

T.M.
(043)53
2021
D 135

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**TEORÍA DE CAMPOS NO RELATIVISTAS: DINÁMICA
E IRREVERSIBILIDAD**

Lic. Lucas Daguerre

Dr. Gonzalo Torroba
Director

Miembros del Jurado

Dr. Horacio Casini (Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche - UNCuyo)

Dr. César Fosco (Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche - UNCuyo)

Dr. Guillermo Silva (Instituto de Física de La Plata - UNLP)

Febrero, 2021

Partículas y Campos - Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

INVENTARIO: 24143
14.07.2021
Biblioteca Leo Falicov

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	vi
Abstract	viii
Nomenclatura	x
1. Introducción y motivación	1
2. Límite no relativista de la Teoría de Campos y Teorema de Reeh-Schlieder	5
2.1. Límite no relativista del campo escalar real y localización	6
2.2. Cálculo del propagador y microcausalidad	11
2.3. Teorema de Reeh-Schlieder	13
3. Fermiones de Dirac libres a densidad finita	19
3.1. Teoría en el continuo	19
3.2. Modelo en la red	22
3.3. Dinámica de los fermiones	24
4. Entropía de entrelazamiento	27
4.1. Fermiones quirales	29
4.2. Fermiones masivos a densidad finita	30
5. Entropías de Renyi	35
5.1. Resultados numéricos	37
5.2. Oscilaciones de Friedel y OPE en defectos	39
6. Información mutua	43
6.1. Análisis via la expansión OPE de la información mutua	45
6.2. Resultados numéricos	48

7. Medidas de distinguibilidad	51
7.1. Entropía relativa	52
7.2. Entropías relativas de Renyi	53
7.3. Resultados numéricos	55
8. Medidas de información cuántica en 2+1	57
8.1. Resultados numéricos	60
9. Conclusiones	63
A. Demostración del Teorema de Reeh-Schlieder	67
A.1. Caso relativista	67
A.2. Teorema de reflexión de Schwarz	70
B. Fermiones en la red	71
B.1. Autovectores y correlador	71
B.2. Duplicación de fermiones a densidad finita	73
B.3. Límite al continuo de las entropías de Renyi	75
B.4. Correlador en 2+1	76
C. Tratamiento perturbativo: bosonización	79
C.1. Cálculo de la función $Z_k^{(2)}$	83
Bibliografía	85
Agradecimientos	93

En memoria de mi abuelo Lito y nuestras charlas sobre historia.

Resumen

Estudiamos distintos aspectos de Teoría Cuántica de Campos a densidad finita usando métodos provenientes de la Teoría de Información Cuántica. Primero, revisitamos el Teorema de Reeh-Schlieder y sus corolarios, tanto en la teoría relativista como no relativista. Discutimos los resultados en base a las nociones de microcausalidad y localización en ambas teorías. Luego, por simplicidad, en la mayor parte del presente trabajo nos enfocamos en fermiones de Dirac masivos con potencial químico no nulo, y trabajamos en $1 + 1$ dimensiones espacio-temporales. Usando la entropía de entrelazamiento en un intervalo, construimos la función c entrópica que es finita. Contrario a lo que ocurre en teorías con invarianza de Lorentz, esta función c exhibe una violación rotunda de la monotonicidad; también codifica la creación de entrelazamiento de largo alcance proveniente de la superficie de Fermi. Motivados por trabajos previos de modelos en la red, computamos numéricamente las entropías de Renyi y encontramos oscilaciones de Friedel; estas son entendidas en términos del OPE en defectos. Más aún, consideramos la información mutua como una medida de correlación de funciones entre diferentes regiones. Usando una expansión de distancia grande desarrollada por Cardy, argumentamos que la información mutua detecta las correlaciones inducidas por la superficie de Fermi todavía al orden dominante en la expansión. También analizamos la entropía relativa y sus generalizaciones de Renyi para distinguir estados con diferente carga o masa. En particular, mostramos que estados en diferentes sectores de superselección dan origen a un comportamiento super-extensivo en la entropía relativa. Discutimos posibles extensiones a teorías interactuantes, y argumentamos por la relevancia de algunas de estas medidas para testear líquidos que no son de Fermi. Por otro lado, también damos los primeros resultados preliminares del estudio en $2 + 1$ dimensiones espacio-temporales. Finalmente, recalcamos que gran parte de los resultados de esta tesis se encuentran publicados en [1].

Palabras clave: TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS A DENSIDAD FINITA, INFORMACIÓN CUÁNTICA, GRUPO DE RENORMALIZACIÓN.

Abstract

We study different aspects of Quantum Field Theory at finite density using methods from Quantum Information Theory. First, we review the Reeh-Schlieder theorem and its corollaries, for both the relativistic and non relativistic theory. We discuss the results based on concepts of microcausality and localization in both theories. Then, for simplicity, we focus on massive Dirac fermions with nonzero chemical potential, and work in $1 + 1$ space-time dimensions. Using the entanglement entropy on an interval, we construct an entropic c -function that is finite. Unlike what happens in Lorentz-invariant theories, this c -function exhibits a strong violation of monotonicity; it also encodes the creation of long-range entanglement from the Fermi surface. Motivated by previous works on lattice models, we next calculate numerically the Renyi entropies and find Friedel-type oscillations; these are understood in terms of a defect operator product expansion. Furthermore, we consider the mutual information as a measure of correlation functions between different regions. Using a long-distance expansion previously developed by Cardy, we argue that the mutual information detects Fermi surface correlations already at leading order in the expansion. We also analyze the relative entropy and its Renyi generalizations in order to distinguish states with different charge and/or mass. In particular, we show that states in different superselection sectors give rise to a super-extensive behavior in the relative entropy. We discuss possible extensions to interacting theories, and argue for the relevance of some of these measures for probing non-Fermi liquids. On the other hand, we give preliminary results involving quantum information measures in $2 + 1$ space-time dimensions. Finally, we must point out that the majority of the results in this thesis can be found in English on [1].

Keywords: QUANTUM FIELD THEORY AT FINITE DENSITY, QUANTUM INFORMATION, RENORMALIZATION GROUP.

Nomenclatura

Símbolos

$S(V)$	Entropía de entrelazamiento.
$S_n(V)$	Entropía de Renyi.
$I_n(A, B)$	Información mutua (de Renyi).
$S_n(\rho \sigma)$	Entropía relativa (de Renyi).
\mathcal{H}	Espacio de Hilbert.
k_F	Momento de Fermi.
μ_F	Potencial químico.

Convenciones

El número de dimensiones espacio-temporales lo denotamos por d .

Utilizamos unidades naturales, $c = 1$ y $\hbar = 1$.

μ, ν, ρ, σ (griegos) con $\mu = 0, \dots, d - 1$ son índices espacio-temporales.

i, j con $i, j = 1, \dots, d - 1$ son índices solamente espaciales.

$g_{\mu\nu} = (+ - \dots -)$ es la métrica de Minkowski.

Utilizamos la convención de Einstein para la sumatoria, por ej. $\sum_{\mu} x^{\mu} y_{\mu} \equiv x^{\mu} y_{\mu}$.

Utilizamos la notación slash de Feynman, por ej. $\not{A} = A_{\mu} \gamma^{\mu}$.

Acrónimos y abreviaciones

QFT	‘Quantum Field Theory’ o Teoría Cuántica de Campos.
CFT	Teoría Conforme de Campos.
RG	Grupo de Renormalización.
EE	Entropía de entrelazamiento.
OPE	‘Operator Product Expansion’.
UV	Ultravioleta.
IR	Infrarojo.

Capítulo 1

Introducción y motivación

“No deseo estatuas, placas, premios, calles o institutos cuando muera. Mis esperanzas son otras. Deseo que mi país contribuya al adelanto científico y cultural del mundo científico actual. Que tenga artistas, pensadores y científicos que enriquezcan nuestra cultura y cuya obra sea beneficiosa para nuestro país, nuestros compatriotas y toda la especie humana.”

— Bernardo Houssay. Premio Nobel en Fisiología (1947) y primer presidente del CONICET.

La Teoría Cuántica de Campos (‘Quantum Field Theory’ o QFT) describe sistemas cuánticos con infinitos grados de libertad, y juega un rol central en modelos de altas energías y sistemas fuertemente correlacionados en materia condensada. En las últimas décadas la QFT ha visto un progreso revolucionario en aspectos no perturbativos al utilizar métodos provenientes de la Teoría de Información Cuántica. Esto empezó con el cálculo de Srednicki de la entropía de entrelazamiento para un campo escalar real, exhibiendo así la ley de área [2]. Medidas basadas en la entropía de entrelazamiento en conjunto con la unitariedad y causalidad han establecido la irreversibilidad del grupo de renormalización (RG) en $d = 1 + 1$, $2 + 1$ y $3 + 1$ dimensiones espacio-temporales para QFTs relativistas [3–5].¹ Resultados de Teorías de Campos Conformes (CFT) [8] así como de Teorías de Campos libres [9] han brindado nuevas visiones acerca de la estructura general de QFT. Propiedades de la entropía relativa han sido útiles para probar cotas de energía en QFT, como la cota de Bekenstein [10], la segunda ley generalizada [11], la ANEC [12] y la QNEC [13]. La observación de la ley de área en modelos locales también ha motivado el estudio de métodos numéricos muy poderosos para encontrar estados fundamentales [14]. Empezando por la propuesta de Ryu y Ta-

¹Los teoremas C y A para $d = 1 + 1$ y $d = 3 + 1$ respectivamente, fueron probados originalmente utilizando correladores locales en [6] y [7], respectivamente.

kayanagi [15, 16] de que la entropía de entrelazamiento en una CFT puede computarse a partir de una superficie de área mínima en un espacio-tiempo de anti-de-Sitter (AdS), ideas provenientes de información cuántica han brindado desarrollos fundamentales en holografía y gravedad cuántica.

La mayoría de los resultados existentes en la literatura hasta el momento han estado relacionados con QFTs relativistas. La razón es que las restricciones que imponen la simetría de Lorentz y la estructura causal juegan un rol fundamental en los enfoques antes mencionados. En contraste, son mucho menos conocidos resultados en QFTs no relativistas y, en particular, en QFTs no relativistas a densidad finita como sería relevante para la descripción del límite al continuo de materia cuántica. Ha sido sugerido que la entropía de entrelazamiento puede presentar un comportamiento no monótono en ciertos modelos no relativistas, y esto podría implicar que el grupo de renormalización no fuese irreversible más allá de las teorías Lorentz invariantes [17]. Trabajos anteriores abocados al estudio de entropía de entrelazamiento para fermiones relativistas con carga finita incluyen [18–23]. Mientras que algunos resultados para teorías con exponentes dinámicos no triviales incluyen [24–27].

El objetivo de este trabajo consiste en determinar aquello que la información cuántica pueda decirnos acerca de QFTs relativistas a densidad finita, obtenidas al considerar un potencial químico. En algún sentido esto se encuentra en un punto intermedio entre teorías de campos relativistas y modelos completamente no relativistas: el potencial químico es una perturbación relevante y por tanto a distancias muy cortas esperamos recuperar la invariancia de Poincaré. Es por esto que resulta natural empezar primero por extender los resultados desde el contexto relativista. Tales modelos también pueden tener superficies de Fermi, y su estudio resulta importante para aplicaciones experimentales (de hecho derivaremos nuevas predicciones en esta dirección).

Una lección clave de los análisis invariantes de Lorentz es que, desde el punto de vista de medidas de información cuántica, las QFTs libres proveen una arena no trivial para obtener resultados más generales que se aplican más ampliamente. Este punto de vista ha sido resumido y advocated en [9]. Motivado por esto, en esta tesis estudiamos fermiones de Dirac libres a densidad finita, empleando tanto métodos analíticos en teoría de información cuántica así como simulaciones numéricas. Más aun, nos restringimos al caso más simple posible de $d = 1 + 1$ dimensiones espacio-temporales. La razón para esto es que los cálculos numéricos son más simples en este caso; a pesar de las simplificaciones, los resultados son todavía no triviales. Planeamos extender nuestro trabajo a dimensiones más altas en un futuro. Un avance preliminar en $d = 2 + 1$ se encuentra plasmado en el anteúltimo capítulo. Encontraremos que medidas de información cuántica exhiben un comportamiento que es diferente respecto de las teorías relativistas; esto está relacionado con el hecho de que la superficie de Fermi induce excitaciones de baja energía con entrelazamiento de largo alcance.

En cuanto a la estructura de la tesis, la misma consta de siete capítulos de contenidos; una sección con conclusiones y miras hacia la continuación del trabajo; y por último una colección de tres apéndices:

- El Cap. 2 tiene como objetivo principal discutir al Teorema de Reeh-Schlieder, un resultado que emerge en el contexto del análisis axiomático de QFT y que para teorías relativistas implica la existencia de entrelazamiento de vacío no trivial entre regiones espaciales. Se discuten algunas nociones de localización y microcausalidad tanto en la teoría relativista como no relativista, así como la demostración del teorema y su relación con dichas propiedades.
- En el Cap. 3 se revisitan propiedades básicas de fermiones de Dirac a densidad finita tanto en el continuo como en la red. También se discute su dinámica, que está determinada por dos parámetros relevantes, la masa m y la carga, que es proporcional al momento de Fermi k_F . El resto de la tesis estará dedicada al análisis de las distintas medidas de información cuántica y sus implicaciones en QFT a densidad finita.
- En el Cap. 4 estudiamos la entropía de entrelazamiento a densidad finita. Construimos una función c entrópica cutoff independiente, y probamos que es no monótona. Esta revela la competencia entre m y k_F a lo largo del flujo del grupo de renormalización, y codifica en forma explícita la creación de entrelazamiento de largo alcance asociado a la superficie de Fermi.
- En el Cap. 5 estudiamos las entropías de Renyi a densidad finita. Trabajos previos en la red, como [28], han encontrado un comportamiento oscilatorio en estas medidas, y esto estuvo relacionado con la presencia de oscilaciones de Friedel en [29]. Analizamos cuándo y cómo las oscilaciones emergen en el continuo de QFT, y explicamos su origen en términos basados en el ‘operator product expansion’ (OPE) de defectos.
- En el Cap. 6 consideramos la información mutua (y sus generalizaciones de Renyi) entre dos intervalos a densidad finita. Seguimos el enfoque de [30] y representamos cada intervalo en términos del OPE con operadores locales. Probamos que la información mutua detecta la presencia de la superficie de Fermi todavía al orden dominante, y sugerimos por qué esta es una medida interesante para testear a los líquidos que no son de Fermi. Los resultados analíticos son también verificados numéricamente.
- En el Cap. 7 estudiamos la entropía relativa, y una cierta generalización uniparamétrica de esta que interpola con la fidelidad a densidad finita. Estas cantidades miden la distinguibilidad entre estados. Las aplicamos para distinguir estados en

dos casos distintos: matrices densidad en distintos sectores de superselección de carga, y matrices densidad en el mismo sector pero con diferentes deformaciones relevantes de la masa. También comparamos con resultados numéricos.

- En el Cap. 8 damos inicio al estudio de la entropía de entrelazamiento a densidad finita en $d = 2 + 1$. Si bien los resultados son preliminares, allí motivamos trabajo futuro en esa dirección.
- Terminamos en el Cap. 9 con una discusión del trabajo. En cuanto a los Apéndices: en el Apéndice A se encuentra la demostración relativista del Teorema de Reeh-Schlieder; en el Apéndice B se discuten algunas propiedades que requerimos acerca de fermiones de Dirac libres a densidad finita en la red; y en el Apéndice C contamos los avances parciales del esquema perturbativo, en relación al cálculo de entropías de Renyi utilizando la técnica de bosonización.

Finalmente, gran parte del presente trabajo ha sido publicado recientemente en un artículo [1]. Más precisamente, los resultados que se plasman allí son aquellos que se encuentran entre los Cap. 3 al 7 inclusive. Asimismo, también fue expuesto como presentación mural (virtual) en la 105° Reunión de la Asociación de Física Argentina en 2020, y ha sido premiado con la Mención Especial por el Premio Luis Másperi. Por tal motivo, una porción de este trabajo prontamente también será publicada en la revista Anales de la Asociación de Física Argentina.

Capítulo 2

Límite no relativista de la Teoría de Campos y Teorema de Reeh-Schlieder

“Creo que la verdad está bien en las matemáticas, en la química, en la filosofía. No en la vida. En la vida es más importante la ilusión, la imaginación, el deseo, la esperanza.”

— Ernesto Sábato. Escritor, físico y presidente de la CONADEP.

En las primeras dos secciones estudiaremos el límite de bajas energías de la Teoría de Campos Cuántica (QFT) libre más sencilla posible, con el fin de entender y motivar algunas cuestiones básicas relacionadas con localización y microcausalidad en la teoría no relativista. Estas se encuentran plasmadas en tantísimos libros clásicos de la literatura de QFT [31, 32], aunque la idea aquí es que el debate sea lo más autocontenido posible.

Finalmente, en la última sección abordaremos al Teorema de Reeh-Schlieder, cuyo principal corolario para teorías relativistas implica la existencia de entrelazamiento cuántico no trivial del estado de vacío entre distintas regiones espaciales. Dentro de este contexto, trataremos de dilucidar como en el límite no relativista en donde la máxima velocidad de propagación es infinita, dos aspectos a priori contradictorios tienen lugar: la validez del teorema de Reeh-Schlieder, y la nulidad de la entropía de entrelazamiento. Parte de esta discusión girará en torno a las cuestiones ya mencionadas de localización y microcausalidad en la teoría no relativista.

2.1. Límite no relativista del campo escalar real y localización

Por simplicidad, vamos a comenzar con la Teoría de Campos clásica relativista más sencilla posible. Sea $\phi(x^\mu)$ un campo escalar real clásico libre, con una métrica Lorentziana $g_{\mu\nu} = (+ - \dots -)$ en d coordenadas espacio-temporales y con una acción dada por

$$S = \int dt d^{d-1}x \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2]. \quad (2.1)$$

La condición en capa de masa establece que la energía E en términos del momento \vec{p} de cada modo de Fourier del campo viene dada por

$$\omega_{\vec{p}} \equiv E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (2.2)$$

En el límite en el que $p \ll m$,

$$\omega_{\vec{p}} = \pm \left(m + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{m^3}\right) \right). \quad (2.3)$$

La energía posee un orden dominante $\omega_{\vec{p}} \sim \pm m$ más pequeñas correcciones entre las cuales aparece la relación usual no relativista $\frac{p^2}{2m}$. Para desacoplar los modos menos energéticos, definimos un campo escalar complejo ψ tal que¹

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} (e^{-imt} \psi + e^{imt} \psi^\dagger). \quad (2.4)$$

Al reemplazar en la acción (2.1) y despreciando los términos que oscilan rápidamente debido a los factores $e^{\pm i2mt}$, se obtiene que

$$S \approx \int dt d^{d-1}x \left(\frac{i}{2} (\psi^\dagger \partial_t \psi - \partial_t \psi^\dagger \psi) - \frac{1}{2m} |\partial_i \psi|^2 + \frac{1}{2m} |\partial_t \psi|^2 \right). \quad (2.5)$$

Como el último término $\frac{1}{2m} |\partial_t \psi|^2$ está suprimido por la masa en comparación con los primeros dos $\frac{i}{2} (\psi^\dagger \partial_t \psi - \partial_t \psi^\dagger \psi)$, también podemos despreciarlo y arribar a una nueva acción aproximada

$$S_{\text{NR}} = \int dt d^{d-1}x \left(\frac{i}{2} (\psi^\dagger \partial_t \psi - \partial_t \psi^\dagger \psi) - \frac{1}{2m} |\partial_i \psi|^2 \right). \quad (2.6)$$

La acción (2.6) usualmente se la denomina la acción de Schrödinger pues al minimizar la acción, ψ y ψ^\dagger satisfacen la ecuación homónima y su conjugada en ausencia de

¹En realidad, la expresión (2.4) tendría que escribirse en términos de ψ y ψ^* . Sin embargo, al cuantizar el campo ψ y $\psi^* \mapsto \hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^\dagger$, con lo cual se optará por usar sistemáticamente \dagger en vez de $*$.

potencial

$$i\partial_t\psi = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi \quad \text{y} \quad i\partial_t\psi^\dagger = \frac{\nabla^2}{2m}\psi^\dagger. \quad (2.7)$$

Integrando por partes y despreciando los términos de borde la acción (2.6) puede reescribirse como usualmente aparece en la literatura

$$S_{\text{NR}} = \int dt d^{d-1}x \underbrace{\psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\partial_i^2}{2m} \right) \psi}_{\mathcal{L}_{\text{NR}}}. \quad (2.8)$$

La acción no relativista posee una nueva simetría global $U(1)$ dada por $\psi \mapsto e^{-i\alpha}\psi$, con α constante. Esta nueva simetría no existe en la teoría en el UV (ultravioleta), más bien, es una ley emergente de bajas energías dado que todos los términos que la rompen se encuentran suprimidos. Por el teorema de Noether, la corriente conservada j^μ asociada a esta simetría viene dada por

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NR}}}{\partial(\partial_0\psi)} \frac{\delta\psi}{\delta\alpha} = \psi^\dagger\psi, \quad j^i = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NR}}}{\partial(\partial_i\psi)} \frac{\delta\psi}{\delta\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NR}}}{\partial(\partial_i\psi^\dagger)} \frac{\delta\psi^\dagger}{\delta\alpha} = \frac{i}{2m}(\psi\partial^i\psi^\dagger - \psi^\dagger\partial^i\psi). \quad (2.9)$$

Mientras que la carga conservada N ,

$$N = \int d^{d-1}x j^0 = \int d^{d-1}x \psi^\dagger\psi, \quad (2.10)$$

es el número de partículas. En particular, esta magnitud es semidefinida positiva. Más adelante tendrá un rol fundamental a la hora de argumentar que la entropía de entrelazamiento en la teoría no relativista es cero.

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos resultan ser ondas planas de momento \vec{p} y energía $\omega_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m}$. Entonces, en el espacio real pueden escribirse como combinación lineal de ellas², pesadas por coeficientes complejos $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} a_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{p}}t)}, \quad (2.11)$$

$$\psi^\dagger(\vec{x}, t) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{p}}t)}. \quad (2.12)$$

Por otro lado, el momento canónicamente conjugado respecto de ψ es

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NR}}}{\partial(\partial_t\psi)} = i\psi^\dagger(\vec{x}, t). \quad (2.13)$$

Con esto dicho, ya es posible continuar con miras hacia la cuantización del cam-

²La representación aquí empleada es la denominada ‘representación de Schrödinger’.

po. Para conciliar los campos clásicos con la mecánica cuántica se puede seguir una prescripción denominada “cuantización canónica” en la cual los campos son elevados a operadores³ actuando sobre un espacio de Fock y sobre los cuales se imponen reglas de conmutación denominadas canónicas a un tiempo t fijo:⁴

$$[\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)] = \delta^{(d-1)}(\vec{x} - \vec{x}') \text{ y } [\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)] = [\psi^\dagger(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)] = 0. \quad (2.14)$$

Puede demostrarse que las relaciones son equivalentes a

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad \text{y} \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0. \quad (2.15)$$

En el formalismo del espacio de Fock se define el vacío $|0\rangle$ como el estado sin partículas tal que $\langle 0|0\rangle = 1$ y $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ para todo \vec{p} . A continuación, veremos otros elementos que permitan interpretar a los estados del tipo $a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$.

El hamiltoniano H puede escribirse en términos de la densidad hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi \partial_t \psi - \mathcal{L}$ como

$$H = \int d^{d-1}x \mathcal{H} = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \quad (2.16)$$

Mientras que el operador momento total \vec{P} se escribe como

$$(\vec{P})^i = \int d^{d-1}x T^{0i} = \int d^{d-1}x \pi \partial^i \psi = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} (\vec{p})^i a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \quad (2.17)$$

siendo $T^{\mu\nu}$ el tensor energía-impulso. Si definimos el vector $|\vec{p}\rangle$ como

$$|\vec{p}\rangle \equiv a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle, \quad (2.18)$$

puede demostrarse utilizando las expresiones de H y \vec{P} que: $H|\vec{p}\rangle = \omega_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle$ y $\vec{P}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$. Esto último permite interpretar a los vectores $|\vec{p}\rangle$ como “partículas” de momento \vec{p} y energía $\omega_{\vec{p}}$. Por este motivo se suele llamar a $a_{\vec{p}}^\dagger$ operador de creación y consecuentemente a $a_{\vec{p}}$ operador de destrucción. Sin embargo, estas “partículas” no se encuentran localizadas en el espacio, sino que se encuentran localizadas en el espacio de momentos. Por otro lado, sí existen vectores que se encuentran localizados en el espacio y que resultan ser combinación lineal de $|\vec{p}\rangle$:

$$|\vec{x}\rangle \equiv \psi^\dagger(\vec{x}, 0)|0\rangle = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle. \quad (2.19)$$

³Formalmente deberían indicarse tanto ψ , $a_{\vec{p}}$ y sus conjugados con un $\hat{}$ sobre ellos, aunque omitiremos su escritura de aquí en adelante.

⁴En el caso no relativista también podrían imponerse relaciones de anticonmutación para describir partículas fermiónicas. Sin embargo, si se trataran de imponer en el campo de Klein-Gordon relativista, se violarían principios básicos como por ejemplo la microcausalidad de la teoría.

Para demostrar esa última afirmación, es posible definir un operador posición \vec{X} al igual que en mecánica cuántica no relativista

$$\vec{X} = \int d^{d-1}x \vec{x} \psi(\vec{x})^\dagger \psi(\vec{x}), \quad (2.20)$$

y utilizando (2.14) puede verse que $\vec{X}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$. Estas partículas se encuentran localizadas en el espacio y al igual que $|\vec{p}\rangle$, satisfacen la relación de completitud para estados de una sola partícula

$$(\mathbf{1})_1 = \int d^{d-1}x |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|, \quad (2.21)$$

y están normalizados de forma que

$$\langle\vec{x}|\vec{x}'\rangle = \delta^{(d-1)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{y} \quad \langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.22)$$

Además, la interpretación acerca de la localización es consistente con el cálculo

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad (2.23)$$

cuyo resultado se encuentra en el marco de la mecánica cuántica no relativista al utilizar la representación posición/momento de la función de onda[31].

El esquema de la existencia de estados localizados en posición se desvanece en la teoría relativista. Si se hubiese seguido el mismo procedimiento de cuantización canónica, las soluciones para el campo de Klein Gordon (2.1) $\phi_{KG}(\vec{x}, t)$ hubiesen resultado [32]:

$$\phi_{KG}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_{\vec{p}}}} \left(\tilde{a}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \tilde{\omega}_{\vec{p}}t)} + \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i(\vec{p}\vec{x} - \tilde{\omega}_{\vec{p}}t)} \right) = \phi_{KG}^+(\vec{x}, t) + \phi_{KG}^-(\vec{x}, t), \quad (2.24)$$

donde $\tilde{\omega}_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. El factor de normalización que depende de la energía es tal que la medida de integración en el espacio de momentos $\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2\tilde{\omega}_{\vec{p}}}$ sea Lorentz-invariante [33]. Entonces, podríamos proceder de manera similar al caso no relativista y definir⁵

$$|\vec{x}\rangle_{KG} \equiv \phi_{KG}^-(\vec{x}, 0)|0\rangle = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_{\vec{p}}}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} |\vec{p}\rangle_{KG}, \quad (2.25)$$

donde $|\vec{p}\rangle_{KG} = \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$. Notamos que $\tilde{\omega}_{\vec{p}} \approx \sqrt{2m}$ cuando $|\vec{p}| \ll m$, con lo cual en dicho límite se recupera la expresión (2.19) absorbiendo la constante en una redefinición de los operadores de creación/destrucción. Sin embargo, en general ocurre que la norma-

⁵ ϕ_{KG}^+ indica la parte de ϕ_{KG} que contiene operadores de creación. También se podría haber definido $|\vec{x}\rangle_{KG}$ actuando con $(\phi_{KG}^+)^\dagger$ sobre $|0\rangle$.

lización de $|\vec{x}\rangle_{KG}$ no coincide con (2.22). Más bien puede demostrarse que

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_{KG} &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\sqrt{p^2+m^2}} \\ &\sim \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \int_0^\infty dp \frac{p^{d-3}}{\sqrt{p^2+m^2}} \int_{-\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}}^{\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}} du \left(1 - \frac{u^2}{p^2|\vec{x}-\vec{y}|^2}\right)^{\frac{d-4}{2}} \cos(u). \end{aligned} \quad (2.26)$$

En particular para $d = 4$,

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_{KG}^{d=4} = \frac{mK_1(m|\vec{x}-\vec{y}|)}{2\pi^2|\vec{x}-\vec{y}|}, \quad (2.27)$$

siendo K_1 la función modificada de Bessel de segunda especie y de primer orden⁶ (o función de MacDonald), que tiene la particularidad de decaer exponencialmente con la distancia, es decir:

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_{KG}^{d=4} \longrightarrow \left(\frac{m^3}{2\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\right)^{1/2} e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|} \quad \text{si } m|\vec{x}-\vec{y}| \gg 1. \quad (2.28)$$

En vez de anularse para $\vec{x} \neq \vec{y}$ como en el caso no relativista (2.22), decae exponencialmente con la inversa de la longitud de onda de Compton $\frac{1}{m}$. Por tanto, la teoría de Klein-Gordon introduce una escala natural a partir de la cual es factible hablar de la noción de localización de las partículas.

