Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **21** (2021) 011302 (106-112) AKU J. Sci. Eng. **21** (2021) 011302 (106-112)

DOI: 10.35414/akufemubid.803511

Araştırma Makalesi / Research Article

Sönüm Terimli Caputo Kesirli Fark Denklemlerinin Salınımlılığı

Tuğba YALÇIN UZUN[1], Sermin ÖZTÜRK[2*], Hüsniye ÖZ[3]

[1,2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

[3] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Afyonkarahisar.*

[*] *Sorumlu Yazar, e-posta: ssahin@aku.edu.tr ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-8535-0792*
tyalcin@aku.edu.tr ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-2619-6094
husniye_dt03060@hotmail.com ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5552-4248

Geliş Tarihi: 01.10.2020 Kabul Tarihi: 10.01.2021

Anahtar kelimeler
Salınımlılık; İkinci taraflı kesirli fark denklemi; Sönüm terimi; Caputo fark operatörü

Öz

Bu makalede, $\alpha \in (n-1,n)$ bir sabit $(n \in \mathbb{N})$ $\Delta_C^\alpha x$, x'in α-yıncı mertebeden kesirli Caputo kesirli fark operatörü ve $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ olmak üzere, $\Delta^k x(t)|_{t=0} = x_k, k = 1,2,\ldots,n-1$ başlangıç şartına sahip $(1+p(t))\Delta\big(\Delta_C^\alpha x(t)\big) + p(t)\Delta_C^\alpha x(t) + f\big(t,x(t)\big) = g(t),\ t \in \mathbb{N}_0$ ile verilen ikinci taraflı sönüm terimli kesirli fark denkleminin salınımlılığı için bir yeter şart elde edilmiştir. Bu çalışma için "$p(t)$ ve $g(t)$ reel fonksiyonlar, $p(t) > -1, f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $x \neq 0,\ t_0 \in \mathbb{N}_0$" önermesi geçerlidir. Makalenin sonunda açıklayıcı bir örnek verilmiştir.

Oscillation of Caputo Fractional Difference Equations with Damping Term

Keywords
Oscillation; Forced fractional difference equation; Damping term; Caputo difference operator

Abstract

In this paper, we obtain a sufficent condition for the oscillation of forced fractional difference equations with damping term of the form $(1+p(t))\Delta\big(\Delta_C^\alpha x(t)\big) + p(t)\Delta_C^\alpha x(t) + f\big(t,x(t)\big) = g(t),\ t \in \mathbb{N}_0$ with initial condition $\Delta^k x(t)|_{t=0} = x_k, k = 1,2,\ldots,n-1$ where $\alpha \in (n-1,n)$ is a constant $(n \in \mathbb{N})$, $\Delta_C^\alpha x$ is the Caputo fractional difference operator of order α of x and $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$. For this study, the proposition "$p(t)$ and $g(t)$ are real functions, $p(t) > -1, f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ and $x \neq 0,\ t_0 \in \mathbb{N}_0$" is held. An illustrative example is given at the end of the paper.

1. Giriş

Son zamanlarda, kesirli diferansiyel denklemler teorisi birçok bilim insanı ve matematikçinin ilgisini çekmiştir. Çünkü birçok fiziksel problemin zaman veya mekana göre değişebilen kesirli mertebeli davranış sergilediği görülmüştür. Kesirli analiz, karmaşık yapıların modellenmesine "başka bir boyut" verir - bu nedenle en önemli uygulama alanları viskoelastisitedir. Viskoelastisite, malzemelerin davranışını tanımlayan bir disiplindir. Kesirli terimlerle elde edilen modellerin daha gerçekçi davranışları olduğu ve polimerik malzemenin viskoelastik özelliklerini çok iyi tanımladığı görülmüştür. Kesirli diferensiyel denklemler viskoelastik malzeme çalışmalarının yanı sıra sıvı akışı, reoloji, difüzif taşıma, elektrik ağları, elektromanyetik teori ve olasılık dahil olmak üzere birçok bilim ve mühendislik alanında kullanım bulmuştur.

