas se utilizaron para el cálculo de los parámetros elásticos y se localizan en el apéndice de las soluciones condensadas (1).

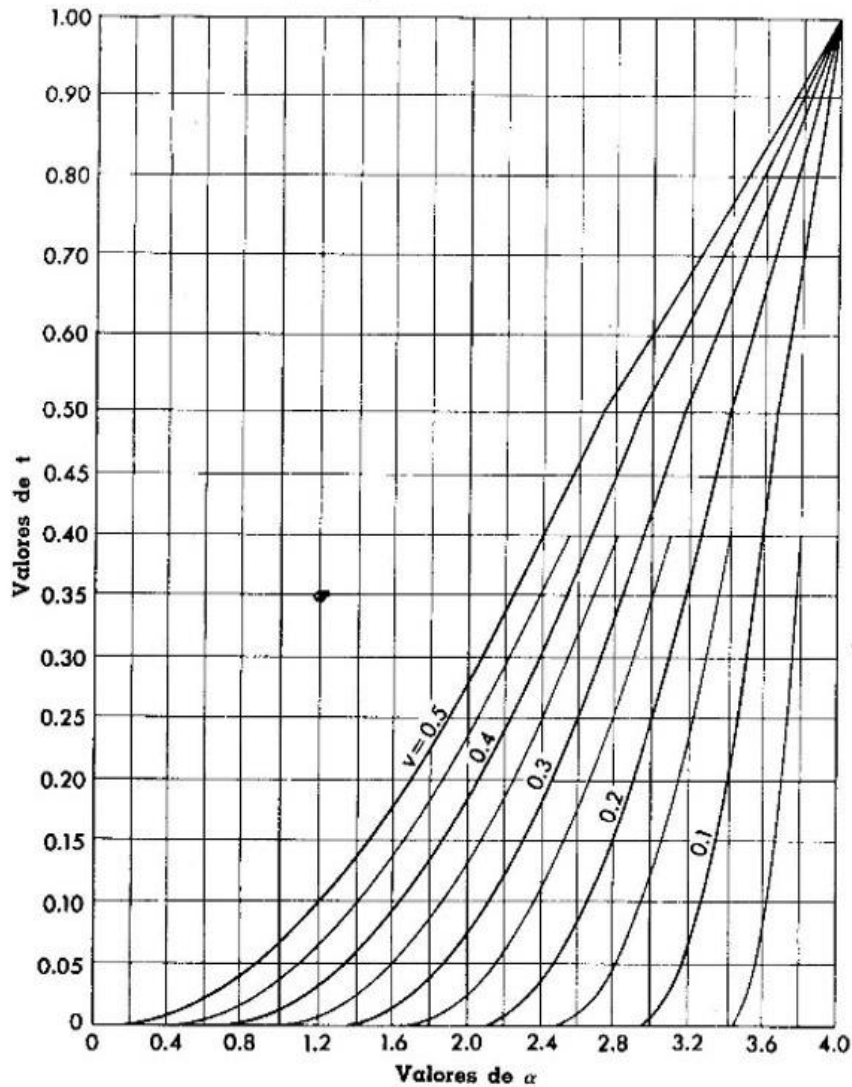
**GRAFICA 1. VALORES DEL PARAMETRO ELASTICO  $\alpha$ , para cualquier extremo de miembros simétricos con cartelas rectas**



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de los parámetros  $\alpha$  están determinados por la ecuación

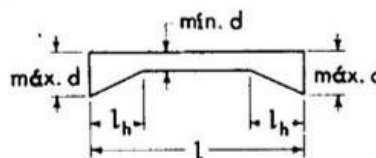
$$\alpha = \frac{12}{l^3} \int_0^{l_0} (l - x)^2 dx$$



**GRAFICA 2. VALORES DEL PARAMETRO ELASTICO  $\beta$ , para cualquier extremo de miembros simétricos con cartelas rectas**

$$v = \frac{l_h}{l}$$

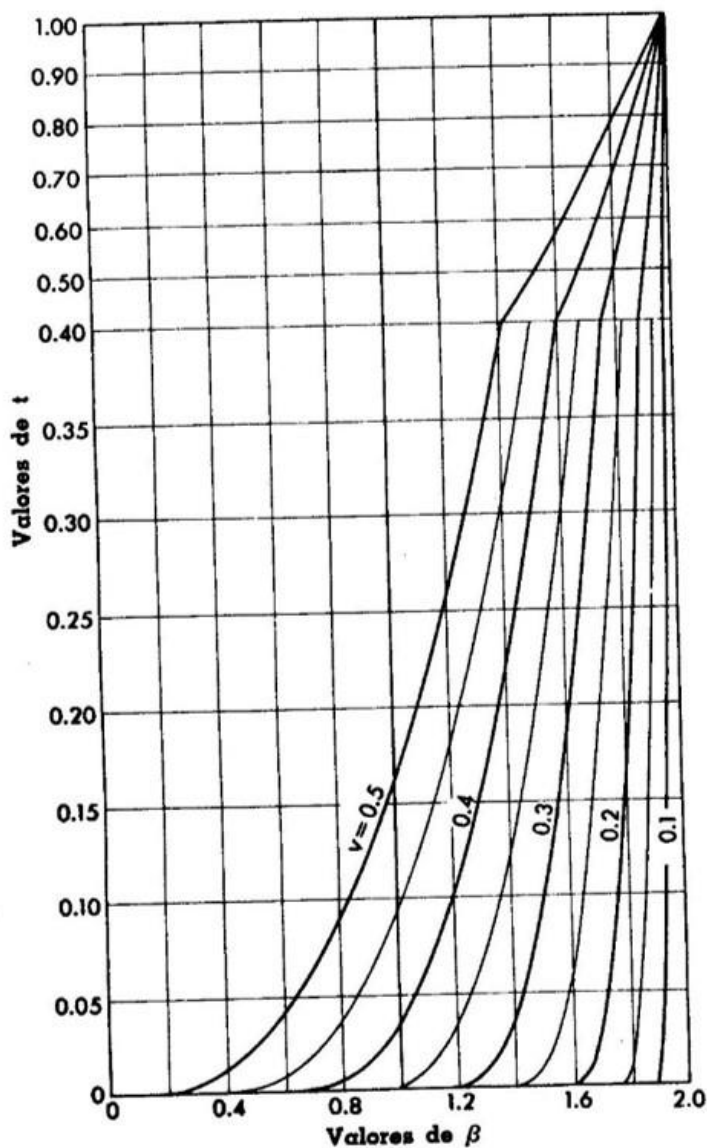
$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3$$