Hasta el momento sólo se definieron estados $|\vec{p}\rangle$ y $|\vec{x}\rangle$ que fueron interpretados como estados de una sola partícula localizada en \vec{p} y en \vec{x} respectivamente. De manera muy natural, podría extenderse la definición para un número más grande de partículas. Por ejemplo, en el espacio de momentos se define el vector $|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle$ tal que

$$|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle \propto a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle. \quad (2.29)$$

La proporcionalidad se debe a que al haber cuantizado con reglas de conmutación, la estadística para un sistema de muchas partículas resulta bosónica, por lo cual, prodría ocurrir que hubiese más de una partícula con el mismo momento. Por otro lado, también se extiende la noción de un estado de muchas partículas localizadas en el espacio como

$$|\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\rangle = \int \frac{d^{d-1}p_1}{(2\pi)^{d-1}} \dots \frac{d^{d-1}p_n}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i(\vec{p}_1 \vec{x}_1 + \dots + \vec{p}_n \vec{x}_n)} |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle. \quad (2.30)$$

La existencia de una base de estados $|\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n\rangle$ en la teoría no relativista será una pieza clave para justificar en el Cap. 4 que la entropía de entrelazamiento es nula en tal caso.

⁶Puede consultarse la *Digital Library of Mathematical Functions* del NIST. Su página web es: <https://dlmf.nist.gov/>.

2.2. Cálculo del propagador y microcausalidad

Un objeto central en cualquier teoría de campos es el propagador (o función de correlación de dos puntos o función de Green). Desde el punto de vista de la teoría axiomática de Wightman [34], el conocimiento de los correladores resultaría suficiente para describir completamente a la teoría. En teorías libres, apelando al teorema de Wick, puede demostrarse que cualquier función de correlación de $2n$ campos⁷ puede calcularse en términos de la función de correlación de dos puntos. En tiempo real, existen distintas prescripciones, todas extensiones analíticas del propagador en tiempo euclídeo. Sin embargo, sólo calcularemos el propagador a tiempo real conocido como propagador de Feynman⁸ G_F , que se define como

$$\begin{aligned}
G_F(\vec{x}', t', \vec{x}, t) &= \langle T\{\psi(\vec{x}', t')\psi^\dagger(\vec{x}, t)\} \rangle \\
&= \Theta(t' - t)\langle\psi(\vec{x}', t')\psi^\dagger(\vec{x}, t)\rangle + \Theta(t - t')\langle\psi^\dagger(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}', t')\rangle \\
&= \Theta(t' - t)\langle\psi(\vec{x}', t')\psi^\dagger(\vec{x}, t)\rangle \\
&= G_R(\vec{x}', t', \vec{x}, t).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En la última igualdad se utilizaron las soluciones para ψ y ψ^\dagger en términos de $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$, y el hecho de que $\langle 0|a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger|0\rangle = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}$ para demostrar la nulidad del último término. Explícitamente, el propagador se obtiene de la resolución de la integral:

$$G_F = \Theta(t' - t) \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{i[\vec{p}(\vec{x}' - \vec{x}) - \frac{\vec{p}^2}{2m}(t' - t)]}. \tag{2.32}$$

Para resolverla, completamos cuadrados, sacamos fuera de la integral el término independiente de \vec{p} y hacemos el cambio de variables $\vec{y} := \vec{p} - m\frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{t' - t}$,

$$\begin{aligned}
G_F &= \Theta(t' - t) e^{im\frac{(\vec{x}' - \vec{x})^2}{2(t' - t)}} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\frac{(t' - t)}{2m}y^2} \\
&= \Theta(t' - t) e^{im\frac{(\vec{x}' - \vec{x})^2}{2(t' - t)}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\frac{(t' - t)}{2m}y^2} \right)^{d-1}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Utilizando la integral de Fresnel para $\alpha > 0$, es decir, para $t' > t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\alpha y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}(1 - i), \tag{2.34}$$

⁷En el caso del campo escalar, tiene que haber n operadores de creación y n operadores de destrucción para que el correlador no sea idénticamente nulo.

⁸Como se verá en (2.31) el mismo coincide con el propagador retardado en la teoría no relativista.

el propagador de Feynman en el límite no relativista resulta

$$G_F(\vec{x}', t', \vec{x}, t) = \Theta(t' - t) \left(\frac{m}{2\pi i(t' - t)} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{i \frac{m(\vec{x}' - \vec{x})^2}{2(t' - t)}}. \quad (2.35)$$

Para $t \rightarrow t'$ el límite puede calcularse introduciendo un cambio de variable $\tau = i(t' - t)$

$$\lim_{\tau \rightarrow i0^+} G_F = \prod_{j=1}^{d-1} \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\tau}} e^{-\frac{m(x'_j - x_j)^2}{2\tau}} \right) = \delta^{(d-1)}(\vec{x}' - \vec{x}), \quad (2.36)$$

resultado que concuerda con el valor de expectación en el vacío de (2.14), es decir, con $\langle 0 | [\psi(\vec{x}', t'), \psi^\dagger(\vec{x}, t)] | 0 \rangle = \delta^{(d-1)}(\vec{x}' - \vec{x})$.

El principio de microcausalidad establece que dos eventos con separación de tipo espacio, es decir, que satisfacen $(x - x')^2 = (t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{x}')^2 < 0$, no ejercen ninguna influencia el uno sobre el otro (siendo $x = (t, \vec{x})$ y $x' = (t', \vec{x}')$). En general, cualquier observable de la teoría puede escribirse como [32]

$$\hat{O}(x) = \hat{\psi}^\dagger(x) O(x) \hat{\psi}(x), \quad (2.37)$$

donde $O(x)$ es una función compleja o un operador diferencial. Por otro lado, puede demostrarse que

$$[\hat{O}(x), \hat{O}(x')] = O(x)O(x') \left(\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x') + \hat{\psi}^\dagger(x')\hat{\psi}(x) \right) \Delta(x - x'), \quad (2.38)$$

siendo Δ la función de Pauli-Jordan

$$\Delta(x' - x) = [\psi(x'), \psi^\dagger(x)]. \quad (2.39)$$

La propiedad de microcausalidad formalmente se enuncia⁹ como una relación de conmutación para eventos con separación de tipo espacio.

$$[\hat{O}(x), \hat{O}(x')] = 0 \quad \text{si} \quad (x - x')^2 < 0, \quad (2.40)$$

y en términos de la función de Pauli-Jordan

$$\Delta(x - x') = 0 \quad \text{si} \quad (x - x')^2 < 0. \quad (2.41)$$

⁹En [35] la conmutatividad está manifestada expresamente en el Postulado 7. Sin embargo, como en la teoría no relativista es imposible satisfacerla, los autores introducen en su reemplazo al Postulado 8 que intuitivamente establece la existencia de una ecuación de campo que determina su evolución a todo tiempo dado el campo a un tiempo inicial.

En la teoría no relativista, también puede demostrarse que

$$G_F(\vec{x}', t', \vec{x}, t) = \Theta(t' - t) \langle \Delta(x' - x) \rangle. \quad (2.42)$$

Como $G_F \neq 0$ para $t \neq t'$ el principio de microcausalidad se desvanece pues la máxima velocidad de propagación es infinita $c \rightarrow \infty$ y los únicos eventos que no está influenciados causalmente son aquellos que posean el mismo t . Por otro lado, la expresión (2.42) sólo es válida en el límite no relativista. Para el campo de Klein-Gordon ocurre que si bien G_F^{KG} nunca se anula, la función Δ sí lo hace para eventos de tipo espacio, respetando así al principio de microcausalidad.

En resumen, en las últimas dos secciones vimos lo siguiente: en la teoría relativista no existen estados localizados espacialmente, mientras que sí existe una noción de microcausalidad en término de conmutadores; mientras que en la teoría no relativista se invierten los roles, sí existen estados localizados espacialmente, pero se desvanece completamente la noción de microcausalidad en términos de conmutadores dado que $c \rightarrow \infty$.

2.3. Teorema de Reeh-Schlieder

En el marco de la teoría axiomática de campos, usualmente conocida en inglés como *Algebraic Quantum Field Theory* (AQFT) o *Local Quantum Physics* [36], como consecuencia inesperada de los axiomas Wightman [34], H. Reeh y S. Schlieder probaron un teorema que causó revuelo y cuyo resultado se encuentra fuertemente ligado con cuestiones de localización y entrelazamiento.

En términos formales, el teorema predice que el estado de vacío es *cíclico*. Además, para QFTs relativistas la noción de microcausalidad combinada con la ciclicidad del vacío implican que el vacío también sea *separable*. Esto colleva a que existan correlaciones entre cualesquiera dos regiones del espacio y por ende, el Teorema de Reeh-Schlieder predice la existencia de entrelazamiento cuántico del vacío no trivial para este tipo de teorías. Recalquemos de nuevo que nuestra idea es dilucidar la siguiente situación de tensión para teorías no relativistas: la validez del teorema de Reeh-Schlieder, y la nulidad de la entropía de entrelazamiento.

A continuación enunciaremos el teorema de Reeh-Schlieder siguiendo los pasos de [37]. Para empezar, consideremos algunas definiciones:

- M_d el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión d , con signatura $(- + \dots +)^{10}$.
- $\Sigma \subset M_d$ una hipersuperficie completa de tipo espacio (o hipersuperficie de

¹⁰Sólo en esta sección se considerará dicha signatura para la métrica, con el fin de mantener la notación de [37].

Cauchy). Clásicamente es una región del espacio tiempo en donde se determinan las condiciones iniciales de la teoría.

- $\mathcal{V} \subset \Sigma$ un conjunto abierto arbitrario de la hipersuperficie.
- $\mathcal{U}_{\mathcal{V}} \subset M_d$ un pequeño entorno de \mathcal{V} en el espacio-tiempo.

Para visualizar los objetos recién definidos podríamos pensar en $d = 2$, tomando $\Sigma = \{x \in M_d : x^0 = 0\}$, $\mathcal{V} = \{x \in M_d : x^0 = 0 \wedge |x^1| < L\}$ y $\mathcal{U}_{\mathcal{V}} = \{x \in M_d : |x^0| < \epsilon \wedge |x^1| < L\}$ como en la Fig. 2.1.

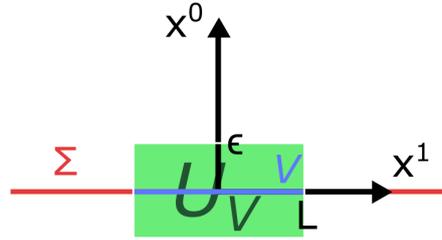


Figura 2.1: Ejemplo de los conjuntos Σ , \mathcal{V} y $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ en $d = 2$.

Además, consideremos:

- $|\Omega\rangle$ el estado de vacío, es decir, el estado de mínima energía.
- Si $\phi(x^\mu)$ representa un campo escalar, los valores de expectación del tipo $\langle \Omega | \phi(x_1^\mu) \dots \phi(x_n^\mu) | \Omega \rangle$ no se encuentran bien definidos (poseen divergencias). Por tal motivo, se considerará la funcional ϕ_f del campo ϕ en términos de una función suave f como: $\phi_f = \int d^d x f(x^\mu) \phi(x^\mu)$.
- $|\psi_{\vec{f}}\rangle = \phi_{f_1} \phi_{f_2} \dots \phi_{f_n} |\Omega\rangle$ el estado en el espacio de Hilbert \mathcal{H} con las f_i con soporte en \mathcal{U}_{Σ} .
- $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ el sector de vacío consistente de todos los estados que resultan ser combinación lineal de $|\psi_{\vec{f}}\rangle$, en otras palabras, $\mathcal{H}_0 = \text{Span}\{|\psi_{\vec{f}}\rangle\}_{f_i \in \mathcal{U}_{\Sigma}}$.

Teorema de Reeh-Schlieder Considerando todas las definiciones, si las f_i están restringidas en un entorno arbitrariamente chico $\mathcal{U}_{\mathcal{V}} \subset M_d$ entonces $\mathcal{H}_0 = \text{Span}\{|\psi_{\vec{f}}\rangle\}_{f_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$.

En otra palabras, el teorema nos dice que al considerar una rebanada de una superficie de Cauchy Σ , sin importar que tan chico sea el conjunto $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$, ¡actuando con operadores locales en $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ sobre el vacío podemos recuperar todo \mathcal{H}_0 ! Esta propiedad interesante es una consecuencia de las condiciones de positividad de la energía y de analiticidad de las funciones de Green. En el Apéndice A.1 describimos con un poco más de detalle la demostración para el caso relativista dada en [37]. Siguiendo los pasos

de dicha demostración, como resultado original, hemos podido extenderla para la teoría no relativista.

Demostración del Teorema de Reeh-Schlieder: caso no relativista

Para extender la demostración al caso no relativista el hamiltoniano H de la teoría debe ser tal de que exista un estado de mínima energía, es decir, un estado de vacío $|\Omega\rangle$. También, debe pedirse que $|\vec{p}| \leq H$ para poder probar la implicación (A.5). Notemos que esto último trivialmente se satisface en la teoría relativista pues $H = \sqrt{p^2 + m^2} > |\vec{p}|$. Sin embargo, si ingenuamente tratásemos de utilizar la relación no relativista usual $H = \frac{p^2}{2m}$, no podríamos concluir que dicha desigualdad se cumple. No obstante, considerando el término dominante m de la relación de dispersión, es decir $H = m + \frac{p^2}{2m}$, es posible probar que $H \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{p^2}{2m}} \geq |\vec{p}|$ (en donde hemos utilizado la desigualdad de las medias AM-GM). Notemos que una vez satisfecha la relación $H \geq |\vec{p}|$, la demostración no requiere del uso de la invarianza de Lorentz, más bien de la existencia de traslaciones espacio-temporales, que particularmente se encuentran bien definidas aun en el límite no relativista. Con esto último, hemos extendido la prueba para el caso no relativista y por ende probado la ciclicidad del vacío para esta teoría. \square

Si bien hemos dado una demostración para el teorema de Reeh-Schlieder en la teoría no relativista, parecería haber un argumento más sencillo para indicar que el teorema podría ser un resultado casi inmediato. La discusión se centra en el denominado ‘time slice axiom’ o axioma de la rebanada de tiempo. Varios autores [34–36] postulan que una QFT bien definida tiene que ser tal que exista una ley dinámica, que permita conocer el valor de los campos en un tiempo arbitrario en término de los campos en un rebanada de tiempo. El hecho de que sea una rebanada con cierto grosor, según [34], se debe a la condición de que las derivadas temporales se encuentren bien definidas a un dado tiempo. Entonces, el hecho de que haya una rebanada temporal y $c \rightarrow \infty$ en la teoría no relativista implican directamente la validez del teorema. Para ver eso, introduzcamos la noción de álgebra de operadores. Esto da una formulación de la teoría que no depende particularmente de los campos utilizados en su descripción[38]:

- $\mathcal{V} \subset \Sigma$ un conjunto abierto, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$ se define como el álgebra de operadores con soporte en $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$.
- Para $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ y $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$ un álgebra de operadores, se dice que ψ es un *vector cíclico* de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$ si $\mathcal{H}_0 = \text{Span}\{a|\psi\rangle : a \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}\}$.

En este nuevo lenguaje, el teorema se reescribe como:

Teorema de Reeh-Schlieder (nuevo enunciado) El vacío $|\Omega\rangle$ es un vector cíclico para $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$, con $\mathcal{V} \subset \Sigma$ arbitrariamente pequeño.

Por otro lado, el ‘time slice axiom’ en términos de álgebras puede enunciarse como que $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{U}}}$, donde $\hat{\mathcal{U}}$ indica al conjunto de todos los puntos que no se encuentran a una separación de tipo espacio de \mathcal{U} [39]. De esta forma, intuitivamente en el límite no relativista, el cono de luz se deforma con $c \rightarrow \infty$ y eso conlleva a que para cualquier subconjunto $\mathcal{V} \subset \Sigma$ a tiempo constante, $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}} = \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}} = \mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\Sigma}}$. Es decir, asumiendo esta versión del ‘time slice axiom’, el teorema de Reeh-Schlieder valdría trivialmente en la teoría no relativista.

Como mencionamos al principio de la sección, la ciclicidad del vacío en conjunto con la propiedad de microcausalidad de la teoría relativista implican la denominada separabilidad del vacío. En términos del álgebra de operadores:

- Un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ es *separador* del álgebra de operadores $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$, si la condición $a|\psi\rangle = 0$ con $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$ implica $a = 0$.

Para la teoría relativista vale el siguiente teorema acerca de la separabilidad del vacío, cuya demostración daremos a continuación.

Separabilidad del vacío Si el vacío $|\Omega\rangle$ es cíclico para $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}}}$ (resultado que sigue del teorema de Reeh-Schlieder) y $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}'}}$ es un álgebra de operadores de una región $\mathcal{U}_{\mathcal{V}'}$ con una separación de tipo espacio respecto de $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ ¹¹, entonces $|\Omega\rangle$ es un vector separador de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\mathcal{V}'}}$.

Demostración) Para realizar la demostración consideremos dos regiones con separación de tipo espacio $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ y $\mathcal{U}_{\mathcal{V}'}$, y un operador a con soporte en $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$. Por la propiedad de microcausalidad se cumple que:

$$[\phi(x), a] = 0 \quad x \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}'}. \quad (2.43)$$

Análogamente, considerando un operador a' con soporte en $\mathcal{U}_{\mathcal{V}'}$

$$[\phi(x), a'] = 0 \quad x \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}. \quad (2.44)$$

¹¹Notemos que $\mathcal{U}_{\mathcal{V}'}$ no es el álgebra de operadores conmutante con $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$, denotada como $\mathcal{U}'_{\mathcal{V}}$. En realidad se cumple que $\mathcal{U}_{\mathcal{V}'} \subseteq \mathcal{U}'_{\mathcal{V}}$, y cuando coinciden dicha condición se denomina dualidad de Haag [37]. Como la demostración solo usa la conmutatividad de los operadores, la separabilidad del vacío sigue siendo válida aún considerando $\mathcal{U}'_{\mathcal{V}}$. La pérdida de la dualidad está relacionada con la existencia de sectores de superselección.

Supongamos además que a es un operador de destrucción del vacío $a|\Omega\rangle = 0$. La conmutatividad de a con operadores $\phi(x_i)$ con soporte en $x_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}'}$ implica que:

$$a\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|\Omega\rangle = 0 \quad x_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}'}. \quad (2.45)$$

Pero debido al teorema de Reeh-Schlieder, $\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|\Omega\rangle$ genera todo \mathcal{H}_0 . Por lo tanto $a = 0$ en todo el sector de vacío \mathcal{H}_0 . \square

Este resultado de la teoría relativista es sumamente interesante y como ya se mencionó anteriormente, depende fuertemente de la conmutatividad de los operadores (es decir, de la propiedad de microcausalidad de la teoría). Existen otros resultados que también pueden desprenderse de la separabilidad del vacío [37]: la existencia de estados de energía negativa y de correlaciones en el vacío entre regiones con separación de tipo espacio, aspectos muy notorios en las QFTs relativistas.

Aunque el teorema de Reeh-Schlieder es válido en la teoría no relativista, los corolarios no siguen siendo necesariamente ciertos pues se pierde la conmutatividad a tiempos distintos. En particular, puede probarse que la entropía de entrelazamiento de una región del vacío con su complemento es siempre nula [40]. Este hecho está relacionado con la idea de que en la teoría no relativista sí existen estados localizados espacialmente. En el Cap 4 se estudiará esto con más detalle.

Capítulo 3

Fermiones de Dirac libres a densidad finita

“Hay derrotas que tienen más dignidad que una victoria”

— Borges. Escritor

En esta sección estudiaremos algunos aspectos teóricos de fermiones de Dirac libres a densidad finita tanto en el continuo como en la red. Los mismos modelan sistemas de materia cuántica en su límite al continuo, y por tanto ellos serán el centro de atención de aquí en más. También veremos su dinámica, que detalla tanto el límite UV como el IR de la teoría. Todo el marco aquí discutido será la base para el posterior análisis de las distintas medidas de información cuántica en los capítulos venideros.

3.1. Teoría en el continuo

Los fermiones de Dirac libres tienen una simetría continua $U(1)$, $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$. Una densidad de carga finita $n_e = \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha \rangle$ puede obtenerse al introducir un potencial químico μ_F , que aparece como un valor de expectación para un campo de gauge de background con una componente temporal no trivial.

La descripción de un sistema físico que está en contacto con un reservorio que permite el intercambio de energía y de partículas, en donde la densidad media de energía y de partículas son constantes, puede realizarse en el marco de la descripción gran canónica. En la misma, el reservorio posee una temperatura T ¹ y un potencial químico μ_F . En este formalismo, el Hamiltoniano se ve modificado como:

$$H \mapsto H' = H - \mu_F N, \quad (3.1)$$

donde N es el número medio de partículas.

¹En todo el presente trabajo $T = 0$.

Es por eso que la acción (con signatura $g_{\mu\nu} = (+ - \dots -)$) resulta

$$S = \int dt d^{d-1}x (\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \mu_F\psi^\dagger\psi). \quad (3.2)$$

Tanto el término de masa como el de potencial químico son operadores relevantes por contaje de potencias, e inducen un flujo no trivial del grupo de renormalización (RG) desde una CFT UV de un fermión de Dirac no masivo. Recalquemos que la acción es cuadrática en los campos, pero no es invariante de Lorentz debido al término del potencial químico. Se siguen las convenciones de [31], y nuestra elección de las matrices de Dirac está descrita en el Apéndice B.

Los autovalores de energía son

$$E_\pm = -\mu_F \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (3.3)$$

De aquí en adelante siempre trabajaremos con $\mu_F > 0$. Es por esto que E_- siempre será negativo y como de costumbre dará origen a las antipartículas; además, la banda E_+ tiene una energía tal que se anula a momento de Fermi finito $|\mathbf{p}| = k_F$, con

$$k_F = \sqrt{\mu_F^2 - m^2}. \quad (3.4)$$

Esto define una superficie de Fermi esférica. El estado fundamental, descrito en más detalle en Sec. 3.2, se obtiene al llenar estos estados hasta $E_+ = 0$. Debe notarse que es necesario que

$$|\mu_F| > |m| \quad (3.5)$$

caso contrario, el nivel de Fermi se encontraría entre el gap, y no se añadiría carga al sistema.

A continuación computaremos el correlador ordenado temporalmente. Para ello usaremos la prescripción $i\epsilon$ apropiada, que mueve los polos de la función de Green de tal forma que

$$p_0 = E_\pm - i\epsilon \operatorname{sgn}(E_\pm). \quad (3.6)$$

En otras palabras [31, 41],

$$\frac{1}{\tilde{p}^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \left(\frac{1}{p^0 - E_+ + i\epsilon \operatorname{sgn}E_+} - \frac{1}{p^0 - E_- + i\epsilon \operatorname{sgn}E_-} \right), \quad (3.7)$$

para el cálculo de los residuos, donde hemos definido $\tilde{p}_\mu = (p_0 + \mu_F, p_i)$. El correlador

resulta

$$\langle T\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) \rangle = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{i(\not{p} + m)_{\beta\alpha}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{ip(x-y)} \left(\frac{1}{p^0 - E_+ + i\epsilon \operatorname{sgn} E_+} - \frac{1}{p^0 - E_- + i\epsilon \operatorname{sgn} E_-} \right). \quad (3.8)$$

Los índices espinoriales α y β se encuentran transpuestos pues

$$\langle T\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) \rangle = \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta(y)} e^{-i \int_{x,y} \bar{\eta}(x)(i\tilde{\not{\partial}} - m)^{-1}(x,y)\eta(y)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = -i(i\tilde{\not{\partial}} - m)_{\beta\alpha}^{-1}(x,y), \quad (3.9)$$

donde η y $\bar{\eta}$ son las fuentes externas para $\bar{\psi}$ y ψ respectivamente. Además, definimos $\tilde{\not{\partial}}$ tal que $\tilde{\not{\partial}} = \not{\partial} - i\mu_F\gamma^0$.

Para cálculos de entrelazamiento que se efectuarán más adelante, será útil el correlador a tiempos iguales. Elegimos tender los tiempos iguales $x^0 - y^0 \rightarrow 0^+$ de forma que $\langle T\bar{\psi}(x)\psi(y) \rangle = \langle \bar{\psi}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) \rangle$. Cerrando el contorno de p^0 en el semiplano superior complejo, el coeficiente de Fourier $e^{ip^0(x^0 - y^0)}$ resulta exponencialmente suprimido en el infinito. Luego, empleando el cálculo por residuos

$$\langle \bar{\psi}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) \rangle = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \left\{ \Theta(-E_+) \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\gamma^0 + \gamma^i p^i + m \right) - \left(-\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\gamma^0 + \gamma^i p^i + m \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Para computar la matriz densidad reducida, será conveniente trabajar en términos del siguiente correlador

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) \rangle = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ \Theta(-E_+) \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma^0\gamma^i p^i + \gamma^0 m}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma^0\gamma^i p^i + \gamma^0 m}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right) \right\}. \quad (3.11)$$

Reconocemos el correlador de densidad finita como la deformación del resultado relativista,

$$C_{k_F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = C_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int_{|\mathbf{p}| < k_F} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma^0\gamma^i p^i + \gamma^0 m}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right), \quad (3.12)$$

con

$$C_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma^0\gamma^i p^i + \gamma^0 m}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right). \quad (3.13)$$

3.2. Modelo en la red

La entropía de entrelazamiento y las entropías de Renyi son medidas de información cuántica divergentes para una QFT en el continuo. Una forma física de regularizar la teoría es ponerla en la red, para luego usar el método de tiempo real [9, 42] para evaluar las medidas de entrelazamiento en el discreto. En lo que sigue, nos restringiremos exclusivamente a $d = 1 + 1$ dimensiones espacio-temporales.

Trabajaremos con una red espacial infinita, $x^1 = n a$, $n \in \mathbb{Z}$, poniendo el espaciado de red $a = 1$. Simetrizando las derivadas espaciales (3.2) y discretizando las derivadas como $\partial_1 \psi(x) \rightarrow (\psi_{n+1} - \psi_n)/a$, el Hamiltoniano en la red se lee como

$$\mathcal{H} = \sum_n \left(-\frac{i}{2} (\psi_n^\dagger \gamma^0 \gamma^1 (\psi_{n+1} - \psi_n) - \text{h.c.}) + m \psi_n^\dagger \gamma^0 \psi_n - \mu_F \psi_n^\dagger \psi_n \right) = \sum_{i,j} \psi_i^\dagger H_{ij} \psi_j, \quad (3.14)$$

donde $\{(\psi_i)_\alpha, (\psi_j^\dagger)_\beta\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}$, siendo α, β índices espinoriales. Ahora determinaremos el estado fundamental y la función de Green fermiónica a tiempos iguales.

En espacio de momentos,

$$\psi_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \varphi_k e^{ikn}, \quad (3.15)$$

el Hamiltoniano resulta

$$\mathcal{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \varphi_k^\dagger (\sin(k) \gamma^0 \gamma^1 + m \gamma^0 - \mu_F) \varphi_k = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi_k^\dagger M(k) \varphi_k. \quad (3.16)$$

Los autovalores de energía vienen dados por

$$\epsilon_{\pm}(k) = -\mu_F \pm \sqrt{\sin(k)^2 + m^2}, \quad (3.17)$$

y los correspondientes autovectores normalizados vienen denotados por $v_{\pm}(k)$ respectivamente. El Hamiltoniano luego es diagonalizado en la nueva base

$$\begin{pmatrix} c_{k,+} \\ c_{-k,-}^\dagger \end{pmatrix} = U^\dagger(k) \varphi_k, \quad (3.18)$$

con

$$U(k) = (v_+(k), v_-(k)) \quad (3.19)$$

como matriz unitaria de los autovectores de $M(k)$, resultando

$$\mathcal{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(\epsilon_+(k) c_{k,+}^\dagger c_{k,+} + (-\epsilon_-(k)) c_{k,-}^\dagger c_{k,-} \right), \quad (3.20)$$

luego de haber substraído la energía de punto cero. La unitariedad de la transformación garantiza que $\{c_{k,a}, c_{p,b}^\dagger\} = 2\pi\delta(k-p)\delta_{ab}$, $a, b = \pm$.

