

Herramientas de Realidad Aumentada para la conceptualización del límite de una función en un punto.

Avila, Mario Ubaldo - Crespo, Luis Fernando

Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSA)

Facultad de Ciencias Exactas – Universidad Nacional de Salta

marioavila390@exa.unsa.edu.ar – luis.crespo@exa.unsa.edu.ar

Resumen

La propuesta, trabaja sobre la conceptualización del límite de una función en un punto, observando los distintos registros de representación. Se recurren al diseño de actividades en las que se utilizan recursos de Realidad Aumentada (RA), diseñados por los docentes, que aportan a la visualización del concepto, empleando distintos registros de representación.

Para el diseño de las experiencias de RA, se elige la aplicación Metaverse y se complementa con el uso de PhotoMath. La selección de los recursos, se realiza de forma tal que los mismos resulten flexibles, desde el punto de vista técnico. También se tiene en cuenta la flexibilidad en torno al acceso, pues las experiencias creadas son accesibles en cualquier dispositivo móvil, sin mayores dificultades y/o requerimientos técnicos.

Se pretende trabajar en la conceptualización del tema, en forma colaborativa y social, integrando recursos que aporten a la aprehensión del mismo.

Se desea que la propuesta, sea generadora de otras más superadoras, y que aporten a la formación integral del profesorado. Esto para generar una perspectiva curricular que apueste a la alfabetización digital de los nuevos formadores, que deben actuar en una era que está atravesada por pantallas.

Palabras Clave: Realidad Aumentada; Formación del Profesorado; Límite de una función; Enseñanza de la Matemática.

1. Introducción

El concepto de límite de una función en un punto es uno de los más ásperos y complejos de la matemática. Epistemológicamente su construcción formal llegó recién en el siglo XIX, en los trabajos de Cauchy y Weierstrass, siendo que la idea intuitiva estuvo presente ya en el método de exhaustivo de Eudoxo, en los tiempos de la matemática griega. Esta complejidad se pone de manifiesto también en el ámbito áulico, cuando deseamos comunicar el concepto de límite en una situación de enseñanza y aprendizaje.

Debe destacarse la importancia del concepto de límite de una función, por su carácter cimentador en el estudio del cálculo en una variable. El mismo permite definir otras construcciones más complejas, y en la práctica, permite explicar formalmente comportamientos funcionales, que antes podían verse sólo mediante ideas intuitivas: asíntotas de funciones, derivabilidad, crecimiento, convergencia, entre otros.

El estudio del cálculo infinitesimal en una variable debe encuadrarse dentro de lo que se denomina Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). El PMA es una teoría cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático, como así también

los procesos cognitivos que emplea el estudiante durante su etapa de aprendizaje, teoría que ha sido desarrollada por Tall y Dreyfus como afirma Valdivé y Garbin (2008). El proceso de aprendizaje del concepto de límite, puede caracterizarse como un proceso de transición del pensamiento, en el cual el estudiante debe pasar de “descubrir un fenómeno” a “definir un concepto”, de “tratar de convencer sobre un asunto” a “demostrar o refutar analíticamente una proposición”. Para acompañar este proceso de transición, es importante que el docente diseñe situaciones de enseñanza y aprendizaje, nutridas de momentos de acción para el estudiante, donde las actividades de visualización, argumentación, abstracción, formalización, interpretación y representación, propias de la matemática, cumplen un rol fundamental.

La incorporación de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en las propuestas de enseñanza, han impactado en el desarrollo de metodologías innovadoras desde el punto de vista didáctico. En esta propuesta, se plantea trabajar sobre la definición de límite, tomando como base fundamental la interpretación de las condiciones épsilon-delta que presenta la misma. Esto se realiza con la implementación de herramientas de Realidad Aumentada (RA) a través de las aplicaciones Metaverse y Photomath, las cuales funcionarán como generadoras de nueva información, que se diseñará con el software GeoGebra.

La idea es mediar el proceso de aprendizaje tradicional, caracterizado por ser de cálculo, con herramientas de visualización e interacción como las que proponemos, de modo que las mismas estén al alcance de la mano a través de un código QR. El uso de estas herramientas, no sustituye el proceso de razonamiento, sino que lo potencia. Además, permite trabajar sobre el proceso de alfabetización digital, y sobre valores como la colaboración y la cooperación, tan importantes en la formación profesional.