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores del parámetro  $\beta$  están determinados por la ecuación

$$\beta = \frac{12}{l^3} \int_0^{l_0} (l-x)x dx$$

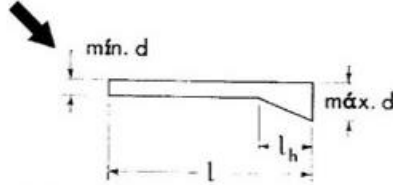




**GRAFICA 5. VALORES DEL PARAMETRO ELASTICO  $\alpha$ , para el extremo pequeño de miembros con una cartela recta**

$$v = \frac{l_h}{l}$$

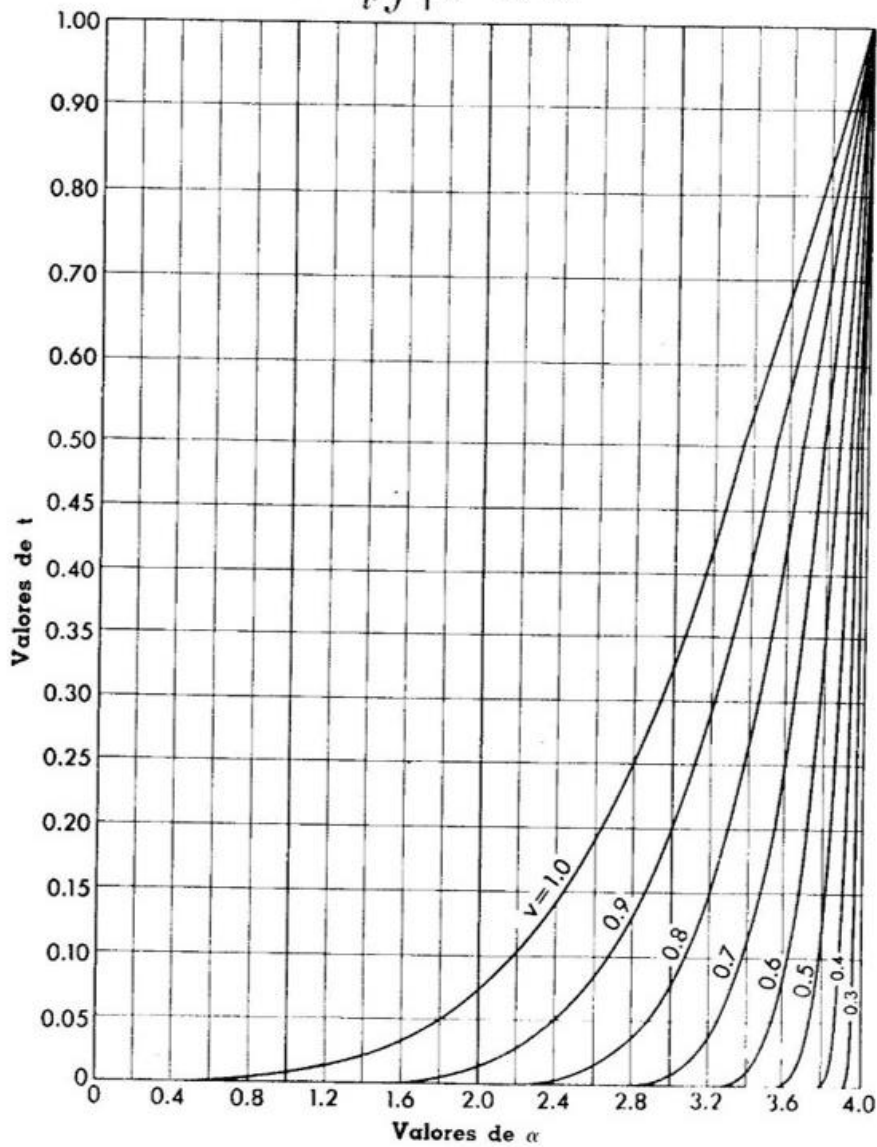
$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3$$



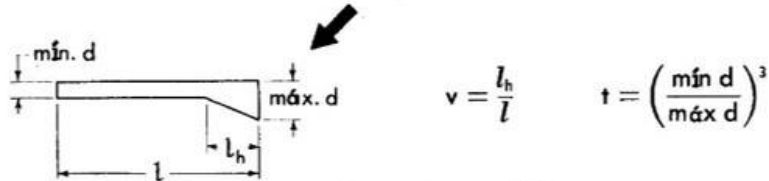
Para notas explicativas, véase página 469

Los valores del parámetro  $\alpha$  están determinados por la ecuación

$$\alpha = \frac{12}{l^2} \int_0^{l_0} (l-x)^2 dx$$



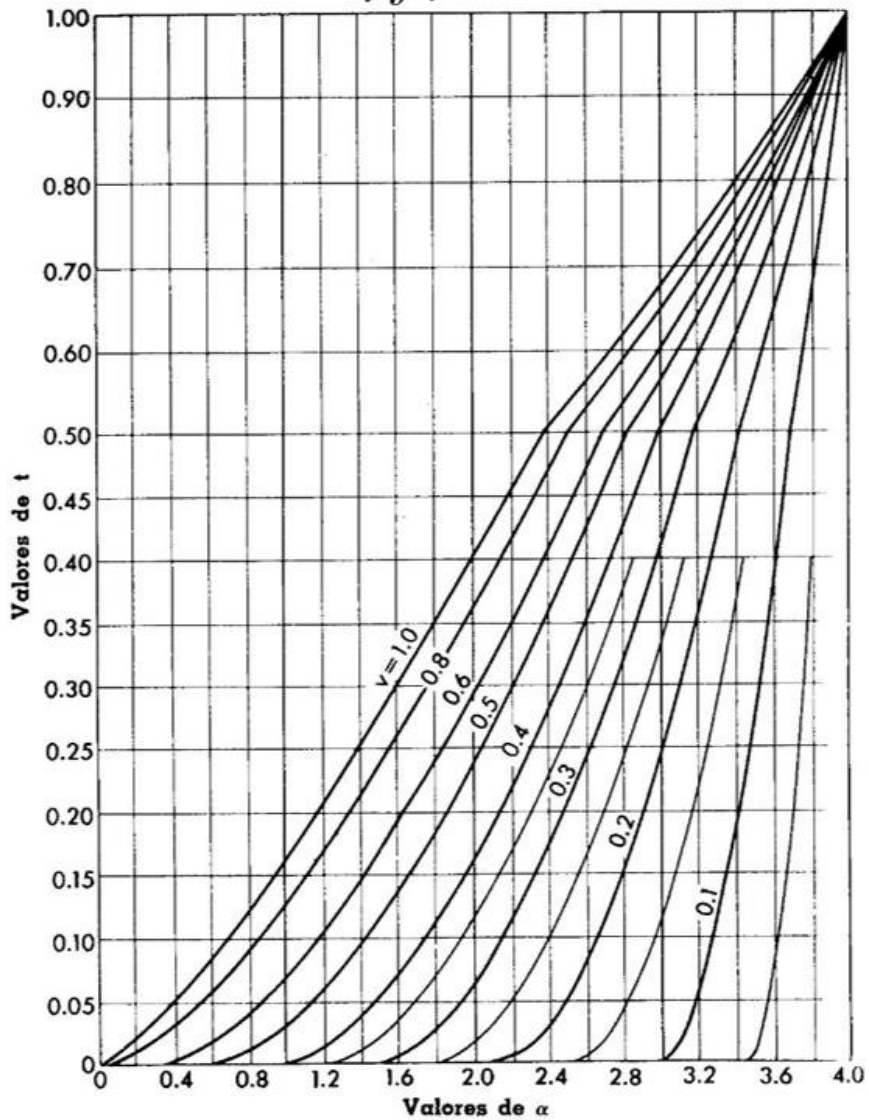
**GRAFICA 6. VALORES DEL PARAMETRO ELASTICO  $\alpha$ , para el extremo grande de miembros con una cartela recta**



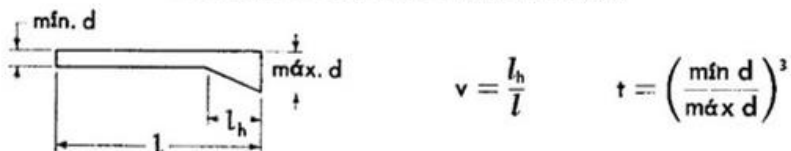
Para notas explicativas, véase página 469

