
Comparação entre a aproximação hidrostática e a não-hidrostática na simulação numérica de escoamentos com superfície livre

Comparison between hydrostatic and non-hydrostatic pressure approximation in free surface flow numerical simulations

Leonardo Romero Monteiro e Edith Beatriz Camaño Schettini

Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

leonardoromeromonteiro@gmail.com, bcamano@iph.ufgrs.br

Recebido: 25/03/15 - Revisado: 11/05/15 - Aceito: 29/06/15

RESUMO

Nas simulações numéricas de escoamentos com superfície livre, frequentemente é utilizada a hipótese de que a pressão varia de forma hidrostática com a profundidade da lâmina de água. Neste trabalho, com a finalidade de analisar a influência desta simplificação, foi utilizado um código que possui dois módulos, um que considera a pressão variando de forma hidrostática e outro que considera a variação de forma não-hidrostática. O código, derivado das equações de Navier-Stokes e da Continuidade, utiliza um esquema semi-implícito em diferenças finitas, de primeira ordem para as derivadas espaciais e de segunda ordem para as derivadas temporais, com um esquema de dois sub-passos de tempo. São simulados quatro casos hipotéticos, alguns com dados analíticos ou experimentais. Para a maioria dos casos analisados, comparando com resultados analíticos e experimentais, o código com a aproximação não-hidrostática forneceu resultados mais adequados que o código com aproximação apenas hidrostática. Os resultados mostram que existe uma diferença importante na distribuição de velocidades com a profundidade. Os níveis se mostraram menos sensíveis à forma de tratamento da pressão, porém, à medida que a declividade de fundo é mais importante, maiores são as diferenças entre os dois modelos.

Palavras Chave: Pressão hidrostática. Pressão não-hidrostática. Superfície livre

ABSTRACT

Often, numerical simulations of free surface flow consider that the pressure varies hydrostatically with water depth and do not take dynamic pressure into account. In this work, in order to analyse the influence of such simplification, a code that has two modules was used, one looking at hydrostatic pressure variation and the other at non-hydrostatic pressure variation. The code, derived from Navier-Stokes and Continuity equations, has a semi-implicit finite difference scheme, first order in space and second order in time, with two sub steps in time. Four cases are simulated, some of which have analytical or experimental results. For almost every case analyzed, the code with a non-hydrostatic pressure approximation had better results than the one with hydrostatic pressure approximation. Results show that an important difference exists between the two codes for vertical velocity distribution. Free surface levels are less sensitive to the pressure treatment, but differences become more important with increased bottom gradients.

Keywords: Hydrostatic pressure. Non-hydrostatic pressure. Free-surface

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o equacionamento relacionado a escoamentos com superfície livre foi aperfeiçoado, descrevendo fenômenos das mais diversas escalas espaciais, desde pequenas ondas (LABEUR; PIETRZAK, 2005) até tsunamis (FUNKE et al., 2011). Também, são simuladas as dinâmicas de lagos (CASULLI, 1999) e fluxos de maré (GENG; WANG, 2012), entre outros. O desenvolvimento numérico de escoamentos com superfície livre é especialmente difícil, pois a superfície livre é um contorno móvel. A posição do contorno é conhecida apenas no instante inicial e a localização desta, nos tempos posteriores, tem que ser determinada como parte da solução (FERZIGER; PERIC, 2002).

A aproximação hidrostática é amplamente utilizada em estudos de escoamentos em rios, lagos, estuários e oceanos. Esta aproximação considera que as variações da batimetria são muito pequenas e a curvatura das linhas de corrente com relação à vertical são desprezíveis. Os termos de aceleração e viscosidade turbulenta, na equação de quantidade de movimento para as componentes verticais, seriam muito menores do que a aceleração da gravidade, assim podendo ser negligenciados. Entretanto, existem diversos casos nos quais esta aproximação é questionável. Exemplos das exceções são o escoamento induzido por um forte gradiente horizontal de densidade, as ondas curtas, os escoamentos controlados por estruturas e grandes gradientes da batimetria de fundo (CHEN, 2003).

Marshall et al. (1997) discutem as diferenças dos modelos hidrostáticos (H), quasi-hidrostáticos (QH) e não-hidrostáticos (NH) para o oceano. Em seu estudo, os autores comentam que, para pequenas escalas de comprimento nas quais a velocidade de movimentação não pode ser negligenciada, são necessários modelos NH. Por outro ponto de vista, tem-se que, a grandes profundidades, a velocidade não altera significativamente o valor da pressão total, sendo válida a aproximação hidrostática.

No presente trabalho é apresentado um código tridimensional para resolver as equações de Navier-Stokes utilizando um equacionamento semi-implícito em diferenças finitas, aplicado a simulações de escoamentos com superfície livre, desenvolvido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (MONTEIRO, 2014). O código possui dois módulos diferentes, um utiliza a aproximação de pressão hidrostática e o outro a aproximação de pressão não-hidrostática. Ambos os módulos passaram por verificação com resultado analítico e de outro código (YUAN; WU, 2004) e por validação com resultados experimentais (BEJI; BATTJES, 1994). Além disto, são apresentadas aplicações para casos hipotéticos de escoamento sobre obstáculos em que os resultados de ambas as hipóteses de pressão são comparados.

DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

Para simular escoamentos com superfície livre foi desenvolvido um código que resolve numericamente as equações de Navier-Stokes e Continuidade, com um esquema numérico semi-implícito em diferenças finitas, na mesma linha do apre-

sentado por Casulli (1999). O modelo matemático está composto pela equação da Continuidade incompressível, escrita em notação tensorial como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

e pela equação de Navier-Stokes, dada por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right), \quad (2)$$

em que x_i representa as coordenadas espaciais (x e y são as coordenadas horizontais, longitudinal e transversal à direção principal do escoamento, e z é a coordenada vertical), t é o tempo, u_i representa o vetor da velocidade (u , v ou w , referente aos eixos x , y e z , respectivamente), g_i é a aceleração da gravidade representada (vetorialmente tida como $(0, 0, -g)$), p é a pressão total, ρ é a massa específica do fluido e ϑ é a viscosidade cinemática. Desta forma, para problemas tridimensionais, estas equações formam um sistema de quatro equações com quatro incógnitas (u , v , w e p). Entretanto, as equações 1 e 2 ainda não são adequadas para problemas de escoamentos com superfície livre, pois não possuem uma variável que a represente.

Superfície Livre

Com o intuito de representar a superfície livre, é utilizado o Método de Rastreamento da Interface (FERZIGER; PERIC, 2002), que trata a superfície livre como o limite da interface superior do domínio de cálculo. A camada de elementos da malha na interface terá altura variável, dependendo da posição da superfície livre. Para o uso desta representação, são utilizadas as condições cinemática e dinâmica. A condição cinemática é expressa pelas equações

$$w|_{z=\eta} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u|_{\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} v|_{\eta}, \quad (3)$$

$$w|_{z=-h} = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u|_{-h} + \frac{\partial h}{\partial y} v|_{-h}, \quad (4)$$

em que η é o desnível da superfície livre e h é a profundidade do escoamento sem o desnível (figura 1)

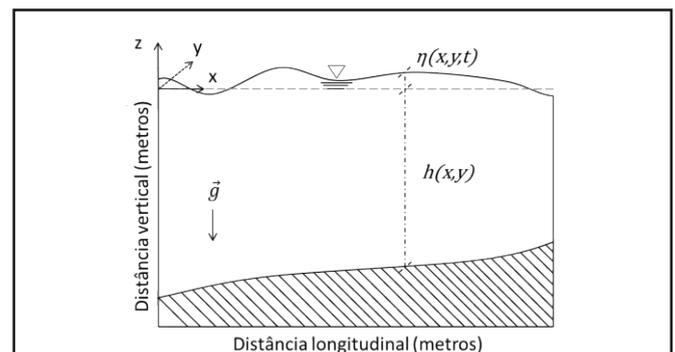


Figura 1 - Parâmetros espaciais do escoamento com superfície livre

De acordo com Ferziger e Peric (2002), a condição cinemática é utilizada quando a diferença de densidade entre os dois fluidos é grande (líquido-gás), fazendo com que não ocorra fluxo na direção normal da superfície livre ($w_\eta = 0$). Já a condição dinâmica exige que as forças atuantes na superfície livre do fluido estejam em equilíbrio. Como simplificação da condição dinâmica, a tensão de cisalhamento na superfície livre provocada pela ação do vento é desconsiderada. A tensão normal e o efeito da tensão superficial também são desconsiderados, e a condição de contorno dinâmica se reduz a $p_{\text{líquido}} = p_{\text{gás}}$.