2. Fundamentación

En el proyecto de investigación N° 2635, dependiente del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSA), nos proponemos indagar en los tipos de representaciones que utilizan los estudiantes de las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática (que se dictan en Facultad de Ciencias Exactas de dicha universidad), en la conceptualización del límite de una función de variable real, en un punto de acumulación de su dominio. Esto a fin de trazar líneas de acción que nos lleven a diseñar propuestas de enseñanza, que involucren tales representaciones, a través de la producción de materiales digitales que coadyuven el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Duval (2012) afirma que los objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción, como sí sucede en otros campos y es por ello que resulta necesario representarlos. Blázquez (citado en Pons Tomás, 2014) afirma que el uso de diferentes registros de representación, puede mejorar la comprensión del concepto. En particular, para la conceptualización del límite de una función, identificamos los siguientes registros de representación: a) Simbólica (presente en la notación que se utiliza, en los procesos de cálculo y en la propia definición épsilon-delta); b) Gráfica (puede ser estática o bien dinámica, y aporta significativamente al proceso de visualización); c) Numérica (presente en el uso de tabla de valores para aproximar las imágenes de la función, o bien en el error de “reemplazar c ” para evaluar el límite cuando x tiende a “ c ”); Verbal o Escrita (la cual se manifiesta en los argumentos, explicaciones e interpretación que se elaboran ya sea de gráficos, de implicaciones o de resultados).

En los tiempos actuales, en los que la virtualidad ha atravesado todos los ámbitos de nuestro quehacer, la mediación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y sobre todo

aquellos en los que se requiere trabajar sobre distintos tipos de representaciones, para la visualización de los conceptos, debe acompañarse con tecnologías digitales. En particular, pensamos que el uso de herramientas de Realidad Aumentada (RA), permite cumplir muchos de los objetivos y principios de la tecnología aplicada a la educación en general, y a la educación matemática en particular.

La RA permite añadir información, generada por un dispositivo, a la información que tomamos del mundo real. Según Blázquez Sevilla (2017), la RA es aquella información adicional (aumentada) que se obtiene de la observación de un entorno (mundo real), captada a través de la cámara de un dispositivo que previamente tiene instalado un software específico. Se pueden identificar los elementos que son necesarios para el acceso a esta información: a) Un dispositivo con cámara; b) un Software específico que nos permita acceder a esa información adicional (experiencia de RA); c) un activador de la información, conocido como “trigger”, el cual puede ser una imagen, un marcador, un sensor, un código, entre otros.

El uso y la aplicación de estas herramientas en el ámbito educativo, supone una oportunidad para superar algunas limitaciones educativas, como lo son el acceso a dispositivos y equipamientos costosos para las instituciones, o que son insuficientes, por la cantidad de estudiantes. También permite trabajar más allá de las limitaciones físicas y temporales del aula tradicional, extendiendo los espacios y momentos de aprendizajes de los alumnos, permitiendo el acceso a nuevas experiencias de observación y análisis. (Cubillo Arribas et al, 2014).

La incorporación de la RA en los contextos educativos toma una mayor importancia debido a las ventajas que tiene esta tecnología en la formación académica de

los estudiantes. Facilita la asimilación de conceptos complejos, al poder trabajarlos desde distintos aspectos y puntos de vista, lo cual permite contextualizarlos por medio de la información añadida. Emplear estas herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite trabajar en la motivación y la colaboración entre los alumnos, ya que se brinda un espacio de reflexión, análisis, comparación y argumentación con el otro. Dadas las posibilidades de acceso a la información, las herramientas de RA favorecen el aprendizaje ubicuo, al convertir cualquier entorno, en un entorno de aprendizaje (Cabero y Barroso, 2016)

Desde el punto de vista pragmático, la inclusión de este tipo de tecnología, nos permite diseñar y favorecer metodologías de construcción de conocimientos, ya que los alumnos son los encargados de gestionar la nueva información a la que se tiene acceso, administrando sus momentos de aprendizajes, en compañía de sus pares y del docente. No es menos importante mencionar que en la actualidad la mayoría de las aplicaciones educativas de RA son gratuitas (o tienen una versión gratuita, con la que se puede trabajar en diversos aspectos), esto garantiza accesibilidad y gratuidad, principios básicos de la educación democratizadora de nuestra era.