Los valores del parámetro  $\alpha$  están determinados por la ecuación

$$\alpha = \frac{12}{l^3} \int_0^{l_h} x^2 dx$$



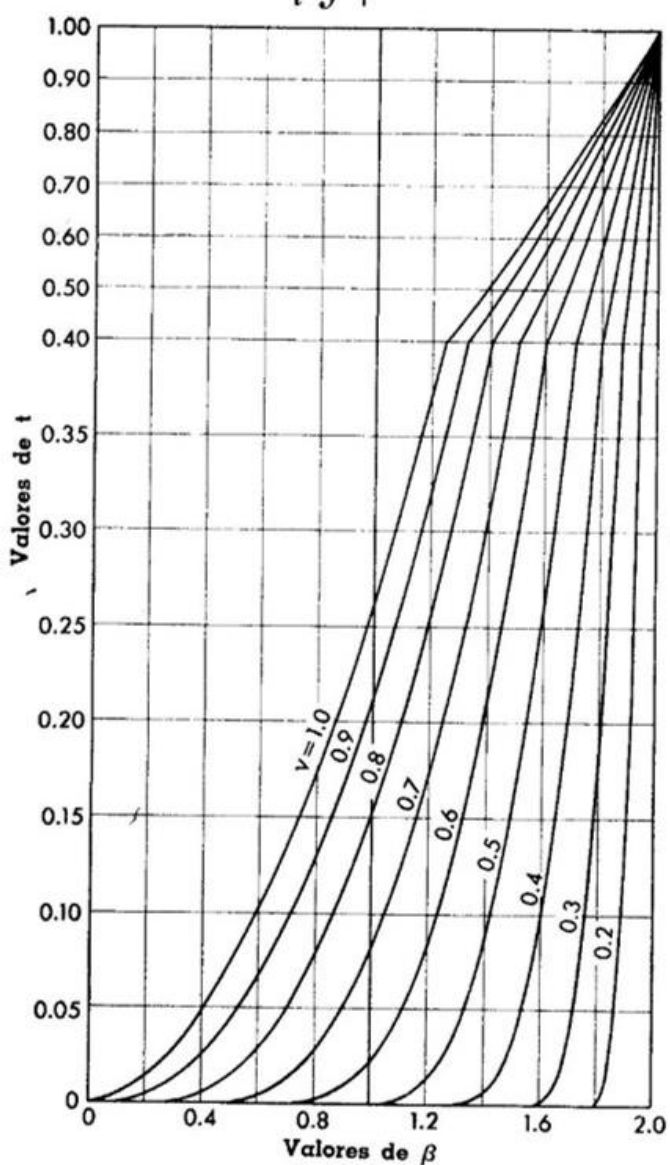
**GRAFICA 7. VALORES DEL PARAMETRO ELASTICO  $\beta$ , para cualquier extremo de miembros con una cartela recta**



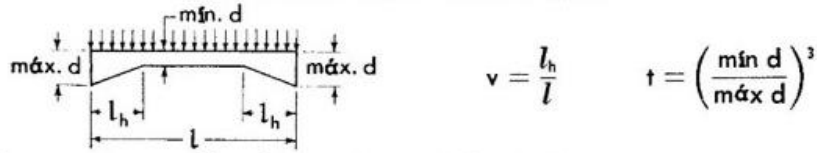
Para notas explicativas, véase página 469

Los valores del parámetro  $\beta$  están determinados por la ecuación

$$\beta = \frac{12}{l^3} \int_0^{l_0} (l-x)x \, dx$$



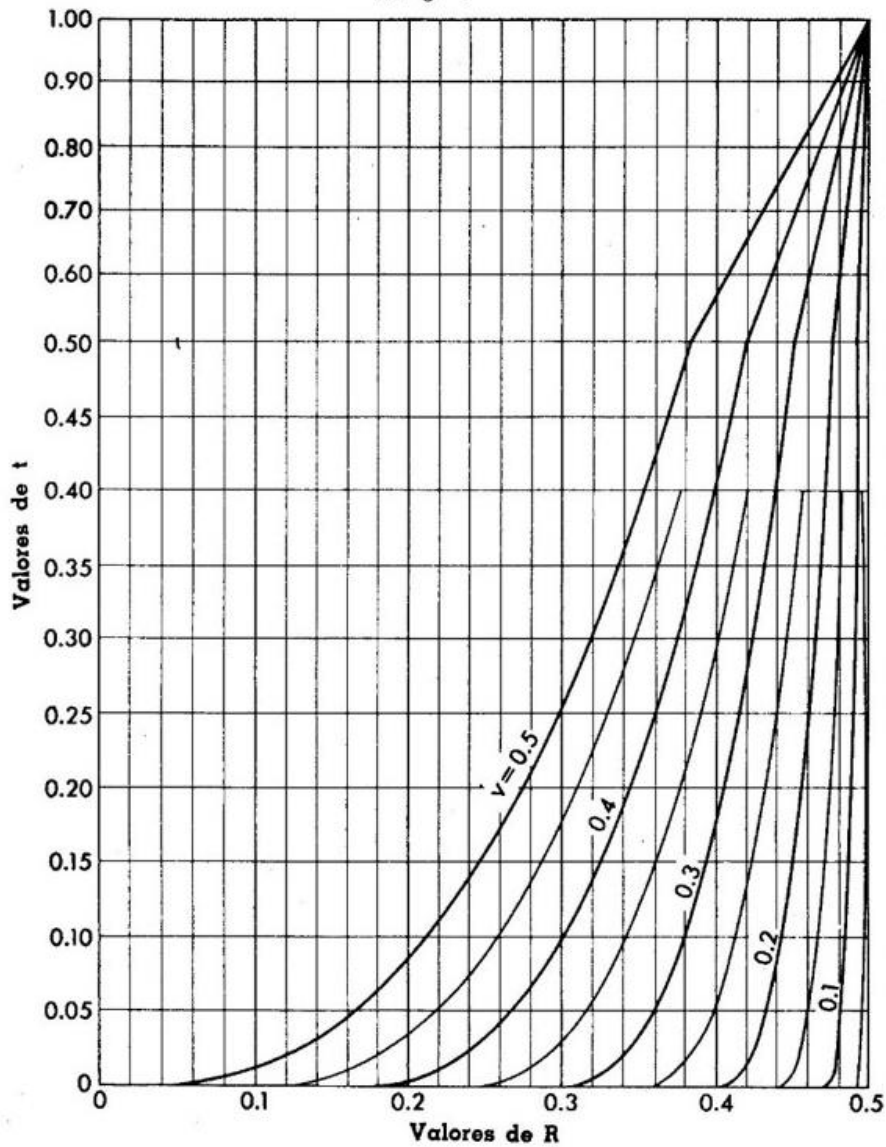
**GRAFICA 11. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para cualquier extremo de miembros simétricos con cartelas rectas; carga uniformemente distribuida**



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

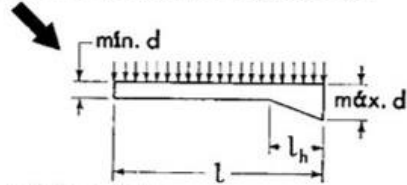
$$R = \frac{12}{W I^3} \int_0^{l_0} M(l-x) dx$$