Integrando a equação de Continuidade (eq. 1) na profundidade, desde o fundo até a superfície livre, e usando a condição cinemática (eqs. 3 e 4) na superfície livre, obtém-se a Equação Modificada de Continuidade para a superfície livre:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0. \quad (5)$$

Esta equação é a condição de contorno da superfície livre.

Pressão Hidrostática e Não-Hidrostática

Uma forma de tratar a pressão total em escoamentos com superfície livre consiste em separá-la na soma de uma parcela de pressão hidrostática e outra de pressão não-hidrostática, como:

$$p(x, y, z, t) = \rho g[\eta(x, y, t) - z] + \rho q(x, y, z, t), \quad (6)$$

em que q é a pressão não-hidrostática dividida por ρ , também denominada de pressão dinâmica. Substituindo a equação 6 na equação de Navier-Stokes (eq. 2), obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (7a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (7b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (7c)$$

No modelo matemático para a aproximação hidrostática o gradiente de q é desconsiderado.

O modelo matemático para escoamentos com superfície livre utilizado para calcular o campo de velocidades, de pressões e o desnível, compreende as equações de Navier-Stokes, com pressões hidrostáticas e dinâmicas segregadas (eqs. 7a, 7b e 7c), a equação da Continuidade (eq. 1) e sua forma modificada para a superfície livre (eq. 5).

O modelo matemático fica formado pelas equações 1, 5 e 7 (5 equações) com as incógnitas u , v , w , η e q . Diversos autores utilizam estas equações para o cálculo de escoamentos com superfície livre e aproximação não-hidrostática (CASULLI (1999), CAUSIN et al. (2002), CHEN (2003), FUNKE et al. (2011), LEE et al. (2006), STELLING; BUSNELLI (2001)).

Para resolver o sistema de equações, é necessário dividir o modelo matemático em duas etapas. A primeira utiliza as equações de Navier-Stokes (eqs. 7) e a condição de superfície livre (eq. 5) considerando que a pressão se comporta de forma hidrostática, resultando em um sistema de 4 equações e 4 incógnitas (u , v , w e η), fornecendo a solução da parte hidrostática. A segunda etapa consiste no cálculo da pressão dinâmica por meio do sistema de equações representadas por

$$\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x_i}, \quad (8)$$

em que, para esta equação, as derivadas velocidades (∂u_i^{**}) são velocidades modificadas com relação às calculadas com a aproximação hidrostática, e serão apresentadas a seguir, na explicação do método numérico.

Nota-se que a pressão não hidrostática na superfície livre não é forçada a zero em nenhum momento para que a condição dinâmica seja respeitada. Em vista disto, ainda no segundo passo, assume-se que na superfície livre a pressão seja apenas hidrostática e realiza-se uma correção da superfície livre expressa pela equação 6 como (CASULLI; ZANOLLI, 2002)

$$\eta = \tilde{\eta} + \frac{q_{sup}}{g}, \quad (9)$$

em que $\tilde{\eta}$ é o desnível calculado no primeiro passo a ser corrigido e q_{sup} é a componente da pressão não-hidrostática calculada na superfície livre. Também se realiza a correção da própria componente da pressão não hidrostática com $q = q - q_{sup}$. Assim, com as equações 1, 5, 7 e 8, o segundo passo consiste em um sistema de 5 equações e 5 incógnitas (u , v , w , η e q).

METODOLOGIA NUMÉRICA

Para levar em consideração a divisão do modelo matemático em dois sistemas de equações (hidrostático e não-hidrostático), a discretização temporal é dividida em dois sub-passos de tempo e se considera que

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} = \frac{\partial c^{**}}{\partial t} + \frac{\partial c^*}{\partial t} = \frac{c^{n+1} - \tilde{c}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\tilde{c}^{n+1} - c^n}{\Delta t}, \quad (10)$$

em que c é uma variável genérica, \tilde{c} é um valor intermediário de c , $\frac{\partial c^{**}}{\partial t} = \frac{\tilde{c}^{n+1} - c^n}{\Delta t}$ é a aproximação da derivada temporal no sub-passo referente ao primeiro modelo (H) e $\frac{\partial c^*}{\partial t} = \frac{c^{n+1} - \tilde{c}^{n+1}}{\Delta t}$ é a referente ao segundo sub-passo (NH). No primeiro modelo é considerado que o escoamento é influenciado pela pressão apenas hidrostática, e são calculados os campos de velocidade e o desnível, conforme descreve

$$f(\tilde{u}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}, \tilde{w}^{n+1}, \tilde{\eta}^{n+1}) = F(u^n, v^n, w^n, \eta^n), \quad (11)$$

em que f e F são funções dadas pelo sistema de equações.

Já no segundo sub-passo de tempo, são consideradas as pressões dinâmicas, assim como sua influência sobre as velocidades e desnível, aplica-se a

$$f(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}, q^{n+1}) = F(\tilde{u}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}, \tilde{w}^{n+1}, \tilde{\eta}^{n+1}). \quad (12)$$

É utilizado um esquema de passo de tempo fracionado semi-implícito, para o qual algumas variáveis são calculadas explicitamente (u, v e w nas equações 7a, 7b e 7c). As variáveis calculadas implicitamente são o desnível (η), os termos com derivadas segundas verticais e a pressão dinâmica (q). Também é aplicada a correção quase-implícita adicionando um ponderador (θ) nas aproximações das derivadas temporais das velocidades e do desnível da equação 5 e nos termos de desnível das equações 7a e 7b.

O modelo foi desenvolvido para um sistema em coordenadas cartesianas, em diferenças finitas, em que N_x , N_y e N_z representam o número de células nos eixos θ , θ_x , θ_y e θ_z , respectivamente. Um domínio 3D com comprimento L_x , largura L_y e altura $Lz_{(x,y)}$ é utilizado para definir a configuração espacial. Os limites de fundo e superfície livre variam de acordo com um índice que varia no intervalo $1 \leq m \leq M \leq Nz$, em que m é o índice que representa o fundo e M é o índice que representa a superfície livre (figura 2).

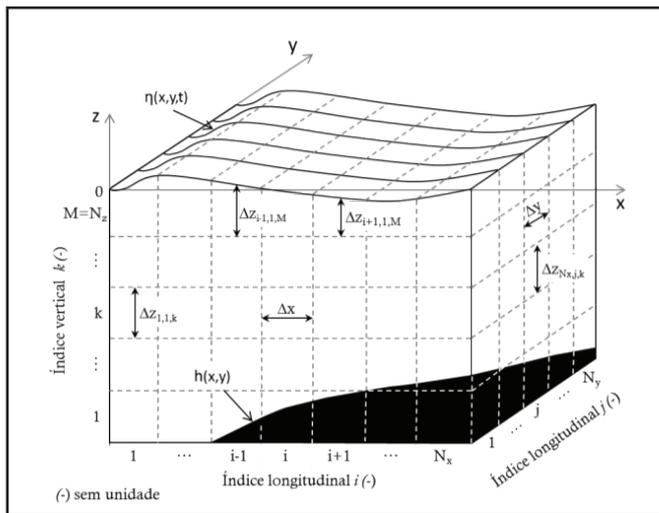


Figura 2 - Representação do domínio computacional

A altura do domínio é variável no espaço e no tempo, pois o limite superior é a superfície livre. Um arranjo de malha deslocada entre velocidade e pressão é empregado, em que a pressão é representada no centro da célula e as velocidades são representadas nas faces da célula (figura 3). A discretização da coordenada vertical que representa a superfície livre ($\Delta z_{i,j,Nz}$), é função do espaço e do tempo e é modificada para acompanhar o desnível, da forma:

$$\Delta z_{i,j,Nz}^{n+1} = \Delta z_{i,j,Nz}^n + (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n). \quad (13)$$

Para este esquema, $\Delta z_{i,j,Nz}^n$ não pode ser zero ou negativo e, assim, a condição $\Delta z_{i,j,Nz}^n > \eta_{i,j}^n - \eta_{i,j}^{n+1}$ deve ser respeitada ao longo do tempo.