Kesirli diferansiyel denklemlerin ayrık karşılığı olan kesirli fark denklemleri, kesirli diferensiyel denklemlere göre çok daha yakın bir geçmişe sahiptir. Son yıllarda, bu denklemlerin çözümlerinin varlığı, monotonluğu ve asimptotik davranışı gibi konuları inceleyen birçok çalışma yapılmıştır.

Kesirli diferansiyel denklemler teorisinin geliştirilmesi ile birlikte kesirli diferansiyel denklemlerin ve kesirli fark denklemlerinin çözümlerinin varlığı kadar davranışı, salınımlılığı, kararlılığı gibi konular da özellikle uygulamalı alanlar için önem kazanmıştır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili çalışmalar ilk olarak Grace *et al.* (2012) ile başlamıştır. Daha sonra birçok araştırmacı çeşitli tipten kesirli diferansiyel denklemler için salınımlılık koşulları elde etmiştir

(Chen et al 2013, Chen 2013, Tunc ve Tunc 2016, Yang et al 2015, Li 2015). Hatta bu çalışmalardaki sonuçları fark denklemleri için de uygulamışlardır (Abdalla et al 2017, Abdalla et al 2018, Alzabut and Abdeljawad 2014, Sagayaraj et al 2014).

Li (2016) çalışmasında

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big)+p(t)\Delta^{\alpha}x(t)+f\big(t,x(t)\big) = g(t), \qquad t\in\mathbb{N}_0$$

$$\Delta^{1-\alpha}x(t)|_{t=0}=x_0$$

sönüm terimli kesirli fark denklemi içeren başlangıç değer probleminin çözümünün salınımlılığını incelemiştir. Burada $\Delta^{\alpha}x(t)$, $x(t)$ nin α-ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli farkı ve $0<\alpha<1$ dır. Bu çalışmada ise aşağıda verilen yüksek mertebeden sönüm terimli kesirli fark denkleminin salınımlılığı incelenecektir.

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big(\Delta_C^{\alpha}x(t)\big)+p(t)\Delta_C^{\alpha}x(t)+f\big(t,x(t)\big) = g(t), \qquad t\in\mathbb{N}_0$$

$$\Delta^{k}x(t)|_{t=0}=x_k,\ k=1,2,\dots,n-1 \qquad (1)$$

Burada, $n-1<\alpha<n$ olmak üzere $\Delta_C^{\alpha}x$ α-ıncı mertebeden Caputo fark operatörü ve $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$ dir. Bu makalede,

(A) $p(t)$ ve $g(t)$ reel fonksiyonlar, $p(t)>-1$, $f:\mathbb{N}_0\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ve $x\neq 0$, $t_0\in\mathbb{N}_0$ için $xf(t,x)>0$ dır,

önermesi kabul edilecektir.

2. Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1 Bir n doğal sayısı için kesirli faktöriyel fonksiyonu, Γ Gamma fonksiyonu olmak üzere,

$$t^{(n)}=\prod_{j=0}^{n-1}(t-j)=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$$

şeklinde tanımlanır. α herhangi bir reel sayı olmak üzere, kesirli faktöriyel fonksiyonu daha genel olarak

$$t^{(\alpha)}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}$$

tanımlıdır.

İleri ve geri fark operatörleri sırasıyla

$$\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)$$

ve

$$\nabla f(t)=f(t)-f(t+1)$$

olarak tanımlanır. Şimdi, faktöriyel fonksiyonunun bazı temel özellikleri verilebilir.

Lemma 2.1

i. $\Delta t^{(\alpha)}=\alpha t^{(\alpha-1)}$

ii. $(t-\mu)t^{(\mu)}=t^{(\mu+1)}$, $\mu\in\mathbb{R}$

iii. $\mu^{\mu}=\Gamma(\mu+1)$

iv. $t\le r$ ise, $\alpha>r$ için $t^{(\alpha)}\le r^{(\alpha)}$ dır.

v. $0<\alpha<1$ ise $t^{(\alpha\nu)}\ge\big(t^{(\nu)}\big)^{\alpha}$

vi. $t^{(\alpha+\beta)}=(t-\beta)^{(\alpha)}t^{(\beta)}$

sağlanır (Abdeljawad, 2011).

