III Semana Acadêmica da Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Porto Alegre, 05 a 08 de Novembro de 2018.

CADERNO DE RESUMOS

Comissão Organizadora:

Bárbara Seelig Pogorelsky
Cássio Baissvenger Pazinatto
Cristina Zaniol
Juliana Sartori Ziebell
Leonardo Duarte Silva
Marcus Vinícius da Silva
Rodrigo Sychocki da Silva
Thaísa Raupp Tamusiunas
Vanusa Moreira Dylewski

Uma prova para a Desigualdade Isoperimétrica utilizando Transporte Ótimo

Lucas Pinto Dutra - *PPGMat*
lucas.dutra@caxias.ifrs.edu.br
Diego Marcon Farias - *PPGMat*
diego.marcon@ufrgs.br

Resumo

Resumo: O objetivo da apresentação é introduzir uma versão bastante geral e apresentar uma demonstração para a famosa Desigualdade Isoperimétrica, seguindo uma adaptação de uma prova já conhecida devida à Gromov. Para tal, explicamos as ferramentas básicas da teoria de Transporte Ótimo, definições e resultados básicos, como a existência de uma aplicação de transporte ótimo (Teorema de Brenier, 1987). Além disso, enunciamos uma versão quantitativa do problema isoperimétrico; mais precisamente, dois resultados, um devido à Fusco, Maggi e Pratelli, e outro à Figalli, Maggi e Pratelli, que foram obtidos de maneira independente e com técnicas diferentes.

Uma Introdução ao particionamento espectral de grafos

Luciano Garim Garcia - *PPGMap*
lucianogarim@gmail.com
Carlos Hoppen - *PPGMap*
choppen@ufrgs.br

Resumo

Frequentemente, os grafos são utilizados por matemáticos e cientistas da computação para extrair abstrações interessantes que podem modelar problemas reais. Neste sentido, um problema bem conhecido em Computação como o agrupamento de dados (*clustering*) pode ser transformado em um problema de particionamento de grafos. Formalmente, esse problema depende de um conjunto finito S de dados e de uma função de similaridade $f\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, onde $f(x,y) > f(w,z)$ implica que x e y são mais similares do que z e w. Dado um inteiro positivo k, o objetivo é particionar o conjunto S em k classes de forma que elementos em uma mesma classe sejam similares e elementos em classes distintas não o sejam. Isso é feito através da otimização de uma função objetivo. Vale ressaltar que a escolha dessa função não é canônica, ilustrando o fato de que a noção de uma "boa partição"pode ser diferente em diferentes contextos.

Para modelar esse problema em termos de grafos, supomos que os dados sejam vértices e a similaridade entre os dados seja descrita por pesos não-negativos associados às arestas. Dado um número $k \in \mathbb{N}_{>1}$ e um grafo $G = (V, E)$ com pesos não-negativos em suas arestas, $\omega : E \to \mathbb{R}_{>0}$, o problema de particionamento de grafo (GPP) busca determinar uma partição P de V com classes de vértices $P = \{V_1, ..., V_k\}$ satisfazendo as seguintes condições: $V_1 \cup ... \cup V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Dessa forma, deseja-se encontrar uma partição no grafo tal que os vértices em diferentes grupos possuam pouca similaridade e vértices do mesmo grupo possuam alta similaridade.

Para medir a qualidade de uma partição, é possível considerar o problema do corte mínimo (Mincut), que consiste em escolher uma partição $V_1, ..., V_k$ que minimize: $Cut(V_1, ..., V_k) = \sum_i^k cut(V_i, V_i^c)$, aqui, $cut(V_i, V_i^c) = \sum_{u \in V_i, v \in V_i^c} \omega_{uv}$ é o peso das arestas entre um conjunto e seu complementar. É claro que essa formulação não considera a informação de similaridade dentro dos grupos e, em muitos casos, a solução do Mincut consiste simplesmente na separação de um vértice isolado dos demais, o que tipicamente não é uma partição desejável para o problema prático.

Um modo de contornar este problema é favorecer partições cujas classes sejam grandes. Neste sentido, pode-se utilizar o método de corte por razão (Ratiocut) e corte normalizado (Ncut), que buscam uma partição que minimize, respectivamente, as funções dadas por $Ratiocut(V_1, ..., V_k) = \sum_i^k \frac{cut(V_i, V_i^c)}{|V_i|}$ e $Ncut(V_1, ..., V_k) = \sum_i^k \frac{cut(V_i, V_i^c)}{vol(V_i)}$, onde $|V_i|$ representa a cardinalidade da classe e $vol(V_i)$ é o total de pesos provenientes da classe.