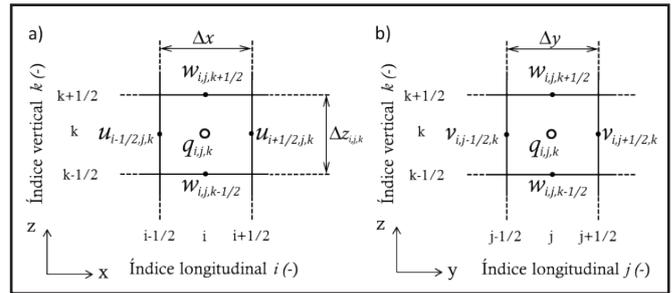


Figura 3 - Sistema cartesiano de grades com arranjo deslocado: a) referente ao plano (x,z); b) referente aos planos (y,z)

PROCEDIMENTO DA RESOLUÇÃO NUMÉRICA

A figura 4 apresenta o fluxograma da resolução numérica que é descrita a seguir.

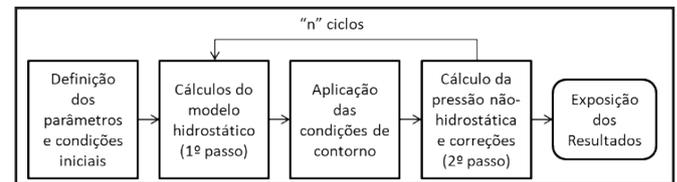


Figura 4 - Fluxograma do procedimento da resolução numérica

Primeiro passo: pressão hidrostática

O primeiro passo é realizado considerando apenas a contribuição das pressões hidrostáticas e as velocidades e desnível são denotados como \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} e $\tilde{\eta}$. Percebe-se que os valores não corrigidos são utilizados apenas para o tempo $n+1$, como um passo de tempo intermediário, já que os valores corrigidos no tempo n já são conhecidos. A discretização semi-implícita das equações de quantidade de movimento (eqs. 7a, 7b e 7c), leva ao sistema de três equações com variáveis implícitas

$$\tilde{u}^{n+1} = F(\tilde{\eta}^{n+1}, \tilde{u}^{n+1}), \quad (15a)$$

$$\tilde{v}^{n+1} = F(\tilde{\eta}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}), \quad (15b)$$

$$\tilde{w}^{n+1} = F(\tilde{w}^{n+1}). \quad (15c)$$

A equação 15c forma uma matriz tridiagonal e pode ser resolvida por métodos diretos, obtendo-se, enquanto as outras duas precisam de $\tilde{\eta}^{n+1}$ para serem resolvidas. A equação Modificada da Continuidade (eq. 5) fornece o valor desta variável, conforme

$$\tilde{\eta}^{n+1} = F(\tilde{u}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}). \quad (16)$$

As equações 15a e 15b são reescritas em forma matricial como

$$\mathbf{M}\tilde{u}^{n+1} = F(\tilde{\eta}^{n+1}), \quad (17a)$$

$$\mathbf{M}\tilde{v}^{n+1} = F(\tilde{\eta}^{n+1}). \quad (17b)$$

Substituindo as equações (17a) e (17b) na equação (16), obtém-se:

$$f(\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}, \tilde{\eta}_{i+1,j}^{n+1}, \tilde{\eta}_{i-1,j}^{n+1}, \tilde{\eta}_{i,j+1}^{n+1}, \tilde{\eta}_{i,j-1}^{n+1}) = F^n, \quad (18)$$

que forma um sistema pentadiagonal. É recomendado que se utilize um método iterativo, pois o sistema de equações pode possuir muitas incógnitas tornando proibitivo o uso de métodos diretos. Assim, as velocidades \tilde{u}^{n+1} e \tilde{v}^{n+1} podem ser calculadas com as equações (17a) e (17b).

Condições de contorno

No final do primeiro passo são utilizadas as condições de contorno de não deslizamento ($\vec{V}_{parede} = \vec{0}$), de deslizamento livre ($V_n = 0, \frac{\partial V_z}{\partial n} = 0$), de velocidade prescrita ($\vec{V}_{parede} = \vec{f}$) e/ou de saída de fluxo ($\frac{\partial \vec{V}}{\partial n} = \vec{0}$). Na superfície livre é utilizada a condição de deslizamento livre e no fundo do domínio é utilizada a condição de não deslizamento. A condição de contorno utilizada nas paredes depende do problema em questão a ser simulado.

Uma condição de saída de fluxo ideal seria aquela que não permitisse a ocorrência de reflexão. No entanto, podem existir ondas que sofrem reflexões puramente numéricas. Uma das maneiras de evitar a reflexão é utilizar o artifício de “camada esponja”, que tem por finalidade atenuar as ondas antes de estas encontrarem a fronteira do domínio computacional (GOTOH et al., 2013). Park et al. (1993) propõem um esquema de amortecimento do tipo:

$$\xi_i = \begin{cases} \beta \left(\frac{x_i - x_{i0}}{l_i} \right)^2 \left(\frac{z_m - z}{z_m - z_M} \right) u_i & \text{se } x_i \geq x_{i0}, \\ 0 & \text{se } x_i < 0, \end{cases} \quad (14)$$

em que ξ_i é o coeficiente da camada esponja, β é o parâmetro de amortecimento, x_{i0} é o ponto inicial da camada esponja e l_i é o comprimento da camada esponja. Este termo deve ser adicionado no lado direito das equações (7a) e (7b).

O código possui a formulação que considera o efeito da rugosidade nos contornos, porém não foi utilizada nas simulações apresentadas neste artigo.

Segundo passo: pressão não-hidrostática

No segundo passo são calculadas as pressões dinâmicas, utilizadas para corrigir as velocidades e o desnível. Para a correção das velocidades se utiliza a equação 8, que é representada em forma discreta por

$$u^{n+1} = F(q^{n+1}), \quad (19a)$$

$$v^{n+1} = F(q^{n+1}), \quad (19b)$$

$$w^{n+1} = F(q^{n+1}). \quad (19c)$$

Abaixo da superfície livre, a equação da Continuidade pode ser utilizada em sua forma original (eq. 1) e se tem

$$f(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) = 0, \quad \text{para } k < M. \quad (20)$$

Logo, substituindo a equação 19 na equação 20, obtém-se

$$f(q_{i,j,k}^{n+1}, q_{i+1,j,k}^{n+1}, q_{i-1,j,k}^{n+1}, q_{i,j+1,k}^{n+1}, q_{i,j-1,k}^{n+1}, q_{i,j,k+1}^{n+1}, q_{i,j,k-1}^{n+1}) = F^n,$$

para $k < M$. (21)