3. Herramientas para la creación de experiencias de RA

La propuesta que se presenta, trabaja sobre la conceptualización del Límite de una función en un punto, observando los distintos registros de representación. Se recurren a herramientas de RA, para establecer canales que propicien el análisis y la reflexión, apoyados de la visualización de los conceptos.

Se utiliza Metaverse Studio para la creación de las experiencias de RA (disponible en <https://studio.gometa.io>), la aplicación Metaverse para lectura de códigos QR que

permiten el acceso a las mismas, junto con Photomath y GeoGebra. Todo esto, se vincula en una guía de estudio, de carácter teórico-práctico, para un curso de cálculo de una variable, destinado a la formación de formadores en matemática.

La elección de los recursos de RA, se debe a la flexibilidad técnica que ofrece Metaverse Studio, para crear las experiencias de RA, dada su interfaz sencilla e intuitiva. Se pueden incluir textos, GIF, imágenes, audios, links, imágenes 360°, botones de navegación, entre otras opciones.

A esto se suma, que la aplicación de lectura y acceso a las experiencias creadas se puede instalar de manera gratuita, en cualquier dispositivo móvil con Android 4.4, iOS 9.3 y posteriores. La misma se encuentra disponible en el store del teléfono, requiriendo solamente de 29 MB de la memoria del mismo. (https://play.google.com/store/apps/details?id=com.gometa.metaverse&hl=es_AR&gl=US)

En la Fig. 1, se visualiza una experiencia creada con Metaverse Studio, en la que se observan algunos de los elementos antes descritos. Mediante una escena inicial, en la que se presenta la situación a trabajar, con botones interactivos que favorecen la transición entre escenas y recursos incorporados, el usuario puede interactuar con la experiencia creada. La misma, constituye una previsualización, en la que se pueden evaluar las funciones de navegación, calidad de los recursos integrados y la organización general de lo que verá el usuario, en la pantalla de su dispositivo, cuando acceda a la experiencia.

En la misma imagen se observan algunas de las herramientas de edición que propone Metaverse Studio, como son el estilo de background, tipología de botones y la organización general de las escenas. En la escena inicial se pueden definir y modificar las transiciones entre las otras escenas y/o