Basicamente, a formulação de corte por Ratiocut tipicamente leva a partições mais equilibradas, já que os termos são normalizados pelo tamanho das classes da partição. Porém, ainda não é considerada a similaridade entre os vértices no interior de uma mesma classe. Essa informação é considerada para o Ncut, que substitui a normalização dada pela cardinalidade da classe, pela similaridade entre os vértices da classe. Infelizmente, quando se introduz condições para obter partições balanceadas, o problema de Mincut anteriormente simples de resolver torna-se um problema NP-difícil. Dessa forma, métodos heurísticos ou aproximados têm sido propostos com frequência, os quais fornecem soluções sub-ótimas com significativa redução da complexidade na solução do problema. Entretanto, devido à grande heterogeneidade das aplicações de problemas de agrupamento, as heurísticas são normalmente desenvolvidas para determinadas classes de problemas. Uma família importante de heurísticas são as heurísticas espectrais, baseadas em ferramentas da teoria espectral de grafos.

Pela abordagem espectral, para se aproximar a minimização das formulações RatioCut e Ncut, são calculados autovetores associados a autovalores específicos de matrizes associadas a grafos, como a matriz laplaciana e matriz laplaciana sem sinal. De fato, tais autovetores correspondem a soluções de relaxações dos problemas apresentados acima. Por exemplo, a partir do Teorema de Rayleigh-Ritz, é possível demonstrar que o autovetor associado ao segundo menor autovalor da matriz laplaciana, conhecido como vetor de Fiedler, é a solução de uma versão relaxada do Ratiocut. Uma consequência disso é que, ao contrário da solução do problema original, que seria dada por vetores característicos das classes da partição, a solução do problema relaxado é dada por vetores em $\mathbb{R}^k$, sendo necessário utilizar um algoritmo de agrupamento para transformar os vetores-solução do problema relaxado $\vec{x} = (x_1, ..., x_k), x_i \in \mathbb{R}$ em vetores característicos de partições $\vec{x} = (x_1, ..., x_k), x_i \in \{0, 1\}$.

Em fim, este trabalho tem por objetivo apresentar a metodologia de particionamento de grafos pelo espectro, discutindo a relação entre a solução exata e a solução obtida pela relaxação do problema. Além disso, pretende-se apresentar alguns caminhos que estão sendo seguidos na pesquisa para determinar o quão próxima a solução relaxada está da solução exata do problema olhando para determinadas classes de grafos.

Referências

[1] A. Addoum, O. Farges, and F. Asllanaj. Optical properties reconstruction using the adjoint method based on the radiative transfer equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 204:179–189, 2018.

[2] Y. Azmy and E. Sartori. *Nuclear Computational Science: A Century in Review.* Springer, 2010.

[3] M. Haltmeier, L. Neumann, and S. Rabanser. Single-stage reconstruction algorithm for quantitative photoacoustic tomography. *Inverse Problems*, 31(6):1–24, 2015.

[4] J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems.* Springer, New York (NY), 2005.

[5] A. K. Prinja and E. W. Larsen. *General Principles of Neutron Transport, Chapter 5 in Handbook of Nuclear Engineering, Vol. 1: Nuclear Engineering Fundamentals.* Springer, New York (NY), 2010.

[6] E. Somasundaram and T. Palmer. Application of variational variance reduction for source-detector problems in nuclear non-proliferation. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 45(7):554–577, 2016.

Calculando os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos através do suporte de subárvores

Maikon Machado Toledo - *PPGMap*
maikon.toledo@ufrgs.br
Vilmar Trevisan - *PPGMap*
vilmar.trevisan@ufrgs.br
Luiz Emílio Allem - *PPGMap*
emilio.allem@ufrgs.br

Resumo

O suporte de um grafo é um subconjunto de vértices do grafo tal que pelo menos uma de suas respectivas coordenadas dos autovetores da base do espaço nulo da matriz de adjacência é diferente de zero. O estudo do suporte de grafo é muito importante, pois ele nos fornece informações estruturais de um grafo. Por exemplo, em [1], D. Jaume e G. Molina usaram o suporte de uma árvore T para obter fórmulas fechadas para dois parâmetros clássicos. O primeiro é o número de independência de um grafo G, denotado por $\alpha(G)$. Vários matemáticos estudaram $\alpha(G)$ (por exemplo [3, 4, 5]). Vale destacar que o problema de computar $\alpha(G)$ é NP-difícil [2]. O segundo é o número de emparelhamento de um grafo G, denotado por $\nu(G)$ [6].

Nessa ótica, nos propomos a estudar quais características podemos obter de um grafo unicíclico através do suporte, mais especificamente, neste trabalho obtivemos fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos usando o suporte de subárvores. Essas fórmulas permitem calcular os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos usando métodos de álgebra linear.