Na superfície livre, substituindo a equação 9 na equação 5, encontra-se

$$q_M^{n+1} = F(u_M^{n+1}, v_M^{n+1}, w_{M-1}^{n+1}), \quad \text{para } k = M, \quad (22)$$

e substituindo a equação 19 na equação 22, tem-se

$$f(q_{i,j,M}^{n+1}, q_{i+1,j,M}^{n+1}, q_{i-1,j,M}^{n+1}, q_{i,j+1,M}^{n+1}, q_{i,j-1,M}^{n+1}, q_{i,j,M-1}^{n+1}) = F^n,$$

para $k = M$. (23)

As equações 21 e 23 formam um sistema heptadiagonal linear. Com o termo de pressão não hidrostática, q , as velocidades horizontais corrigidas podem ser calculadas com as equações 19a e 19b, e, posteriormente, a velocidade vertical corrigida pode ser calculada com a equação 20. Por fim, o desnível corrigido é calculado com a equação 9, para o tempo $n+1$

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} + \frac{q_{i,j,M}^{n+1}}{g}, \quad (24)$$

e se corrige a própria componente da pressão não hidrostática com

$$q_{i,j,k}^{n+1} = q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j,M}^{n+1}. \quad (25)$$

Resumindo o segundo passo, as equações 21 e 23 são formadas utilizando o conceito de que a equação da continuidade ainda não foi satisfeita, ou seja, a divergência é diferente de zero. Cria-se um sistema heptadiagonal com as equações 21 e 23, onde q é a incógnita. Calcula-se q utilizando algum método de resolução matricial (aconselha-se a utilizar um método iterativo). Com os valores de q , corrige-se as velocidades u e v e o desnível. O cálculo da velocidade w pode ser realizado com a equação 19c, porém, também se pode calcular esta velocidade utilizando a equação da continuidade na forma da equação 20. Uma explanação mais detalhada de todo o código por ser obtida em Monteiro (2014)

Critério de Convergência

A condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) implica em que a distância percorrida por uma partícula qualquer não percorra mais do que uma célula em um passo de tempos. Isto implica que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |u_{max}| \leq 1, \quad \frac{\Delta t}{\Delta y} |v_{max}| \leq 1 \quad e \quad \frac{\Delta t}{\Delta z} |w_{max}| \leq 1. \quad (26)$$

Esta é uma condição definida para métodos eulerianos e explícitos utilizados para calcular as equações de Navier-Stokes (eq. 7). Para um método euleriano e explícito de primeira ordem, a condição CFL induz que

$$\Delta t \leq \left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + 2\vartheta \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right]^{-1} \quad (27)$$

Utilizando o método semi-implícito apresentado, em que os termos advectivo são calculados de forma lagrangiana e os termos difusivos verticais são implícitos, tem-se

$$\Delta t \leq \left[2\vartheta \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1} \quad (28)$$

Nota-se que a equação 28 é menos restritiva do que a equação 27.

RESULTADOS

São apresentadas verificação, validação e aplicações para casos hipotéticos. Em todos os casos são comparados os códigos com aproximação hidrostática e com aproximação não-hidrostática. Sempre o fluido simulado é água.

Verificação: Caso 1 – Bacia Oscilante 3D

Com o caso da bacia oscilante tridimensional se visa simular ondas lineares estacionárias. Uma bacia cúbica com arestas $L = 10 \text{ m}$, com N_x, N_y e $N_z = 20$, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5 \text{ m}$, é simulada com passo de tempo de $0,001 \text{ s}$ e tempo de simulação de 30 s . A superfície livre inicial é descrita analiticamente por

$$\eta(x, y, t = 0) = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(2\pi t/T), \quad (29)$$

em que $T = 3,01 \text{ s}$ é o período da onda, $k_x = \pi/L_x$ e $k_y = \pi/L_y$ são os números de ondas e $A = 0,1 \text{ m}$ é a amplitude da onda (fig. 5).

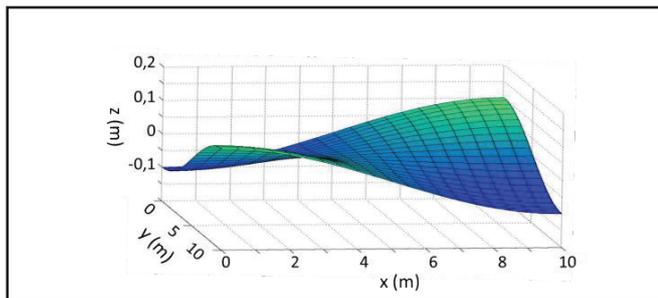


Figura 5 - Superfície livre inicial para a bacia oscilante 3D

Os resultados das simulações são comparados com os resultados de desníveis e velocidades do código com aproximação não hidrostática de pressão apresentado por Yuan e Wu (2004) e de soluções analíticas de ondas lineares. A solução analítica é utilizada como resultados de referência, pois como a inclinação da onda é pequena ($Ak = 0,044$), a teoria linear de ondas (MEI, 1983) pode ser utilizada e aproximações satisfatórias das velocidades são (YUAN; WU, 2004)

$$u = \frac{Agk_x \cosh[k(h+z)]}{\omega \cosh(kh)} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t), \quad (30a)$$

$$v = \frac{Agk_y \cosh[k(h+z)]}{\omega \cosh(kh)} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t), \quad (30b)$$

$$w = -\frac{Agk \sinh[k(h+z)]}{\omega \cosh(kh)} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t), \quad (30c)$$

em que $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ é o número de onda e $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$ é a frequência angular da onda.

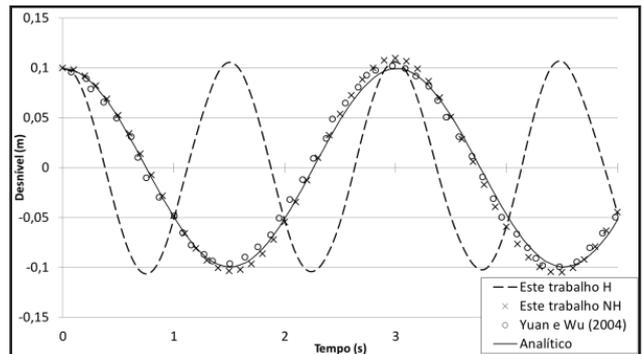


Figura 6 – Caso 1: comparação entre níveis no ponto $(x; y) = (0,25; 0,25)\text{m}$

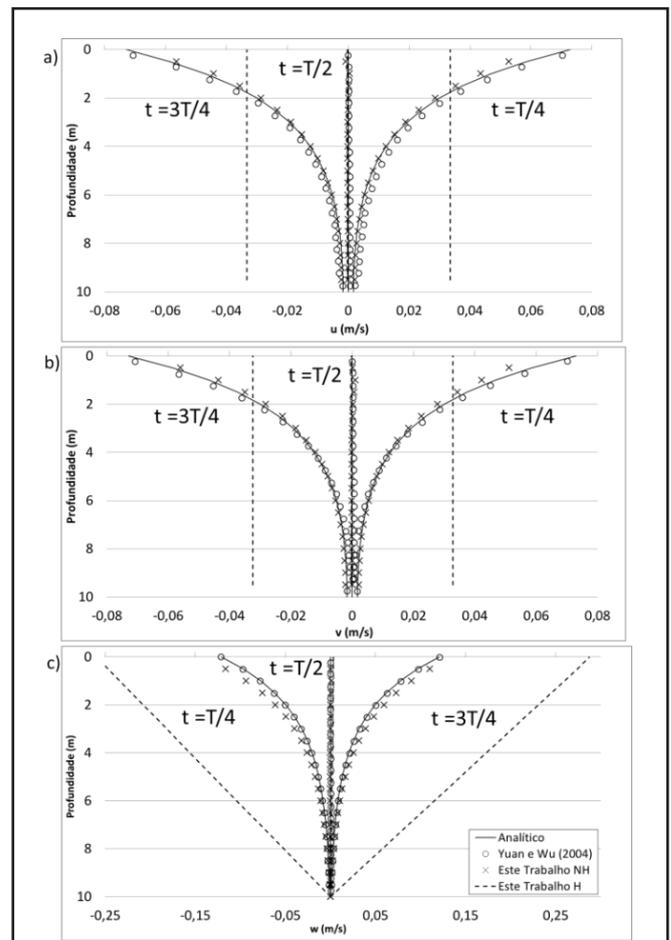


Figura 7 - Caso 1: comparação entre as velocidades no ponto $(x; y) = (0,25; 0,25)\text{m}$ para: a) u; b) v; e c) w (de cima para baixo)

O código não-hidrostático representa a frequência do fenômeno adequadamente, enquanto que o código hidrostático a aumenta consideravelmente (figura 6). Os valores extremos são adequadamente representados em ambos os códigos. O código não-hidrostático, apresentado neste trabalho, se aproxima tanto da solução analítica quanto da de Yuan e Wu (2004).