$a,b\in\mathbb{R}$ için $\mathbb{N}_a=\{a,a+1,a+2,\dots\}$ ve ${}_b\mathbb{N}=\{b,b-1,b-2,\dots\}$ şeklinde tanımlansın. Eğer $\alpha>0$ ve $\sigma(s)=s+1$ ise, f fonksiyonunun α-ıncı mertebeden kesirli toplamı

$$\Delta^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}\big(t-\sigma(s)\big)^{(\alpha-1)}f(s)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\Delta^{-\alpha}$ operatörü $\mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı bir fonksiyonu $\mathbb{N}_{a+\alpha}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyona götürür. Benzer şekilde, $\alpha>0$ ve $\rho(s)=s-1$ için α-ıncı mertebeden (sağ) kesirli toplamı

$$\nabla^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t+\alpha}^{b}(\rho(s)-t)^{(\alpha-1)}f(s)$$

olarak tanımlanabilir.

Kesirli analizde tanımlanan kesirli diferansiyel tanımına benzer olarak sağ ve sol Riemann kesirli farkı sırasıyla $n=[\alpha]+1$ olmak üzere

$$\Delta^{\alpha}f(t)=\Delta^{n}\Delta^{-(n-\alpha)}f(t)$$

ve

$$\nabla^{\alpha} f(t) = (-1)^n \nabla^n \nabla^{-(n-\alpha)} f(t)$$

tanımlanır.

(1) başlangıç değer probleminin çözümünün davranışını incelemeden önce temel teoremin ispatında kullanacağımız bazı önemli lemmaları vereceğiz.

(1) başlangıç değer probleminin çözümü, bu başlangıç değer problemini sağlayan reel değerli bir $x(t)$, $t \in \mathbb{N}_a$ dizisidir. Eğer her $N > 0$ için $x(t)x(t+1) \leq 0$ olacak şekilde en az bir $t \geq N$ varsa (1) probleminin bir $x(t)$ çözümü salınımlıdır denir. Aksi durumda salınımlı değildir denir. Eğer bir denklemin her çözümü salınımlı ise bu denkleme salınımlıdır denir.

Lemma 2.2 f, $\mathbb{N}_a$ da tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $\mu, \nu > 0$ olmak üzere,

$$\Delta^{-\nu}[\Delta^{-\mu} f(t)] = \Delta^{-(\mu+\nu)} f(t) = \Delta^{-\mu}[\Delta^{-\nu} f(t)]$$

dir (Abdeljawad, 2011).

Tanım 2.2 $\alpha \notin \mathbb{N}, \alpha > 0$ olsun. Bir f fonksiyonunun α-ıncı mertebeden sağ ve sol Caputo kesirli farkları sırası ile

$$\Delta_C^{\alpha} f(t) = \Delta^{-(n-\alpha)} \Delta^{(n)} f(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-(n-\alpha)} \big(t - \sigma(s)\big)^{(n-\alpha-1)} \Delta_s^n f(s)$$

ve

$$\nabla_C^{\alpha} f(t) = \nabla^{-(n-\alpha)} \nabla^{(n)} f(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=t+(n-\alpha)}^{b} (\rho(s) - t)^{(n-\alpha-1)} \nabla_b^n f(s)$$

olarak tanımlanır. Burada $n = [\alpha] + 1$ dir (Abdeljawad, 2011).

Eğer $\alpha = n$ ise bu durumda

$$\Delta_C^{\alpha} f(t) = \Delta^n f(t) \text{ ve } \nabla_C^{\alpha} f(t) = \nabla_b^n f(t)$$

olur. Ayrıca açık olarak görülür ki, Δ_C^{α} operatörü $\mathbb{N}_a$ da tanımlı bir fonksiyonu $\mathbb{N}_{a+(n-\alpha)}$ da tanımlı bir fonksiyona ve , ∇_C^{α} operatörü ${}_b\mathbb{N}$ da tanımlı bir fonksiyonu ${}_{b-(n-\alpha)}\mathbb{N}$ da tanımlı bir fonksiyona götürür.