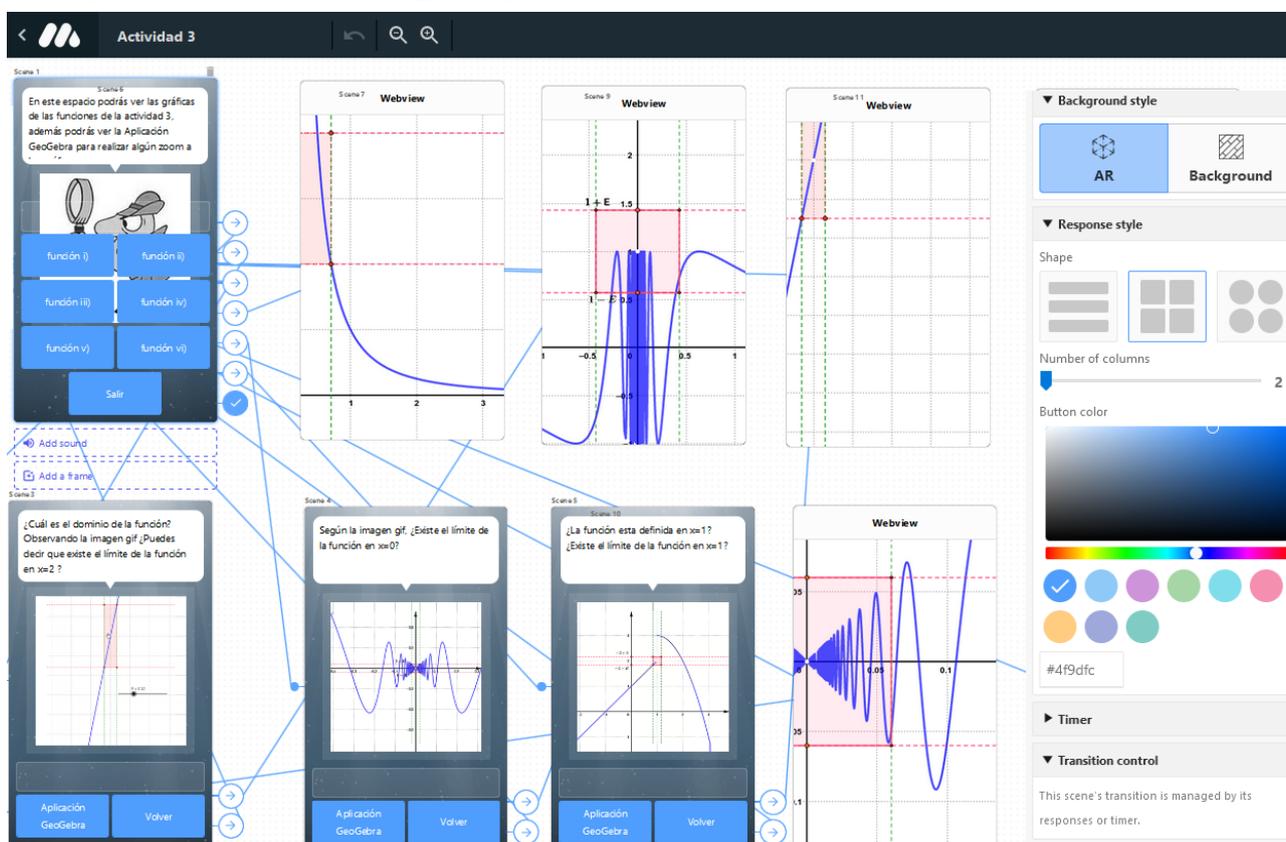


Fig. 1 Experiencia creada con Metaverse

recursos integrados, definiendo de ese modo la navegación a través de la aplicación creada. Como se puede visualizar, esta herramienta permite además añadir audios explicativos a cada escena. Los mismos pueden ser grabados durante la edición de la experiencia, accediendo a la opción “add sound” en la propia aplicación o bien ser incrustados a las escenas a partir de archivos externos; permitiendo compartirlos o no en una comunidad de usuarios de la aplicación.

Debemos decir que, al trabajar en la creación de estas experiencias, estamos adquiriendo herramientas y destrezas que aportan a nuestra propia alfabetización digital. Las mismas tienen que ver con adquirir competencias en el uso de nuevos lenguajes, que pueden ayudar a configurar una buena navegación por toda la experiencia. No menos importantes son las referidas a la producción de materiales digitales que se pueden incluir en la experiencia: audios, videos, creación de applet con software de visualización, GIF, entre otros. Todo esto aporta a la profesionalización del docente en el uso de estos recursos.



<https://mtvrs.io/MotionlessEducatedPangolin>

Fig.2 Código QR para el acceso a una experiencia

Finalizado el proceso de creación, el cual no es definitivo, las experiencias se publican mediante la generación de código QR, con su correspondiente enlace (Fig.2). Esto hace posible, que se pueda acceder a las mismas mediante la aplicación móvil Metaverse. Dicha aplicación, genera un historial de experiencias a las que se puede acceder en cualquier

momento, mientras se cuente con el permiso del creador de las mismas.

De acuerdo a la clasificación que brindan algunos autores, el trabajo con los códigos QR corresponden al nivel más básico de RA, pues los códigos funcionan como hiperenlaces de la nueva información que se añade. Más allá de esto, consideramos que la elección de Metaverse brinda una dinámica propia, que nos permite visualizar, crear y añadir contenido, que luego puede ser distribuido. Como usuarios/creadores de recursos, esta flexibilidad, nos permite superar las limitaciones técnicas, que pueden suponer programar en un lenguaje específico una aplicación de RA.