As velocidades são exibidas para três tempos diferentes: $T/4$; $T/2$; $3T/4$, na figura 7. Existe um bom ajuste entre os resultados dos modelos não-hidrostáticos. Para o código hidrostático o comportamento é substancialmente diferente, apresentando uma variação das velocidades horizontais com a profundidade muito pequena e uma variação linear da velocidade vertical com a profundidade. Assim, para este caso teste, o código hidrostático não representa adequadamente nenhuma das componentes da velocidade nem o período da onda, o que torna impróprio seu emprego para problemas de águas intermediárias e profundas ($A/b \geq 0,05$), como no caso simulado.

Validação: Caso 2 – Propagação de onda sobre uma barra de fundo

Com o intuito de validar o código, os resultados do modelo experimental de um canal fechado com obstáculo de fundo são utilizados para comparação. Beji e Battjes (1994) construíram um modelo físico para investigar a influência de uma barra submersa na propagação de ondas superficiais. Neste experimento, em um canal com profundidade de 0,4 m, um atuador do tipo pistão produz ondas no lado esquerdo do canal, com período $T = 2,00$ s e amplitude $A = 1,0$ cm. As ondas se propagam sobre uma barra de 0,3 m de altura, onde são deformadas, e logo depois são atenuadas em uma praia de dissipação para diminuir a reflexão. No presente trabalho, é utilizada uma camada esponja com comprimento $l_i = 5$ m e coeficiente de amortecimento $\beta = 0,5$ (eq. 14) para simular a praia de dissipação (figura 8).

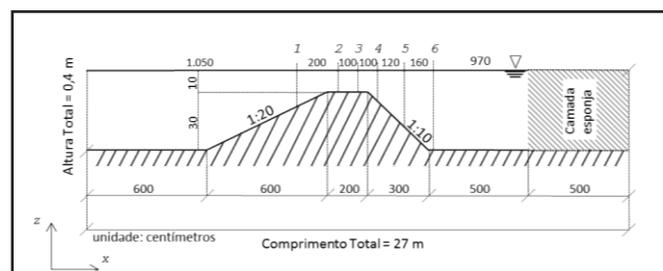


Figura 8 – Caso 2: geometria do canal experimental em escala distorcida e pontos de medição do desnível de água

Para simular este experimento, é utilizado um domínio computacional do mesmo tamanho que o experimental, com parâmetros numéricos mostrados na tabela 1. Como este experimento tem apenas características bidimensionais verticais, a dimensão y pode ser desconsiderada. Desta forma, utilizaram-se apenas 3 pontos para representar esta dimensão. Após as simulações, observou-se que as velocidades v são nulas, garantindo a bidimensionalidade.

Tabela 1 – Características da simulação do Caso 2

$\Delta x = 0,025$ m	$N_x = 1080$
$\Delta y = 0,25$ m	$N_y = 3$
$\Delta z = 0,025$ m	$N_z = 16$
$\Delta t = 0,005$ s	$ts = 38$ s
Onda: $A = 1$ cm	Onda: $T = 2,02$ s

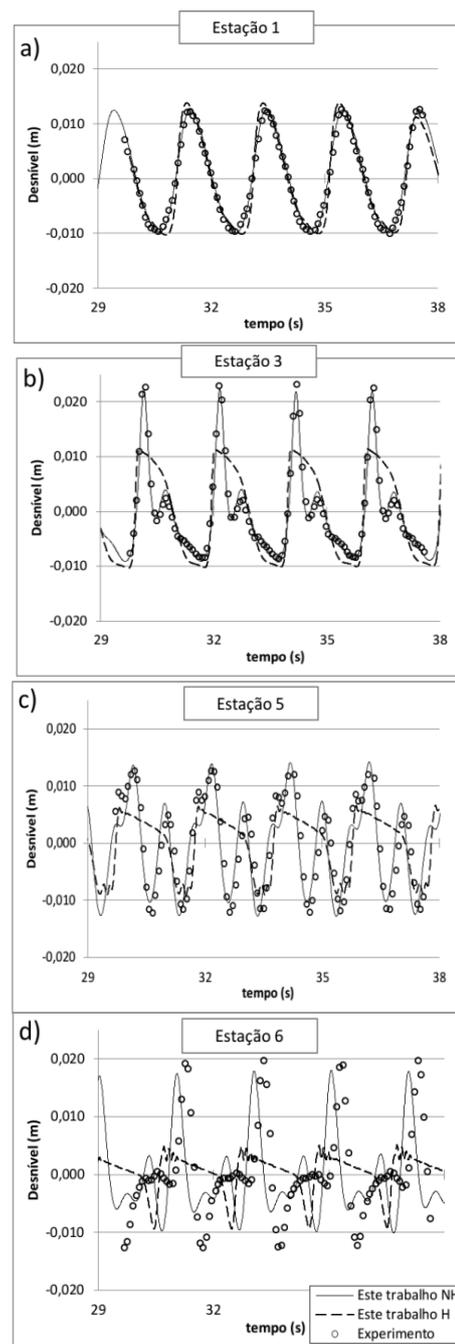


Figura 9 – Caso 2: comparação entre os desníveis experimentais e deste trabalho, com aproximação H e NH, para: a) estação 1 ($x = 10,5$ m); b) estação 3 ($x = 13,5$ m); c) estação 5 ($x = 15,7$ m) e d) estação 6 ($x = 17,3$ m)

Nota-se que o período da onda utilizado no experimento é de $T = 2,00$ s, porém diversos autores utilizam $T = 2,02$ s para fazer esta comparação (CASULLI (1999), CHEN (2003), CUI et al. (2012), STELLING; ZIJLEMA (2001), WALTERS (2005) e YAMAZAKI et al. (2009)). Como condição de contorno à esquerda do domínio, considera-se para as velocidades a condição de não deslizamento e na superfície livre uma onda é formada pela condição de Dirichlet. À direita do domínio, é considerada a condição de saída livre de fluxo e nos contornos restantes a condição de deslizamento livre.

Na figura 9 são mostrados os desníveis do experimento e os da simulação deste código para as duas aproximações de pressão. Antes da passagem da onda pelo obstáculo (Estação 1), as simulações se assemelham aos resultados experimentais independente da aproximação da pressão, como era de se esperar, pois o canal possui fundo plano e está em condição de águas rasas ().

Nas estações 3, 5 e 6 é notável a influência do obstáculo pela deformação que sofre a onda incidente. O código hidrostático mantém o período da onda, mas filtra os harmônicos gerados pela presença do obstáculo. No código não-hidrostático aparecem discrepâncias entre os níveis se comparado aos resultados experimentais na estação 6 (fig. 9d).

Exemplo Hipotético: Caso 3 – Escoamento sobre um conduto de fundo

Neste caso, são analisados escoamentos com um obstáculo. É considerada uma corrente perpendicular a um conduto horizontal, representado por um cilindro com diâmetro de 2,4 m, apoiado no fundo do canal e transversal à direção principal do escoamento (figura 10). O canal tem profundidade de 7,2 m, e o centro do conduto está localizado a 20 m da seção de entrada. As características do domínio computacional são apresentadas na tabela 2.