Cuando $\mu_F = 0$, el estado de vacío es el estado que contiene cero partículas $|0\rangle$, aniquilado por todos los $c_{k,\pm}$. Ni bien $\mu_F > 0$, el nuevo estado fundamental se obtiene al llenar los estados de energía negativa $\epsilon_+(k) < 0$ en la banda de partículas:

$$|G\rangle = \prod_{k, \epsilon_+(k) \leq 0} c_{k,+}^\dagger |0\rangle. \quad (3.21)$$

Luego, las partículas llenan la superficie de Fermi con momento de Fermi

$$k_F = \arcsin\left(\sqrt{\mu_F^2 - m^2}\right), \quad (3.22)$$

además, de otra superficie con momento de Fermi dado por $\pm(\pi - k_F)$. Mostramos esto en la Fig. 3.1.

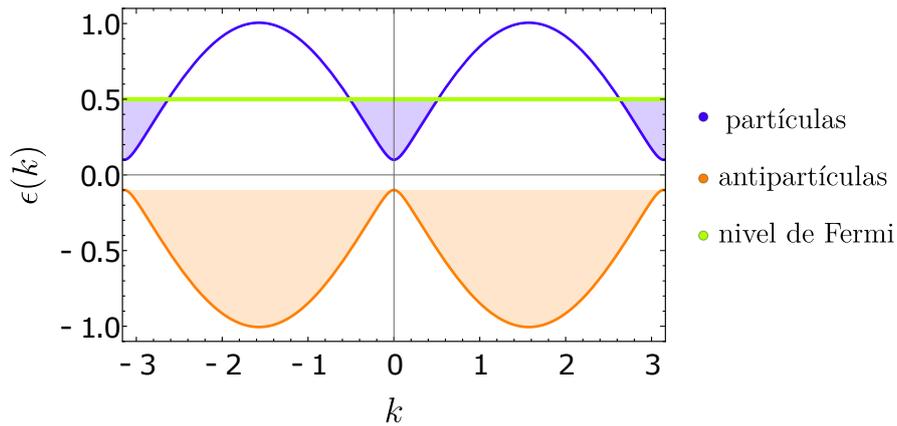


Figura 3.1: Bandas de energía y nivel de Fermi (en verde) para un fermión de Dirac a densidad finita en la red. Aquí elegimos $m = 0,1$, $\mu_F = 0,5$. El momento corre con $k \in (-\pi, \pi]$. La banda de abajo (de antipartículas) puede interpretarse como llena en términos del mar de Dirac.

El límite al continuo se obtiene al mandar todas las medidas (adimensionales) de energía en (3.17) a cero, manteniendo los cocientes k/m y μ_F/m fijos. Esto efectivamente recupera (3.3)². Sin embargo, existen propiedades que son específicas de la red. Una es la bien conocida duplicación de fermiones: dada la periodicidad de la relación de dispersión con el momento de la red, el modelo da dos superficies de Fermi; ver Apéndice B.2 para más detalles.

Otra propiedad es que una vez que $\mu_F = \sqrt{1 + m^2}$, la banda de partículas se encuentra completamente llena; es por eso que (reintroduciendo a) en nuestros cálculos siempre tomaremos $\mu_F \leq \sqrt{1/a^2 + m^2}$. Esta reducción desaparece en el límite al continuo dado que el cutoff $|k| < \pi/a \rightarrow \infty$.

²Equivalentemente, podemos reintroducir el espaciado de red, para obtener la relación de dispersión $\epsilon_{\pm}(k) = -\mu_F + \sqrt{\frac{\sin(ka)^2}{a^2} + m^2}$. Tomando $a \rightarrow 0$ obtenemos (3.3).

Ahora estamos listos para computar las funciones de correlación en el modelo en la red,

$$C_{ij} = \langle G | \psi_i^\dagger \psi_j | G \rangle \equiv \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(i-j)} \langle \varphi^\dagger(k) \varphi(k) \rangle. \quad (3.23)$$

Usando las relaciones de anticonmutación y notando que los estados de energía negativa llenos están dados en (3.21), tenemos que

$$\langle \varphi^\dagger(k) \varphi(k) \rangle = v_+^\dagger(k) v_+(k) \Theta(-\epsilon_+(k)) + v_-^\dagger(k) v_-(k) \Theta(-\epsilon_-(k)). \quad (3.24)$$

Estos términos son computados en (B.4) y (B.5) en el Apéndice B.1, con el resultado

$$C_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(i-j)} \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} - \frac{\sin(k) \gamma^0 \gamma^1 + m \gamma^0}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(i-j)} \Theta(-\epsilon_+(k)) \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + \frac{\sin(k) \gamma^0 \gamma^1 + m \gamma^0}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \right). \quad (3.25)$$

La primera línea es independiente del potencial químico, dado que $\Theta(-\epsilon_-(k)) = 1$ para todo k in (3.24). Esta es la contribución dada por la banda llena de antipartículas. La segunda línea es la parte que codifica la contribución proveniente de la superficie de Fermi de las partículas. Además, esta es la versión discreta de (3.11), que brinda el límite al continuo correcto.

3.3. Dinámica de los fermiones

Dado que el modelo es Gaussiano, la dinámica se encuentra totalmente determinada por el propagador (3.11) o su versión en el discreto (3.25). Ahora analizaremos los nuevos ingredientes añadidos por la densidad finita, y el rol de las dos escalas relevantes m y k_F .

Límite $m/k_F \rightarrow 0$

Primero, consideremos el caso sin masa $m/k_F \rightarrow 0$. Como se describe en el Apéndice B.1, es útil elegir la base quirál $\gamma^0 = \sigma^1$, $\gamma^1 = i\sigma^2$. Luego $\gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = -\sigma^3$. En términos de los usualmente denominados *left/right movers*, $\psi = (\psi_L, \psi_R)$, obtenemos

$$S = \int dx^0 dx^1 \left(\psi_L^\dagger (i(\partial_0 - \partial_1) + \mu_F) \psi_L + \psi_R^\dagger (i(\partial_0 + \partial_1) + \mu_F) \psi_R \right). \quad (3.26)$$

Los fermiones quirales se desacoplan; cada uno de ellos posee una superficie de Fermi semi-infinita que termina en $|p^1| = \mu_F$. Más aún, en este caso el momento de Fermi simplemente es $k_F = \mu_F$.

La teoría de bajas energías puede obtenerse redefiniendo

$$p^1 = \pm k_F + p_\perp , \quad (3.27)$$

y restringiendo $|p_\perp| \ll |k_F|$. Esto da dos fermiones quirales moviéndose a la velocidad de la luz,

$$S = \int \frac{dp^0 dp_\perp}{(2\pi)^2} \left(\psi_L^\dagger(p^0 + p_\perp) \psi_L + \psi_R^\dagger(p^0 - p_\perp) \psi_R \right) . \quad (3.28)$$

Existe una forma completamente equivalente de abordar al mismo resultado, que será importante más tarde. Debido a la simetría quiral adicional, la teoría posee dos simetrías $U(1)_L \times U(1)_R$, que rotan $\psi_{L,R}$ independientemente. El potencial químico puede ser removido con una transformación unitaria local,

$$\psi_L(x^1) \rightarrow e^{-ik_F x^1} \psi_L(x^1) , \quad \psi_R(x^1) \rightarrow e^{ik_F x^1} \psi_R(x^1) . \quad (3.29)$$

Esta no es una simetría, dado que la fase de rotación depende de x^1 ; la misma mapea la teoría con potencial químico a una sin potencial químico. Eso es equivalente a haber cambiado el origen del espacio de momentos como en (3.27).

Los propagadores a tiempos iguales para los fermiones quirales a densidad cero son

$$\langle \psi_L^\dagger(x^1) \psi_L(y^1) \rangle = -\frac{i}{2\pi(x^1 - y^1)} , \quad \langle \psi_R^\dagger(x^1) \psi_R(y^1) \rangle = \frac{i}{2\pi(x^1 - y^1)} . \quad (3.30)$$

Podemos obtener los correspondientes correladores a densidad finita aplicando (3.29) a este resultado:

$$\langle \psi_L^\dagger(x^1) \psi_L(y^1) \rangle = -\frac{i}{2\pi(x^1 - y^1)} e^{ik_F(x^1 - y^1)} , \quad \langle \psi_R^\dagger(x^1) \psi_R(y^1) \rangle = \frac{i}{2\pi(x^1 - y^1)} e^{-ik_F(x^1 - y^1)} . \quad (3.31)$$

El mismo resultado también puede obtenerse directamente de (3.11). Esto muestra términos que oscilan con frecuencia k_F – como consecuencia de la presencia de la superficie de Fermi. Esta es sin dudas una diferencia clave respecto de la teoría relativista. Términos similares también se encontrarán lejos del límite no masivo.

Límite $m/k_F \rightarrow \infty$

Ahora consideremos el límite opuesto, es decir, el límite no relativista $m/k_F \rightarrow \infty$. A energías y momentos mucho mas pequeños que la masa, la relación de dispersión (3.3) resulta

$$E_\pm \approx -\mu_F \pm |m| \pm \frac{p^2}{2|m|} . \quad (3.32)$$

Elegimos la masa y el potencial químico de forma que ambos sean positivos. Definiendo

$$\mu_F = m + \tilde{\mu}_F \quad (3.33)$$

se obtiene

$$E_+ \approx \tilde{\mu}_F + \frac{p^2}{2m}, \quad -E_- \approx 2m + \tilde{\mu}_F + \frac{p^2}{2m}. \quad (3.34)$$

Las antipartículas con energía $-E_- \approx 2m$ se desacoplan de la teoría de bajas energías, mientras que las partículas reproducen la relación de dispersión de un fermión no relativista, con $\tilde{\mu}_F$ haciendo el rol de potencial químico en la teoría no relativista. Este fermión es de tipo *spinless*, y lo denotaremos como $\tilde{\psi}$. El mismo está relacionado con el fermión de Dirac al diagonalizar el Hamiltoniano como en (3.18) y tomando $m \rightarrow \infty$; entonces

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x)), \quad (3.35)$$

donde originalmente $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. La teoría efectiva de bajas energías resulta

$$S_{\text{eff}} = \int dx^0 dx^1 \tilde{\psi}^\dagger \left(i\partial_0 + \frac{\partial_1^2}{2m} - \tilde{\mu}_F \right) \tilde{\psi}. \quad (3.36)$$

Esta describe una superficie de Fermi (dos puntos) con momento de Fermi

$$\frac{k_F^2}{2m} = \tilde{\mu}_F. \quad (3.37)$$

Linearizando la relación de dispersión alrededor de cada punto de Fermi

$$\frac{p^2}{2m} - \tilde{\mu}_F = \pm v_F p_\perp, \quad p = \pm(k_F + p_\perp), \quad v_F = \frac{k_F}{m}. \quad (3.38)$$

Restringiendo el momento p_\perp de forma tal que sea más pequeño que k_F , y denotando al fermión cercano al punto de Fermi izquierdo o derecho $\tilde{\psi}_{L,R}$ respectivamente, obtenemos

$$S = \int \frac{dp^0 dp_\perp}{(2\pi)^2} \left(\tilde{\psi}_L^\dagger(p^0 + v_F p_\perp) \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R^\dagger(p^0 - v_F p_\perp) \tilde{\psi}_R \right). \quad (3.39)$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo en la teoría con dos fermiones quirales (3.28), excepto que ahora la velocidad de propagación es la velocidad de Fermi en vez de la velocidad de la luz. Es decir, que a pesar de que la masa tienda a infinito, la teoría de bajas energías posee excitaciones no masivas localizadas en la superficie de Fermi. Esto conlleva a consecuencias no triviales en la estructura de entrelazamiento del vacío. También veremos diferencias significativas con la teoría quiral, relacionadas con las oscilaciones de Friedel, en el Cap. 5.

Capítulo 4

Entropía de entrelazamiento

“La innovación es como la llama de una vela en medio del viento. Las ideas disruptivas tienden a ser eliminadas por nuestra mente, que siempre busca una explicación para todo. Por eso hay que aprender a cuestionar.”

— Julio Palmaz. Inventor del ‘stent’.

Ahora empezaremos nuestro análisis de medidas de información en Teoría de Campos a densidad finita. En este capítulo consideraremos la entropía de entrelazamiento (EE) o entropía geométrica asociada a la matriz densidad reducida de una región espacial V del estado puro de vacío. La misma se define a partir de la entropía de Von Neumann como [9]

$$S(V) = -\text{Tr}(\rho_V \log(\rho_V)) \quad , \quad \rho_V = \text{Tr}_{\bar{V}}(|0\rangle\langle 0|), \quad (4.1)$$

donde \bar{V} es el complemento de V , y $|0\rangle$ es el estado de vacío.

Nuestra motivación original en cuanto al estudio de la EE en esta dirección provino de [17], que argumentó acerca de la violación de la irreversibilidad del flujo del RG en modelos no relativistas. En más detalle, una superficie de Fermi en d dimensiones espacio-temporales conlleva a la violación logarítmica de la ley de áreas para la EE,

$$S(V) \sim (k_{Fr})^{d-2} \log(k_{Fr}), \quad (4.2)$$

donde V es una región esférica de radio r . Para r grande, esta contribución crece más rápido que el término dominante de la ley de áreas,

$$S(V) \sim \frac{r^{d-2}}{\epsilon^{d-2}}, \quad (4.3)$$

que aparece en modelos locales, como las QFTs con puntos fijos UV. Este argumento

hacia un comportamiento no monótono es sugestivo, ya que varios puntos necesitan ser cuidadosamente entendidos.

Primero, la comparación no está bien definida en el límite al continuo, dado que (4.3) es divergente. Precisar más este argumento requiere una medida de información cuántica finita. Otro punto es que la irreversibilidad en $d > 2$ no está basada en el término de área (4.3); en cambio, está basada en las cantidades intrínsecas que decrecen, F y A [4, 5], que aparecen en términos no dominantes. Términos similares no han sido evaluados en teorías de campos a densidad finita en $d > 2$. Finalmente, es necesario determinar si el potencial químico actúa como un operador relevante estándar a bajas energías o distancias grandes como en (4.2). Esto puede ser sutil, porque el potencial químico modifica la estructura del estado de vacío, que se encuentra en un sector de superselección distinto respecto del estado de vacío de carga cero. En particular, podría ser clarificador la evaluación de ciertas medidas de información que comparen estados en el mismo sector de superselección.

Nuestro objetivo consiste en analizar estos puntos en el esquema más simple posible considerando fermiones de Dirac a densidad finita en $d = 1 + 1$. Como pronto veremos, todavía este modelo nos brindará un escenario para nada trivial. Más aún, quisiéramos arrojar luz acerca de la competencia entre la masa y el potencial químico. La masa por sí sola tiende a dar un estado trivial con gap; pero incluso para masa no nula, la carga finita efectivamente induce fermiones no masivos emergentes, como se discutió en Sec. 3.3. Esto produce entrelazamiento de largo alcance, y quisiéramos caracterizar como esta creación de entrelazamiento ocurre.

Recordemos que para una CFT en 2d de carga central c y para un intervalo de radio r , el término dominante en la EE es [8]

$$S(r) = \frac{c}{3} \log \frac{r}{\epsilon} \quad (4.4)$$

con ϵ como un cutoff de corta distancia. La cantidad

$$c(r) = r \frac{dS(r)}{dr}, \quad (4.5)$$

es finita y es proporcional a la carga central intrínseca c en los puntos fijos UV e IR. También está bien definida por fuera de los puntos fijos, en cuyo caso decrece monotonamente para flujos unitarios del RG en teorías relativistas [3, 4]; esta es la versión entrópica del teorema C. Computaremos la cantidad finita (4.5) en presencia de densidad de carga finita, y la usaremos para estudiar potenciales violaciones de la monotonidad. También estudiaremos los flujos del RG en sectores de superselección fijos, al comparar funciones c entrópicas con el mismo k_F pero con distinta masa.

Haremos simulaciones numéricas utilizando un método denominado de tiempo real [9,

42]; trabajaremos en la red como en la Sec. 3.2 para luego tomar el límite al continuo. Dado que la teoría es Gaussiana, los autovalores de la matriz densidad reducida ρ_V quedan determinados unívocamente por los autovalores de la matriz de correlación $C_{ij} = \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle$ restringida a V ($i, j \in V$). En términos de esta matriz (ver (3.25)), la entropía de entrelazamiento en la red resulta

$$S(V) = -\text{Tr}[C \log(C) + (1 - C) \log(1 - C)]. \quad (4.6)$$

Ahora analizaremos dos casos separados: fermiones quirales y fermiones con masa finita.

4.1. Fermiones quirales

Para fermiones de Dirac quirales, habíamos encontrado una transformación unitaria (3.29) que mapea la teoría con densidad de carga finita a un modelo relativista de carga cero. Ambas funciones de dos puntos C_{ij} en el continuo tienen los mismos autovalores y, dado que la matriz densidad es Gaussiana y está completamente determinada por la función de dos puntos, las respectivas matrices también tienen los mismos autovalores. Por lo tanto, las medidas de información cuántica que dependen sólo de los autovalores de la matriz densidad reducida, como la EE, coinciden en ambas teorías. Además, este resultado es independiente de la forma de la región considerada V , entonces el argumento es válido para un número arbitrario de intervalos.

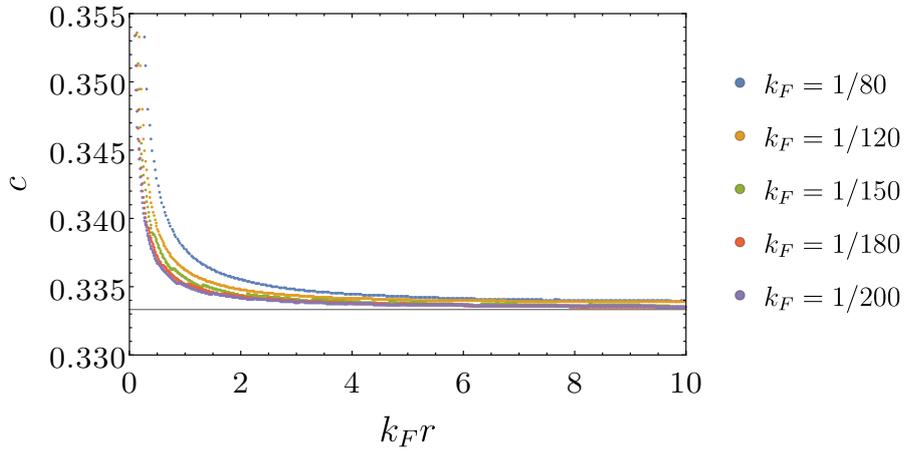


Figura 4.1: Función $c(k_F r)$ entrópica para un fermión quiral a densidad finita. Para $k_F \rightarrow 0$ y $k_F r$ fijos, los gráficos tienden a $\frac{1}{3}$, como en un CFT de $c = 1$. En este caso, las matrices de correlación fueron tan grandes como 4000×4000 , dado que hay dos grados de libertad por spin por sitio. Notar la escala de los valores en el eje- c .

Para un intervalo de longitud r , esto implica

$$c(r) = \frac{1}{3} \quad (4.7)$$

para fermiones quirales a densidad finita. Damos una verificación numérica de estos resultados en la Fig. 4.1, tomando el límite al continuo del modelo en la red con $k_F \rightarrow 0$, para $k_F r$ fijo. Presentamos gráficos de $c(k_F r)$ para varios valores de k_F .¹ Esto es consistente con trabajos previos [18, 21, 22], cuyos argumentos fueron distintos respecto del nuestro.

Por lo tanto, resulta de crucial interés explorar medidas de información cuántica que no sean sólo sensitivas a los autovalores de ρ_V , sino también a sus autovectores. Esto podría distinguir fermiones quirales con densidad cero y densidad finita. Retornaremos a este punto en la Cap. 5 debajo.

4.2. Fermiones masivos a densidad finita

Analícemos ahora el caso de fermiones de Dirac masivos. Para desarrollar intuición analítica, es útil considerar primero los límites asintóticos UV e IR, en conjunto con los comportamientos ultra-relativistas y no relativistas. Desde el punto de vista de la EE y la función entrópica $c(r)$, el UV se corresponde con $r \ll 1/m, 1/k_F$. El término de masa es una deformación relevante estándar, y por tanto su efecto es despreciable en el UV. Por otro lado, como hemos discutido antes, la densidad de carga puede ser más sutil dado que el estado fundamental cambia a densidad finita. Asumiendo que también se comporta como una deformación relevante, el límite UV debería dar $c(r) \rightarrow 1/3$. Nuestros resultados numéricos mostrarán que de hecho este es el caso.

La forma funcional de $c(r)$ depende fuertemente del cociente m/k_F . En el límite relativista $m/k_F \rightarrow 0$, esperamos una dependencia cercana a la de los fermiones quirales en la Sec 4.1. El límite no relativista $m/k_F \gg 1$ es más no trivial e interesante. Desde el punto de vista del RG, los efectos de la masa deberían aparecer a escalas del orden de $mr \sim 1$, confluyendo a un estado con gap y por lo tanto, a $c(r) \rightarrow 0$. Sin embargo, incluso en este caso, esperamos a distancias $r \gg 1/m, 1/k_F$ obtener entrelazamiento no nulo proveniente de las correlaciones de largo alcance de los fermiones livianos (3.39). Aquí esperamos que de nuevo $c(r) \rightarrow 1/3$. De esa manera, esperamos que la función c entrópica exhiba un comportamiento no monótono en el límite no relativista.

¹Para computar $c(k_F r) = (k_F r)S'(k_F r)$, hemos usado una derivada que suaviza las fluctuaciones numéricas, ya que considera cuatro puntos consecutivos (ver el Apéndice numérico de [43]). Más explícitamente, $\partial_x \psi(x) \mapsto \psi_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\psi_{n+1} + \psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n-2})$ para el n -ésimo sitio de la red.

Los resultados numéricos se presentan en la Fig. 4.2, que muestra $c(k_F r)$ para varios valores de m/k_F . Mostramos los límites ultrarelativistas $m/k_F \ll 1$ y no relativistas $m/k_F \gg 1$, así como casos intermedios con $m/k_F \sim 1$.

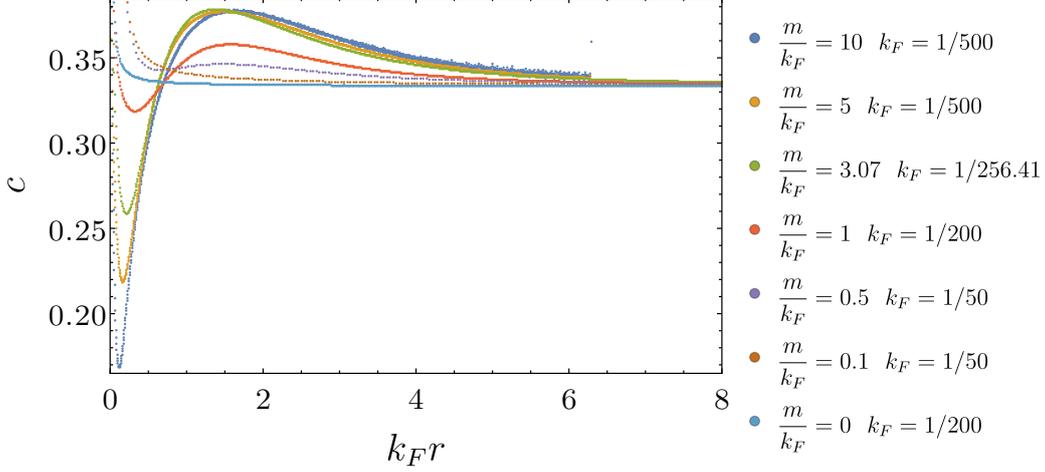


Figura 4.2: Función $c(k_F r)$ para distintos regímenes de m/k_F para fermiones de Dirac a densidad finita. En el límite $r \rightarrow 0$, las simulaciones tienden a $\frac{1}{3}$, el valor esperado del punto fijo UV. En el límite IR, las simulaciones también tienden a $\frac{1}{3}$, en consistencia con (3.39). Finalmente, los comportamientos intermedios se encuentran fuertemente afectados por el ratio m/k_F . La función c entrópica es una cantidad finita que exhibe un comportamiento no monótono del RG.

Las consideraciones analíticas previas fueron verificadas por resultados numéricos. Primero, en todos los casos encontramos que $c(r) \rightarrow 1/3$ en el límite UV $r \ll 1/m, 1/k_F$. Éste es el comportamiento esperado en el punto fijo UV. Segundo, en el límite IR ($mr \gg 1$ y $k_F r \gg 1$) los gráficos también tienden a $1/3$, resultado esperado de (3.39). Esta es la versión 2d de la violación logarítmica de la ley de áreas (4.2).

El comportamiento intermedio entre estos puntos depende de m/k_F . En el régimen relativista $m \ll k_F$, los efectos de la carga no trivial siempre dominan en el sentido del RG, y el comportamiento es similar al de los fermiones quirales.

En el régimen no relativista, $c(r)$ rápidamente decrece a escalas del orden de $mr \sim 1$. Esto es consistente con el RG siendo dominado por la masa. Para valores más grandes de r , $c(r)$ crece, alcanzando un máximo a $k_F r \sim 1$, para finalmente tender a $1/3$. El mínimo y el máximo en $c(k_F r)$ refleja la competencia entre los operadores $m\bar{\psi}\psi$ y $\mu_F\psi^\dagger\psi$; el primero trata de inducir un gap masivo y entrelazamiento nulo, mientras que el segundo (recordando que $\mu_F > m$) trata de inducir entrelazamiento de largo alcance. La función c entrópica luego provee una cantidad finita que sensa la creación de entrelazamiento debido a la densidad finita.

Ahora analicemos el comportamiento en más detalle. Un fermión no relativista a densidad cero viene descrito por la acción de Schrodinger (3.36). La misma tiene una simetría $U(1)$ dada por $\tilde{\psi} \rightarrow e^{i\alpha}\tilde{\psi}$, con un número de partículas conservado N_e ; crucialmente, $N_e \geq 0$. Esto debería contrastarse con la simetría de carga original $U(1)$

que tiene cargas positivas y negativas. La positividad de N_e implica que el estado fundamental queda unívocamente determinado como aquel que tiene carga cero en cada punto de la red (la existencia de esta base de estados localizados en posición para la teoría no relativista fue discutida en la Sec 2.1). Por lo tanto se factoriza, $|0\rangle = \prod_i |0\rangle_i$ y el entrelazamiento en una región finita es trivial, es decir $S(V) = 0$ para cualesquiera región V . Esto termina de cerrar la discusión que motivó al Cap. 2, en donde se argumentó que si bien el Teorema de Reeh-Schlieder es cierto para la teoría no relativista, su corolario en cuanto a la presencia de entrelazamiento no nulo deja de ser válido. Recalquemos que la trivialidad de la EE fue enfatizada previamente en [40]; también puede obtenerse directamente como el límite $m \rightarrow \infty$ de la EE para un fermión de Dirac. Ahora añadamos algo de carga, de forma tal que el nuevo estado fundamental tenga $N_e > 0$. Existen varias maneras distintas de realizar N_e , y además el estado fundamental ya no es más un estado producto. Con respecto de N_e , hay excitaciones con excesos y defectos de carga, partículas y huecos en el lenguaje de la materia condensada. Estas excitaciones conllevan a un entrelazamiento no trivial, similar a lo que ocurre con la presencia de partículas y antipartículas en QFT. La creación de entrelazamiento queda manifestada en $c(r)$.

Finalmente, analicemos el flujo del RG dentro de un sector de misma carga. Una forma de caracterizar esto consiste en comparar funciones c entrópicas para valores iguales de k_F pero con masas distintas:

$$\Delta c(r) = c(k_F r, m_1 r) - c(k_F r, m_2 r). \quad (4.8)$$

A distancias largas, básicamente esto cambia la velocidad de fermi v_F . Numéricamente hemos encontrado que $\Delta c(r)$ también exhibe comportamientos no monótonos y presenta curvas similares a la Fig 4.2.

En conclusión, hemos encontrado un comportamiento no monótono en la cantidad finita $c(r)$, poniendo las consideraciones de [17] en terreno firme. Nuestros resultados exhiben una ruptura de la irreversibilidad del RG en 1+1 interpretado en términos de la función c entrópica, una vez que la invariancia de Lorentz se rompe. Adicionalmente, también hemos corroborado que la desigualdad de subaditividad fuerte siempre se satisface, como debería ocurrir; en nuestro caso, se corresponde con $S''(r) \geq 0$. En los flujos estudiados, $c_{UV} = c_{IR}$, entonces la versión débil de la irreversibilidad, que establece que $c_{UV} \geq c_{IR}$, no se viola. Uno podría preguntarse si existen otras funciones c que sí sean monótonas. Dado que las cargas centrales UV e IR son iguales, esta función c debería ser constante a lo largo de todo el flujo, y por tanto insensible a los efectos de los dos operadores relevantes asociados a m y a μ_F . Pero esto parece bastante implausible: a distancias cortas podemos enfocarnos en los efectos del término relevante de la masa, las funciones c consistentes deberían decrecer monótonamente con

la escala.² Dado esto, a distancias grandes deberían crecer para tender asintóticamente a la misma carga central en el IR. Por lo tanto, genéricamente esperamos que todas las funciones c exhiban un comportamiento no monótono. Otras medidas de información sí exhiben un comportamiento monótono (la más notable siendo la entropía relativa). Más adelante discutiremos acerca de este tipo de medidas en el Cap. 7.