Teorem 2.1 Herhangi bir $\alpha > 0$ için

$$\Delta_C^{\alpha} f(t) = \Delta^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \Delta^k f(a)$$

ve

$$\nabla_C^{\alpha} f(t) = \nabla^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \nabla^k f(b)$$

olur.

Özel olarak, $0 < \alpha < 1$ olduğunda

$$\Delta_C^{\alpha} f(t) = \Delta^{\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{(-\alpha)}}{\Gamma(-\alpha+1)} f(a)$$

ve

$$\nabla_C^{\alpha} f(t) = \nabla^{\alpha} f(t) - \frac{(b-t)^{(-\alpha)}}{\Gamma(-\alpha+1)} f(b)$$

dir.

Önerme 2.1 $\alpha > 0$ ve f fonksiyonu sırasıyla $\mathbb{N}_a$ ve ${}_b\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı olmak üzere,

$$\Delta_{a+(n-\alpha)}^{-\alpha} \Delta_C^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k f(a)$$

ve

$$\nabla_{b-(n-\alpha)}^{-\alpha} \nabla_C^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^{(k)}}{k!} \nabla^k f(b)$$

dir. Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise

$$\Delta_{a+(n-\alpha)}^{-\alpha} \Delta_C^{\alpha} f(t) = f(t) - f(a)$$

ve

$$\nabla_{b-(n-\alpha)}^{-\alpha} \nabla_C^{\alpha} f(t) = f(t) - f(b)$$

olur.

Lemma 2.3 $\mu \in \mathbb{R}\{\dots, -2, -1\}$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^{-\nu} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{(\mu+\nu)}$$

olur.

3. Temel Bulgular

Bu bölümde (1) denkleminin salınımlılığı ile ilgili temel teorem verilecektir.

Teorem 3.1 M keyfi bir sabit ve

$$V(t)=\prod_{s=t_0}^{t-1}(1+p(s))$$

olmak üzere $t_0\in\mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{t\to\infty}\inf\left\{\sum_{s=0}^{t-\alpha}\frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{V(s)}\left[M+\sum_{\xi=t_0}^{s-1}g(\xi)V(\xi)\right]\right\}<0 \quad (2)$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}\sup\left\{\sum_{s=0}^{t-\alpha}\frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{V(s)}\left[M+\sum_{\xi=t_0}^{s-1}g(\xi)V(\xi)\right]\right\}>0 \quad (3)$$

kabul edilsin. Bu durumda (1) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

İspat Kabul edelim ki, $x(t)$ (1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun öyle ki $\mathbb{N}_{t_0}=\{t_0,t_0+1,t_0+2,\dots\}$ da hiç sıfırı bulunmasın. Bu durumda, $t\in\mathbb{N}_{t_0}$ için ya $x(t)>0$ ya da $x(t)<0$ olur.

1.Durum: , $t\in\mathbb{N}_{t_0}$ için $x(t)>0$ olsun. (A) kabulünden ve (1) denkleminden

$$\begin{aligned}\left(1+p(t)\right)\Delta\left(\Delta_C^\alpha x(t)\right)+p(t)\Delta_C^\alpha x(t)\\ =-f\left(t,x(t)\right)+g(t)<g(t)\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\Delta_C^\alpha x(t)V(t)\right)&=\Delta\left(\Delta_C^\alpha x(t)\right)V(t+1)\\&+\Delta_C^\alpha x(t)\Delta V(t)\\&=\Delta\left(\Delta_C^\alpha x(t)\right)\left(1+p(t)\right)V(t)\\&+\Delta_C^\alpha x(t)p(t)V(t)<g(t)V(t)\end{aligned}$$

dir. İki tarafın t_0 dan $t-1$ e toplamı alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\Delta_C^\alpha x(t)\right)V(t)&<\left(\Delta_C^\alpha x(t_0)\right)V(t_0)+\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)\\&=M+\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)\end{aligned}$$