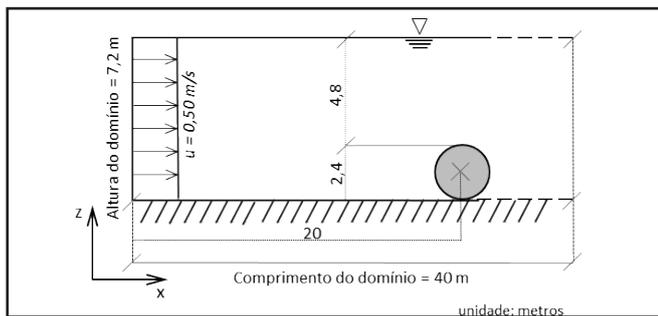


Figura 10 - Configuração do caso 3

Tabela 2 - Características da simulação do Caso 3

$\Delta x = 0,025$ m	$N_x = 1080$
$\Delta y = 0,25$ m	$N_y = 3$
$\Delta z = 0,025$ m	$N_z = 16$
$\Delta t = 0,005$ s	$ts = 38$ s
Onda: $A = 1$ cm	Onda: $T = 2,02$ s

Na seção de entrada (esquerda) são consideradas velocidades prescritas, dadas por:

$$u(x = 0, y, z) = 0,5 \text{ m/s}, \tag{31a}$$

$$v(x = 0, y, z) = w(x = 0, y, z) = 0 \text{ m/s}. \tag{31b}$$

No contorno de saída ($x = L_x$) é considerada a condição de saída livre e nos laterais (planos $y = 0$ e $y = L_y$) a condição de deslizamento livre. Nos contornos restantes é considerada a condição de deslizamento livre (as velocidades normais e as derivadas das velocidades tangenciais são zero). As velocidades dentro do cilindro são forçadas a serem nulas para representar a estrutura.

Os resultados dos códigos hidrostático e não-hidrostático apresentam importantes diferenças (figura 11). Nas simulações com o código hidrostático (fig. 11a e 11c) são obtidos

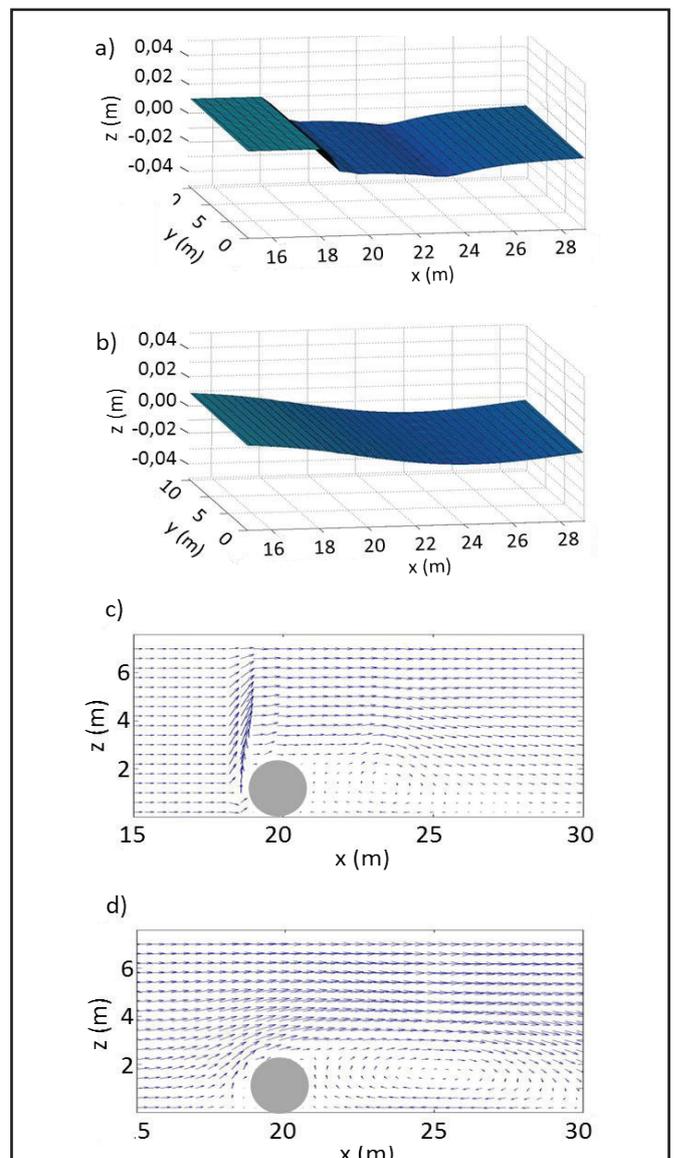


Figura 11 – Caso 3: resultados referentes a: a) desnível para H; b) desnível para NH; c) campo de velocidade para H; e d) campo de velocidade para NH

resultados que apresentam variações bruscas, tanto da superfície livre quando da velocidade, iniciando a, aproximadamente, 1 m do obstáculo ($x \approx 18$ m). Observa-se a dificuldade do código em variar as velocidades com relação à profundidade para contornar o objeto. Isto se deve ao fato de que, por assumir a pressão como hidrostática, a transferência de informação para montante ser limitada à região próxima do obstáculo.

Os resultados para a simulação com o código não-hidrostático não variam bruscamente (fig. 11b e 11d). O desnível forma um rebaixamento após o obstáculo, como esperado. As velocidades aumentaram sensivelmente ao se passar pelo obstáculo. Para ambos os casos, uma região de recirculação se forma após o conduto, sendo para o caso hidrostático uma região menor do que para o caso não-hidrostático. Esta região de recirculação apresenta grande extensão pela falta da dissipação de energia por efeitos da turbulência.

Caso 4 – Escoamento sobre rampa

Com a finalidade de analisar a partir de qual gradiente adverso de fundo a hipótese de pressão hidrostática passa a ser válida, é proposto o caso hipotético do escoamento em um canal com uma rampa no fundo, a qual gera um gradiente negativo de pressão no escoamento. Três configurações de rampa são testadas, com declividades (I) de 1 m/m (100%), 0,1 m/m (10%) e 0,01 m/m (1%), considerando uma corrente de 1 m/s (figura

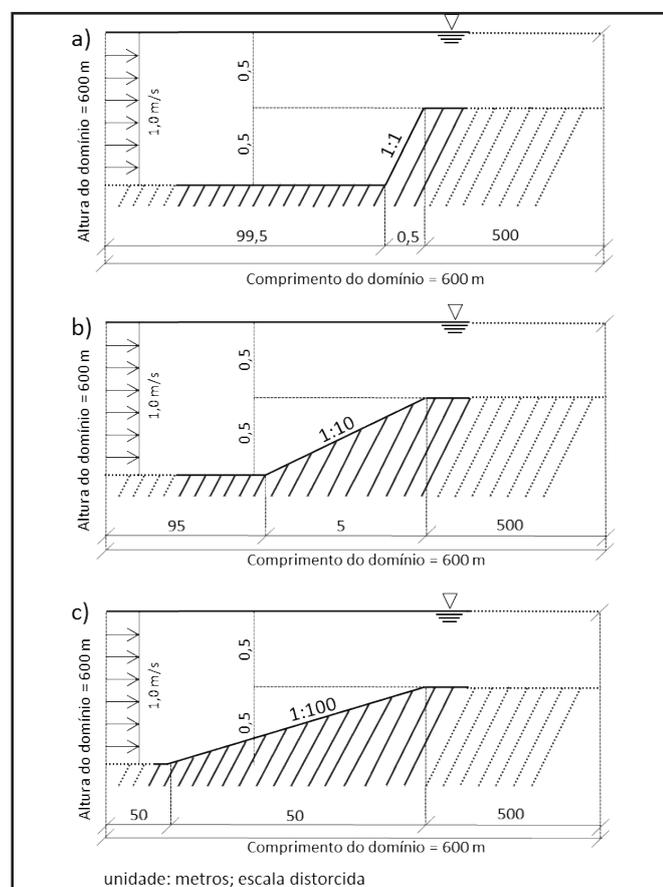


Figura 12 – Caso 4: configuração do caso com rampa de fundo (caso 4), para declividades de a) 1:1m/m, b) 1:10m/m e c) 1:100m/m

12). Os parâmetros numéricos são mostrados na tabela 3. A malha mais fina na direção vertical no caso com a rampa de menor declividade é necessária para representar adequadamente a pequena declividade da rampa pelo método das diferenças finitas. Assim como no Caso 2, esta simulação possui apenas características bidimensionais verticais, a dimensão y pode ser desconsiderada. Desta forma, utilizaram-se apenas 3 pontos para representar esta dimensão. Após as simulações, observou-se que as velocidades são nulas, garantindo a bidimensionalidade.