²Esto incluye la generalizaciones funcionales de las funciones c de Zamolodchikov en [44].

Capítulo 5

Entropías de Renyi

“(Su nombre está asociado con álgebras)Exactamente. Era un tema que nacía...En realidad, fue cuestión de explotar todo lo que venía de allí. Precisamente para eso, Veneziano hizo su teoría de las cuerdas abiertas. Yo encontré otra teoría, la de las cuerdas cerradas. Todavía en ese momento estaba dominado por la idea del bootstrap....Chew, que por ese entonces era el padre del concepto bootstrap, me consideró un traidor.”

— Miguel Ángel Virasoro. Físico

Para entender el espectro de entrelazamiento en QFTs a densidad finita, en este capítulo analizaremos las entropías de Renyi, una generalización uniparamétrica de la entropía de entrelazamiento. Las entropías de Renyi y las correspondientes funciones c_n entrópicas se definen como [9]

$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \log(\text{Tr}(\rho_V^n)), \quad c_n(r) = r \frac{dS_n(r)}{dr}. \quad (5.1)$$

Además de brindar los autovalores de ρ_V , las entropías de Renyi también son importantes debido al replica trick. Éste es un método sofisticado, aunque extremadamente útil, para calcular S_n para n natural. Luego, al considerar la continuación analítica en n , y tomando el límite $n \rightarrow 1$, es posible recuperar la EE.

En la Ref. [28] estudiaron el modelo XY en una red 1d y encontraron un comportamiento sorprendente de las S_n , reminiscente de las oscilaciones de Friedel en un metal. Su predicción analítica de S_n en el límite gran distancia $\log(2k_F r) \gg n$ es

$$S_n(r) = \frac{n+1}{6n} \log\left(\frac{r}{\epsilon}\right) + A f_n \frac{\cos(2k_F r)}{(2k_F r)^{\frac{2}{n}}} + \dots, \quad (5.2)$$

con

$$f_n = \frac{2}{1-n} \left(\frac{\Gamma((1+n^{-1})/2)}{\Gamma((1-n^{-1})/2)} \right)^2. \quad (5.3)$$

y $A = 1$ en su caso.

Nos gustaría determinar si este fenómeno ocurre más en general en QFT a densidad finita en el límite al continuo. De hecho, es posible tener un comportamiento oscilatorio en la red, pero con una amplitud de las oscilaciones evanescente en el límite al continuo; ilustraremos esto en algunos resultados numéricos. La teoría de Dirac masiva nos provee de nuevo una base útil para el entendimiento de estos puntos. Similarmente a (4.6), las entropías de Renyi pueden ser computadas en términos de la función de dos puntos C_{ij} restringida a una región espacial V ,

$$S_n(V) = \frac{1}{1-n} \text{Tr} [\log(C^n + (1-C)^n)]. \quad (5.4)$$

La presencia de densidad de carga es crucial para dichos comportamientos oscilatorios; sin embargo, esto no parecería ser suficiente y el término de masa debería jugar un rol también. De hecho, en la Sec. 4.1 argumentamos que, en el límite no masivo, las QFTs de densidad cero y densidad finita tienen el mismo espectro para ρ_V en el continuo. Esto predice que la entropías de Renyi deberían coincidir, y como en la teoría relativista (una CFT) no hay oscilaciones de Friedel [8, 9, 43], tampoco deberían aparecer a densidad finita.

Con estas motivaciones, en este capítulo evaluamos explícitamente las entropías de Renyi y estudiamos la emergencia de las oscilaciones de Friedel tanto en la teoría masiva como no masiva.

5.1. Resultados numéricos

Empecemos con fermiones de Dirac no masivos en la red (3.14). Esto nos proveerá un ejemplo de oscilaciones de Friedel en modelos en la red que desaparecen en el límite al continuo.

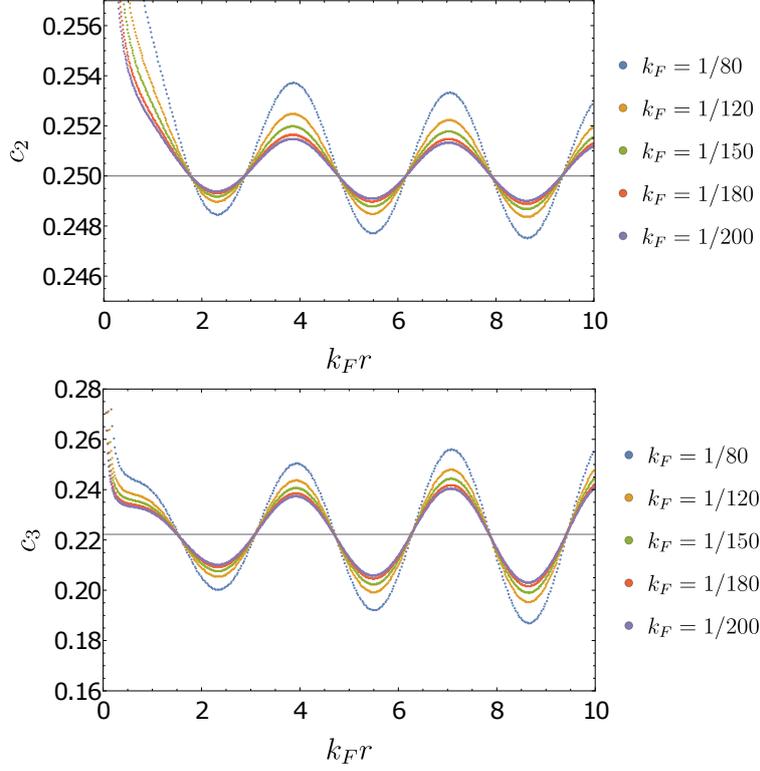


Figura 5.1: Funciones c_2 y c_3 para un fermión quiral a densidad finita. El límite al continuo se corresponde con $k_F \rightarrow 0$ para $k_F r$ finito. Las amplitudes de las oscilaciones se desvanecen en este límite, y los resultados convergen a (5.5). Notar la escala de los valores en el eje- c_n .

Los resultados numéricos para las entropías de Renyi se presentan en la Fig. 5.1. Los mismos poseen oscilaciones de Friedel; sin embargo, también encontramos que la amplitud de tales oscilaciones tienden a cero en el límite al continuo, e ilustramos este fenómeno al mostrar curvas con k_F decreciente en unidades del espaciado de red. La desaparición progresiva de las amplitudes de las oscilaciones concuerda con el argumento en la Sec. 4.1 de que el resultado debería coincidir con el punto fijo relativista

$$c_n = \frac{n+1}{6n}, \quad (5.5)$$

con c_n definido en (5.1). Reintroduciendo el espaciado de red a que había sido fijado con $a = 1$, la amplitud A introducida en (5.2) se anula como $(k_F a)^2$ cuando el espaciado de red $a \rightarrow 0$. Mostramos la convergencia en el límite al continuo $k_F \rightarrow 0$ manteniendo $k_F r$ fijo, así como la predicción (5.5).

A continuación, consideramos el caso masivo. La Fig. 5.2 muestra nuestros resultados numéricos para c_2 y c_3 en diferentes regímenes de m/k_F . En el Apéndice B.3

también mostramos el límite al continuo.

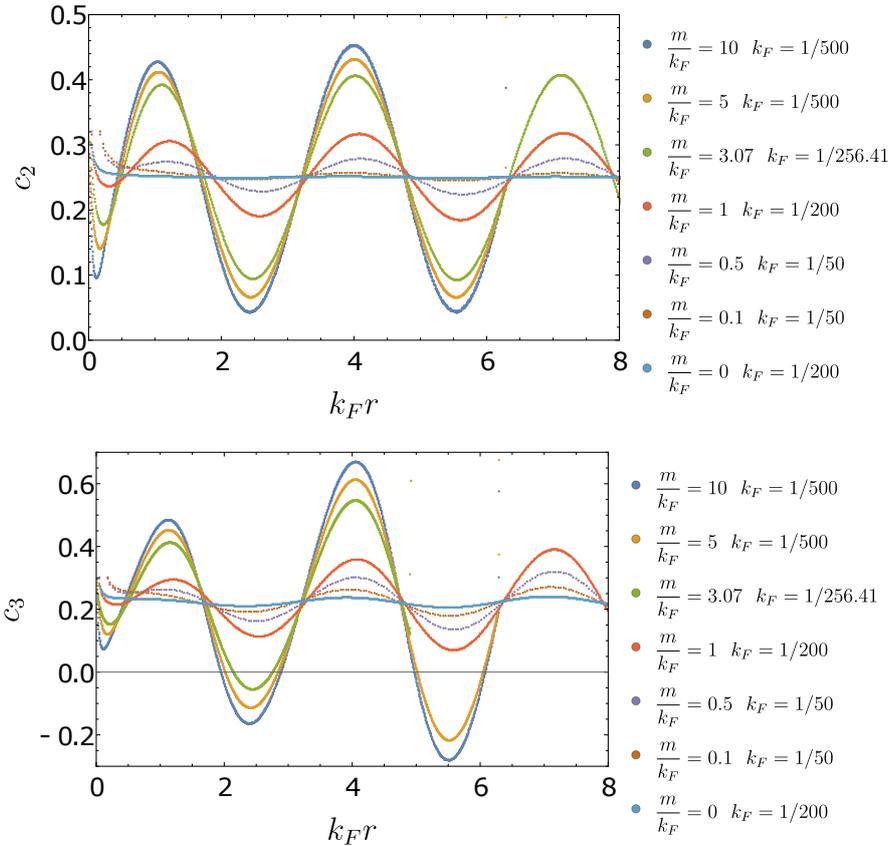


Figura 5.2: Funciones c_2 y c_3 para todos los regímenes de fermiones de Dirac a densidad finita. En todos ellos, excepto para $m = 0$, hay oscilaciones de Friedel de período π como función de $k_F r$.

Para $n > 1$ encontramos oscilaciones de Friedel en el límite al continuo, no sólo cuando $m \gg k_F$ sino que para otros rangos de m/k_F también. Las oscilaciones tienen un valor medio (5.5) debido a la contribución proveniente de fermiones livianos de la teoría a bajas energías (3.39). Más aún, la dependencia de distancia grande (5.2) también ajusta correctamente lejos del límite no relativista. Esto se presenta en la Fig. 5.3 para c_2 y c_3 en el límite $m/k_F \ll 1$; el acuerdo con (5.2) es excelente.

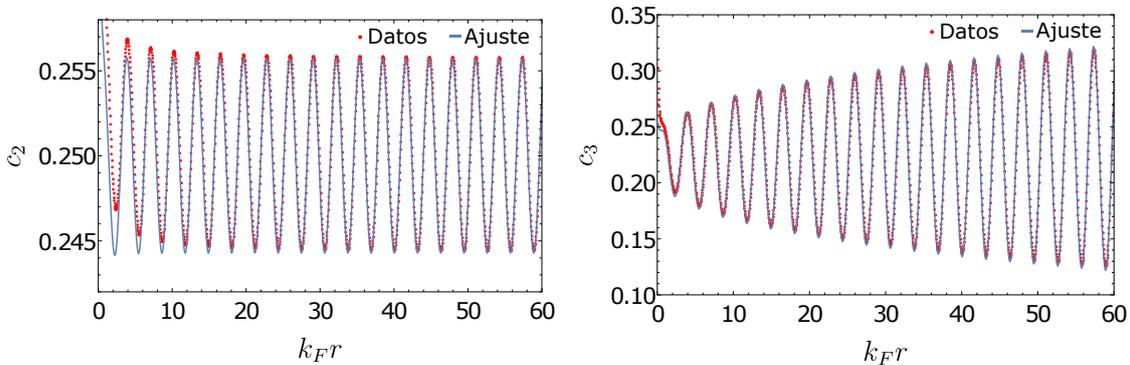


Figura 5.3: Ajustes para c_2 y c_3 para $m/k_F = 0,1$ con $k_F = 1/50$. Los ajustes usados siguieron la expresión (5.2) y $c_n(r) = rS'_n(r)$. El parámetro libre en cada ajuste es la amplitud A .

5.2. Oscilaciones de Friedel y OPE en defectos

Las oscilaciones de Friedel han sido observadas en sistemas en la red con superficies de Fermi, como en [28]; esta referencia también provee un cálculo analítico que conlleva a (5.2), basado en el comportamiento de las matrices de Toeplitz discretas a grandes distancias. Aquí hemos encontrado estos efectos en el continuo de la QFT, y también ahora determinaremos su origen físico. En [29] fue sugerido que estas se originan por términos localizados en los defectos que definen a la entropía de Renyi, al desarrollar un argumento dado originalmente en [45]. En esta subsección mostraremos como este fenómeno puede ser entendido usando el ‘operator product expansion’ (OPE por sus siglas en inglés) en defectos.

La entropía de Renyi $\text{tr}\rho_V^n$ para una región V puede pensarse como una función de partición en presencia de un operador de defecto Σ_V^n de codimensión 2, llamado operado de twist, que implementa la unión de las distintas réplicas,

$$\text{tr}\rho_V^n = \langle \Sigma_V^n \rangle. \quad (5.6)$$

En $d = 1+1$ dimensiones espacio-temporales, el defecto simplemente son dos puntos (los bordes de los intervalos); estos operadores locales son los twist y anti twist introducidos primero en [46] (ver [8] por un review). En más dimensiones, Σ_V^n es un defecto extendido de codimensión 2.

Estamos interesados en estudiar el comportamiento de un operador local \mathcal{O} cercano al defecto, y asumiremos de aquí en adelante que tenemos una CFT en d dimensiones espacio-temporales. Discutiremos la aplicación de nuestro caso en un momento. Antes, elijamos un sistema de coordenadas locales donde \vec{y} son $d-2$ coordenadas tangenciales al defecto, mientras x^a son dos coordenadas normales al defecto (localizadas en $x^a = 0$). En el límite en donde el operador \mathcal{O} es muy cercano el defecto, podemos usar el OPE en defectos para escribirlo en términos de operadores $\hat{\mathcal{O}}$ localizados en el defecto:

$$\mathcal{O}(x^a, \vec{y}) \sim \sum_k b_k |x^a|^{\hat{\Delta}_k - \Delta} \hat{\mathcal{O}}_k(\vec{y}), \quad (5.7)$$

como es discutido en [47–51]. Intuitivamente, el coeficiente b_k del OPE mide la intensidad con la cual \mathcal{O} induce al operador $\hat{\mathcal{O}}_k$ localizado en el defecto. Similarmente, el defecto puede expandirse en términos de operadores localizados en el defecto, y se espera que esta expansión se exponencie,

$$\Sigma_V^n \sim e^{-\int d^{d-2}y b_k^\Sigma \epsilon^{\hat{\Delta}_k - (d-2)} \hat{\mathcal{O}}_k(\vec{y})}, \quad (5.8)$$

por argumentos similares a aquellos en [52]¹. Por razones dimensionales, hemos incluido

¹Para $d = 2$, el operador de twist es puntual entonces esperamos una expansión en términos de

el factor $\epsilon^{\hat{\Delta}_k - (d-2)}$, donde ϵ es un cutoff de corta distancia que define una región tubular alrededor de Σ_V^n . Los coeficientes de OPE están fijos por cálculos independientes de funciones de correlación en la geometría cónica, como

$$\langle \Sigma_V^n \mathcal{O}(x^a, \vec{y}) \rangle, \langle \Sigma_V^n \mathcal{O}(x^a, \vec{y}) \mathcal{O}(x'^a, \vec{y}') \rangle, \dots \quad (5.9)$$

ver por ejemplo [53] para un campo escalar.

No necesitamos explícitamente los coeficientes del OPE, pero notamos que en general esperamos que $b_k^\Sigma \sim n - 1$ cuando $n \rightarrow 1$ dado que

$$\langle \Sigma_V^n \mathcal{O}(x^a, \vec{y}) \rangle \sim n - 1 \quad (5.10)$$

(en este límite el defecto se convierte en algo trivial). Típicamente todos los operadores permitidos por las simetrías que tienen un valor de expectación no nulo en la geometría cónica contribuirán al OPE, y la dinámica está dominada por el que tenga dimensión de escala más pequeña. Más aún, introduciendo (5.8) en (5.6) y escribiendo explícitamente la integral de caminos euclídea, tenemos que

$$\text{tr} \rho_V^n \sim \int D\phi e^{-S[\phi] - \int d^{d-2}y b_k^\Sigma \epsilon^{\hat{\Delta}_k - (d-2)} \hat{\mathcal{O}}_k(\vec{y})}. \quad (5.11)$$

Por lo tanto el $\hat{\mathcal{O}}_k$ que entra en el OPE de defecto aparece como contribución a la acción localizada en el defecto.

Para entender más explícitamente los tipos de operadores de defecto $\hat{\mathcal{O}}_k$ que pueden aparecer, especialicemos en $d = 2$ para un único intervalo. Trabajaremos con coordenadas complejas w ; denotemos los bordes del intervalo en el plano complejo w por (u, v) . La variedad replicada \mathcal{M}_n se corresponde con un n -cubrimiento del plano complejo, ramificado sobre u y v . Puede ser mapeado a \mathbb{C} via el mapeo de uniformización [8]

$$z = \left(\frac{w - u}{w - v} \right)^{1/n}, \quad (5.12)$$

donde $w \in \mathcal{M}_n$ y $z \in \mathbb{C}$. Bajo dichas transformaciones conformes, un operador escalar primario de dimensión Δ transforma como

$$\mathcal{O}(w) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^\Delta \mathcal{O}'(z). \quad (5.13)$$

operadores locales y no con una exponencial. Esto no es importante para nuestro argumento debajo, que sólo usa la contribución dominante en esta expansión.

Tomando el límite OPE $w \rightarrow u$ y expandiendo el factor conforme, encontramos

$$\mathcal{O}(w) \sim |w - u|^{\frac{\Delta}{n} - \Delta} \mathcal{O}'(0) + \dots \quad (5.14)$$

Dada la expansión OPE (5.7), interpretamos el lado derecho (5.14) como un operador de defecto $\mathcal{O}'(0)$ de dimensión fraccionaria Δ/n inducida por operadores de volumen $\mathcal{O}(w)$. Finalmente, recordando (5.8) y (5.11), concluimos que un operador primario de dimensión Δ en el volumen, con valor de expectación no nulo en la geometría cónica, inducirá un término localizado que contiene un operador de dimensión Δ/n . Este hecho fue sugerido antes en [45] basado en comportamientos relacionados con estados de borde y efectos de la red cerca de las singularidades cónicas. Aquí lo hemos entendido desde el punto de vista del OPE de defectos.

Ahora apliquemos estos resultados a nuestro modelo. Trabajamos a distancias grandes $k_F r \gg 1$. El límite de bajas energías (3.39) es una CFT con dos fermiones quirales $\tilde{\psi}_L$ y $\tilde{\psi}_R$. El cutoff ultravioleta para esta descripción es k_F , de forma que el valor para el parámetro de distancia más pequeña es $\epsilon \sim 1/k_F$. Los operadores de dimensión más pequeña con valores de expectación no nulos $\langle \Sigma_V^n \mathcal{O}(x^a, \vec{y}) \rangle$ se construyen a partir de bilineales de fermiones. Aparte de $\tilde{\psi}_L^\dagger \tilde{\psi}_L$ y $\tilde{\psi}_R^\dagger \tilde{\psi}_R$, tenemos el operador de densidad finita $2k_F$

$$\rho_{2k_F} = e^{2ik_F x^1} \tilde{\psi}_L^\dagger \tilde{\psi}_R + \text{h.c.} \quad (5.15)$$

que aparece en la corriente conservada $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ de la teoría microscópica. La función de dos puntos para ρ_{2k_F} exhibe oscilaciones similares a las oscilaciones de Friedel en los líquidos de Fermi. Cuando este operador es muy cercano a un borde del intervalo, todavía podemos aplicar la transformación (5.12) que conlleva a (5.14); $e^{2ik_F x^1}$ aparece como un prefactor común que varía lentamente. Por lo tanto, el operador $2k_F$ de dimensión $\Delta = 1$ induce operadores localizados $\hat{\rho}_{2k_F}$ en las terminaciones del intervalo, de dimensión $\hat{\Delta} = 1/n$ y magnitud $n - 1$ para $n \rightarrow 1$. La contribución dominante en este límite es

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho_V^n &\sim \int D\tilde{\psi} e^{-S_{CFT}[\tilde{\psi}]} \left((n-1)k_F^{-1/n} \hat{\rho}_{2k_F}(u) \right) \left((n-1)k_F^{-1/n} \hat{\rho}_{2k_F}(v) \right) \\ &\sim (n-1)^2 \frac{\cos(2k_F r)}{(k_F r)^{2/n}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Esto identifica a las oscilaciones de Friedel como provenientes de operadores fraccionarios $2k_F$ localizados en las terminaciones de la región de entrelazamiento.² Nuestro enfoque también explica por qué las oscilaciones se desvanecen cuando $n = 1$, un punto que no era completamente claro en los trabajos anteriores.

En el límite relativista $m \rightarrow 0$ las oscilaciones de Friedel en las entropías de Renyi

²Esto había sido propuesto antes por [29] basado en la observación de operadores localizados en [45].

se anulan dado que los autovalores de la matriz densidad reducida son los mismos que en la teoría con cero carga en el continuo.³ La amplitud A de las oscilaciones debería entonces tener una expansión perturbativa en potencias de $(m/k_F)^2$. Hemos verificado esto numéricamente, como se ve en la Fig. 5.4. Esto sugiere que podría ser posible realizar una expansión perturbativa analíticamente, por ejemplo usando técnicas de bosonización [43, 55]. En el Apéndice C mostramos un intento no culminado en esa dirección.

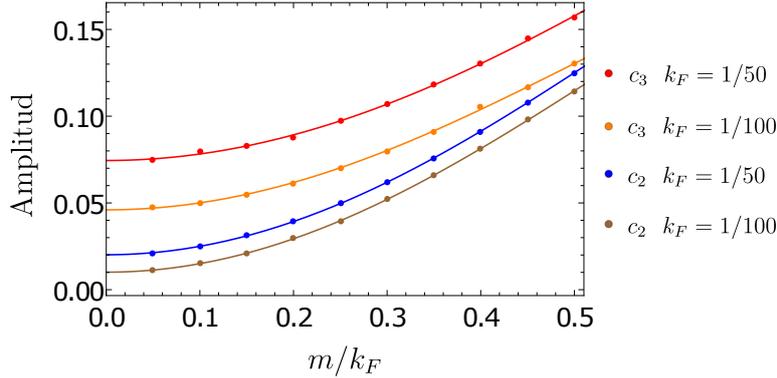


Figura 5.4: Ajustes $y = a + b \left(\frac{m}{k_F}\right)^2 + c \left(\frac{m}{k_F}\right)^4$ para la amplitud A en (5.2), para c_2 y c_3 , con $k_F = 1/50$ y $k_F = 1/100$. Para un dado n , una curva se encuentra debajo de la otra al disminuir k_F ; valores adicionales de k_F deberían incluirse para tomar el límite al continuo. Aunque todavía a este orden, encontramos que b es el mismo para los dos valores de k_F , sugiriendo que no nos encontramos lejos del límite al continuo. Obtuvimos $b = 0,49$ para $n = 2$ y $b = 0,38$ para $n = 3$.

Finalmente, notamos que el OPE en defectos es un enfoque general, y podría aplicarse a teorías interactuantes a densidad finita, como aquellas presentes en líquidos que no son de Fermi. Además de la corriente conservada, otros bilineales fermiónicos con dimensiones anómalas no triviales podrían contribuir a las oscilaciones de Friedel a las entropías de Renyi, y estas podrían ser una medida interesante para su escaleo no trivial.

³Más aún, estas oscilaciones no son de esperarse en las entropías de Renyi en el caso relativista, dadas las desigualdades de positividad de reflexión de [54]. Agradecemos a H. Casini por haber aclarado este punto.

Capítulo 6

Información mutua

“Desde hace años, la Universidad de Buenos Aires se ha convertido en una institución de educación y en un centro de investigación de la más alta calidad, y de reputación internacional. Esta reputación es fundamental consecuencia de la existencia de un cuerpo docente de primera clase, el cual sería imposible reemplazar en muchos años, y sin el cual la Universidad no podría retener su jerarquía ni su prestigio. La reciente acción del Gobierno Argentino sólo puede tender a alejar una gran parte del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias y, con ello, destruir la Universidad...”

— Carta a Onganía firmada entre ellos por Juan José Giambiagi y Carlos Guido Bollini, descubridores de la regularización dimensional.

Las secciones previas trataron con medidas de información asociadas a una región simplemente conexa (un intervalo). Por otro lado, medidas basadas en dos regiones no intersecantes A y B son muy importantes para estudiar porque pueden detectar correlaciones entre A y B . En esta sección analizaremos la información mutua, definida en términos de la EE como

$$I(A, B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B); \quad (6.1)$$

también consideramos la versión de Renyi, dada por

$$I_n(A, B) = S_n(A) + S_n(B) - S_n(A \cup B). \quad (6.2)$$

Hay varias propiedades de la información mutua que motivan su estudio. Primero, esta mide la cantidad total de correlaciones entre A y B . Dados observables M_A y

M_B con funciones de correlación conectadas $C(M_A, M_B) = \langle M_A \otimes M_B \rangle - \langle M_A \rangle \langle M_B \rangle$, tenemos la cota [56]

$$I(A, B) \geq \frac{C(M_A, M_B)}{2\|M_A\|^2\|M_B\|^2}. \quad (6.3)$$

La información mutua luego es una buena medida del número total de correlaciones, alguna de las cuales pueden perderse al mirar una función de correlación específica que resulte pequeña. Desde el punto de vista de la QFT, otra propiedad importante es que las contribuciones divergentes provenientes del borde se cancelen, al contrario de la EE, (6.1) es una cantidad bien definida en el continuo.

Por motivos de este trabajo, una propiedad importante es que $I_n(A, B)$ admita una expansión OPE en el límite en donde los tamaños r_A, r_B de A y B sean más pequeños que la distancia L entre ellos [30]

$$\frac{r_A}{L} \ll 1, \frac{r_B}{L} \ll 1. \quad (6.4)$$

Como habíamos introducido en la Sec. 5.2, la idea básica es que el operador de twist Σ_A^n que implementa $\text{tr}(\rho_A^n)$, puede expandirse en una base de operadores locales cuando estamos lejos de A ; y similarmente de Σ_B^n . La parte conectada de la función de dos puntos $\langle \Sigma_A^n \Sigma_B^n \rangle$, que determina I_n , luego puede ser expandida en una suma de funciones de correlación entre A y B . Para una CFT cuando la contribución dominante proviene del intercambio de un operador de dimensión Δ , resulta que

$$I \sim \left(\frac{r_A r_B}{L^2} \right)^\Delta. \quad (6.5)$$

Ahora analizaremos cómo esto se modifica a densidad finita, encontrando que la información mutua extrae información detallada acerca de la dinámica. Uno de los resultados principales es que la superficie de Fermi y las correlaciones de largo alcance modifican la información mutua en el orden dominante al introducir términos oscilatorios. El origen físico de estas oscilaciones resulta ser diferente respecto del de las oscilaciones de Friedel antes vistas, y esto provee una nueva medida de información cuántica que testea líquidos que no son de Fermi.

6.1. Análisis via la expansión OPE de la información mutua

Para regiones A y B tomamos dos intervalos de longitud r , separados por una distancia L , y nos focalizamos en el límite (6.4). Hemos argumentado arriba que el espectro de la matriz densidad en el límite no masivo es el mismo que si tuviese carga no trivial, por eso nos enfocamos en $m \neq 0$ a densidad finita. Primero evaluamos la información mutua analíticamente usando la expansión OPE [30], y en la siguiente subsección comparamos con resultados numéricos.