**GRAFICA 13. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para el extremo pequeño de miembros con una cartela recta; carga uniformemente repartida**

$$v = \frac{l_h}{l}$$

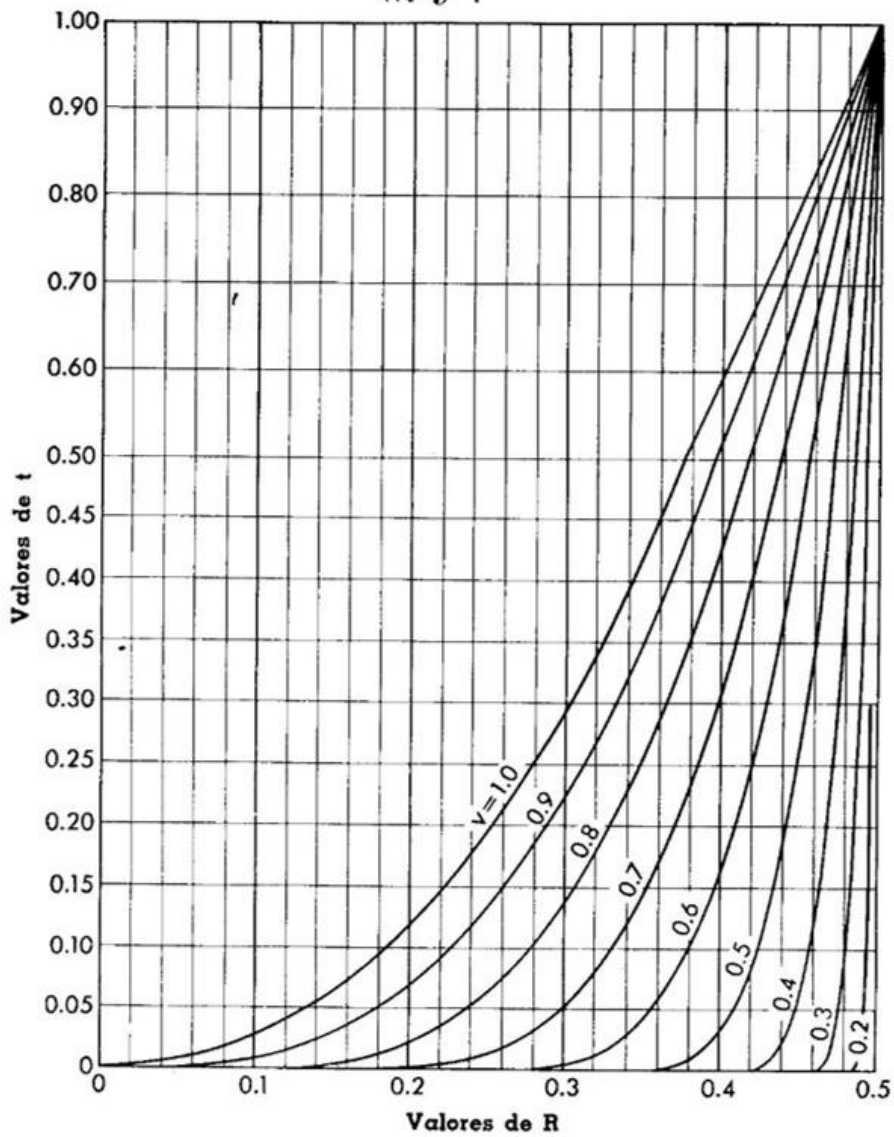
$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3$$



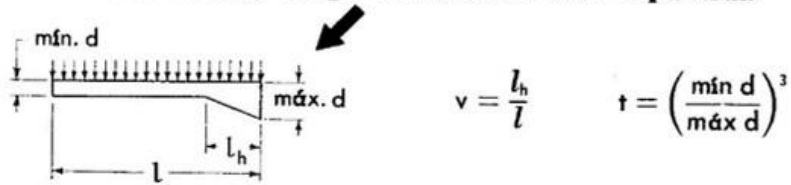
Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

$$R = \frac{12}{Wl^3} \int_0^{l_h} M(l-x) dx$$



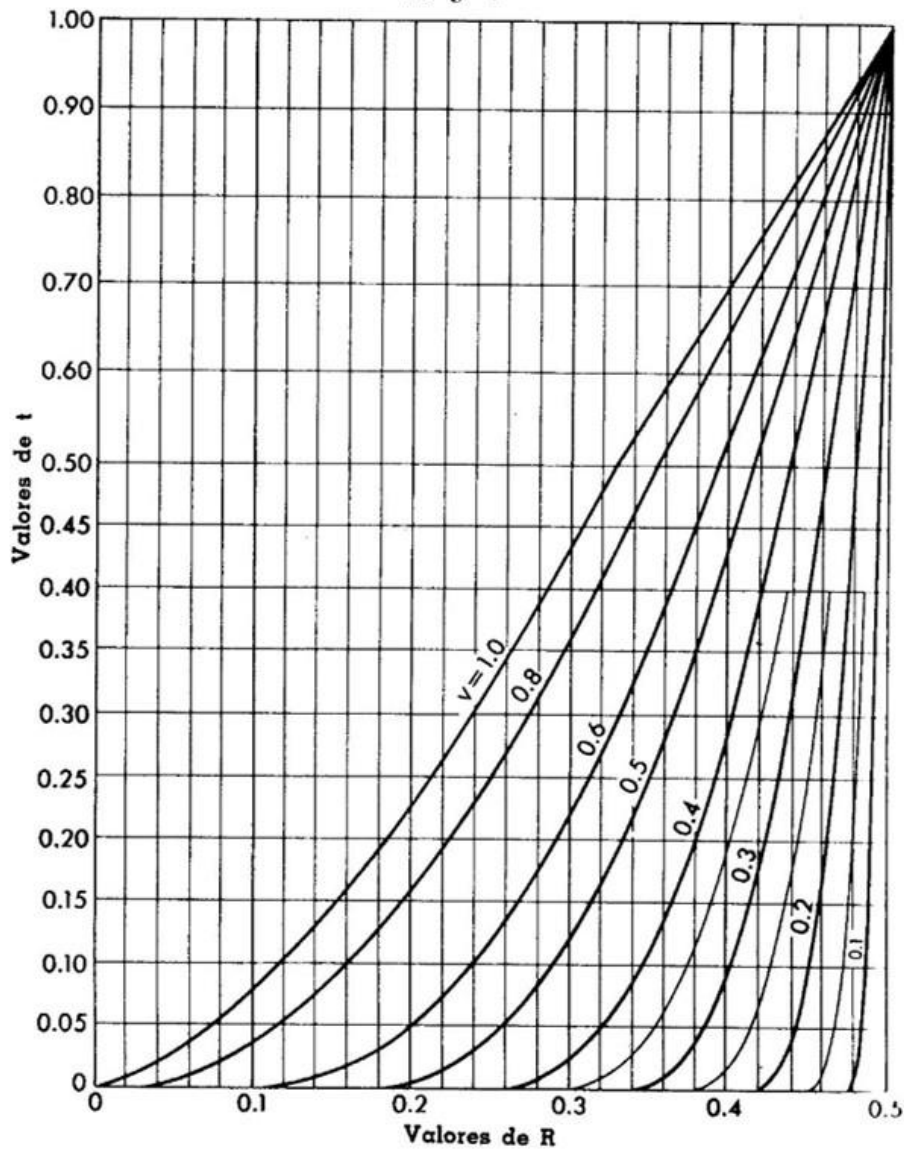
**GRAFICA 14. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para el extremo pequeño de miembros con una cartela recta; carga uniformemente repartida**



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

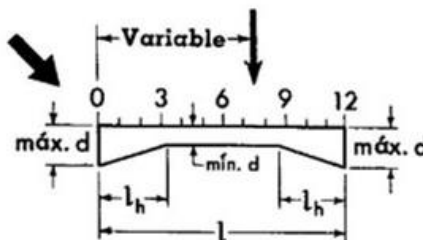
$$R = \frac{12}{Wl^3} \int_0^{l_0} Mx \, dx$$