Tabela 3 – Parâmetros das simulações do Caso 4

1 e 0,1 m/m	$\Delta x = 0,10$ m	$N_x = 6.000$
	$\Delta y = 0,10$ m	$N_y = 3$
	$\Delta z = 0,05$ m	$N_z = 20$
0,01 m/m	$\Delta x = 0,20$ m	$N_x = 3.000$
	$\Delta y = 0,20$ m	$N_y = 3$
	$\Delta z = 0,01$ m	$N_z = 100$
Tempo	$\Delta t = 0,001$ s	$ts = 300$ s

Na seção de entrada (esquerda) são consideradas velocidades prescritas, respeitando as equações $u(x = 0, y, z) = 1$ m/s e $v(x = 0, y, z) = w(x = 0, y, z) = 0$ m/s para todas as simulações. Já nos contornos de saída ($x = L_x$) é considerada a condição de saída livre de fluxo.

Nos contornos restantes é considerada a condição de deslizamento livre. As velocidades dentro da rampa são forçadas nulas para representar a estrutura sólida. A velocidade inicial no domínio líquido é de 0,5 m/s. Para este caso, o domínio e o tempo simulado foram escolhidos para evitar os efeitos de reflexão da onda.

Para comparar a importância da diferença dos desníveis antes e depois da rampa, é utilizado um parâmetro adimensional, definido por:

$$\delta = \frac{h_1 - h_2}{h_{ramp}} \quad (32)$$

em que h_1 é a profundidade do escoamento antes do degrau, h_2 é a profundidade do escoamento depois do degrau e h_{ramp} é a altura do degrau.

Inicialmente, são comparados os desníveis entre todos os casos simulados (tabela 4 e figura 13). Todas as variações de desnível ocorrem sobre a rampa. Quanto menor é a declividade da rampa, menor é a discrepância entre os casos H e NH. A diferença entre os desníveis ocorre devido à importância da variação da pressão. No caso hidrostático, esta variação é o próprio gradiente do fundo, porém no caso NH a pressão dinâmica também é considerada, o que leva à suavização do efeito da declividade. Assim, quanto mais suave é o gradiente de fundo, melhor é a resposta da hipótese de pressão hidrostática.

Tabela 4 – Valores de δ para os casos de H e NH em função da declividade do degrau

Aprox./Decliv.	1:1	1:10	1:100
δ_H	0,2263	0,2440	0,2276
δ_{NH}	0,2560	0,2588	0,2282
Diferença (%)	11,6	5,7	0,3

A análise dos campos de velocidade mostrou que, para a declividade de 1:100 não há diferenças significativa entre as aproximações H e NH. Porém, para as outras duas declividades, as velocidades apresentam comportamentos diferentes (figura 14 e 15). A diferença entre as velocidades é mais expressiva que para os níveis. Na declividade 1:1 a variação da velocidade ocorre bruscamente na aproximação hidrostática (figura 14a). Já na declividade 1:10, para a aproximação hidrostática, existem variações bruscas ao longo da rampa, relacionadas à discretização espacial.

Nota-se nas figuras 13a e 13b a presença de oscilações da superfície livre logo na passagem do obstáculo. Estas oscilações estão em evidência por causa da escala distorcida utilizada no gráfico, porém se observa-se que elas são ondas estacionárias de pequena amplitude provocada pelas velocidades ascendentes que foram criadas pela presença do obstáculo. Considera-se este efeito razoável, porém não é avaliado, pois não existe validação deste fenômeno. Efeito semelhante pode ser observado em escoamentos reais em torno de objetos, na face a montante do objeto, como, por exemplo, em pilares de pontes.

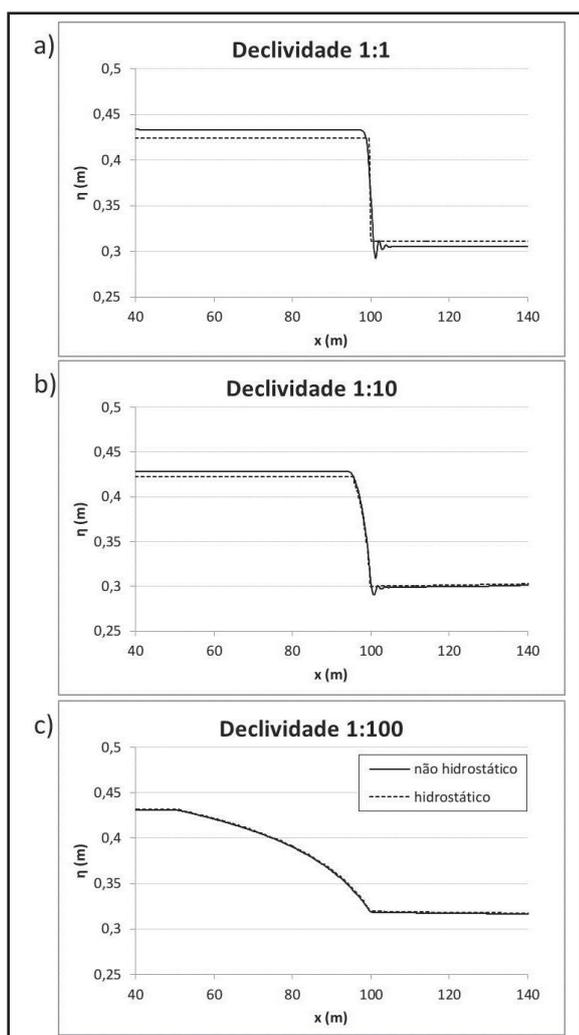


Figura 13 – Caso 4: níveis para declividades de a) 1:1; b) 1:10 e c) 1:100

CONCLUSÕES

No presente trabalho foi descrito um código numérico tridimensional desenvolvido para simulação de escoamentos com superfície, considerando a pressão total, dependente do espaço e do tempo. Para isso, foram resolvidas numericamente as equações da Continuidade e de Navier-Stokes, com um método semi-implícito em diferenças finitas e passo de tempo fracionado em dois subpassos.

No primeiro subpasso se calcula o campo de velocidades e desnível, considerando que a pressão varia de forma hidrostática; no segundo subpasso, calcula-se a pressão não-hidrostática e se recalcula o campo de velocidades e o desnível, obtendo-se o campo de velocidades, de pressão e o desnível definitivos.