olur. Burada $M=\left(\Delta_C^\alpha x(t_0)\right)V(t_0)$ dir. Böylece

$$\Delta_C^\alpha x(t)<\frac{M}{V(t)}+\frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafına $\Delta^{-\alpha}$ kesirli toplam operatörü uygulanırsa

$$\Delta^{-\alpha}\Delta_C^\alpha x(t)<\Delta^{-\alpha}\left[\frac{M}{V(t)}+\frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)\right]$$

olur. Bu eşitsizliğin sol tarafında Önerme 2.1 uygulanır ve

$$\Delta^{-\alpha}\Delta_C^\alpha x(t)=x(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(0)$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafında ise kesirli toplam operatörünün tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}&\Delta^{-\alpha}\left[\frac{M}{V(t)}+\frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)\right]\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\frac{M}{V(s)}+\frac{1}{V(s)}\sum_{\xi=t_0}^{s-1}g(\xi)V(\xi)\right]\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$x(t) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{s-1} g(\xi) V(\xi) \right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını t^{1-n} ile çarpılırsa

$$t^{1-n} x(t) < t^{1-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(0) + \frac{t^{1-n}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{s-1} g(\xi) V(\xi) \right]$$

elde edilir. Buradan

$t^{(k)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-k)}$ eşitliğini yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$t^{1-n} x(t) < t^{1-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-k+1) k!} \Delta^k x(0) + \frac{t^{1-n}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{s-1} g(\xi) V(\xi) \right]$$

haline dönüşür. Ayrıca,

$$\frac{\Gamma(t+1) t^{1-n}}{\Gamma(t+1-k)} = \frac{t(t-1)(t-2) \dots (t-(k-1))}{t^{n-1}}$$

olup, $t \to \infty$ için limit alınırsa $0 < k < n-1$ için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t(t-1)(t-2) \dots (t-(k-1))}{t^{n-1}} = 0$$

elde edilir. Bu durumda eşitsizliğin limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \{t^{1-n} x(t)\} \leq -\infty$$

olur ki bu durum $x(t) > 0$ kabulü ile çelişir.

2.Durum: $x(t) < 0$, $t \in \mathbb{N}_{t_0}$ olsun. (A) kabulünden

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big(\Delta_C^\alpha x(t)\big) + p(t)\Delta_C^\alpha x(t) = -f\big(t, x(t)\big) + g(t) > g(t)$$

olur. Buradan,

$$\Delta\Big(\big(\Delta_C^\alpha x(t)\big)V(t)\Big) > g(t)V(t)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının t_0 dan $t-1$ e toplamı alınırsa

$$\big(\Delta_C^\alpha x(t)\big)V(t) > \big(\Delta_C^\alpha x(t_0)\big)V(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) = M + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)$$

olur. Burada $M = \big(\Delta_C^\alpha x(t_0)\big)V(t_0)$ dır. O halde,

$$\Delta_C^\alpha x(t) > \frac{M}{V(t)} + \frac{1}{V(t)} \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)$$

dir. 1.Durum daki benzer yöntem kullanılırsa

$$\Gamma(\alpha) t^{1-n} x(t) > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(t+1) t^{1-n}}{\Gamma(t+1-k)} \frac{\Delta^k x(0)}{k!} + t^{1-n} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{s-1} g(\xi) V(\xi) \right]$$

elde edilir. $t \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\limsup_{t\to\infty} \{t^{1-n} x(t)\} \geq \infty$$

olur ki bu durum $x(t) < 0$ ile çelişir.

Örnek 3.1

$$\frac{3}{2}\Delta\left({}_{C}\Delta^{\frac{3}{2}}x(t)\right)+\frac{1}{2}{}_{C}\Delta^{\frac{3}{2}}x(t)+\frac{\Gamma\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2t\Gamma(t)}x(t)$$

$$=\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}$$

$$x(0)=0,\qquad \Delta x(0)=0$$

kesirli fark denklemini göz önüne alalım.