Recordemos de la discusión en la Sec. 5.2 que las entropías de Renyi son implementadas en términos de los operadores de twist Σ . La entropía de Renyi de la unión $A \cup B$ es luego proporcional a la función de dos puntos

$$\text{tr} \rho_{A \cup B}^n = \langle \Sigma_A^n \Sigma_B^n \rangle. \quad (6.6)$$

La idea de [30] es que lejos de la región A el twist puede expandirse como

$$\Sigma_A^n = \sum_{\{k_j\}} C_{\{k_j\}}^A \prod_{j=0}^{n-1} \mathcal{O}_{k_j}(r_A^j), \quad (6.7)$$

donde \mathcal{O}_{k_j} es un operador en la j -ésima copia, y k_j es un índice que determina el tipo de operador. Los coeficientes del OPE $C_{\{k_j\}}^A$ se obtienen de valores de expectación de operadores lejos de A en presencia de un defecto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \Sigma_A^n \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{k'_i}(r) \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\{k_j\}} C_{\{k_j\}}^A \prod_{j=0}^{n-1} \langle \mathcal{O}_{k'_j}(r) \mathcal{O}_{k_j}(r_A^j) \rangle. \quad (6.8)$$

La contribución dominante siempre proviene del operador identidad, y puede normalizarse a $\text{tr} \rho_{A \cup B}^n \Big|_{\mathcal{O}=1} = 1$. Si la próxima contribución dominante proviene de un operador \mathcal{O}_{k_j} , expandiendo $\log(\text{tr} \rho_{A \cup B}^n)$ da una información mutua de Renyi

$$I_n(A, B) \approx \frac{1}{1-n} \sum_{\{k_j\}} \sum_{j=0}^{n-1} C_{\{k_j\}}^A C_{\{k_j\}}^B \langle \mathcal{O}_{k_j}(r_A^j) \mathcal{O}_{k_j}(r_B^j) \rangle. \quad (6.9)$$

En nuestro caso, el operador de menor dimensión que contribuye a (6.7) son los bilineales de fermiones. Los bilineales independientes en dimensión par de espacio-tiempo d pueden elegirse como

$$\bar{\psi}_\alpha \psi_\beta : \bar{\psi} \psi, \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \bar{\psi} \psi, \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi, \dots, \bar{\psi} \gamma^{*d} \psi, \quad (6.10)$$

con $\gamma^{*d} = \gamma^0 \dots \gamma^{d-1}$. Hay dos tipos de contribuciones a (6.7): dos fermiones en réplicas distintas, o bien ambos en la misma réplica. Entonces en el orden dominante,

$$\Sigma_A^n \sim \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{j' \neq j} C_{jj'}^{A\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha(r_A^j) \psi_\beta(r_A^{j'}) + \prod_{j=0}^{n-1} C_{jj}^{A\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha(r_A^j) \psi_\beta(r_A^j). \quad (6.11)$$

Los coeficientes C_{jj}^A son proporcionales a $n - 1$ para $n \rightarrow 1$; ellos contribuyen a la información mutua de Renyi pero, dado que aparecen al cuadrado en (6.9), ellos no contribuyen al límite $n \rightarrow 1$ que da la información mutua [57–59]. En contraste, los coeficientes $C_{jj'}^A$ que involucran diferentes réplicas dan una contribución no nula a la información mutua. Para fermiones de Dirac en d dimensiones con $m = k_F = 0$, la dimensión de escala es $\Delta = (d - 1)/2$. De (6.8), los coeficientes del OPE escalan como $C^A \sim r^{d-1}$; reemplazando (6.11) en (6.6), da el escaleo

$$I_n \sim \left(\frac{r_A r_B}{L^2} \right)^{d-1}. \quad (6.12)$$

Recordemos que las regiones tienen tamaños característicos r_A y r_B , mientras que L es la distancia entre ellos. Más aún, resulta que sólo el bilineal $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ en (6.10) contribuye al intercambio de operadores entre dos regiones [59].

En el caso masivo con cero carga, las funciones de correlación se encuentran suprimidas exponencialmente en el límite de distancias largas, y la misma supresión exponencial se observa en la información mutua. Ni bien $k_F \neq 0$, sin embargo, la superficie de Fermi da origen a correlaciones de largo alcance como se discutió antes. En d dimensiones espacio-temporales pares, la superficie de Fermi se comporta como una colección de fermiones no masivos de $1 + 1$ dimensiones, uno por cada parche de la superficie de Fermi. Por lo tanto, esperamos ver un comportamiento de escaleo igual que en una CFT 2d. Este cambio dinámico en la dimensionalidad efectiva es conocido como “violación de hiperescala” [60–62]. Aquí consideraremos el caso de $1 + 1$, para el cual no hay violación de hiperescala; trabajos previos en dimensiones más altas incluyen a [63].

El efecto dominante a densidad finita está asociado a términos oscilatorios en los correladores fermiónicos. A distancias largas, estas pueden obtenerse usando la teoría de bajas energías (3.39) en términos de left y right movers $\tilde{\psi}_L, \tilde{\psi}_R$; ellos tienen una relación de dispersión lineal con velocidad v_F . Los bilineales (6.10) exhiben términos oscilatorios cuando son expresados en términos de estos campos de baja energía. Por ejemplo, la densidad de carga contiene un término

$$\bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) \supset e^{2ik_F x} \tilde{\psi}_L^\dagger \tilde{\psi}_R + h.c. \quad (6.13)$$

Estas contribuciones tienen el mismo comportamiento de escaleo que los términos no

oscilantes que no mezclan $\tilde{\psi}_L$ y $\tilde{\psi}_R$. Por tanto, la información mutua de Renyi en el límite de grandes distancias del OPE es

$$I_n \sim \frac{r^2}{L^2} (a_n + b_n \cos(2k_F L + \phi_n) + \dots), \quad (6.14)$$

con a_n, b_n algunas constantes de $O(1)$.

La principal conclusión de este cálculo del OPE es que la información mutua detecta la presencia de la superficie de Fermi todavía en el orden dominante en r^2/L^2 via términos oscilantes. La densidad de carga o momento de Fermi pueden ser leídos de la frecuencia de las oscilaciones. Esto aplica tanto a la información mutua como a la información mutua de Renyi. Notar que el origen de las oscilaciones en este caso es distinto respecto de las oscilaciones de Friedel en las entropías de Renyi del Cap. 5. Contrariamente a las entropías de Renyi, aquí encontramos oscilaciones en la información mutua todavía para $n = 1$; las mismas se originan por correlaciones de largo alcance debido a bilineales fermiónicos como (6.13), para los cuales la información mutua es sensible al orden dominante. En el caso de las entropías de Renyi, las oscilaciones provenían de operadores localizados en los bordes; por otro lado, estos efectos de borde se cancelan en la información mutua.

Este es uno de los resultados principales, y esperamos verificarlo numéricamente en la próxima sección. Esperamos que estas propiedades hagan de la información mutua una manera interesante de testear la dinámica a densidad finita. Mientras el presente trabajo se centra en teorías libres, también podemos usar el OPE para superficies de Fermi interactuantes con comportamiento de los líquidos que no son de Fermi. Una vez que las quasipartículas fermiónicas adquieren una dimensión anómala Δ_f se convierte en un número mayor que $1/2$. Basado en análisis previos del OPE, esperamos que la información mutua sea de la forma

$$I \sim \left(\frac{r^2}{L^2}\right)^{2\Delta_f} (a_1 + b_1 \cos(2k_F L + \phi_1) + \dots). \quad (6.15)$$

Por lo tanto la información mutua podría detectar tanto el comportamiento de escaleo de los líquidos que no son de Fermi así como el momento de Fermi. El comportamiento de la información mutua de Renyi es distinto, porque la densidad de carga tiene dimensión protegida $\Delta_J = 1$ y contribuye via el C_{jj}^A en (6.11). Éste término se anula cuando $n \rightarrow 1$ como se discutió antes. De esta forma esperamos ver dos dimensiones de escaleo distintas en la información mutua de Renyi. Más genéricamente, podría ser interesante considerar aplicaciones experimentales de estos resultados.

6.2. Resultados numéricos

Ahora computemos numéricamente la información mutua de Renyi; el enfoque es similar al de los Caps. 4 y 5. El nuevo ingrediente es el correlador C_{ij} con índices restringidos a las regiones desconectadas A y B . La información mutua (6.1) luego es evaluada en términos de (4.6); similarmente, para I_n usamos (5.4). Ahora fijamos iguales longitudes r para los dos intervalos, y variamos su distancia L , focalizándonos en $L \gg r$.

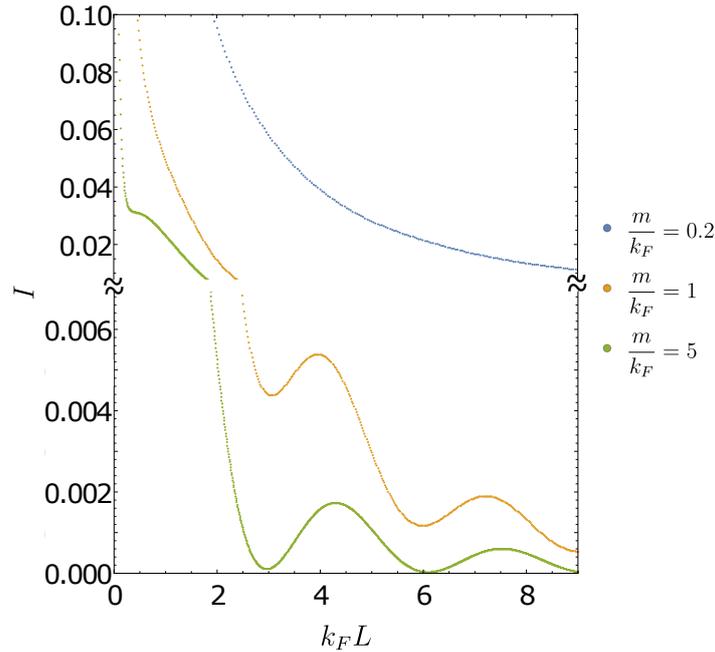


Figura 6.1: $I(k_F L)$ para una r fijo para fermiones de Dirac masivos a densidad finita. Las longitudes r fueron $k_F r = 2$, $k_F r = 0,5$ y $k_F r = 0,2$ para $\frac{m}{k_F} = 0,2$, $\frac{m}{k_F} = 1$ y $\frac{m}{k_F} = 5$ respectivamente. Oscilaciones de período π como función de $k_F L$ están presentes. Sus amplitudes se anulan conforme $m/k_F \rightarrow 0$.

Empecemos con la información mutua. Los resultados numéricos de $I(k_F L)$ para un r fijo se muestran en Fig. 6.1. Computamos las tres curvas, correspondientes al límite ultra-relativista $m/k_F \ll 1$, el límite no relativista $m/k_F \gg 1$ y el régimen intermedio con $m/k_F \sim 1$. Cuando $m/k_F \rightarrow 0$ recuperamos el resultado de la CFT, en acuerdo de nuevo con nuestro argumento general de arriba de que los autovalores de la matriz densidad en el continuo son independientes de k_F en este caso. Sin embargo, cuando $m/k_F \neq 0$, la simulación numérica exhibe términos oscilatorios con período π como función de $k_F L$. Un ajuste (ver el panel d) de Fig. 6.2 verifica la predicción analítica (6.14).

Siguiente, presentamos los resultados de la información mutua de Renyi en la Fig. 6.2. Los paneles a), b) y c) muestran el comportamiento para diferentes masas y para diferentes parámetros de Renyi n . Finalmente, en el panel d) verificamos que la predicción del límite OPE (6.14) está en excelente acuerdo con los resultados

numéricos. Recalquemos de nuevo que este tipo de oscilaciones de Friedel provienen del intercambio de operadores como (6.13) entre las dos regiones; este efecto es distinto al de los efectos de borde que determinan las oscilaciones de Friedel en las entropías de Renyi. Los resultados numéricos son también consistentes con la cancelación de tales contribuciones en la información mutua.

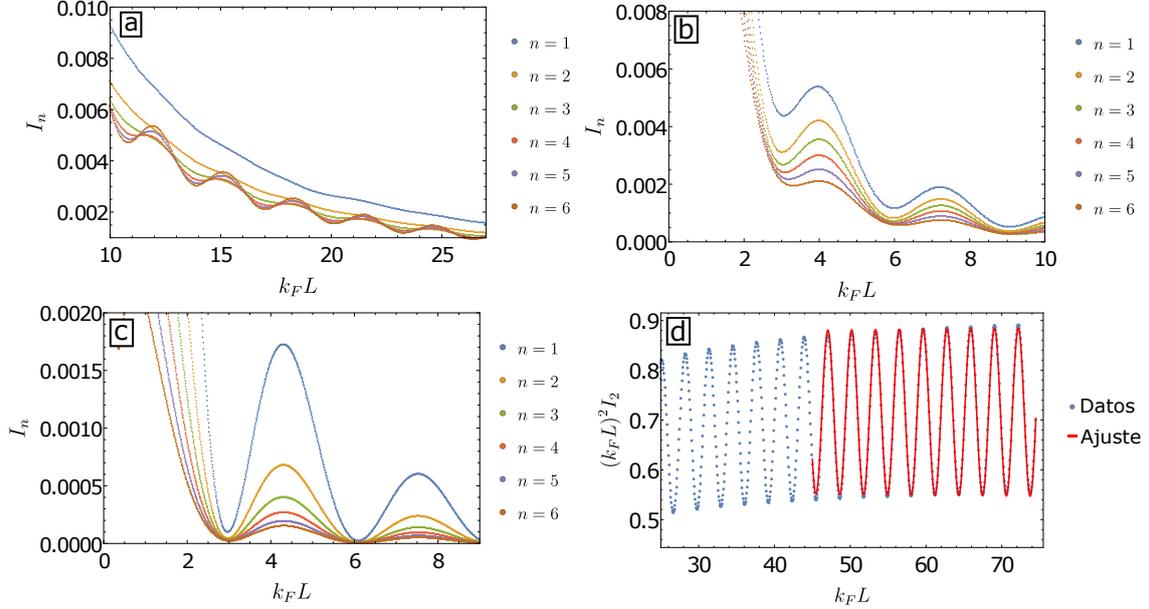


Figura 6.2: Las subfiguras a), b) y c) muestran las simulaciones de $I_n(k_F L)$ para un valor fijo r para un fermión de Dirac masivo. Los parámetros son $(k_F r, m, \frac{m}{k_F}) = (2, \frac{1}{500}, 0, 2); (0, 5, \frac{1}{200}, 1); (0, 2, \frac{1}{100}, 5)$, respectivamente. Observamos oscilaciones de Friedel de período $k_F L$, con amplitud dependiente de $\frac{m}{k_F}$. En la subfigura d) chequeamos el acuerdo con (6.14). Ajustamos $(k_F L)^2 I_2(k_F L)$ en el límite $k_F L \gg 1$ con $\frac{m}{k_F} = 1$, $k_F r = \frac{5}{3}$ y $k_F = \frac{1}{60}$. La expresión usada fue $(k_F L)^2 I_2(k_F L) = A + B \cos(2k_F L)(k_F L)^C$; aplicando el ajuste a valores crecientes de $k_F L$ da $C \rightarrow 0$, en acuerdo con (6.14).

Capítulo 7

Medidas de distinguibilidad

“El mundo del hombre contemporáneo se funda sobre los resultados de la ciencia: el dato reemplaza al mito, la teoría a la fantasía, la predicción a la profecía.”

— Mario Bunge. Físico y epistemólogo.

En este capítulo nuestro análisis virará la atención hacia otra pregunta en información cuántica: ¿cómo distinguir a dos matrices densidad ρ y σ ? La principal medida para llevar a cabo esta tarea es la entropía relativa; también estudiaremos una cierta generalización uniparamétrica de la misma. Como se discutió antes, en QFT podemos asignar una matriz densidad a una región V en el espacio, obtenida del estado fundamental al trazar sobre el espacio de Hilbert del complemento. En el contexto del flujo del grupo de renormalización, dos estados naturalmente aparecen: uno asociado al punto UV fijo (denominado σ), y otro ρ producto de la teoría perturbada a lo largo del flujo. Una medida de distinguibilidad entre σ y ρ , como la entropía relativa, provee una cantidad que es monótona ante el incremento de la región V , y codifica información no perturbativa del flujo [5, 64–67]. En nuestro caso de una QFT a densidad finita, tenemos la motivación de la búsqueda de tales cantidades, es por eso que quisiéramos medir la distinguibilidad entre estados en distintos sectores de superselección de carga. Primero presentaremos la discusión en la entropía relativa, para luego focalizarnos en su generalización uniparamétrica.

7.1. Entropía relativa

La entropía relativa entre dos estados ρ y σ está dada por

$$S_{rel}(\rho|\sigma) = \text{tr}(\rho \log \rho) - \text{tr}(\rho \log \sigma). \quad (7.1)$$

En términos del Hamiltoniano modular K_σ de $\sigma = e^{-K_\sigma}/\text{tr}(e^{-K_\sigma})$, puede ser escrito como la diferencia de energías libres,

$$S_{rel}(\rho|\sigma) = \Delta\langle K_\sigma \rangle - \Delta S \quad (7.2)$$

donde $\Delta\langle K_\sigma \rangle = \text{tr}[(\rho - \sigma)K_\sigma]$ y $\Delta S = S(\rho) - S(\sigma)$. Operacionalmente, esta es una medida de distinguibilidad entre los dos estados. Se anula cuando los dos estados coinciden, y resulta infinita si σ es puro y distinto de ρ . Una propiedad importante es que la entropía relativa no incrementa cuando se restringe a un subsistema. En QFT, esto significa que la entropía relativa incrementa cuando incrementamos el tamaño de la región.

En general, no es fácil calcular la entropía relativa analíticamente entre estados. Sin embargo, sí puede realizarse al comparar una CFT con una CFT a densidad finita. Recordemos que ambas matrices tienen los mismo autovalores asociados a la matriz densidad, pero las autofunciones son distintas, y por tanto la entropía relativa debería capturar esto último. Sea σ la matriz densidad reducida con $m = k_F = 0$ (el punto conforme fijo), y sea ρ la matriz densidad para $m = 0$ con $k_F \neq 0$. El Hamiltoniano modular para el estado fundamental de una CFT reducido a una región V que es una esfera de radio R es conocido explícitamente [68],

$$K_\sigma = 2\pi \int_V d^{d-1}x \frac{R^2 - \vec{x}^2}{2R} T^{00}(x) + c', \quad (7.3)$$

donde la superficie de Cauchy es a tiempo constante. El resultado se debe a un mapeo conforme de la esfera al espacio de Rindler, y notando que en el último caso el Hamiltoniano modular es simplemente el operador de boost.

En nuestro caso, T^{00} es el tensor energía-momento para un fermión de Dirac relativista y no masivo,

$$T^{00} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0 \partial^0 \psi - (\partial^0 \bar{\psi}) \gamma^0 \psi), \quad (7.4)$$

entonces podemos evaluar el valor de expectación en ρ y σ al tomar límites coincidentes de la función de Green apropiada en las teorías de carga finita y carga cero. En concreto,

$$\langle T^{00} \rangle = i \lim_{x \rightarrow y} \partial_{y_0} \langle \psi^\dagger(x) \psi(y) \rangle. \quad (7.5)$$

Las divergencias provenientes de puntos coincidentes se cancelan en $\Delta\langle T^{00}\rangle$; a tiempos iguales encontramos que

$$\Delta\langle T^{00}\rangle = \frac{k_F^2}{2\pi}. \quad (7.6)$$

Reemplazando esto en (7.3) y realizando la integral en $d = 2$ para un intervalo de longitud $r = 2R$, arribamos a que

$$S_{rel}(\rho|\sigma) = \Delta\langle K_\sigma\rangle = \frac{1}{6}k_F^2 r^2. \quad (7.7)$$

Entonces encontramos un comportamiento super-extensivo en la entropía relativa, proveniente del Hamiltoniano modular. Esta es una medida de distinguibilidad entre el estado fundamental fermiónico no masivo con carga cero y con carga finita. Encontraremos el mismo comportamiento debajo en los resultados numéricos. Interpretando la entropía relativa como una diferencia de energías libres como en (7.2), observamos que cambiar a un sector de superselección de carga distinta es como un proceso adiabático reversible: hay cambio en la energía pero la entropía se mantiene constante. En este caso, esto se debe a que ambos estados tienen los mismos autovalores en la matriz densidad, y por tanto $\Delta S = 0$.

7.2. Entropías relativas de Renyi

Existe una interesante generalización uniparamétrica de la entropía relativa [69, 70]

$$S_\alpha(\rho|\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha, \quad (7.8)$$

para $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ y

$$\begin{aligned} S_1(\rho|\sigma) &= \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma)), \\ S_\infty(\rho|\sigma) &= \log \|\sigma^{-1/2} \rho \sigma^{-1/2}\|_\infty. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Estas están usualmente referidas como las entropías relativas de Renyi.

Enfoquemonos en el rango $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Cuando $\alpha = 1/2$, (7.8) da la distancia de fidelidad,

$$S_{1/2}(\rho|\sigma) = -2 \log \text{Tr} \sqrt{\sigma^{1/2} \rho \sigma^{1/2}} = -2 \log F(\rho, \sigma), \quad (7.10)$$

donde $F(\rho, \sigma)$ denota la fidelidad cuántica. Entonces, las medidas con $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ interpolan entre la fidelidad cuántica y la entropía relativa cuántica.

Las S_α tienen varias propiedades interesantes. Son monótonamente crecientes en α [69,

71, 72]

$$\frac{d}{d\alpha} S_\alpha(\rho|\sigma) \geq 0. \quad (7.11)$$

Dado que tanto la distancia de fidelidad como la entropía relativa son positivas, e iguales a cero sólo cuando $\rho = \sigma$, las mismas propiedades resultan válidas para S_α ,

$$S_\alpha(\rho|\sigma) \geq 0 \quad , \quad S_\alpha(\rho|\sigma) = 0 \quad \text{for } \rho = \sigma. \quad (7.12)$$

Otra propiedad importante es la monotonicidad al incrementar el tamaño del álgebra. Para dos regiones $V \subset \tilde{V}$, luego

$$S_\alpha(\rho_V|\sigma_V) \leq S_\alpha(\rho_{\tilde{V}}|\sigma_{\tilde{V}}), \quad (7.13)$$

para $\alpha \geq 1/2$. También admiten una representación similar en términos del teorema de Uhlmann para la fidelidad [73] como una maximización sobre purificaciones; ver [67] para un review de esto último.

Estas propiedades hacen a S_α una medida de información cuántica interesante para una QFT. Computaremos estas cantidades para fermiones de Dirac a densidad finita, al comparar dos estados σ y ρ correspondientes a distintas elecciones de m y k_F . Para fermiones libres, una expresión explícita para las entropías relativas de Renyi puede encontrarse en términos de funciones de correlación de dos puntos (ver por ejemplo [67]),

$$S_\alpha(\rho|\sigma) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\det [1 + (T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} T' T^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^{\alpha}]^{\frac{1}{2}}}{(\det[1+T])^{\frac{1-\alpha}{2}} (\det[1+T'])^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad (7.14)$$

donde

$$T = \frac{1+\mathcal{C}}{1-\mathcal{C}}, \quad T^T = T^{-1}, \quad T^\dagger = T, \quad (7.15)$$

y $\mathcal{C}_{IJ} = \frac{1}{2} \langle [w_I, w_J] \rangle$ está definida en términos de operadores de Majorana $w_I = (\psi_j + \psi_j^\dagger, i(\psi_j - \psi_j^\dagger))$. La matriz de correlación \mathcal{C} puede escribirse en términos de $C_{ij} = \langle \psi_i^\dagger \psi_j \rangle$ de la siguiente forma,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2i \operatorname{Im} C^T & -i(1 - 2 \operatorname{Re} C^T) \\ i(1 - 2 \operatorname{Re} C^T) & 2i \operatorname{Im} C^T \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

7.3. Resultados numéricos

Procederemos a evaluar numéricamente (7.14) para distintos estados parametrizados por los valores de los dos acoplamientos relevantes m, k_F . También tomaremos $\alpha \rightarrow 1$ para poder obtener la entropía relativa.¹

Empecemos discutiendo a los estados con $m = 0$ fijo, comparando $k_F = 0$ (σ) y $k_F = 1/20$ (ρ). Los resultados se muestran en la Fig. 7.1.

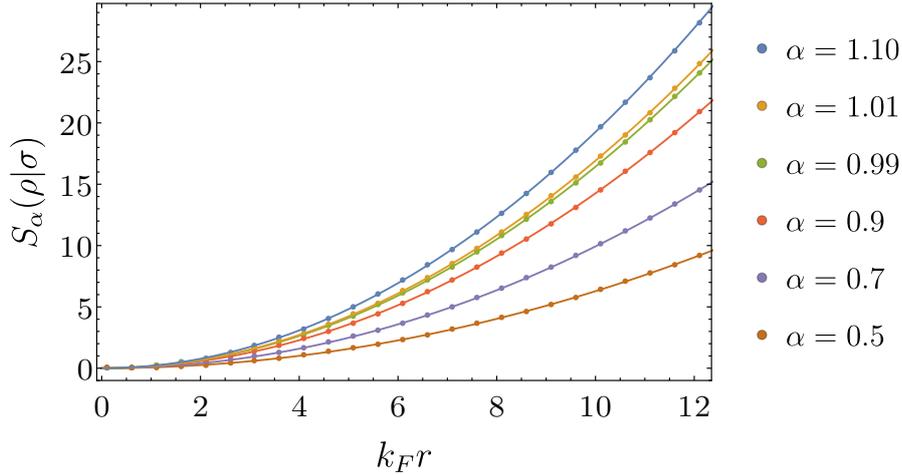


Figura 7.1: Gráficos de S_α con $\alpha \in [0,5,1,1]$ para $m = 0$, comparando estados con $k_F = 0$ y $k_F = 1/20$. La dependencia funcional $S_\alpha = A_\alpha(k_F r)^2$ es observada y graficada con una línea continua para todos los α considerados. Cuando $\alpha \rightarrow 1$ los gráficos crean una cota por debajo y por encima de la entropía relativa. Los coeficientes de los ajustes son aproximadamente $A_\alpha = 0,164$ para $\alpha = 0,99$ y $A_\alpha = 0,169$ for $\alpha = 1,01$; esto está de acuerdo con las predicciones analíticas $A_1 = 1/6$ para $\alpha = 1$ en (7.7).

Encontramos que todas las curvas siguen una dependencia funcional del tipo $S_\alpha = A_\alpha(k_F r)^2$, para un parámetro constante A_α . Esto significa que las entropías relativas de Renyi exhiben un comportamiento super-extensivo dependiente de $k_F r$. Para $\alpha \rightarrow 1$, esto está de acuerdo con la predicción analítica de la entropía relativa en la Sec. 7.2; en particular, el valor $A_1 = \frac{1}{6}$ encontrado en (7.7) es cercano a las cotas superiores e inferiores dadas por los resultados numéricos con $\alpha \sim 1$. En este caso, la dependencia super-extensiva sigue directamente de la forma (7.3) del Hamiltoniano modular de la CFT. En el presente no tenemos un entendimiento analítico similar para las entropías no lineales con $\alpha \in [1/2, 1)$, y sería interesante revisitar esta cuestión en algún trabajo futuro.

Finalmente, discutamos el caso de dos estados con la misma carga k_F pero distintas masas; el estado de referencia σ corresponde a la teoría con $m = 0$, mientras que ρ tiene $m \neq 0$. Ambos estados están en el mismo sector de carga, y las S_α miden la distinguibilidad asociada al flujo del RG causado por la masa. En particular, a bajas

¹De nuevo, tenemos que dividir los resultados numéricos por dos para poder tener en cuenta el doble conteo de fermiones.

energías ambas teorías tienen distintas velocidades de Fermi. Los resultados numéricos para esta situación se muestran en la Fig. 7.2.

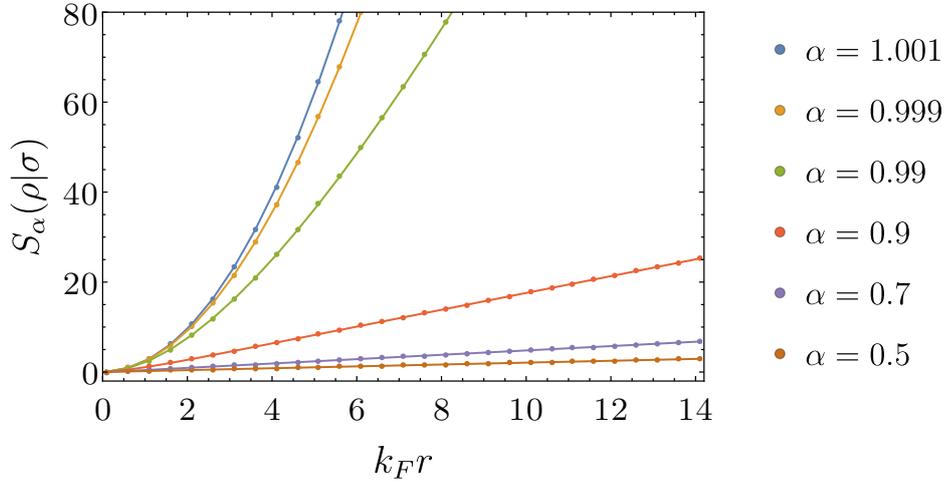


Figura 7.2: Gráfico de la entropía relativa de Renyi con $\alpha \in [0,5,1,1]$ for $k_F = 1/20$ y comparando estados con $m = 0$ and $m = 1/10$. Las curvas escalan como $\sim (k_F r)^2$ para $k_F r$ pequeño, pero potencias más altas también aparecen para valores más grandes.