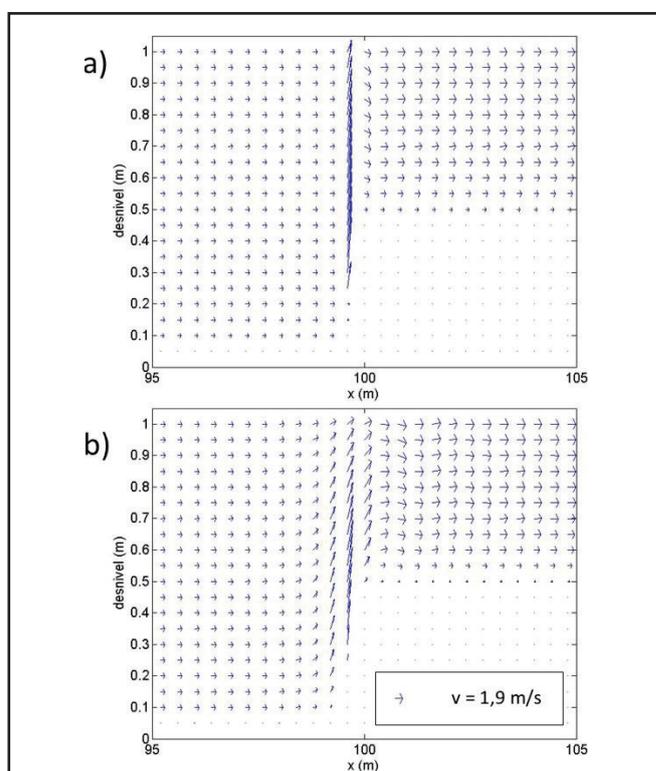


Figura 14 – Caso 4: campo de velocidades referentes à declividade de 1:1 para: a) aproximação H; e b) aproximação NH

Para quase todos os casos analisados no presente trabalho, há indicações de que o código com a aproximação de pressão não-hidrostática forneceu resultados muito mais adequados do que o código com aproximação apenas hidrostática. Para a simulação de propagação de ondas, a consideração de pressão total mostra que os níveis calculados ajustam satisfatoriamente com a solução analítica ou com dados experimentais. Nas simulações de correntes (caso 3 e 4), verifica-se uma diferença na distribuição de velocidades com a profundidade em que, para o código hidrostático, as velocidades variam pouco verticalmente.

O último caso, de escoamentos sobre rampas, demonstrou que o fluxo é dependente do gradiente de fundo. Se este for suave o suficiente, não existem grandes variações entre os resultados do código com aproximação hidrostática

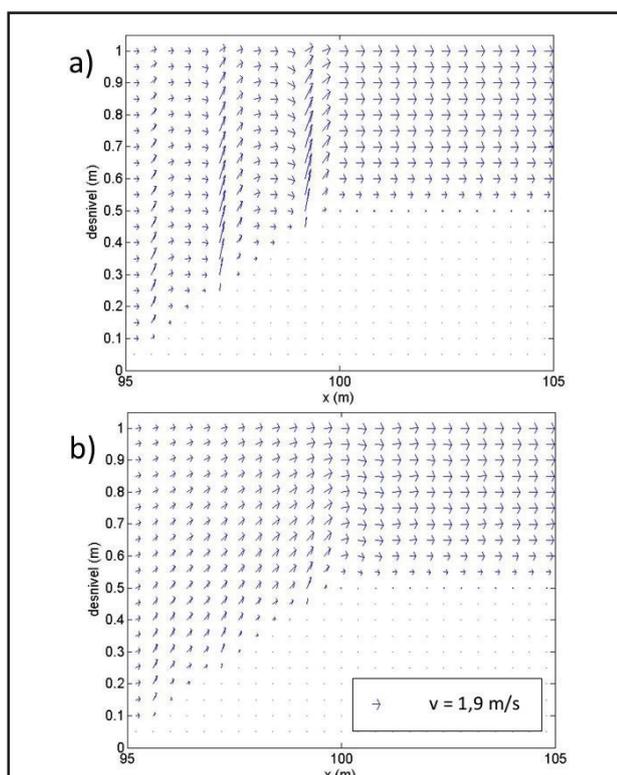


Figura 15 – Caso 4: campos de velocidades referentes à declividade 1:10 para: a) aproximação H; e b) aproximação NH

e do com aproximação não-hidrostática. Porém, se a variação do gradiente de fundo for brusca, o código com aproximação hidrostática apresenta resultados expressivamente diferentes, tanto de desnível quanto de velocidades, em relação ao código com aproximação não-hidrostática.

A consideração de pressão total permite uma descrição mais adequada da propagação de ondas em bacias e canais em situação de águas intermediárias e profundas. Além disso, a consideração da pressão total também fornece uma melhor descrição do escoamento sobre fundos que possuem deformações com declividade acima de 0,01 m/m.

REFERÊNCIAS

BEJI, S.; BATTJES, J. A. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*, v. 23, p. 1–16, 1994.

CASULLI, V. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 30, n. 4, p. 425–440, 1999.

CASULLI, V.; ZANOLLI, P. Semi-implicit numerical modeling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 36, p. 1131–1149, 2002.

CAUSIN, P.; MIGLIO, E.; SALERI, F. Algebraic factorizations for 3d non-hydrostatic free surface flows. *Comput. Visual Sci.*, v. 5, p. 85–94, 2002.

CHEN, X. A fully hydrodynamic model for three-dimensional, free-surface flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 42, p. 929–952, 2003.

CUI, H.; PIETRZAK, J. D.; STELLING, G.S. Improved efficiency of a non-hydrostatic, unstructured grid, finite volume model. *Ocean Modelling*, v. 54-55, p. 55-67, 2012.

FERZIGER, J.H.; PERIC M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, p. 423, 2002.

FUNKE, S. W.; PAIN, C. C.; KRAMER, S. C.; PIGGOTT, M.D. A wetting-drying algorithm with a combined pressure/free-surface formulation for non-hydrostatic models. *Advances in Water Resources*, v. 34, p. 1483-1495, 2011.

GENG, Y.; WANG, Z. A coastal ocean model of semi-implicit finite volume unstructured grid. *China Ocean Eng.*, v. 26, n. 2, p. 277-290, 2012.

GOTOH, H.; OKAYASU, A.; WATANABE, Y. *Computational Wave Dynamics*. World Scientific Publishing, Singapore, p. 234, 2013.

LABEUR, R. J.; PIETRZAK, J.D. A fully three dimensional unstructured grid non-hydrostatic finite element coastal model. *Ocean Modelling*, v. 10, p. 51-67, 2005.

LEE, J. W.; TEUBNER, M. D.; GILL, J. B.; NIXON. P. M. A 3-d non-hydrostatic pressure model for small amplitude free surface flows. *International Journal for Numerical Methods Fluids*, v. 50, p. 649–672, 2006.

MARSHALL, J.; HILL, C.; PERELMAN, L.; ADCROFT, A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic and nonhydrostatic ocean modeling. *Journal of Geophysical Research*, v. 102, n. C3, p. 5733-5752, 1997.

MEI, C.C. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Wiley Inter Science, 1983.

MONTEIRO, L. R. Simulação numérica de escoamentos com superfície livre com aproximação não-hidrostática. 2014. 94f. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

PARK, J.; MIYATA, M.; ZHU. H. On the accuracy of numerical wave making techniques. *The Society of Naval Architects of Japan*, v. 173, p. 35–44, 1993

STELLING, G. S.; BUSNELLI, M. M. Numerical simulation of the vertical structure of discontinuous flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 37, p. 23–43, 2001.

STELLING, G. S.; ZIJLEMA, M. An accurate and efficient

finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 43, p. 1–23, 2003.

WALTERS, R. A. A semi-implicit finite element model for non-hydrostatic (dispersive) surface waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 49, p. 721–737, 2005.

YAMAZAKI, Y.; KOWALIK, Z.; CHEUNG, K. F. Depth-integrated, non-hydrostatic model for free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 61, p. 473-497, 2009.

YUAN, H.; WU, C. H. An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 46, p. 709-733, 2004.

Contribuições dos autores:

Leonardo Romero Monteiro: Concepção da ideia, Escrita Geral, Desenvolvimento do Modelo, Proposição dos Testes, Simulações Numéricas, Análise dos Resultados, Discussão dos Resultados.

Edith Beatriz Camaño Schettini: Concepção da ideia, Análise dos Resultados, Discussão dos Resultados, Revisão Conceitual, Gramatical, Semântica e Orientação.