**TABLA 1. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para el extremo izquierdo de miembros simétricos con cartelas rectas; carga concentrada**

$$v = \frac{l_h}{l}$$

$$t = \left( \frac{\text{mín } d}{\text{máx } d} \right)^3$$



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

$$R = \frac{12}{Pl^3} \int_0^{l_0} M(l-x) dx$$

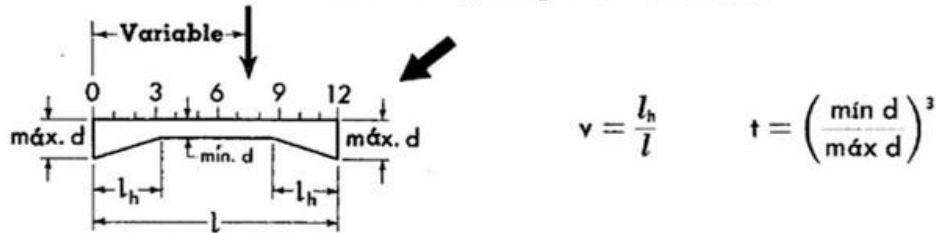
v	t	Carga en un punto											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0.50	0.00												
	0.03	0.055	0.107	0.154	0.194	0.223	0.233	0.212	0.175	0.134	0.090	0.046	
	0.05	0.068	0.133	0.190	0.235	0.268	0.276	0.252	0.211	0.162	0.109	0.054	
	0.10	0.095	0.180	0.252	0.308	0.343	0.349	0.319	0.269	0.208	0.140	0.071	
	0.20	0.132	0.245	0.335	0.401	0.437	0.438	0.402	0.341	0.265	0.181	0.091	
	0.50	0.200	0.373	0.491	0.572	0.605	0.594	0.553	0.475	0.372	0.256	0.130	
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	
0.40	0.00	0.050	0.102	0.152	0.203	0.252	0.270	0.246	0.197	0.148	0.098	0.049	
	0.03	0.097	0.191	0.280	0.356	0.410	0.419	0.388	0.323	0.246	0.164	0.083	
	0.05	0.109	0.214	0.307	0.388	0.440	0.448	0.413	0.346	0.264	0.178	0.089	
	0.10	0.131	0.252	0.355	0.438	0.488	0.492	0.455	0.384	0.295	0.200	0.100	
	0.20	0.161	0.304	0.420	0.505	0.552	0.551	0.509	0.431	0.335	0.227	0.114	
	0.50	0.227	0.401	0.536	0.625	0.661	0.652	0.600	0.515	0.406	0.280	0.143	
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	
0.35	0.00	0.077	0.155	0.232	0.308	0.370	0.382	0.354	0.290	0.218	0.146	0.072	
	0.03	0.120	0.235	0.344	0.437	0.492	0.497	0.460	0.389	0.296	0.199	0.100	
	0.05	0.131	0.254	0.370	0.462	0.514	0.518	0.479	0.406	0.311	0.209	0.104	
	0.10	0.150	0.289	0.410	0.504	0.553	0.553	0.511	0.436	0.335	0.227	0.114	
	0.20	0.178	0.335	0.462	0.556	0.601	0.598	0.551	0.472	0.366	0.248	0.125	
	0.50	0.235	0.421	0.562	0.650	0.686	0.676	0.620	0.533	0.421	0.288	0.148	
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	
0.30	0.00	0.104	0.211	0.316	0.418	0.475	0.480	0.449	0.377	0.284	0.190	0.095	
	0.03	0.144	0.283	0.413	0.515	0.564	0.565	0.523	0.448	0.344	0.230	0.115	
	0.05	0.154	0.300	0.433	0.534	0.581	0.580	0.536	0.458	0.355	0.239	0.119	
	0.10	0.169	0.329	0.466	0.564	0.610	0.605	0.562	0.480	0.372	0.252	0.126	
	0.20	0.193	0.366	0.508	0.604	0.646	0.640	0.590	0.505	0.395	0.269	0.136	
	0.50	0.244	0.440	0.580	0.672	0.707	0.695	0.638	0.548	0.433	0.300	0.152	
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	

**TABLA 1 (Continúa)**

v	f	Carga en un punto										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.25	0.00	0.134	0.271	0.407	0.512	0.562	0.563	0.522	0.448	0.344	0.229	0.114
	0.03	0.170	0.334	0.482	0.582	0.625	0.620	0.576	0.494	0.385	0.259	0.130
	0.05	0.178	0.347	0.497	0.595	0.638	0.632	0.584	0.503	0.392	0.265	0.132
	0.10	0.192	0.371	0.520	0.616	0.658	0.650	0.601	0.517	0.404	0.275	0.138
	0.20	0.214	0.400	0.551	0.644	0.683	0.672	0.620	0.533	0.419	0.286	0.144
	0.50	0.253	0.456	0.599	0.690	0.727	0.714	0.655	0.562	0.444	0.304	0.158
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166
0.20	0.00	0.167	0.337	0.492	0.593	0.636	0.630	0.584	0.502	0.394	0.264	0.132
	0.03	0.194	0.377	0.539	0.637	0.677	0.667	0.617	0.532	0.418	0.277	0.140
	0.05	0.199	0.388	0.548	0.646	0.684	0.674	0.623	0.536	0.422	0.281	0.142
	0.10	0.210	0.406	0.568	0.660	0.697	0.686	0.632	0.545	0.430	0.289	0.144
	0.20	0.226	0.424	0.584	0.678	0.719	0.701	0.646	0.556	0.438	0.298	0.148
	0.50	0.259	0.464	0.619	0.707	0.743	0.727	0.668	0.572	0.454	0.311	0.160
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166



**TABLA 2. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para el extremo derecho de miembros simétricos con cartelas rectas; carga concentrada**



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

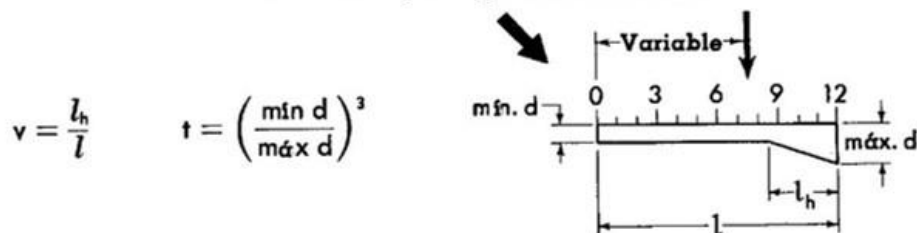
$$R = \frac{12}{Pl^3} \int_0^{l_0} Mx \, dx$$