Con respecto a los otros recursos integrados en la propuesta, la aplicación PhotoMath utiliza marcadores naturales, como una ecuación o un límite para calcular, y a partir de la foto tomada (con teléfono o Tablet) genera la solución, a la par que ofrece instrucciones paso a paso del proceso de resolución que se utilizará. Incorporar esta aplicación de cálculo, favorece que nuestro trabajo se base en la interpretación y aprehensión de conceptos y no de métodos algebraicos de resolución. Por último, sabemos que GeoGebra se ha convertido en la actualidad en una herramienta potente en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en todos los niveles educativos. Su dinamismo y funcionalidad convierte cualquier clase en atractiva, dinámica e incluso colaborativa, en función de las actividades diseñadas. Además, las continuas actualizaciones y mejoras del programa constituyen una motivación continua para seguir profundizando en las posibilidades que ofrece.

Basándonos en lo expresado, se diseñaron actividades en las que se utilizan recursos de RA, que aportan a la visualización del concepto de límite de una función en un punto, empleando distintos registros de

representación. Se considera oportuno incluir los recursos de RA diseñados, para acompañar el proceso de conceptualización inicial, pues será el punto de partida para los nuevos conceptos derivados.

En las actividades, que aquí se ejemplifican, se invita al análisis y elaboración de argumentos que nos lleven a demostrar o refutar proposiciones referidas a la existencia del límite. En la búsqueda de los ejemplos o contraejemplos, se pretende explorar la definición épsilon-delta, como su negación (para explicar cuando existe y cuando no el límite). Se pretende que los estudiantes confronten los distintos registros de representación que emplean, en la búsqueda del valor límite de una función. Esto se realiza mediante la inspección de imágenes en una tabla de valores (registro numérico), continuando con la inspección gráfica, a través de GIF (registro gráfico) y llegan luego al cálculo con PhotoMath (registro algebraico).

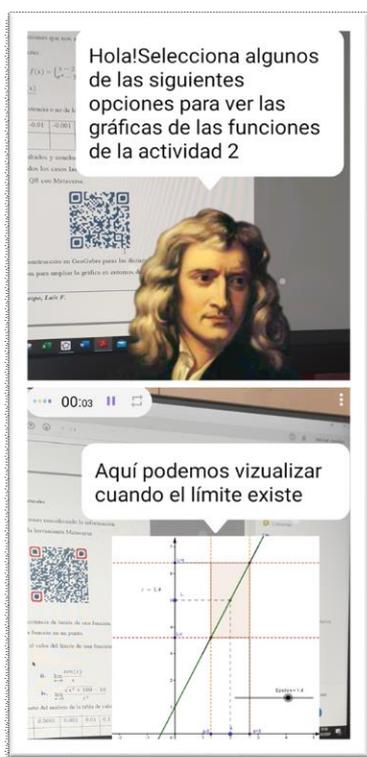


Fig. 3. Análisis de la existencia de límite con GIF y audio en Metaverse

En Fig. 3, se visualiza una experiencia de RA, donde se propone analizar la existencia del límite de una función, a través de imágenes GIF, audios explicativos y construcciones realizadas con GeoGebra. Se accede a ella, escaneando el código QR correspondiente, que se presenta en la consigna de trabajo.

También se plantea trabajar el cálculo de límites, pero recurriendo a la argumentación, mediante la interpretación geométrica del concepto. Nuevamente, el acceso a la experiencia de RA, sirve como medio de análisis, reflexión y elaboración de argumentos, tendientes a explicar tanto la existencia como la no existencia del límite. También se accede a construcciones interactivas, en las que se puede proponer un valor del límite, y mediante la manipulación de deslizadores, decidir si se cumple o no la definición épsilon-delta.

4. Análisis de la propuesta y reflexiones.

En el diseño de la propuesta de trabajo que presentamos, se tuvieron en cuenta algunas variables que son importantes señalar. Teniendo en cuenta la primera hipótesis de investigación: es necesario presentar a los estudiantes funciones que los lleven a confrontar las actividades que usualmente se realizan con los distintos registros de representación. Por ese motivo, se eligieron convenientemente, funciones que pueden “engañar” y nos pueden llevar a elaborar conclusiones no válidas, si no se recurre al planteo epistemológico de la definición de límite para argumentar un resultado.