Burada $p(t)=1/2$, $f(t,x(t))=\frac{\Gamma\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2t\Gamma(t)}x(t)$ ve $g(t)=\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}$

şeklindedir. Ayrıca,

$$V(t)=\prod_{s=0}^{t-1}(1+p(t))=\prod_{s=0}^{t-1}(3/2)=\left(\frac{3}{2}\right)^{t}$$

yazılır. Buradan

$$g(t)=\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}>0$$

olduğu açıktır. O halde, $\alpha=3/2$ için

$$\sum_{s=0}^{t-3/2}\frac{(t-s-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{V(s)}\left[M+\sum_{\xi=0}^{s-1}g(\xi)V(\xi)\right]$$
$$=\sum_{s=0}^{t-3/2}(t-s-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^{t}\left[M\right.$$
$$\left.+\sum_{\xi=0}^{s-1}\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}\left(\frac{3}{2}\right)^{\xi}\right]>0$$

elde edilir. Bu ise Teorem 3.1 deki (2) koşulu ile çelişir. Böylece verilen bu denklemin her çözümü salınımlı değildir. Örnek olarak, $x(t)=t^{(3/2)}$ bu denklemin salınımlı olmayan bir çözümüdür. Yani;

$${}_{C}\Delta^{\frac{3}{2}}x(t)={}_{C}\Delta^{\frac{3}{2}}t^{(3/2)}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1-\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

ve

$$\Delta\left({}_{C}\Delta^{\frac{3}{2}}x(t)\right)=0$$

dır. Yukarıdaki denklemde $x(t)=t^{(3/2)}$ yerine yazılırsa bir çözüm olduğu görülebilir.

4. Tartışma ve Sonuç

Yüksek mertebeden Caputo fark denklemlerinin salınımlılığı ilgili yapılan çalışmalarda daha önce sönüm terimli fark denklemleri incelenmemiştir.
Bu çalışmada, ilk defa yüksek mertebeden sönüm terimli Caputo fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için bir salınımlılık şartı verilmiştir.

Teşekkür

Bu çalışma, Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 18.FEN.BİL.67 numaralı proje ile desteklenmiştir. Ayrıca, yapıcı yorumları ve katkılarından dolayı değerli hakemlere teşekkürü bir borç biliriz.

5. Kaynaklar

Abdalla, B., Abodayeh, K., Abdeljawad, Th., Alzabut, J., 2017. New oscillation criteria for forced nonlinear fractional difference equations. *Vietnam Journal of Mathematics,* **45**, 609–618.

Abdalla, B., Alzabut, J., Abdeljawad, T., 2018. On the oscillation of higher order fractional difference equations with mixed nonlinearities. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* **47**, 207–217.

Abdeljawad, T., 2011. On Riemann and Caputo fractional differences. *Computers & Mathematics with Applications,* **62**, 1602–1611.

Alzabut, J.O., Abdeljawad, T., 2014. Sufficient conditions for the oscillation of nonlinear fractional difference equations. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, **5**, 177–187.

Chen, D., Qu, P., Lan, Y., 2013. Forced oscillation of certain fractional differential equations. *Advances in Difference Equations,* **125**, 1–10.

Chen, D.X., 2013. Oscillatory behavior of a class of fractional differential equations with damping. *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin*, **75**, 107–118.

Grace, S.R., Agarwal, R.P., Wong, P.J.Y., Zafer, A., 2012. On the oscillation of fractional differential equations.

Fractional Calculus and Applied Analysis, **15**, 222–231.

Li, W.N., 2015. Forced oscillation criteria for a class of fractional partial differential equations with damping term. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, 1–6.

Li, W.N., 2016. Oscillation results for certain forced fractional difference equations with damping term. *Advances in Difference Equations*, **70**, 1–9.

Sagayaraj, M.R., Selvam, A.G.M., Loganathan, M.P., 2014. On the oscillation of nonlinear fractional difference equations. *Mathematica Aeterna*, **4**, 91–99.

Tunc, E., Tunc, O. 2016. On the oscillation of a class of damped fractional differential equations. *Miskolc Mathematical Notes*, **17**, 647–656.

Yang, J., Liu, A., Liu, T., 2015. Forced oscillation of nonlinear fractional differential equations with damping term. *Advances in Difference Equations*, **1**, 1–7.