Diferente respecto del último caso, ahora es más difícil desarrollar un entendimiento analítico. Podemos ver esto incluso al nivel de la entropía relativa, $\alpha = 1$, para la cual el Hamiltoniano modular no es conocido explícitamente.² Los resultados numéricos exhiben una dependencia $S_\alpha \sim (k_F r)^2$ cuando $k_F r \ll 1$, que se ve modificada a distancias grandes de $k_F r$. Vale la pena ahora enfatizar que estas cantidades son siempre monótonas, y como tales podrían llegar a proveer información no trivial acerca del flujo del RG incluso para QFTs no relativistas. En esta dirección, sería interesante relacionar su comportamiento más explícitamente con la dinámica de la teoría. En particular, la monotonidad garantiza la ausencia de oscilaciones de Friedel como aquellas detectadas en secciones previas. También sería interesante continuar el trabajo en esta dirección.

²Otros trabajos recientes en la red incluyen [74, 75].

Capítulo 8

Medidas de información cuántica en $2+1$

“El hombre que ignora si al día siguiente llevará un trozo de pan a su hogar, qué será de él y los suyos si dura la desocupación y la enfermedad, el hombre que se siente aislado ante el duro existir de una sociedad sin piedad... ese hombre y ese joven entregan sus libertades a los regímenes totalitarios a cambio de la eliminación de esas incertidumbres.”

— Moisés Lebensohn. Político argentino.

Hasta el momento hemos estudiado medidas de información cuántica en el seno de QFTs a densidad finita sólo en $d = 1 + 1$ dimensiones espacio-temporales. En este capítulo comenzamos la extensión del análisis previo a $d = 2 + 1$ dimensiones espacio-temporales. Por un lado, esperamos observar la violación logarítmica de la ley de áreas (4.2) para las entropías de Renyi de manera más dramática que en $d = 1 + 1$, en donde el comportamiento es similar al de una CFT; por el otro, la dimensión espacial extra otorga más riqueza para el estudio de distintas geometrías espaciales V , incluso para cuando estas son simplemente conexas. Entre ellas se destacan el círculo, el cuadrado y el rectángulo delgado. A continuación mencionamos algunos de los resultados ya conocidos en la literatura, enfocándonos en estas tres geometrías.

Las entropía de entrelazamiento para una región circular de radio r en una CFT resulta [76]

$$S^{circ} = -F + e \frac{2\pi r}{\epsilon} \quad (8.1)$$

donde F es una constante universal y no local, que decrece monótonamente frente a flujos unitarios del RG en teorías relativistas [4], mientras que e es una constante no universal y local, y ϵ es un cutoff UV.

Si se considera un cuadrado de lado L , las entropías de Renyi para una CFT ad-

quieren un término logarítmico subdominante respecto del término de área,

$$S_n^{cuad} = S_0 - 4s_n \left(\frac{\pi}{2} \right) \log \left(\frac{L}{\epsilon} \right) + e_n \frac{4L}{\epsilon}, \quad (8.2)$$

donde $s_n(\pi/2)$ es un coeficiente cutoff independiente. En general, para una dada región poligonal V , el coeficiente que acompaña al logaritmo depende del modelo en cuestión, y del ángulo x_i del i -ésimo vértice. Por eso es de esperar que el coeficiente sea $\sum_i s_n(x_i)$, donde la suma se realiza sobre todos los vértices, para unas dadas funciones $s_n(x)$. El coeficiente $s_1(\pi/2) \approx 0,023$ fue calculado por primera vez para fermiones de Dirac no masivos utilizando métodos de QFT por [77], y también holográficamente por [78]. Los resultados numéricos para otros valores de n pueden encontrarse en [79]. La dependencia angular de $s_1(x)$ presenta dos límites interesantes. Cuando $x \rightarrow 0$, puede demostrarse que [76]

$$s_1(x) \sim \frac{\kappa}{x} = \frac{\int_0^\infty c(x)}{\pi x}, \quad (8.3)$$

donde κ es una constante universal adimensional, que está relacionada con la función c entrópica en $d = 1+1$ definida en (4.5). Para fermiones de Dirac no masivos $\kappa \approx 0,072$. Mientras que cuando $x \rightarrow \pi$

$$s_1(x) \sim \sigma(x - \pi)^2, \quad (8.4)$$

donde $\sigma = \frac{\pi^2}{24} C_T$, siendo C_T la carga central asociada al tensor energía-momento de la CFT [80].

Si consideramos un rectángulo delgado de dimensiones $r \times L$ con $r \ll L$, la entropía de entrelazamiento puede descomponerse como suma de modos unidimensionales. En particular, la EE escala como [81]

$$S^{rect} \sim S_0 - \kappa \frac{L}{r} - 4s_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \log \left(\frac{L}{\epsilon} \right) + e \frac{2(L+r)}{\epsilon}, \quad (8.5)$$

donde κ es la misma constante adimensional y universal que en (8.3). El mismo factor κ también puede leerse del término dominante de la información mutua si ahora consideramos dos regiones A y B , como por ejemplo dos cuadrados de lado L , tales que se coloquen paralelamente a una distancia $r \ll L$ [9],

$$I(A, B) \sim \kappa \frac{L}{r}. \quad (8.6)$$

En este contexto quisiéramos entender qué ocurre con todas estas predicciones al considerar densidad finita. Una cantidad interesante de calcular numéricamente es el término universal F en (8.1). Sabemos que para QFTs relativistas decrece monótonamente frente al flujo del RG [4], y por tal motivo sería de interés estudiar cómo se codifica la creación de entrelazamiento en esta medida, por ejemplo utilizando a la

información mutua como regulador [82].

Como consecuencia de la fórmula de Widom, que permite calcular los términos de S_n a partir de integrales en el borde de la región de entrelazamiento y sobre la superficie de Fermi, esperamos que a densidad finita las expresiones (8.1) y (8.2) se modifiquen como [29, 83]:

$$S_n^{circ} = S_0 + \tilde{e}_n \frac{k_F r}{\epsilon} + \frac{n+1}{6n} (k_F r) \log(k_F r), \quad (8.7)$$

$$S_n^{cuad} = S_0 - 4\tilde{s}_n \left(\frac{\pi}{2}\right) \log(k_F L) + \tilde{e}_n \frac{k_F L}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \frac{n+1}{6n} (k_F L) \log(k_F L), \quad (8.8)$$

$$S_n^{rect} = S_0 - \tilde{\kappa}_n \frac{L}{r} - 4\tilde{s}_n \left(\frac{\pi}{2}\right) \log(k_F L) + \tilde{e}_n \frac{k_F(r+L)}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \frac{n+1}{6n} (k_F L) \log(k_F r). \quad (8.9)$$

Notamos que a la estructura antes discutida se le añaden los correspondientes términos asociados a la violación logarítmica de la ley de áreas con coeficientes bien definidos en el continuo. En la Sec. 8.1 mostramos simulaciones en donde ajustamos estos comportamientos.

Una tarea pendiente es el cálculo analítico de los coeficientes $\tilde{s}_n(x)$ a densidad finita. En un futuro probablemente seguiremos el enfoque holográfico de [78] para poder contrastar con las simulaciones numéricas. En tal caso, también podríamos estudiar los límites (8.3) y (8.4).

Respecto de las oscilaciones de Friedel, también esperamos observarlas para este tipo de regiones, en donde ya existen predicciones analíticas al respecto [29]. Por otro lado, el estudio del escaleo de la información mutua (de Renyi) puede ser interesante desde el punto de vista de estas oscilaciones, como ya se observó en $d = 1 + 1$ en el Cap. 6. En este caso, también ya existen predicciones respecto del escaleo a densidad finita, aunque no relacionadas con las oscilaciones de Friedel [63].

Finalmente, desde el punto de vista numérico, el cómputo de las distintas medidas de información es numéricamente complicado. Por ejemplo, si consideramos un intervalo de longitud r en $d = 1 + 1$, y un cuadrado de $L \times L$ en $d = 2 + 1$, teniendo en cuenta la duplicación de fermiones, las matrices de correlación restringidas a V van a tener el mismo tamaño si $r = 4L^2$. Por lo tanto, como en $d = 1 + 1$ la máxima longitud computada fue de $r_{\max} = 5000$, esperamos poder computar longitudes del orden de $L_{\max} \approx 35$ para este caso. Esto es un grave inconveniente en miras de realizar simulaciones en la red que se asemejen los más posible al límite al continuo. Es por esto que parte del trabajo futuro incluye desarrollar métodos más eficientes para simular redes de mayor tamaño.

8.1. Resultados numéricos

En esta sección mostramos los resultados preliminares en relación a la entropía de entrelazamiento para fermiones de Dirac no masivos a densidad finita en $2 + 1$. Consideramos tres geometrías espaciales distintas: un círculo, un cuadrado y un rectángulo delgado. Algunas cuestiones numéricas de $2 + 1$ pueden encontrarse en el Apéndice B.4.

En la Fig. 8.1(a) se muestra la EE para una región circular de radio r . Puede observarse que la violación logarítmica de la ley de áreas es mucho más brusca que en $1 + 1$. Además el coeficiente del término $\sim (k_F r) \log(k_F r)$ extraído del ajuste de ΔS (ver Fig. 8.1(b)) se corresponde con la predicción analítica de $1/3$.

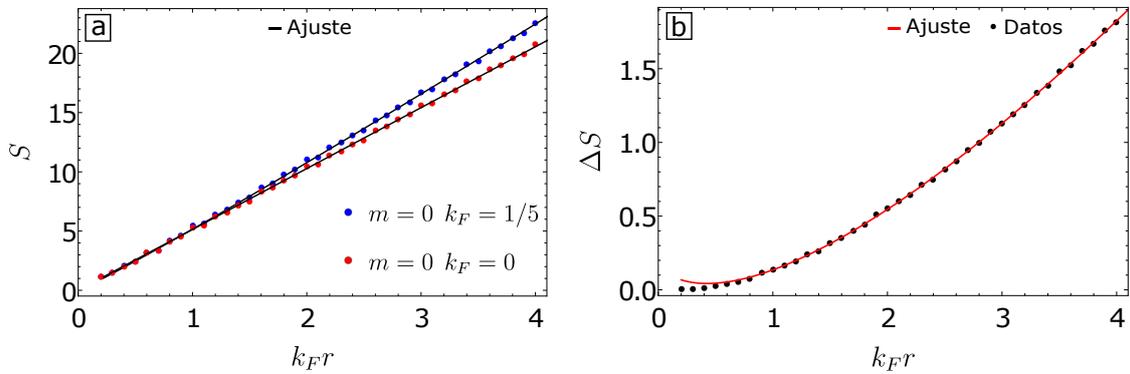


Figura 8.1: En a) se muestra la EE para un fermión de Dirac no masivo en una región circular de radio r , tanto para la CFT como para densidad finita. Se realizaron los ajustes conformes a las predicciones (8.1) y (8.7). Como el ajuste a densidad finita es poco sensitivo al término $\sim (k_F r) \log(k_F r)$, se fijó su coeficiente a $\frac{1}{3}$ para realizarlo. En b), se muestra un gráfico de $\Delta S = S_{\text{fin}} - S_{\text{CFT}}$. La contribución lineal se cancela casi totalmente, y esto permite realizar un ajuste como (8.7), esta vez dejando libre al coeficiente antes fijado. El resultado 0,332 se condice con la predicción de $\frac{1}{3}$. Para realizar este ajuste no se tuvieron en cuenta los primeros diez puntos.

En la Fig. 8.2(a) se muestra la EE para una región cuadrada de lado L . La novedad respecto del caso anterior es la aparición de un término logarítmico subdominante, cuyo coeficiente es cutoff independiente. Para la CFT, el valor obtenido 0,022 del coeficiente logarítmico se corresponde con el valor $s_1(\pi/2) \approx 0,023$ calculado en [77]. Mientras que a densidad finita, se obtuvo el valor $\tilde{s}_1(\pi/2) \approx 0,089$ tanto del ajuste de ΔS (ver Fig. 8.2(b)), como de la resta de los coeficientes extraídos de los ajustes de S . En un futuro, podría computarse analíticamente $\tilde{s}_1(x)$, por ejemplo haciendo uso de técnicas holográficas como en [78], o con técnicas de QFT como en [77]. Por otro lado, recalquemos que para esta geometría también hemos verificado la violación logarítmica de la ley de áreas.

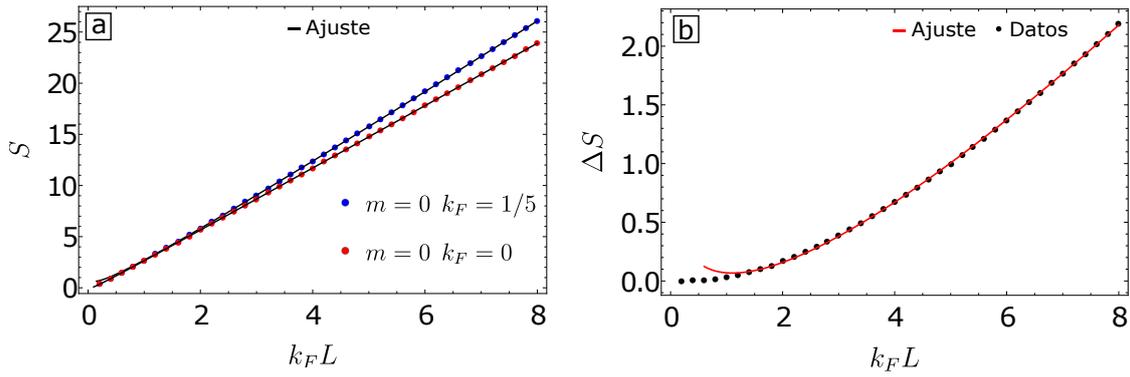


Figura 8.2: En a) se muestra la EE para un fermión de Dirac no masivo en una región cuadrada de lado L , tanto para la CFT como para densidad finita. Se realizaron los ajustes conformes a las predicciones (8.2) y (8.8). De nuevo, para realizar el ajuste a densidad finita, se fijó el coeficiente de la violación logarítmica de la ley de áreas a $\frac{1}{3\pi}$. En b), se muestra un gráfico de $\Delta S = S_{\text{fin}} - S_{\text{CFT}}$. La contribución lineal se cancela casi totalmente, y esto permite realizar un ajuste como (8.8), también fijando el término de la violación logarítmica, para obtener $\tilde{s}_1(\pi/2) \approx 0,089$. Al realizar todos los ajustes no se tuvieron en cuenta los primeros cinco puntos.

En la Fig. 8.3(a) se muestra la EE para una región rectangular delgada $r \times L$, con $r \ll L$. Dado que se varía r con L fijo, las expresiones (8.5) y (8.9) se simplifican pues no hay un término logarítmico subdominante. Por otro lado, para la CFT, el valor obtenido del coeficiente κ de 0,075 se corresponde con el valor $\kappa \approx 0,073$ que se obtiene de integrar numéricamente $c(x)$ para un fermión de Dirac masivo sin carga [76]. Mientras que a densidad finita, se obtuvo el valor $\tilde{\kappa} \approx 0,029$. En la Fig. 8.3(b) se muestra un gráfico de ΔS .

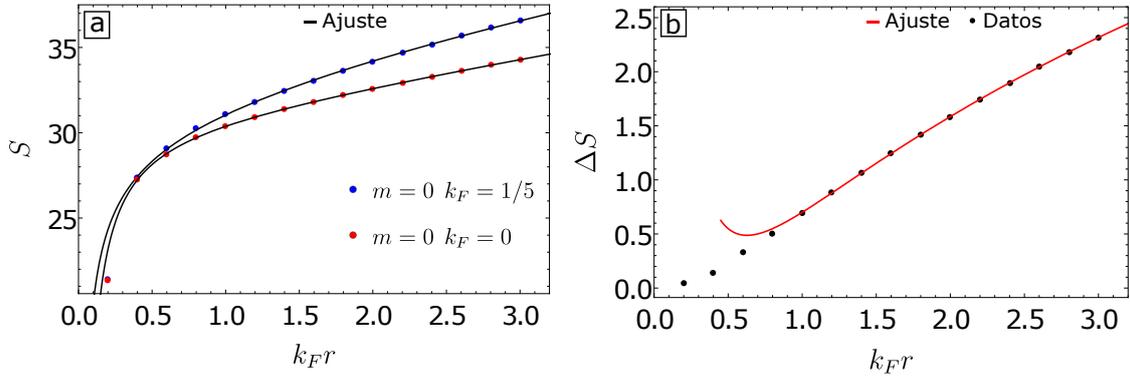


Figura 8.3: En a) se muestra la EE para un fermión de Dirac no masivo en una región rectangular delgada de lados $L = 100$ y $r \in [1, 15]$, tanto para la CFT como para densidad finita. Se realizaron los ajustes conformes a las predicciones (8.5) y (8.9). Para realizar el ajuste a densidad finita, se fijó el coeficiente de la violación logarítmica de la ley de áreas a $\frac{1}{3\pi}$. En b), se muestra un gráfico de $\Delta S = S_{\text{fin}} - S_{\text{CFT}}$ con un ajuste como (8.9).

Capítulo 9

Conclusiones

*“Hay hombres que de su ciencia
tienen la cabeza llena;
hay sabios de todas menas,
mas digo, sin ser muy ducho,
es mejor que aprender mucho
el aprender cosas buenas.”*

— José Hernández. La vuelta del Martín Fierro.

En esta tesis hemos estudiado principalmente varias medidas de información cuántica en Teoría de Campos a densidad finita. Nos enfocamos en fermiones de Dirac libres a densidad finita en $1 + 1$ dimensiones espacio-temporales. A pesar de la simplicidad de nuestro modelo, algunas de las lecciones reflejadas en estas medidas son probablemente más generales, y quisiéramos enfatizarlas aquí, al mismo tiempo que con otras futuras direcciones sugeridas por nuestros resultados.

En primera instancia, discutimos las nociones de microcausalidad y localización tanto en la teoría relativista como no relativista. Vimos que en el primer caso, si bien existe una noción clara de microcausalidad en términos de conmutadores, no es posible definir una base de estados localizados en posición. De forma antagónica, en la teoría no relativista, la pérdida de microcausalidad se ve compensada con la existencia de estados localizados en posición. Por otro lado, se extendió la demostración del Teorema de Reeh-Schlieder de [37] al caso no relativista, y se discutió otra eventual demostración en base al ‘time slice axiom’. La falta de microcausalidad en términos de conmutatividad permitió entender por qué en la teoría no relativista, aunque sea válido el teorema de Reeh-Schlieder (es decir, que el vacío sea cíclico), el mismo no es separador. De esta forma, se eliminó la tensión existente con el resultado de que la EE es trivial en la teoría no relativista.

Hemos establecido que la función c entrópica (construida a partir de la derivada logarítmica de la entropía de entrelazamiento) no es monótona. Esto está en rotundo

contraste con el comportamiento de QFTs Lorentz-invariantes, donde esta cantidad obedece que $c'(r) \leq 0$, hecho que conlleva al teorema C [3, 6]. Encontramos $c_{UV} = c_{IR}$, pero con un comportamiento no trivial intermedio que codifica la competencia entre la densidad de carga y el gap de masa. Curiosamente, dado que las cargas centrales UV e IR son las mismas, la versión débil del teorema ($c_{UV} \geq c_{IR}$) no se viola. Sin embargo, la regla de la suma relativista implica que si $c_{UV} = c_{IR}$ luego no hay flujo del RG (ver por ej. [44]), y esto se encuentra explícitamente violado en nuestro modelo. En cualquier caso, la función c entrópica provee una cantidad finita que resulta sensible a la creación de entrelazamiento asociada a la superficie de Fermi, y sería sumamente interesante el estudio numérico de su comportamiento para sistemas interactuantes.

El análisis de entropías de Renyi también revela efectos no triviales debido a la superficie de Fermi, allí se destacan las oscilaciones de Friedel que modifican el resultado de la CFT en el orden subdominante. Estas habían sido observadas anteriormente en modelos en la red [28]; nosotros argumentamos que ellas también aparecen en la teoría en el continuo cuando la simetría quiral se encuentra ausente (rota por el término de masa). Usando el OPE en defectos, el origen de estas oscilaciones fue atribuido a operadores de dimensión fraccionaria localizados en las singularidades cónicas de la variedad replicada, en acuerdo con sugerencias previas [29, 45]. El mismo argumento también aplica a modelos interactuantes, de ahí que esta dependencia oscilatoria podría ser interesante para testear líquidos que no son de Fermi.

La información mutua es un interesante y prometedor observable para teorías con materia cuántica, porque mide las correlaciones entre distintas regiones. Hemos probado que, en el límite de larga distancia, la información mutua detecta a la superficie de Fermi todavía en el orden dominante vía nuevos términos oscilatorios. Estos son distintos respecto de las oscilaciones de Friedel en las entropías de Renyi. También presentamos una generalización que sigue siendo válida aun para dimensiones anómalas no triviales. Todos estos comportamientos sugieren que la información mutua y sus versiones de Renyi son sumamente prometedoras para testear sistemas correlacionados. Sería también muy interesante permitir perturbaciones dependientes del tiempo e incluir efectos debido a los out-of-time ordered correlators o OTOCs por sus siglas en inglés. Ver por ej. [84, 85] para progresos experimentales recientes en esta dirección.

Finalmente, también estudiamos la entropía relativa (y su generalización uniparamétrica) como medida de distinguibilidad entre distintos estados cuánticos. La entropía relativa exhibe un comportamiento super-extensivo para estados en distintos sectores de superselección de carga, y además es monótona y finita. Estas propiedades resultan útiles para un entendimiento no perturbativo de aspectos del flujo del RG a densidad finita. Para continuar en esta línea, sería muy importante poder, en situaciones más genéricas, determinar cómo extraer propiedades intrínsecas de los puntos fijos a partir de la entropía relativa. Esto fue hecho para teorías relativistas en [64, 65]. La

estructura de correladores del tensor energía-momento a densidad finita podría también proveer de información complementaria.

Será muy importante extender el presente trabajo a $d > 2$. En general para $d > 2$, la superficie de Fermi se caracteriza por inducir una violación logarítmica de la ley de áreas [86], mientras que el término dominante del área en la EE es una ley de potencia divergente. Esto se relaciona con la violación de hiperescala [60–62], que se encuentra ausente en 1+1 dimensiones. Si bien en esta tesis ya se han mostrado algunos resultados numéricos en $d = 2 + 1$ relacionados con la violación logarítmica de la ley de áreas, los mismos son preliminares. Por ejemplo, podría realizarse un estudio analítico de los coeficientes que acompañan al logaritmo asociados a los vértices a densidad finita. Otra dirección fructífera podría ser construir cantidades entrópicas finitas a partir de la EE o la entropía relativa. También sería extremadamente interesante considerar teorías interactuantes; como hemos discutido antes, algunos de los métodos pueden extenderse para el caso interactuante. En concordancia con esta línea, sería interesante evaluar medidas de información cuántica aquí exploradas utilizando modelos holográficos, con el objetivo de arrojar luz en las elusivas superficies de Fermi holográficas [87].

Apéndice A

Demostración del Teorema de Reeh-Schlieder

En este Apéndice se muestra la demostración completa para el caso relativista del Teorema de Reeh-Schlieder. En la última sección, se discute el rol del Teorema de Reflexión de Schwarz en la demostración del Teorema de Reeh-Schlieder.

A.1. Caso relativista

Para probar el teorema utilizaremos el método de *reductio ad absurdum*. Supongamos que el teorema de Reeh-Schlieder es falso, entonces $\mathcal{H}_0 \neq \text{Span}\{|\psi_{\bar{f}}\rangle\}_{f_i \in \mathcal{U}_V}$. Luego, un vector $|\chi\rangle$ distinto de $|\Omega\rangle$ debe existir tal que¹ $|\chi\rangle \in \left(\text{Span}\{|\psi_{\bar{f}}\rangle\}_{f_i \in \mathcal{U}_V}\right)^\perp$, en otras palabras

$$0 = \langle \chi | \psi_{\bar{f}} \rangle, \quad (\text{A.1})$$

con f_i con soporte en \mathcal{U}_V . Esta afirmación es equivalente aún si los campos no son considerados como distribuciones:

$$0 = \langle \chi | \psi_{\bar{f}} \rangle \quad f_i \text{ con soporte en } \mathcal{U}_V \quad \Leftrightarrow \quad \langle \chi | \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)|\Omega \rangle = 0 \quad x_i \in \mathcal{U}_V. \quad (\text{A.2})$$

Lema Si (A.2) es válida $\forall x_i \in \mathcal{U}_V \Rightarrow$ es también válida $\forall x_i \in M_d$.

Si el lema es verdadero entonces $|\chi\rangle$ es ortogonal a todo vector en \mathcal{H}_0^2 (ya que $\mathcal{H}_0 = \text{Span}\{|\psi_{\bar{f}}\rangle\}_{f_i \in \mathcal{U}_\Sigma}$ debido a la definición del sector de vacío) implicando que $|\chi\rangle = |\Omega\rangle$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, el teorema de Reeh-Schlieder queda demostrado.

¹Estamos pensando que para un conjunto abierto arbitrario U , $\mathcal{H}_0 = U \oplus U^\perp$ por ser \mathcal{H}_0 separable.

²Notemos que eso es equivalente a decir que $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_0^\perp$. Pero por otro lado, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 \oplus \{|\Omega\rangle\}$ con lo cual $\mathcal{H}_0^\perp = \{|\Omega\rangle\}$ y $|\chi\rangle = |\Omega\rangle$.

Ahora la tarea difícil, la **demostración del lema**:

- Definamos $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \chi | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle$. Primero, demostraremos que φ continua anulándose si x_n se mueve por fuera de \mathcal{U}_V , manteniendo las otras variables en \mathcal{U}_V . Segundo, probaremos que sin restricciones en x_{n-1} y en x_n , manteniendo $x_1, \dots, x_{n-2} \in \mathcal{U}_V$, φ continua anulándose. Finalmente, procediendo de forma similar variando la coordenada k -ésima hasta que $k = n$, concluimos que φ es idénticamente nula $\forall x_i \in M_D$, demostrando así el lema.
- Para demostrar que φ se anula cuando sólo se varía x_n , consideremos un vector de tipo tiempo que apunta en la dirección futura $R \in M_D$ y un parámetro real u , tales que $x'_n = x_n + uR$ (ver Fig. (A.1)). Si definimos g como φ evaluada en x'_n :

$$g(u) = \langle \chi | \phi(x_1) \dots \phi(x_n + uR) | \Omega \rangle = \langle \chi | \phi(x_1) \dots e^{i(uR^0 H - u\vec{R}\vec{p})} \phi(x_n) e^{-i(uR^0 H - u\vec{R}\vec{p})} | \Omega \rangle. \quad (\text{A.3})$$

Dado que $P^u | \Omega \rangle = 0$,

$$g(u) = \langle \chi | \phi(x_1) \dots e^{i(uR^0 H - u\vec{R}\vec{p})} \phi(x_n) | \Omega \rangle. \quad (\text{A.4})$$

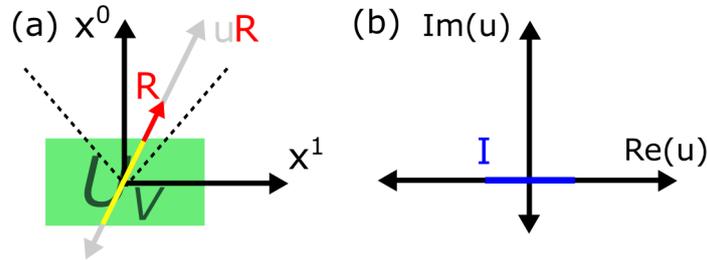


Figura A.1: En concordancia con el ejemplo de (2.1), en (a) $R \in M_D$ es un vector de tipo tiempo que apunta en la dirección futura que define un rayo uR a través del origen. La función $g(u)$ se anula en el segmento amarillo, ó como está indicado en (b) en el intervalo I de $\text{Re}(u)$. Además, para demostrar el teorema $u \in \mathbb{R} \rightarrow u \in \mathbb{C}$.