		Carga en un punto										
v	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.50	0.00											
	0.03	0.046	0.090	0.134	0.175	0.212	0.233	0.223	0.194	0.154	0.107	0.055
	0.05	0.054	0.109	0.162	0.211	0.252	0.276	0.268	0.235	0.190	0.133	0.068
	0.10	0.071	0.140	0.208	0.269	0.319	0.349	0.343	0.308	0.252	0.180	0.095
	0.20	0.091	0.181	0.265	0.341	0.402	0.438	0.437	0.401	0.335	0.245	0.132
	0.50	0.130	0.256	0.372	0.475	0.553	0.594	0.605	0.572	0.491	0.373	0.200
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
0.40	0.00	0.049	0.098	0.148	0.197	0.246	0.270	0.252	0.203	0.152	0.102	0.050
	0.03	0.083	0.164	0.246	0.323	0.388	0.419	0.410	0.356	0.280	0.191	0.097
	0.05	0.089	0.178	0.264	0.346	0.413	0.448	0.440	0.388	0.307	0.214	0.109
	0.10	0.100	0.200	0.295	0.384	0.455	0.492	0.488	0.438	0.355	0.252	0.131
	0.20	0.114	0.227	0.335	0.431	0.509	0.551	0.552	0.505	0.420	0.304	0.161
	0.50	0.143	0.280	0.406	0.515	0.600	0.652	0.661	0.625	0.536	0.401	0.227
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
0.35	0.00	0.072	0.146	0.218	0.290	0.354	0.382	0.370	0.308	0.232	0.155	0.077
	0.03	0.100	0.199	0.296	0.389	0.460	0.497	0.492	0.437	0.344	0.235	0.120
	0.05	0.104	0.209	0.311	0.406	0.479	0.518	0.514	0.462	0.370	0.254	0.131
	0.10	0.114	0.227	0.335	0.436	0.511	0.553	0.553	0.504	0.410	0.289	0.150
	0.20	0.125	0.248	0.366	0.472	0.551	0.598	0.601	0.556	0.462	0.335	0.178
	0.50	0.148	0.288	0.421	0.533	0.620	0.676	0.686	0.650	0.562	0.421	0.235
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
0.30	0.00	0.095	0.190	0.284	0.377	0.449	0.480	0.475	0.418	0.316	0.211	0.104
	0.03	0.115	0.230	0.344	0.448	0.523	0.565	0.564	0.515	0.413	0.283	0.144
	0.05	0.119	0.239	0.355	0.458	0.536	0.580	0.581	0.534	0.433	0.300	0.154
	0.10	0.126	0.252	0.372	0.480	0.562	0.605	0.610	0.564	0.466	0.329	0.169
	0.20	0.136	0.269	0.395	0.505	0.590	0.640	0.646	0.604	0.508	0.366	0.193
	0.50	0.152	0.300	0.433	0.548	0.638	0.695	0.707	0.672	0.580	0.440	0.244
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293

**TABLA 2 (Continúa)**

v	t	Carga en un punto										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.25	0.00	0.114	0.229	0.344	0.448	0.522	0.563	0.562	0.512	0.407	0.271	0.134
	0.03	0.130	0.259	0.385	0.494	0.576	0.620	0.625	0.582	0.482	0.334	0.170
	0.05	0.132	0.265	0.392	0.503	0.584	0.632	0.638	0.595	0.497	0.347	0.178
	0.10	0.138	0.275	0.404	0.517	0.601	0.650	0.658	0.616	0.520	0.371	0.192
	0.20	0.144	0.286	0.419	0.533	0.620	0.672	0.683	0.644	0.551	0.400	0.214
	0.50	0.158	0.304	0.444	0.562	0.655	0.714	0.727	0.690	0.599	0.456	0.253
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
0.20	0.00	0.132	0.264	0.394	0.502	0.584	0.630	0.636	0.593	0.492	0.337	0.167
	0.03	0.140	0.277	0.418	0.532	0.617	0.667	0.677	0.637	0.539	0.377	0.194
	0.05	0.142	0.281	0.422	0.536	0.623	0.674	0.684	0.646	0.548	0.388	0.199
	0.10	0.144	0.289	0.430	0.545	0.632	0.686	0.697	0.660	0.568	0.406	0.210
	0.20	0.148	0.298	0.438	0.556	0.646	0.701	0.719	0.678	0.584	0.424	0.226
	0.50	0.160	0.311	0.454	0.572	0.668	0.727	0.743	0.707	0.619	0.464	0.259
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293

**TABLA 5. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para el extremo pequeño de miembros con una cartela recta; carga concentrada**



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

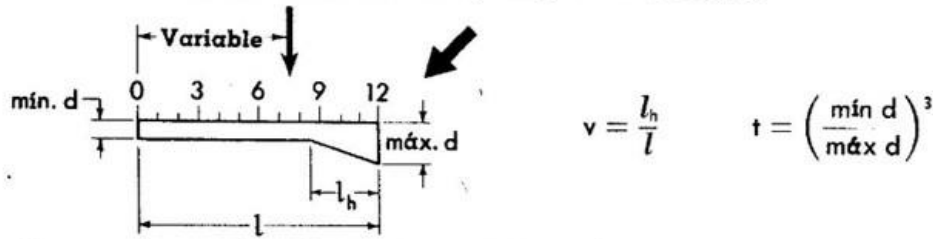
$$R = \frac{12}{Pl^3} \int_0^{l_0} M(l-x) dx$$

v	t	Carga en un punto										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.00	0.00											
	0.03	0.095	0.143	0.163	0.166	0.158	0.143	0.125	0.101	0.078	0.053	0.028
	0.05	0.114	0.176	0.205	0.212	0.204	0.187	0.162	0.133	0.102	0.070	0.035
	0.10	0.145	0.230	0.276	0.290	0.284	0.264	0.232	0.192	0.148	0.100	0.053
	0.20	0.181	0.298	0.365	0.392	0.391	0.367	0.326	0.275	0.212	0.145	0.072
	0.50	0.239	0.406	0.512	0.566	0.578	0.554	0.502	0.426	0.332	0.228	0.116
1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	
0.50	0.00	0.251	0.426	0.534	0.574	0.563	0.500	0.416	0.332	0.250	0.167	0.083
	0.03	0.268	0.458	0.578	0.638	0.642	0.596	0.515	0.419	0.317	0.211	0.106
	0.05	0.270	0.463	0.587	0.649	0.655	0.612	0.533	0.434	0.330	0.221	0.110
	0.10	0.274	0.472	0.600	0.665	0.676	0.637	0.560	0.460	0.352	0.236	0.119
	0.20	0.278	0.481	0.613	0.684	0.698	0.664	0.592	0.492	0.378	0.256	0.128
	0.50	0.286	0.496	0.634	0.714	0.736	0.709	0.650	0.551	0.428	0.293	0.149
1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	
0.40	0.00	0.272	0.479	0.593	0.656	0.660	0.623	0.540	0.432	0.324	0.216	0.108
	0.03	0.280	0.484	0.618	0.689	0.704	0.672	0.598	0.491	0.373	0.248	0.125
	0.05	0.280	0.485	0.619	0.694	0.710	0.679	0.606	0.500	0.380	0.254	0.127
	0.10	0.283	0.491	0.626	0.702	0.721	0.692	0.622	0.516	0.394	0.266	0.133
	0.20	0.286	0.494	0.635	0.710	0.733	0.706	0.638	0.535	0.412	0.278	0.140
	0.50	0.289	0.503	0.643	0.727	0.752	0.730	0.665	0.566	0.443	0.304	0.156
1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	
0.35	0.00	0.277	0.480	0.613	0.685	0.700	0.668	0.589	0.479	0.359	0.240	0.119
	0.03	0.284	0.492	0.630	0.707	0.726	0.697	0.629	0.523	0.396	0.265	0.133
	0.05	0.286	0.494	0.632	0.709	0.730	0.702	0.634	0.529	0.404	0.270	0.136
	0.10	0.287	0.497	0.636	0.715	0.738	0.710	0.643	0.540	0.414	0.280	0.140
	0.20	0.288	0.500	0.642	0.721	0.745	0.721	0.654	0.554	0.428	0.289	0.145
	0.50	0.290	0.505	0.647	0.732	0.758	0.737	0.672	0.575	0.451	0.310	0.158
1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166	