Es importante remarcar que si u es tal que $x_n + uR \in \mathcal{U}_V$, eso implica que $g(u)$ se anula para los correspondientes valores de u en I^3 . De ahora en adelante $u \in \mathbb{C}$. Afirmamos que como $|\vec{R}| < R^0$ por ser R de tipo tiempo, entonces $\text{Im}(u|\vec{R}|) < \text{Im}(uR^0)$ para u en el semiplano superior \mathbb{H} . Más aún, usando el hecho de que $\vec{R}\vec{p} \leq |\vec{R}||\vec{p}|$ y que $|\vec{p}| \leq H$ (porque $H = +\sqrt{p^2 + m^2}$) puede notarse que

$$\text{Im}(u|\vec{R}|) < \text{Im}(uR^0) \quad u \in \mathbb{H} \quad \Rightarrow \quad \left| e^{i(uR^0 H - u\vec{R}\vec{p})} \right| < 1 \quad u \in \mathbb{H}. \quad (\text{A.5})$$

³El intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$ en \mathbb{C} consiste de todos los valores de u sobre el rayo que genera R dentro de \mathcal{U}_V , tales que $g(u) = 0$.

Entonces, el operador exponencial se encuentra acotado para los u en el semiplano superior y consecuentemente, resulta holomorfo en la misma región.

- Hemos aprendido que $g(u)$ es holomorfa en el semiplano superior, continua a medida que u se acerca al eje real por encima, y nula en el segmento $I = (-\epsilon, \epsilon)$ del eje real. Consecuentemente (ver Apéndice A.2) $g(u) = 0, \forall u \in \mathbb{C}$. En particular, para $u \in \mathbb{R}$ concluimos que $g(u)$ se anula para un rayo en M_d que pasa a través de x_n . Continuando con el mismo procedimiento podemos probar que φ se anula en el cono de luz pasado y futuro de x_n . Es posible repetir el mismo argumento pero eligiendo otro conjunto de M_d en donde φ se anule, y comenzar a zig-zaguear en M_d hasta cubrirlo enteramente. Como consecuencia, concluimos que $\varphi = 0 \forall x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{U}_\mathcal{V}$, sin la restricción de que $x_n \in \mathcal{U}_\mathcal{V}$.
- El próximo paso consiste en remover la restricción $x_{n-1} \in \mathcal{U}_\mathcal{V}$. Sólo moveremos las últimas dos variable de forma similar al paso anterior $x_{n-1}, x_n \rightarrow x_{n-1} + uR, x_n + uR$. Luego, puede verse que

$$g(u) = \langle \chi | \phi(x_1) \dots e^{i(uR^0 H - u\vec{R}\vec{p})} \phi(x_{n-1}) \phi(x_n) | \Omega \rangle. \quad (\text{A.6})$$

De nuevo, concluimos que $g(u)$ se anula en $u \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $\varphi = 0$ para un desplazamiento arbitrario en M_d de ambos x_{n-1}, x_n al mismo tiempo. Dado que somos libres de mover independientemente a x_n , concluimos que $\varphi = 0 \forall x_1, \dots, x_{n-2} \in \mathcal{U}_\mathcal{V}$, sin la restricción $x_{n-1}, x_n \in \mathcal{U}_\mathcal{V}$. Finalmente, como se mencionó al principio de la demostración del lema, realizamos el mismo procedimiento para las últimas k coordenadas hasta que $k = n$, lo cual completa la demostración.

□

A.2. Teorema de reflexión de Schwarz

En relación con la demostración del teorema de Reeh-Schlieder probaremos que $g(u) \equiv 0 \forall u \in \mathbb{C}$ si g es holomorfa en el semiplano superior \mathbb{H} , continua a medida que u se acerca al eje real por encima y nula en el segmento $I = (-\epsilon, \epsilon)$ del eje real. Por esa razón, invocamos al teorema de reflexión de Schwarz.

Teorema de reflexión de Schwarz⁴ Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto con la propiedad de que $z \in A \Leftrightarrow \bar{z} \in A$. Sea f definida en $\{z \in A : \text{Im}(z) \geq 0\}$ y continua en dicho conjunto, así como holomorfa en $\{z \in A : \text{Im}(z) > 0\}$. Supongamos que $z \in A \cap \mathbb{R}$ implica que $f(z)$ sea real. Entonces f posee una extensión analítica $\tilde{f} : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A, \text{Im}(z) \geq 0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in A, \text{Im}(z) < 0 \end{cases}.$$

Definiendo $A := \{z \in \mathbb{C} : \text{si } z \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ puede verse que A es un conjunto abierto. Luego, como g es holomorfa en el semiplano superior, continua a medida que u se acerca al eje real por encima y real en $I = (-\epsilon, \epsilon)$ (porque $g(z) = 0$ si $z \in I$), debido al teorema de reflexión de Schwarz concluimos que existe una extensión holomorfa \tilde{g} en A . En otras palabras, \tilde{g} resulta holomorfa en el semiplano superior/inferior así como en I (en donde \tilde{g} se anula). Ahora, debemos hacer uso de la holomorfía de \tilde{g} y de su nulidad en I . Por ese motivo, utilizaremos el hecho de que las funciones holomorfas definidas en un dominio (es decir, en un conjunto abierto y conexo) tienen una propiedad interesante en relación con sus ceros:

Proposición⁵ Sea $B \subset \mathbb{C}$ un dominio (un conjunto abierto y conexo) y f una función compleja holomorfa en B . Si $z_0 \in B$ es un punto de acumulación de ceros de f , entonces $f \equiv 0$ en B .

Utilizando la proposición es evidente que \tilde{g} debe anularse en A , porque cada $z \in I$ es un punto de acumulación de ceros en \tilde{g} . Finalmente, como sabemos que g es continua a medida que u se aproxima al eje real concluimos que $g(u) = 0$ si $x \in \mathbb{R}$. \square

⁴En la literatura, se encuentra el denominado *edge of the wedge theorem* que es una especie de generalización del Teorema de reflexión de Schwarz para varias variables.

⁵Me gustaría agradecer a Javier Fernández por indicarme que esta proposición era necesaria para la demostración.

Apéndice B

Fermiones en la red

En este Apéndice coleccionamos algunos resultados de fermiones en la red que se usarán en el texto principal.

B.1. Autovectores y correlador

Para computar C_{ij} elegimos la base quirál $\gamma^0 = \sigma^1$, $\gamma^1 = i\sigma^2$ y por tanto $\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = -\sigma^3$. Los autovectores son

$$v_+(k) = N_+ \begin{pmatrix} m \\ \sin(k) + \sqrt{m^2 + \sin(k)^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

$$v_-(k) = N_- \begin{pmatrix} m \\ \sin(k) - \sqrt{m^2 + \sin(k)^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

con constantes de normalización N_{\pm} como consecuencia de la unitariedad de $U(k) = (v_+(k), v_-(k))$,

$$\begin{aligned} N_+^2 &= \frac{1}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}(\sqrt{m^2 + \sin(k)^2} + \sin(k))}, \\ N_-^2 &= \frac{1}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}(\sqrt{m^2 + \sin(k)^2} - \sin(k))}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Usando que $m^2 = \left(\sqrt{m^2 + \sin(k)^2} - \sin(k)\right) \left(\sqrt{m^2 + \sin(k)^2} + \sin(k)\right)$, el producto exterior de los autovectores resulta

$$\begin{aligned} v_+^\dagger(k)v_+(k) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sin(k)}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} & \frac{m}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \\ \frac{m}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} & \frac{1}{2} + \frac{\sin(k)}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{m\gamma^0}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} + \frac{\sin(k)\gamma^0\gamma^1}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} v_-^\dagger(k)v_-(k) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sin(k)}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} & -\frac{m}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \\ -\frac{m}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} & \frac{1}{2} - \frac{\sin(k)}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{I} - \frac{m\gamma^0}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}} - \frac{\sin(k)\gamma^0\gamma^1}{2\sqrt{m^2 + \sin(k)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.2. Duplicación de fermiones a densidad finita

El campo de Dirac en la red ha sido estudiado holísticamente en el pasado, empezando por [88–90]. Estos trabajos notaron el problema de la duplicación de fermiones en la red; necesitaremos revisitarse este punto dado que surgen nuevos efectos a densidad finita que tienen que ser tomados en cuenta.

Como se notó en estos trabajos, la relación de dispersión (3.17) es simétrica bajo $k \rightarrow k + \pi$. Esto es una consecuencia directa de la simetría discreta en el Hamiltoniano,

$$\psi_n \rightarrow S\psi_n, \quad S = (-1)^n \gamma^0. \quad (\text{B.6})$$

En la teoría en el continuo de bajas energías, debemos mantener los modos con $k \sim 0$ a la vez que eliminamos aquellos con momento alto $k \sim \pi$. Esto puede realizarse al considerar la combinación

$$\Psi(x) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\psi_{n+1} + \psi_n}{2}, \quad (\text{B.7})$$

para $x = na$. Éste es un autovector de la simetría discreta, $S\psi_n = \psi_n$.

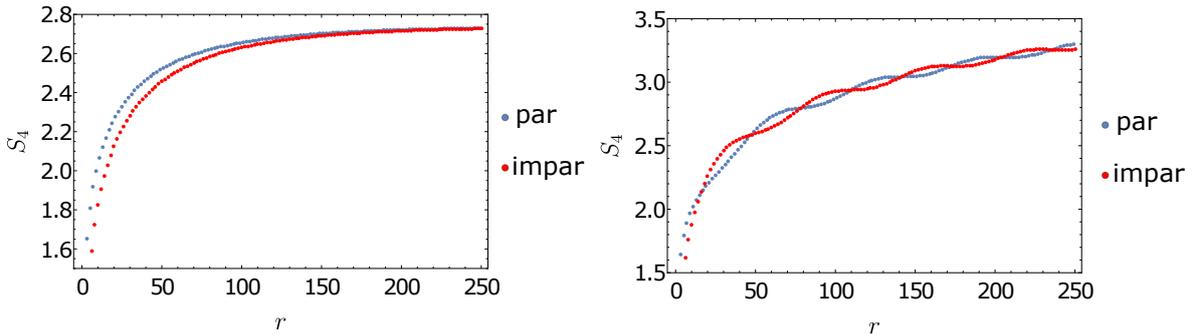


Figura B.1: Panel izquierdo: S_4 para $m = 1/200$ y $k_F = 0$, distinguiendo la paridad $(-1)^n$ de r . Ambas ramas coinciden cuando $r \gg 1$. Panel derecho: S_4 para $m = 1/200$ y $k_F = 1/20$; las ramas de sitios pares e impares se encuentran desfasadas por $\pi/2k_F$ como función de r .

En nuestro contexto, cuando $k_F = 0$ la duplicación simplemente es tomada en cuenta al dividir las entropías por dos; ver la figura izquierda de la Fig B.1. Sin embargo, cuando $k_F \neq 0$ no podemos simplemente hacer eso porque encontramos dos ramas que exhiben un comportamiento oscilatorio y que no están en fase; esto se encuentra ilustrado en el panel derecho de la Fig. B.1. Más precisamente, las curvas de sitios pares e impares se encuentran desfasadas por $\frac{\pi}{2}$ como función de $k_F r$. Promediar las dos curvas no daría el resultado correcto para las entropías de Renyi. El origen del desfase puede verse todavía cuando $m = 0$ y $k_F \neq 0$, debido a la forma del correlador

$$C_{ij} = C_{ij}^0 + \begin{cases} \frac{\mathbb{I}[\frac{\sin[k_F(i-j)]}{\pi(i-j)}]}{\pi(i-j)} & i - j \text{ par} \\ i\gamma^0\gamma^1 \frac{\cos[k_F(i-j)] - 1}{\pi(i-j)} & i - j \text{ impar,} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

con $k_F = \arcsin\left(\sqrt{\mu_F^2 - m^2}\right)$ y

$$C_{ij}^0 = \mathbb{I} \frac{\delta_{ij}}{2} + i\gamma^0 \gamma^1 \frac{1 - (-1)^{(i-j)}}{2\pi(i-j)}. \quad (\text{B.9})$$

Ambas ramas se encuentran desfasadas por $k_F(i-j) \rightarrow k_F(i-j) \pm \frac{\pi}{2}$ en los coeficientes de densidad finita, que resultan desfasados por $k_{Fr} \rightarrow k_{Fr} \pm \frac{\pi}{2}$ en el límite al continuo. Cuando $m \neq 0$ no esperamos encontrar una expresión analítica cerrada, pero sí un comportamiento numérico similar. Remarcamos que, a diferencia de la duplicación de fermiones, el desfase sí es una propiedad del continuo. Para resolver este inconveniente, hemos elegido seleccionar la información proveniente sólo de los sitios pares, y posteriormente dividir por dos las entropías para tener en cuenta el doble contaje.

B.3. Límite al continuo de las entropías de Renyi

En esta sección mostramos un conjunto de simulaciones que ilustran el límite al continuo para fermiones de Dirac masivos. En la Figura B.2 se observan las simulaciones de c , c_2 , c_3 y c_{100} para varios valores de μ_F tales que en todos los casos $m/\mu_F = 15/8$. De los gráficos resulta evidente que los cambios en las amplitudes al variar los parámetros son despreciables. Por ende, concluimos que las oscilaciones se corresponden con oscilaciones físicas de Friedel, y no a un efecto intrínseco de la red. Por tal motivo, en el texto principal sólo mostramos las simulaciones con los parámetros más pequeños utilizados (es decir, aquellos más próximos al límite al continuo).

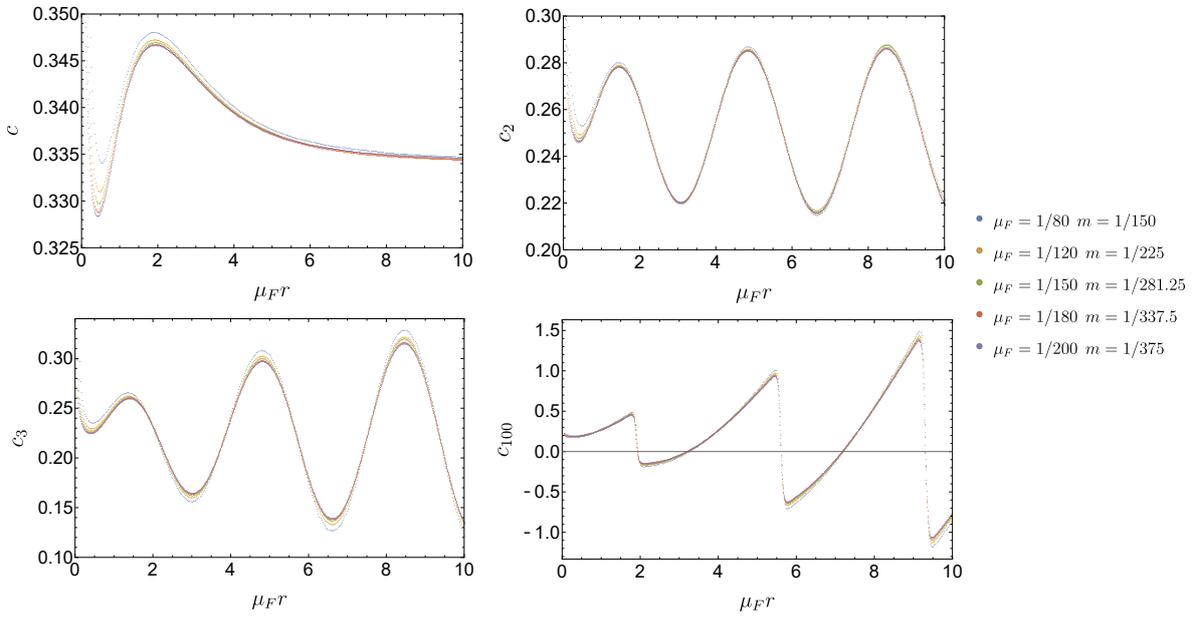


Figura B.2: Funciones c , c_2 , c_3 y c_{100} para un fermión con $m/\mu_F = 15/8$. El límite al continuo se corresponde con tomar valores $\mu_F, m \rightarrow 0$ para μ_F/m fijo y $\mu_F r$ finito.

B.4. Correlador en 2+1

Para computar el correlador $C(i-j, k-l)$ con $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ usamos la representación de Dirac en $2+1$: $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^1$, y $\gamma^2 = i\sigma^2$. Siguiendo la sugerencia de [9], para reducir el tiempo empleado en las laboriosas simulaciones, conviene escribir una de las integrales del correlador analíticamente (en términos de polinomios de funciones elípticas), utilizando un software de manipulaciones matemáticas, para luego realizar la última integral numéricamente. Remarquemos también que debido al doble contaje de fermiones en la red, es necesario dividir los resultados numéricos por cuatro con el fin de obtener el límite al continuo correcto.

La contribución de la banda de carga cero es

$$C_0(x, y) = \frac{\mathbb{I}}{2} \delta_{x,0} \delta_{y,0} \mathbb{I} + [C_0(x, y)]_{\gamma^0} \gamma^0 + [C_0(x, y)]_{\gamma^0 \gamma^1} \gamma^0 \gamma^1 + [C_0(x, y)]_{\gamma^0 \gamma^2} \gamma^0 \gamma^2, \quad (\text{B.10})$$

mientras que la contribución de la banda de densidad finita es

$$\Delta C(x, y) = [\Delta C(x, y)]_{\mathbb{I}} \mathbb{I} + [\Delta C(x, y)]_{\gamma^0} \gamma^0 + [\Delta C(x, y)]_{\gamma^0 \gamma^1} \gamma^0 \gamma^1 + [\Delta C(x, y)]_{\gamma^0 \gamma^2} \gamma^0 \gamma^2. \quad (\text{B.11})$$

Para descomponer una de las integrales en polinomios, será útil la siguiente identidad para y par, que a su vez define a los coeficientes $D(y, k)$

$$\cos(y p_y) = \sum_{k=0}^{|y|/2} \underbrace{\left((-1)^k \sum_{j=0}^{|y|/2} \binom{|y|}{2j} \binom{|y|/2 - j}{k - j} \right)}_{\equiv D(y, k)} \sin(p_y)^{2k}. \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado, también definimos la integral elíptica indefinida de tercera especie

$$\tilde{\Pi}(n, \varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - n \sin(\theta)^2) \sqrt{1 - m \sin(\theta)^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^\varphi \frac{d\theta \sin(\theta)^{2j}}{\sqrt{1 - m \sin(\theta)^2}}}_{\text{Cf}[\tilde{\Pi}|(j, \varphi, m)]} n^j, \quad (\text{B.13})$$

donde $\varphi \in [0, \pi/2]$ y además hemos definido el coeficiente $\text{Cf}[\tilde{\Pi}|(j, \varphi, m)]$. En particular si $\varphi = \pi/2$, el resultado coincide con la integral elíptica completa de tercera especie $\Pi(n, m) = \tilde{\Pi}(n, \frac{\pi}{2}, m)$ y el coeficiente de su expansión lo denotamos por $\text{Cf}[\Pi|(j, m)]$.

A continuación escribimos los distintos términos a densidad cero. Sólo mencionamos los casos en donde estos términos son no nulos. Si x e y son pares

$$[C_0(x, y)]_{\gamma^0} = -\frac{m}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x \frac{2 \cos(x p_x)}{\sqrt{\sin(p_x)^2 + m^2}} \sum_{k=0}^{|y|/2} D(y, k) \text{Cf} \left[\Pi | \left(k, -\frac{1}{\sin(p_x)^2 + m^2} \right) \right]. \quad (\text{B.14})$$

Si x es impar e y es par

$$[C_0(x, y)]_{\gamma^0\gamma^1} = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x \frac{2 \sin(xp_x) \sin(p_x)}{\sqrt{\sin(p_x)^2 + m^2}} \sum_{k=0}^{|y|/2} D(y, k) \text{Cf} \left[\Pi | (k, -\frac{1}{\sin(p_x)^2 + m^2}) \right]. \quad (\text{B.15})$$

Finalmente,

$$[C_0(x, y)]_{\gamma^0\gamma^2} = [C_0(y, x)]_{\gamma^0\gamma^1}. \quad (\text{B.16})$$

Para la banda de densidad finita, la región de integración es (continuo \Leftrightarrow discreto)

$$p_x^2 + p_y^2 \leq k_F^2 = \mu_F^2 - m^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(p_x)^2 + \sin(p_y)^2 \leq \sin(k_F)^2 = \mu_F^2 - m^2. \quad (\text{B.17})$$

Que en términos de p_x, p_y es

$$p_x \in [-k_F, k_F] \cup [\pi - k_F, \pi] \cup [-\pi, -\pi + k_F], \quad (\text{B.18})$$

$$p_y \in [-\arcsin(B), \arcsin(B)] \cup [\pi - \arcsin(B), \pi] \cup [-\pi, -\pi + \arcsin(B)], \quad (\text{B.19})$$

con $B = \sqrt{\sin(k_F)^2 - \sin(p_x)^2}$. También definimos $\tilde{B} = \arcsin(B)$ por mayor comodidad.

De nuevo, a continuación sólo listamos los valores no nulos de los términos a densidad finita. Si x e y son pares

$$[\Delta C(x, y)]_{\text{II}} = \frac{4}{(2\pi)^2} \int_{-k_F}^{k_F} dp_x \cos(xp_x) \frac{\sin(\tilde{B} y)}{y}. \quad (\text{B.20})$$

Si x e y son pares

$$[\Delta C(x, y)]_{\gamma^0} = \frac{m}{(2\pi)^2} \int_{-k_F}^{k_F} dp_x \frac{4 \cos(xp_x)}{\sqrt{\sin(p_x)^2 + m^2}} \sum_{k=0}^{|y|/2} D(y, k) \text{Cf} \left[\tilde{\Pi} | (k, \tilde{B}, -\frac{1}{\sin(p_x)^2 + m^2}) \right]. \quad (\text{B.21})$$

Si x es impar e y es par

$$[\Delta C(x, y)]_{\gamma^0\gamma^1} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-k_F}^{k_F} dp_x \frac{4 \sin(xp_x) \sin(p_x)}{\sqrt{\sin(p_x)^2 + m^2}} \sum_{k=0}^{|y|/2} D(y, k) \text{Cf} \left[\tilde{\Pi} | (k, \tilde{B}, -\frac{1}{\sin(p_x)^2 + m^2}) \right]. \quad (\text{B.22})$$

Finalmente,

$$[\Delta C(x, y)]_{\gamma^0\gamma^2} = [\Delta C(y, x)]_{\gamma^0\gamma^1}. \quad (\text{B.23})$$

Apéndice C

Tratamiento perturbativo: bosonización

En este apéndice mostraremos los avances en torno al tratamiento perturbativo de S_n a $\mathcal{O}(m^2)$, que sigue el enfoque de [43]. Si bien los cálculos no se encuentran totalmente acabados ni entendidos, esta discusión formó parte del entendimiento general de esta tesis. La idea general de este approach consiste en escribir las entropías de Renyi en términos de la función de partición $Z[n]$ de un espacio n -dimensional que consiste de n copias de la teoría original

$$S_n = \frac{1}{1-n} \log(\text{Tr}(\rho^n)) = \frac{\log(Z[n]) - \log(Z[1])}{1-n}, \quad (\text{C.1})$$

donde $Z[1]$ es un factor de normalización tal que $\text{Tr}(\rho) = 1$. Este método se conoce con el nombre de ‘replica trick’. En el caso del campo de Dirac, las condiciones de contorno que deben introducirse en el espacio replicado pueden ser obviadas si se introduce un campo de gauge externo A_μ^k , que sea puro gauge salvo en los extremos del intervalo $(0, r)$. En otras palabras,

$$\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu^\nu(x) = \frac{2\pi k}{n} (\delta^{(2)}(x) - \delta^{(2)}(x-r)), \quad (\text{C.2})$$

con $k = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2} + 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ y $r \equiv (0, r)$. La densidad lagrangiana en el espacio replicado se escribe como

$$\mathcal{L}_k = i\bar{\Phi}_k \gamma^\nu (\partial_\nu + A_\nu^k) \Phi_k + m\bar{\Phi}_k \Phi_k + \mu_F \Phi_k^\dagger \Phi_k, \quad \nu = 0, 1. \quad (\text{C.3})$$

Para cada copia k , el término del potencial químico puede volcarse dentro del término de masa siguiendo una transformación unitaria como en (3.29). En efecto, si $\Phi_k = (\psi_L, \psi_R)$

$$m\bar{\Phi}_k \Phi_k + \mu_F \Phi_k^\dagger \Phi_k = m(e^{2i\mu_F x^1} \psi_R^\dagger \psi_L + \text{h.c.}). \quad (\text{C.4})$$

Por otro lado, dado que las n copias se encuentran desacopladas las unas de las otras, podemos escribir

$$Z[n] = \sum_{k=-(\frac{n-1}{2})}^{\frac{n-1}{2}} Z_k, \quad (\text{C.5})$$

donde

$$Z_k = \langle e^{iS_{int}} \rangle = \langle e^{i \int d^2x A_\mu^k j_k^\mu} \rangle, \quad (\text{C.6})$$

siendo $j_k^\mu = \bar{\Phi}_k \gamma^\mu \Phi_k$ la corriente fermiónica.

Para calcular Z_k podemos emplear la técnica de bosonización. La misma consiste en mapear la corriente fermiónica j_k^μ a una corriente bosónica vía la transformación[91]

$$j_k^\mu \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (\text{C.7})$$

Teniendo en cuenta además que $\psi_R^\dagger \psi_L = \frac{1}{2\pi\epsilon} : e^{i2\sqrt{\pi}\phi} :$, siendo ϵ un cutoff UV, la densidad lagrangiana bosonizada resulta

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m}{\pi\epsilon} \cos(2\mu_F x^1 + 2\sqrt{\pi}\phi). \quad (\text{C.8})$$

El modelo es similar a la teoría de Sine-Gordon, con la diferencia de que tiene además una fase que depende explícitamente de la coordenada x^1 debido a la densidad finita. De hecho, si se hubiese bosonizado directamente desde (C.3) teniendo en cuenta (C.7), el lagrangiano hubiese sido

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m}{\pi\epsilon} \cos(2\sqrt{\pi}\phi) + \frac{\mu_F}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \phi, \quad (\text{C.9})$$

es decir, explícitamente tendríamos la teoría de Sine-Gordon en presencia de un término de borde o topológico. Un planteo interesante que utiliza esta expresión fue llevado a cabo en [55]. Ellos propusieron escribir al campo bosónico como una contribución clásica más una fluctuaciones Gaussianas. En nuestro caso, tratamos de utilizar su formalismo para calcular las S_n pero sólo pudimos recuperar el primer término de su predicción analítica (5.2).

De la expresión (C.6), resulta que Z_k puede escribirse en términos del valor de expectación de operadores de vértice

$$Z_k = \left\langle e^{-i\sqrt{4\pi}\frac{k}{n}(\phi(0)-\phi(r))} \right\rangle. \quad (\text{C.10})$$

Este valor de expectación es sumamente complicado de calcular. Por tal motivo em-

plearemos un enfoque perturbativo. Los valores de expectación serán calculados en la teoría sin escalas ($m = \mu_F = 0$), y el operador relevante que la perturbe¹ será $\mathcal{O}(\phi) = \frac{m}{\pi\epsilon} \cos(2k_F x_1 + 2\sqrt{\pi}\phi)$. El hecho de que los valores de expectación se calculen en la CFT, permiten utilizar

$$\langle e^{-i \int d^2x f(x)\phi(x)} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y f(x)G(x-y)f(y)}, \quad (\text{C.11})$$

cuya función de Green es

$$G(x, y) = -\frac{2}{\beta^2} \log|x - y|. \quad (\text{C.12})$$

Utilizaremos como notación $\alpha = \frac{k}{n}$ y $\beta = \sqrt{4\pi}$ (conocido como punto del fermión libre). A orden cero en m ,

$$Z_k^{(0)} = \langle e^{i\alpha\beta\phi(r)} e^{-i\alpha\beta\phi(0)} \rangle = \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^{-2\alpha^2}. \quad (\text{C.13})$$

A primer orden en m , se espera que $Z_k^{(1)} = 0$ como consecuencia de la conservación de la carga topológica en los operadores de vértice. A segundo orden en m

$$Z_k^{(2)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{m}{\pi\epsilon}\right)^2 \int d^2x d^2y \langle \cos(2k_F x^1 + \beta\phi(x)) \cos(2k_F y^1 + \beta\phi(y)) e^{i\alpha\beta\phi(r)} e^{-i\alpha\beta\phi(0)} \rangle. \quad (\text{C.14})$$

Escribiendo a los $\cos(\cdot)$ en términos de exponenciales y calculando los valores de expectación (ver Apéndice C.1), se obtiene la generalización de la expresión utilizada en [20] a densidad finita

$$Z_k^{(2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 Z_k^{(0)} \int d^2x d^2y \left\{ \left(\frac{|r-y||x|}{|r-x||y|}\right)^{2\alpha} \frac{1}{|x-y|^2} e^{-2ik_F(x^1-y^1)} + \left(\frac{|r-x||y|}{|r-y||x|}\right)^{2\alpha} \frac{1}{|x-y|^2} e^{2ik_F(x^1-y^1)} \right\}. \quad (\text{C.15})$$

Notemos que $d^2x = dx_0 dx_1$, $d^2y = dy_0 dy_1$ y $r \equiv (0, r)$. Luego, la corrección a las S_n resulta

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-n} \sum_{\alpha} \log(Z_k^{(0)} + Z_k^{(2)} + \dots) \\ &= \frac{1}{1-n} \sum_{\alpha} \log(Z_k^{(0)}) + \frac{1}{1-n} \sum_{\alpha} \log\left(1 + \frac{Z_k^{(2)}}{Z_k^{(0)}} + \dots\right) \\ &= \frac{n+1}{6n} \log\left(\frac{r}{\epsilon}\right) + m^2 \left(\frac{1}{1-n} \sum_{\alpha} \frac{Z_k^{(2)}}{m^2 Z_k^{(0)}}\right) + \mathcal{O}(m^4). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Dado que la amplitud de las oscilaciones a primer orden no trivial son proporcionales

¹Notemos que en el orden más bajo en la expansión en m , $k_F = \mu_F$.

a m^2 (como se observó en la Figura 5.3) parecería que el resultado (5.2) podría recuperarse de la expresión (C.16). Las integrales tienen mucha estructura y son complicadas para resolver. Para comprender su comportamiento definamos

$$B(x, y) = \frac{|r-x||y|}{|r-y||x|}, \quad C = \frac{1}{8} \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 Z_k^{(0)}, \quad (\text{C.17})$$

entonces

$$Z_k^{(2)} = C \int d^2x d^2y \frac{1}{|x-y|^2} \left\{ B(x, y)^{2\alpha} e^{-2ik_F(x^1-y^1)} + B(y, x)^{2\alpha} e^{2ik_F(x^1-y^1)} \right\}. \quad (\text{C.18})$$

Queremos calcular esta integral en el límite $k_F r \gg 1$. Cuando $n > 1$, la principal contribución a la integral va a ocurrir cuando $B \rightarrow \infty$ (cuando $x \approx r$ e $y \approx 0$, y viceversa), puesto que el integrando resulta altamente oscilatorio. Si además consideramos que las copias que mayor contribución van a tener son aquellas con $k = \pm \frac{n-1}{2}$, y notando que $B(x, y)^{-1} = B(y, x)$,

$$S_n \sim \frac{1}{4(1-n)} \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 \text{Re} \left[\int d^2x d^2y \frac{1}{|x-y|^2} \left(\frac{|r-y||x|}{|r-x||y|} \right)^{1-\frac{1}{n}} e^{-2ik_F(x^1-y^1)} \right]. \quad (\text{C.19})$$

Entonces, el integrando $\Theta(x, y)$ para $x \approx r$ e $y \approx 0$, se comporta como

$$\Theta(x, y) \approx \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2}{|r-x||y|} \right)^{1-\frac{1}{n}} e^{-i2k_F r} \implies \text{Re}[\Theta(x, y)] \approx \frac{1}{(|r-x||y|)^{1-\frac{1}{n}}} \frac{\cos(2k_F r)}{(k_F r)^{\frac{2}{n}}}. \quad (\text{C.20})$$

El resultado se asemeja a la estructura de (5.2). Sin embargo, todavía no hemos podido resolver la integral formalmente. Por ejemplo, a este nivel perturbativo no hemos podido argumentar por qué para $n > 1$ sí hay oscilaciones de Friedel, mientras que para $n = 1$ no las hay. Tampoco hemos podido obtener el prefactor de $\mathcal{O}(1)$ que luego podría compararse con los ajustes de la Fig. (5.4). De todos modos en la Sec. 5.2 vimos como el escaleo correcto en S_n surge debido a la presencia de operadores de dimensión fraccionaria localizados en los puntos de ramificación del espacio replicado, utilizando una expansión OPE de defectos. Además dicho argumento también nos permitió justificar la ausencia de oscilaciones para $n = 1$.

C.1. Cálculo de la función $Z_k^{(2)}$

En este Apéndice calcularemos a partir de (C.14) el resultado de $Z_k^{(2)}$ en (C.15). Primero, escribimos el producto de cosenos $\cos(2k_F x^1 + \beta\phi(x)) \cos(2k_F y^1 + \beta\phi(y))$ como

$$\frac{1}{4} \left(e^{i\beta(\phi(x)+\phi(y))} e^{i2k_F(x^1+y^1)} + \text{h.c.} + e^{i\beta(\phi(x)-\phi(y))} e^{i2k_F(x^1-y^1)} + \text{h.c.} \right). \quad (\text{C.21})$$

Al calcular el valor de expectación $\langle \dots \rangle$, los dos términos que poseen el mismo signo en los campos, se anularán dado que su carga topológica neta es distinta de cero. Por otro lado, el cálculo de uno de los dos términos remanentes sigue como

$$\begin{aligned} & e^{i2k_F(x^1-y^1)} \langle e^{i\beta(\phi(x)-\phi(y))} e^{i\alpha\beta\phi(r)} e^{-i\alpha\beta\phi(0)} \rangle \\ &= e^{i2k_F(x^1-y^1)} \langle e^{i \int d^2z \beta [\alpha\delta^{(2)}(r-z) - \alpha\delta^{(2)}(z) + \delta^{(2)}(z-x) - \delta^{(2)}(z-y)] \phi(z)} \rangle \\ &= e^{i2k_F(x^1-y^1)} \exp \left\{ \int d^2w d^2z \left[\alpha\delta^{(2)}(r-z) - \alpha\delta^{(2)}(z) + \delta^{(2)}(z-x) - \delta^{(2)}(z-y) \right] \times \right. \\ & \left. \log |z-w| \times \left[\alpha\delta^{(2)}(r-w) - \alpha\delta^{(2)}(w) + \delta^{(2)}(w-x) - \delta^{(2)}(w-y) \right] \right\} \\ &= e^{i2k_F(x^1-y^1)} \underbrace{\left(\frac{r}{\epsilon} \right)^{-2\alpha^2}}_{Z_k^{(0)}} \left(\frac{|r-x||y|}{|r-y||x|} \right)^{2\alpha} \epsilon^2 |x-y|^2, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

siendo ϵ un cutoff UV, que posteriormente se cancelará con una contribución proveniente de las constantes multiplicativas del operador relevante.

Bibliografía

- [1] L. Daguerre, R. Medina, M. Solis, and G. Torroba, “Aspects of quantum information in finite density field theory,” [arXiv:2011.01252 \[hep-th\]](#). vi, viii, 4
- [2] M. Srednicki, “Entropy and area,” *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 666–669, [arXiv:hep-th/9303048 \[hep-th\]](#). 1
- [3] H. Casini and M. Huerta, “A Finite entanglement entropy and the c-theorem,” *Phys. Lett.* **B600** (2004) 142–150, [arXiv:hep-th/0405111 \[hep-th\]](#). 1, 28, 64
- [4] H. Casini and M. Huerta, “On the RG running of the entanglement entropy of a circle,” *Phys. Rev.* **D85** (2012) 125016, [arXiv:1202.5650 \[hep-th\]](#). 28, 57, 58
- [5] H. Casini, E. Testé, and G. Torroba, “Markov Property of the Conformal Field Theory Vacuum and the a Theorem,” *Phys. Rev. Lett.* **118** no. 26, (2017) 261602, [arXiv:1704.01870 \[hep-th\]](#). 1, 28, 51
- [6] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory,” *JETP Lett.* **43** (1986) 730–732. [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*43,565(1986)]. 1, 64
- [7] Z. Komargodski and A. Schwimmer, “On Renormalization Group Flows in Four Dimensions,” *JHEP* **12** (2011) 099, [arXiv:1107.3987 \[hep-th\]](#). 1
- [8] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and conformal field theory,” *J. Phys.* **A42** (2009) 504005, [arXiv:0905.4013 \[cond-mat.stat-mech\]](#). 1, 28, 36, 39, 40
- [9] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” *J. Phys.* **A42** (2009) 504007, [arXiv:0905.2562 \[hep-th\]](#). 1, 2, 22, 27, 28, 35, 36, 58, 76
- [10] H. Casini, “Relative entropy and the Bekenstein bound,” *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 205021, [arXiv:0804.2182 \[hep-th\]](#). 1

-
- [11] A. C. Wall, “A proof of the generalized second law for rapidly changing fields and arbitrary horizon slices,” *Phys. Rev.* **D85** (2012) 104049, [arXiv:1105.3445 \[gr-qc\]](#). [Erratum: *Phys. Rev.*D87,no.6,069904(2013)]. 1
- [12] T. Faulkner, R. G. Leigh, O. Parrikar, and H. Wang, “Modular Hamiltonians for Deformed Half-Spaces and the Averaged Null Energy Condition,” *JHEP* **09** (2016) 038, [arXiv:1605.08072 \[hep-th\]](#). 1
- [13] S. Balakrishnan, T. Faulkner, Z. U. Khandker, and H. Wang, “A General Proof of the Quantum Null Energy Condition,” [arXiv:1706.09432 \[hep-th\]](#). 1
- [14] R. Orus, “A Practical Introduction to Tensor Networks: Matrix Product States and Projected Entangled Pair States,” *Annals Phys.* **349** (2014) 117–158, [arXiv:1306.2164 \[cond-mat.str-el\]](#). 1
- [15] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602, [arXiv:hep-th/0603001 \[hep-th\]](#). 2
- [16] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of Holographic Entanglement Entropy,” *JHEP* **08** (2006) 045, [arXiv:hep-th/0605073 \[hep-th\]](#). 2
- [17] B. Swingle, “Entanglement does not generally decrease under renormalization,” *J. Stat. Mech.* **1410** no.~10, (2014) P10041, [arXiv:1307.8117 \[cond-mat.stat-mech\]](#). 2, 27, 32
- [18] N. Ogawa, T. Takayanagi, and T. Ugajin, “Holographic Fermi Surfaces and Entanglement Entropy,” *JHEP* **01** (2012) 125, [arXiv:1111.1023 \[hep-th\]](#). 2, 30
- [19] A. Belin, L.-Y. Hung, A. Maloney, S. Matsuura, R. C. Myers, and T. Sierens, “Holographic Charged Renyi Entropies,” *JHEP* **12** (2013) 059, [arXiv:1310.4180 \[hep-th\]](#).
- [20] C. P. Herzog and T. Nishioka, “Entanglement Entropy of a Massive Fermion on a Torus,” *JHEP* **03** (2013) 077, [arXiv:1301.0336 \[hep-th\]](#). 81
- [21] J. Cardy, “Entanglement in CFTs at Finite Chemical Potential.” <http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~entangle2016/YCardy.pdf>, 2016. Presentation at the Yukawa International Seminar “Quantum Matter, Spacetime and Information”. 30
- [22] B. S. Kim, “Entanglement Entropy, Chemical Potential, Current Source, and Wilson Loop,” [arXiv:1705.01859 \[hep-th\]](#). 30

- [23] B. S. Kim, “Entanglement Entropy with Background Gauge Fields,” *JHEP* **08** (2017) 041, [arXiv:1706.07110](https://arxiv.org/abs/1706.07110) [hep-th]. 2
- [24] E. Fradkin, “Scaling of Entanglement Entropy at 2D quantum Lifshitz fixed points and topological fluids,” *J. Phys. A* **42** (2009) 504011, [arXiv:0906.1569](https://arxiv.org/abs/0906.1569) [cond-mat.str-el]. 2
- [25] B. Hsu, M. Mulligan, E. Fradkin, and E.-A. Kim, “Universal entanglement entropy in 2D conformal quantum critical points,” *Phys. Rev. B* **79** (2009) 115421, [arXiv:0812.0203](https://arxiv.org/abs/0812.0203) [cond-mat.stat-mech].
- [26] T. He, J. M. Magan, and S. Vandoren, “Entanglement Entropy in Lifshitz Theories,” *SciPost Phys.* **3** no.~5, (2017) 034, [arXiv:1705.01147](https://arxiv.org/abs/1705.01147) [hep-th].
- [27] M. R. Mohammadi Mozaffar and A. Mollabashi, “Entanglement in Lifshitz-type Quantum Field Theories,” *JHEP* **07** (2017) 120, [arXiv:1705.00483](https://arxiv.org/abs/1705.00483) [hep-th]. 2
- [28] P. Calabrese, M. Campostrini, F. Essler, and B. Nienhuis, “Parity effects in the scaling of block entanglement in gapless spin chains,” *Physical review letters* **104** **9** (2010) 095701. 3, 35, 39, 64
- [29] B. Swingle, J. McMinis, and N. M. Tubman, “Oscillating terms in the renyi entropy of fermi gases and liquids,” *Physical Review B* **87** no.~23, (Jun, 2013) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.87.235112>. 3, 39, 41, 59, 64
- [30] J. Cardy, “Some results on the mutual information of disjoint regions in higher dimensions,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46** no. 28, (2013) 285402. <http://stacks.iop.org/1751-8121/46/i=28/a=285402>. 3, 44, 45
- [31] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995. 5, 9, 20
- [32] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. 5, 9, 12
- [33] D. Tong, *Quantum Field Theory*. University of Cambridge. Part III. Mathematical Tripos, 2007. 9
- [34] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT. Spin and Statistics, and all that*. Princeton University Press, 1964. 11, 13, 15
- [35] R. Haag and B. Schroer, “Postulates of Quantum Field Theory,” *Journal of Mathematical Physics* **3** no.~2, (Mar, 1962) 248–256. 12

- [36] R. Haag, *Local quantum physics: Fields, particles, algebras*. 1992. 13, 15
- [37] E. Witten, “APS Medal for Exceptional Achievement in Research: Invited article on entanglement properties of quantum field theory,” *Rev. Mod. Phys.* **90** no.~4, (2018) 045003, [arXiv:1803.04993 \[hep-th\]](#). 13, 14, 16, 17, 63
- [38] H. Casini, S. Grillo, and D. Pontello, “Relative entropy for coherent states from Araki formula,” *Phys. Rev.* **D99** no.~12, (2019) 125020, [arXiv:1903.00109 \[hep-th\]](#). 15
- [39] L. A. Robert, *Quantum Field Theory: The Wightman Axioms and the Haag-Kastler axioms. (Notes)*. 16
- [40] I. Hason, “Triviality of Entanglement Entropy in the Galilean Vacuum,” *Phys. Lett. B* **780** (2018) 149–151, [arXiv:1708.08303 \[hep-th\]](#). 17, 32
- [41] A. Abrikosov, *Methods of quantum field theory in statistical physics*. 20
- [42] I. Peschel, “Calculation of reduced density matrices from correlation functions,” *Journal of Physics A Mathematical General* **36** (Apr., 2003) L205–L208, [cond-mat/0212631](#). 22, 29
- [43] H. Casini, C. Fosco, and M. Huerta, “Entanglement and alpha entropies for a massive Dirac field in two dimensions,” *J. Stat. Mech.* **0507** (2005) P07007, [arXiv:cond-mat/0505563](#). 30, 36, 42, 79
- [44] A. Cappelli, D. Friedan, and J. I. Latorre, “C theorem and spectral representation,” *Nucl. Phys.* **B352** (1991) 616–670. 33, 64
- [45] J. Cardy and P. Calabrese, “Unusual corrections to scaling in entanglement entropy,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2010** (2010) 04023. 39, 41, 64
- [46] J. Cardy, O. Castro-Alvaredo, and B. Doyon, “Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy,” *J. Statist. Phys.* **130** (2008) 129–168, [arXiv:0706.3384 \[hep-th\]](#). 39
- [47] O. A. Castro-Alvaredo, B. Doyon, and E. Levi, “Arguments towards a c-theorem from branch-point twist fields,” *J. Phys. A* **44** (2011) 492003, [arXiv:1107.4280 \[hep-th\]](#). 39
- [48] E. Levi, “Composite branch-point twist fields in the Ising model and their expectation values,” *J. Phys. A* **45** (2012) 275401, [arXiv:1204.1192 \[hep-th\]](#).

- [49] L. Bianchi, M. Meineri, R. C. Myers, and M. Smolkin, “Renyi entropy and conformal defects,” *JHEP* **07** (2016) 076, [arXiv:1511.06713 \[hep-th\]](#).
- [50] M. Billò, V. Gonçalves, E. Lauria, and M. Meineri, “Defects in conformal field theory,” *JHEP* **04** (2016) 091, [arXiv:1601.02883 \[hep-th\]](#).
- [51] A. Gadde, “Conformal constraints on defects,” *JHEP* **01** (2020) 038, [arXiv:1602.06354 \[hep-th\]](#). 39
- [52] R. Bousso, H. Casini, Z. Fisher, and J. Maldacena, “Entropy on a null surface for interacting quantum field theories and the Bousso bound,” *Phys. Rev.* **D91** no.~8, (2015) 084030, [arXiv:1406.4545 \[hep-th\]](#). 39
- [53] M. Guimaraes and B. Linet, “Scalar Green’s functions in an Euclidean space with a conical-type line singularity,” *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 297–310. 40
- [54] H. Casini, “Entropy inequalities from reflection positivity,” *J. Stat. Mech.* **1008** (2010) P08019, [arXiv:1004.4599 \[quant-ph\]](#). 42
- [55] D. N. Aristov and A. Luther, “Correlations in the sine-gordon model with finite soliton density,” *Physical Review B* **65** no.~16, (Apr, 2002) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.65.165412>. 42, 80
- [56] M. M. Wolf, F. Verstraete, M. B. Hastings, and J. I. Cirac, “Area Laws in Quantum Systems: Mutual Information and Correlations,” *Phys. Rev. Lett.* **100** no.~7, (2008) 070502, [arXiv:0704.3906 \[quant-ph\]](#). 44
- [57] C. Agón and T. Faulkner, “Quantum Corrections to Holographic Mutual Information,” *JHEP* **08** (2016) 118, [arXiv:1511.07462 \[hep-th\]](#). 46
- [58] C. A. Agón, I. Cohen-Abbo, and H. J. Schnitzer, “Large distance expansion of Mutual Information for disjoint disks in a free scalar theory,” *JHEP* **11** (2016) 073, [arXiv:1505.03757 \[hep-th\]](#).
- [59] B. Chen, L. Chen, P.-x. Hao, and J. Long, “On the Mutual Information in Conformal Field Theory,” *JHEP* **06** (2017) 096, [arXiv:1704.03692 \[hep-th\]](#). 46
- [60] D. S. Fisher, “Scaling and critical slowing down in random-field Ising systems,” *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 416–419. 46, 65
- [61] L. Huijse, S. Sachdev, and B. Swingle, “Hidden Fermi surfaces in compressible states of gauge-gravity duality,” *Phys. Rev. B* **85** (2012) 035121, [arXiv:1112.0573 \[cond-mat.str-el\]](#).

- [62] X. Dong, S. Harrison, S. Kachru, G. Torroba, and H. Wang, “Aspects of holography for theories with hyperscaling violation,” *JHEP* **06** (2012) 041, [arXiv:1201.1905 \[hep-th\]](#). 46, 65
- [63] B. Swingle, “Rényi entropy, mutual information, and fluctuation properties of fermi liquids,” *Physical Review B* **86** no. 4, (2012) 045109. 46, 59
- [64] H. Casini, I. S. Landea, and G. Torroba, “The g-theorem and quantum information theory,” *JHEP* **10** (2016) 140, [arXiv:1607.00390 \[hep-th\]](#). 51, 64
- [65] H. Casini, E. Teste, and G. Torroba, “Relative entropy and the RG flow,” *JHEP* **03** (2017) 089, [arXiv:1611.00016 \[hep-th\]](#). 64
- [66] N. Lashkari, “Entanglement at a Scale and Renormalization Monotones,” [arXiv:1704.05077 \[hep-th\]](#).
- [67] H. Casini, R. Medina, I. S. Landea, and G. Torroba, “Renyi relative entropies and renormalization group flows,” *Journal of High Energy Physics* **2018** no. 9, (Sep, 2018) . [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09\(2018\)166](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2018)166). 51, 54
- [68] H. Casini, M. Huerta, and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy,” *JHEP* **05** (2011) 036, [arXiv:1102.0440 \[hep-th\]](#). 52
- [69] M. Müller-Lennert, F. Dupuis, O. Szehr, S. Fehr, and M. Tomamichel, “On quantum rényi entropies: A new generalization and some properties,” *Journal of Mathematical Physics* **54** no. 12, (2013) 122203. 53
- [70] M. M. Wilde, A. Winter, and D. Yang, “Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and hadamard channels via a sandwiched rényi relative entropy,” *Communications in Mathematical Physics* **331** no. 2, (2014) 593–622. 53
- [71] S. Beigi, “Sandwiched rényi divergence satisfies data processing inequality,” *Journal of Mathematical Physics* **54** no. 12, (2013) 122202. 54
- [72] R. L. Frank and E. H. Lieb, “Monotonicity of a relative renyi entropy,” *Journal of Mathematical Physics* **54** no. 12, (2013) 122201, <https://doi.org/10.1063/1.4838835>. <https://doi.org/10.1063/1.4838835>. 54
- [73] A. Uhlmann, “The “transition probability” in the state space of a*-algebra,” *Reports on Mathematical Physics* **9** no. 2, (1976) 273–279. 54

- [74] V. Eisler, E. Tonni, and I. Peschel, “On the continuum limit of the entanglement Hamiltonian,” *J. Stat. Mech.* **1907** no.~7, (2019) 073101, arXiv:1902.04474 [cond-mat.stat-mech]. 56
- [75] V. Eisler, G. Di Giulio, E. Tonni, and I. Peschel, “Entanglement Hamiltonians for non-critical quantum chains,” *J. Stat. Mech.* **2010** (2020) 103102, arXiv:2007.01804 [cond-mat.stat-mech]. 56
- [76] H. Casini and M. Huerta, “Universal terms for the entanglement entropy in dimensions,” *Nuclear Physics B* **764** no.~3, (Mar, 2007) 183–201. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.12.012>. 57, 58, 61
- [77] H. Casini, M. Huerta, and L. Leitaó, “Entanglement entropy for a dirac fermion in three dimensions: Vertex contribution,” *Nuclear Physics B* **814** no.~3, (Jun, 2009) 594–609. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2009.02.003>. 58, 60
- [78] T. Hirata and T. Takayanagi, “Ads/cft and strong subadditivity of entanglement entropy,” *Journal of High Energy Physics* **2007** no.~02, (Feb, 2007) 042–042. <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2007/02/042>. 58, 59, 60
- [79] J. Helmes, L. E. Hayward Sierens, A. Chandran, W. Witczak-Krempa, and R. G. Melko, “Universal corner entanglement of dirac fermions and gapless bosons from the continuum to the lattice,” *Physical Review B* **94** no.~12, (Sep, 2016) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.125142>. 58
- [80] P. Bueno, R. C. Myers, and W. Witczak-Krempa, “Universality of corner entanglement in conformal field theories,” *Physical Review Letters* **115** no.~2, (Jul, 2015) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.021602>. 58
- [81] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement and alpha entropies for a massive scalar field in two dimensions,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2005** no.~12, (Dec, 2005) P12012–P12012. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2005/12/P12012>. 58
- [82] H. Casini, R. C. Huerta, Marina and, and A. Yale, “Mutual information and the F-theorem,” *JHEP* **10** (2015) 003, arXiv:1506.06195 [hep-th]. 59
- [83] D. Gioev and I. Klich, “Entanglement entropy of fermions in any dimension and the widom conjecture,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (Mar, 2006) 100503. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.100503>. 59
- [84] R. Islam, R. Ma, P. M. Preiss, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, and M. Greiner, “Measuring entanglement entropy through the interference of quantum

- many-body twins,” *arXiv e-prints* (Sept., 2015) arXiv:1509.01160, arXiv:1509.01160 [cond-mat.quant-gas]. 64
- [85] J. Li, R. Fan, H. Wang, B. Ye, B. Zeng, H. Zhai, X. Peng, and J. Du, “Measuring Out-of-Time-Order Correlators on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Simulator,” *Physical Review X* **7** no. 3, (July, 2017) 031011, arXiv:1609.01246 [cond-mat.str-el]. 64
- [86] M. M. Wolf, “Violation of the entropic area law for fermions,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (Jan, 2006) 010404. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.010404>. 65
- [87] S. A. Hartnoll, A. Lucas, and S. Sachdev, “Holographic quantum matter,” arXiv:1612.07324 [hep-th]. 65
- [88] A. Chodos and J. Healy, “Spectral degeneracy of the lattice dirac equation as a function of lattice shape,” *Nuclear Physics B* **127** no. 3, (1977) 426 – 446. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377904497>. 73
- [89] A. Chodos and J. B. Healy, “Continuous space-time symmetries of the lattice dirac equation,” *Phys. Rev. D* **16** (Jul, 1977) 387–396. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.387>.
- [90] L. Susskind, “Lattice fermions,” *Phys. Rev. D* **16** (Nov, 1977) 3031–3039. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.3031>. 73
- [91] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2 ed., 2013. 80

Agradecimientos

Voy a tratar de ser lo más conciso posible. Perdonen si omití a alguien, ¡hay demasiada gente!

Primero que nada, quiero agradecer a Gonzalo, que me soportó durante más de un año y medio, y siempre estuvo a disposición mía. Al principio fue un poco duro entrar en tema, pero finalmente su propuesta fue super original e innovadora. Este trabajo no es sino un reflejo de su capacidad y su buena voluntad. También quiero agradecer a Raimel y Mario, que formaron parte de este proyecto, y que sin su ayuda se hubiera dificultado aun más.

Una línea también la merece mi tío Javier, que nos abandonó el año pasado en medio de la paranoia del COVID-19. Parte de esta tesis también va dedicada para él. También quiero dar unas palabras para mi familia. Si bien fue un poco complicada la convivencia durante la cuarentena, no puedo negar el apoyo incondicional de mi papá Lisandro y mi mamá Silvina. Aunque enemistados casi constantemente, a mi hermano Agustín; y en un polo opuesto, a mi compañera de caminatas, mi hermana Sabrina. Por otro lado, también quiero agradecer a mis abuelas Martas, mi abuelo Lito y a mi tía Andrea.

Antes de seguir voy a hacer una breve reflexión acerca del aprendizaje que me dejó el 2020, más allá de aquello meramente académico. El encierro hizo que sobrevivieran nuestros vínculos más cercanos y verdaderos. En ese sentido, espero de aquí en más valorar a quienes realmente me valoran, y convivir con aquellos en donde abunde la reciprocidad.

Este párrafo va dirigido a las personas que fueron cimiento firme en el tumultoso 2020. Quiero agradecer a Nacho. Siempre presente, tanto en las buenas como en las malas, compañero de viajes, rallies, ¡gracias!. También a un amigo que todavía no he podido conocer personalmente, Yasuo, que me ayudó mucho con las aplicaciones. En cuanto a mi mudanza y más charlas, no pueden faltar Mariano, Hernán, Valentín y Juani. Por otro lado, un dúo de mendocinos que siempre está presente, el Seba y el Tincho. Sumido en un halo de misterio no puede quedarse atrás el gran Ian. Mi vuelta a La Plata me acercó de nuevo con el Charly, Javi y Esti. ¡Gracias por bancarme!. Tampoco puedo olvidarme del intento de salidas a correr con el Dido.

Aunque por ahí repita nombres, menciono las personas que independiente de la coyuntura de la pandemia, han formado parte de mi crecimiento personal. El inicio lo remonto a las Olimpiadas de Matemáticas, en donde conocí a grandes amigos como Sca, Dido, Santi, Turko, Dirazarinho, Mono, Mazzo's, Rodo, Fran, entre otros; tampoco puedo olvidarme de Anita. También a mis amigos del secundario Nacho y Fran. Mis amigos de física, Charly, Javi, Esti, Santi, Ati, Juan, Mati y Lu (entre otros). Y finalmente, mis amigos del IB, Raimel, Mario, Valentín, Lautaro, Tincho, Seba, Mauri, Juani, Bryan, Ian, Julián, Thomas, Tomasito, Nico y Birra.

Por último, quiero agradecer a las instituciones que me formaron: la Escuela Italiana de La Plata, la Universidad Nacional de La Plata, y el Instituto Balseiro. Inmersos en el anonimato, los buenos profesores allí presentes han catalizado mi aprendizaje y me han propulsado a mi situación actual. Simplemente, ¡gracias!. También quiero remarcar la gran calidad educativa pública que recibí a nivel universitario, donde incluso llegué a percibir una beca. Eso no quita que sean instituciones perfectas. Como todo lo humano, están corrompidas. Entre ello destaco: concursos de carácter dudoso, malísima planificación del ingreso (con tasas de deserción monstruosas en el primer año de la UNLP), duración media de las carreras algunos años por encima del plan de estudios, escasos recursos experimentales (en la UNLP), poca salida laboral, salarios deplorables, etc. . Por eso espero abogar por cambios estructurales, que puedan mejorar aun más la educación y realmente puedan insertar a nuestros profesionales en la matriz productiva nacional.