**TABLA 5 (Continúa)**

v	t	Carga en un punto										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.30	0.00	0.278	0.488	0.630	0.700	0.721	0.694	0.624	0.521	0.392	0.262	0.131
	0.03	0.287	0.498	0.641	0.720	0.743	0.716	0.650	0.550	0.420	0.281	0.140
	0.05	0.288	0.500	0.641	0.721	0.744	0.720	0.655	0.553	0.425	0.286	0.143
	0.10	0.289	0.502	0.644	0.725	0.750	0.725	0.660	0.560	0.433	0.293	0.146
	0.20	0.290	0.504	0.647	0.728	0.754	0.732	0.667	0.569	0.442	0.299	0.150
	0.50	0.292	0.506	0.649	0.734	0.762	0.742	0.678	0.581	0.458	0.316	0.160
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166
0.25	0.00	0.287	0.493	0.640	0.715	0.742	0.714	0.655	0.553	0.422	0.282	0.140
	0.03	0.290	0.503	0.646	0.728	0.755	0.732	0.667	0.568	0.439	0.295	0.148
	0.05	0.290	0.504	0.647	0.730	0.755	0.733	0.668	0.570	0.443	0.299	0.149
	0.10	0.291	0.504	0.649	0.731	0.758	0.737	0.673	0.574	0.448	0.304	0.151
	0.20	0.292	0.506	0.650	0.734	0.762	0.739	0.678	0.578	0.454	0.308	0.155
	0.50	0.292	0.508	0.652	0.738	0.766	0.745	0.683	0.586	0.461	0.322	0.163
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166
0.20	0.00	0.292	0.504	0.648	0.728	0.757	0.734	0.672	0.575	0.444	0.299	0.149
	0.03	0.292	0.506	0.649	0.734	0.762	0.739	0.678	0.580	0.454	0.308	0.158
	0.05	0.292	0.506	0.649	0.735	0.762	0.742	0.678	0.581	0.456	0.313	0.160
	0.10	0.292	0.507	0.650	0.736	0.763	0.743	0.680	0.583	0.458	0.317	0.161
	0.20	0.292	0.508	0.651	0.737	0.766	0.745	0.683	0.586	0.461	0.318	0.163
	0.50	0.293	0.509	0.653	0.739	0.768	0.748	0.685	0.589	0.464	0.322	0.164
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166
0.10	0.00	0.293	0.508	0.653	0.740	0.769	0.749	0.686	0.590	0.467	0.322	0.162
	0.03	0.293	0.509	0.653	0.740	0.769	0.749	0.688	0.592	0.467	0.322	0.162
	0.05	0.293	0.509	0.653	0.740	0.769	0.749	0.688	0.592	0.467	0.323	0.163
	0.10	0.293	0.509	0.653	0.740	0.769	0.749	0.688	0.592	0.468	0.323	0.163
	0.20	0.293	0.509	0.653	0.740	0.769	0.749	0.688	0.592	0.468	0.323	0.164
	0.50	0.293	0.509	0.654	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.165
	1.00	0.293	0.509	0.656	0.740	0.769	0.750	0.689	0.593	0.468	0.324	0.166

**TABLA 6. VALORES DE LA CONSTANTE DE CARGA R, para el extremo grande de miembros con una cartela recta; carga concentrada**



Para notas explicativas, véase página 469

Los valores de la constante R están determinados por la ecuación

$$R = \frac{12}{Pl^3} \int_0^l Mx \, dx$$

v	t	Carga en un punto											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1.00	0.00												
	0.03	0.025	0.047	0.062	0.073	0.078	0.079	0.074	0.066	0.054	0.040	0.022	
	0.05	0.034	0.064	0.086	0.102	0.110	0.112	0.107	0.096	0.080	0.058	0.031	
	0.10	0.049	0.094	0.131	0.157	0.173	0.179	0.173	0.158	0.133	0.097	0.053	
	0.20	0.072	0.138	0.196	0.239	0.268	0.281	0.277	0.256	0.218	0.162	0.090	
	0.50	0.118	0.230	0.330	0.410	0.469	0.504	0.508	0.480	0.418	0.319	0.182	
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293	
0.50	0.00	0.082	0.157	0.220	0.259	0.272	0.251	0.209	0.167	0.125	0.084	0.042	
	0.03	0.104	0.203	0.288	0.350	0.385	0.386	0.352	0.296	0.230	0.157	0.080	
	0.05	0.109	0.212	0.301	0.370	0.409	0.414	0.383	0.328	0.259	0.180	0.091	
	0.10	0.119	0.228	0.325	0.401	0.449	0.462	0.437	0.383	0.310	0.218	0.114	
	0.20	0.128	0.250	0.356	0.443	0.500	0.524	0.509	0.458	0.378	0.272	0.145	
	0.50	0.148	0.286	0.412	0.516	0.594	0.636	0.638	0.598	0.514	0.385	0.216	
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293	
0.40	0.00	0.107	0.208	0.293	0.359	0.394	0.398	0.359	0.288	0.216	0.144	0.072	
	0.03	0.125	0.241	0.343	0.425	0.479	0.498	0.476	0.408	0.319	0.218	0.110	
	0.05	0.127	0.247	0.353	0.437	0.496	0.517	0.498	0.434	0.342	0.236	0.121	
	0.10	0.132	0.258	0.370	0.460	0.522	0.551	0.539	0.479	0.384	0.271	0.142	
	0.20	0.140	0.272	0.391	0.490	0.559	0.594	0.588	0.535	0.440	0.318	0.169	
	0.50	0.152	0.298	0.430	0.540	0.624	0.672	0.678	0.636	0.546	0.408	0.229	
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293	
0.35	0.00	0.118	0.230	0.332	0.404	0.454	0.469	0.442	0.362	0.275	0.184	0.091	
	0.03	0.133	0.258	0.370	0.458	0.521	0.550	0.535	0.473	0.371	0.254	0.130	
	0.05	0.136	0.263	0.377	0.469	0.534	0.565	0.554	0.494	0.392	0.270	0.138	
	0.10	0.140	0.271	0.391	0.487	0.557	0.593	0.586	0.530	0.430	0.301	0.157	
	0.20	0.145	0.282	0.407	0.510	0.586	0.626	0.626	0.576	0.479	0.344	0.182	
	0.50	0.155	0.304	0.438	0.551	0.637	0.688	0.697	0.656	0.566	0.422	0.236	
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293	

**TABLA 6 (Continúa)**

v	t	Carga en un punto										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.30	0.00	0.127	0.251	0.362	0.448	0.506	0.535	0.516	0.451	0.343	0.229	0.114
	0.03	0.140	0.272	0.394	0.492	0.560	0.596	0.592	0.538	0.431	0.295	0.149
	0.05	0.143	0.277	0.398	0.498	0.572	0.610	0.605	0.553	0.446	0.310	0.158
	0.10	0.146	0.286	0.408	0.512	0.590	0.631	0.630	0.581	0.479	0.336	0.174
	0.20	0.150	0.294	0.422	0.528	0.611	0.656	0.660	0.616	0.516	0.372	0.198
	0.50	0.157	0.308	0.445	0.562	0.649	0.703	0.715	0.678	0.587	0.440	0.241
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
	0.25	0.00	0.140	0.269	0.390	0.486	0.557	0.590	0.590	0.533	0.422	0.282
0.03		0.148	0.288	0.415	0.520	0.598	0.641	0.641	0.594	0.491	0.344	0.173
0.05		0.149	0.292	0.419	0.524	0.604	0.649	0.650	0.604	0.505	0.353	0.180
0.10		0.151	0.296	0.426	0.535	0.618	0.664	0.668	0.626	0.527	0.374	0.196
0.20		0.155	0.302	0.436	0.550	0.634	0.684	0.692	0.652	0.557	0.403	0.215
0.50		0.160	0.313	0.451	0.570	0.661	0.716	0.731	0.696	0.606	0.458	0.252
1.00		0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
0.20		0.00	0.149	0.288	0.416	0.522	0.602	0.648	0.650	0.606	0.499	0.342
	0.03	0.154	0.300	0.432	0.544	0.628	0.677	0.685	0.643	0.547	0.390	0.207
	0.05	0.155	0.301	0.436	0.548	0.632	0.683	0.691	0.652	0.556	0.401	0.206
	0.10	0.156	0.305	0.440	0.554	0.641	0.694	0.703	0.665	0.571	0.416	0.217
	0.20	0.158	0.310	0.446	0.563	0.652	0.706	0.718	0.682	0.589	0.436	0.233
	0.50	0.162	0.317	0.457	0.578	0.671	0.728	0.744	0.712	0.623	0.474	0.267
	1.00	0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293
	0.10	0.00	0.164	0.316	0.454	0.574	0.668	0.724	0.738	0.703	0.616	0.462
0.03		0.164	0.318	0.458	0.580	0.672	0.731	0.748	0.715	0.628	0.476	0.263
0.05		0.164	0.318	0.460	0.581	0.674	0.732	0.749	0.718	0.630	0.480	0.264
0.10		0.165	0.319	0.461	0.582	0.676	0.734	0.752	0.720	0.634	0.484	0.268
0.20		0.165	0.320	0.463	0.584	0.679	0.738	0.756	0.725	0.638	0.490	0.274
0.50		0.166	0.322	0.466	0.589	0.684	0.744	0.763	0.733	0.648	0.499	0.288
1.00		0.166	0.324	0.468	0.593	0.689	0.750	0.769	0.740	0.656	0.509	0.293

## Bibliografía

- 1.- Leontovich, V. Pórticos y Arcos, Soluciones condensadas para el análisis estructural. 11ª ed. México: Editorial Continental S. A.; 1980.
- 2.- Leontovich, V. Concept of elastic parameters. J. Proceedings American Concrete Inst. 1958 May 1; 54(5):987-1008
- 3.- Form.ShowDialog (Método) (). Microsoft Developer Network [Citado 25 Jul 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/c7ykbedk\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/c7ykbedk(v=vs.110).aspx)
- 4.- DataTable.Compute(Método) (String, String). Microsoft Developer Network [Citado 5 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.data.datatable.compute\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.data.datatable.compute(v=vs.110).aspx)
- 5.- Aplicaciones de interfaz de múltiples documentos (MDI). Microsoft Developer Network [Citado 7 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/xyhh2e7e\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/xyhh2e7e(v=vs.110).aspx)
- 6.- Crear formularios principales MDI. Microsoft Developer Network [Citado 7 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/d4dabts7\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/d4dabts7(v=vs.110).aspx)
- 7.- Crear formularios MDI secundarios. Microsoft Developer Network [Citado 7 Ago. 2014]. Disponible en: [http://msdn.microsoft.com/es-MX/library/7aw8zc76\(v=vs.110\).aspx](http://msdn.microsoft.com/es-MX/library/7aw8zc76(v=vs.110).aspx)
- 8.- Introducción de datos por el usuario en los cuadros de diálogo. Microsoft Developer Network [Citado 12 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/1s9ws53w\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/1s9ws53w(v=vs.110).aspx)
- 9.- Crear cuadros de diálogo en tiempo de diseño. Microsoft Developer Network [Citado 12 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/55cz5x2c\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/55cz5x2c(v=vs.110).aspx)
- 10.- FormBorderStyle (Enumeración). Microsoft Developer Network [Citado 18 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/hw8kes41\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/hw8kes41(v=vs.110).aspx)
- 11.- Form.DialogResult (Propiedad). Microsoft Developer Network [Citado 18 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.forms.form.dialogresult\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.forms.form.dialogresult(v=vs.110).aspx)

- 12.- Mostrar formularios Windows Forms modales y no modales. Microsoft Developer Network [Citado 18 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/39wcs2dh\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/39wcs2dh(v=vs.110).aspx)
- 13.- Crear DataTable. Microsoft Developer Network [Citado 22 Ago. 2014]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/6zd7cwzh\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/6zd7cwzh(v=vs.110).aspx)
- 14.- MsgBox (Función, Visual Basic). Microsoft Developer Network [Actualizado Nov 2007; Citado 22 Ene 2015]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/139z2azd\(v=vs.90\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/139z2azd(v=vs.90).aspx)
- 15.- Creando objetos Graphics, Pen y Font; y manejando las estructuras Pens y Color [Citado 6 Mar 2015]. Disponible en: [http://www.elguille.info/colabora/NET2005/Percynet\\_GDI\\_II\\_Graphics\\_Pen\\_Font\\_Color.htm](http://www.elguille.info/colabora/NET2005/Percynet_GDI_II_Graphics_Pen_Font_Color.htm)
- 16.- Adjustable GDI+ Arrows Caps in VB.NET. .Net Heaven [Citado 7 Mar 2015]. Disponible en: <http://www.dotnetheaven.com/article/adjustable-gdi-arrow-caps-in-vb.net>
- 17.- Tutorial: Crear e implementar interfaces (Visual Basic). Microsoft Developer Network [Citado 11 Mar 2015] Disponible en: <https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/cd43d244.aspx>
- 18.- Photon. VB Gadgets. [Citado 24 Mar 2014] Disponible en: <http://vbgadgets.weebly.com/photon.html>
- 19.-Permitir sólo números, carácter separador y negativo en celdas de un control DataGridView, Martínez Montejo E. [Citado 10 Ene 2015]. Disponible en: <http://mvp-access.es/softjaen/vbnet/framework/dgv/sjvbnetdgv01.htm>
- 20.- Pasar argumentos por valor y por referencia. Microsoft Developer Network. [Citado 5 Abr 2015]. Disponible en: <https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/ddck1z30.aspx>
- 21.- ByVal and ByRef in VB.net, Free visual basic .net course. Home and Learn. [Citado 5 Abr 2015]. Disponible en: <http://www.homeandlearn.co.uk/NET/nets9p4.html>
- 22.- Cómo: Especificar el icono de una aplicación (Visual Basic, C#). Microsoft Developer Network [Citado 14 Abr 2015]. Disponible en: <https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/339stzf7.aspx>
- 23.- Tuttini, Leandro. Comunicar formularios MDI [Citado 21 Feb 2015]. Disponible en: <http://ltuttini.blogspot.com.ar/2009/09/c-comunicar-formularios-mdi.html>



24.- Window.Icon (Propiedad). Microsoft Developer Network [Citado 14 Abr 2015]. Disponible en: <https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.window.icon.aspx>

25.- SaveFileDialog (Clase). Microsoft Developer Network [Citado 13 Oct 2015]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.forms.savefiledialog\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.forms.savefiledialog(v=vs.110).aspx)

26.- OpenFileDialog Class. Microsoft Developer Network [Citado 13 Oct 2015]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.controls.openfiledialog\(v=vs.95\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.controls.openfiledialog(v=vs.95).aspx)

27.- FileDialog.Filter (Propiedad). Microsoft Developer Network [Citado 13 Oct 2015]. Disponible en: [https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.forms.filedialog.filter\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/es-mx/library/system.windows.forms.filedialog.filter(v=vs.110).aspx)