En la Fig. 4, se observa el planteo de una actividad, en la que se propone analizar la existencia del límite de una función, a partir de la exploración de una tabla de valores. Este tipo de actividad, es la primera herramienta de aproximación a la definición, que utiliza la gran mayoría de textos dedicados a la

enseñanza del tema. Lo que se propone aquí es ampliar este análisis preliminar, para “añadir información” a nuestro contexto real, mediante

los datos de la tabla de valores, podríamos concluir que el límite que pide es nulo, pero si recurrimos al análisis gráfico, mediante la

Actividad 2. Representaciones que nos ayudan a intuir el valor del límite de una función.

Dados los siguientes límites

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, con $f(x) = \begin{cases} x-2 & x \leq 0 \\ e^x - 3 & x > 0 \end{cases}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \cos(x)}{10000}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$

a. Indagar sobre la existencia o no de los mismos, a partir del análisis de la tabla de valores.

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5
$f(x)$...					

b. Confrontar los resultados y conclusiones a partir del análisis gráfico de las funciones.

¿Se cumplen en todos los casos las condiciones que establece la definición? Para ello escanear el código QR con Metaverse.



c. Accediendo a la construcción en GeoGebra para las distintas funciones:

i. Aplicar Zoom para ampliar la gráfica en entornos de $x = 0$.

ii. Hacer uso de la herramienta Inspección de Funciones  para visualizar la tabla de valores.

iii. ¿Cuál es el valor del límite de la función, si este existe? Calcularlo.

d. Debatir y socializar las conclusiones obtenidas.

Fig. 4 Ejemplo de una actividad con la incorporación de una experiencia de RA

la exploración de una experiencia de RA. En ella, se propone cambiar de registro de representación, pasando de uno netamente numérico a uno gráfico y algebraico.

Las experiencias de RA que se diseñan tienen el objetivo de proponer nuevas perspectivas de análisis para la resolución de la situación problemática. Por ejemplo, al analizar el límite iv) de la actividad (Fig.4), se pone en evidencia la importancia de complementar los registros numéricos, gráfico y algebraico, para poder concluir sobre el valor de dicho límite. Así, si nos quedamos solo con

experiencia de RA, podemos visualizar que el límite es distinto de cero. Finalmente, podemos determinar su valor mediante el cálculo del mismo.

En todo el desarrollo de la propuesta, se apuesta a la construcción conceptual en forma colaborativa y social, la cual está mediada con los recursos propuestos. Esto se puede realizar con variadas estrategias metodológicas, que apuesten al debate, a la confrontación, la búsqueda de soluciones, las cuáles no describiremos, pues serían parte de otro trabajo. Pero si debemos decir, que de ellas

depende el éxito del recurso y el logro de los objetivos de aprendizaje que haya propuesto el docente. Es importante decir esto, para desmitificar las posturas clásicas, que afirman que la inclusión de este tipo de recursos deja de lado el desarrollo de los aspectos conceptuales en la clase de matemática, y para no generar la falsa expectativa, de que la sola inclusión, es la panacea de los problemas educativos de nuestros estudiantes. En todo momento los recursos que proponemos son el medio, a partir del cual se pretende potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje, para lograr la conceptualización del tema. Para ello se parte del desarrollo intuitivo, que se apunala con distintos esquemas de representación, dotando de un contexto al problema que se aborda. (Parra Rozo & Díaz Pérez, 2014)

En la formación de educadores en matemática, consideramos, que la inclusión de este tipo de herramientas, no debe ser sólo a los fines de dotar de un halo de modernidad a la clase, más en los contextos actuales. Es de suma importancia que este cambio, se acompañe de una perspectiva curricular, que desmitifique el carácter abstracto y exacto de esta ciencia, como único camino de formación. Esta perspectiva curricular, nos debe llevar a pensar que la inclusión de tecnologías digitales, debe formar parte del diseño de metodología de enseñanza-aprendizaje, que apuesten a un proceso de alfabetización digital de docentes y estudiantes, en una era en la que todos estamos atravesados por pantallas.

5. Conclusiones

Como ocurre con cualquier medio o recursos que se incorpore a la situación de enseñanza y aprendizaje, el éxito de estas herramientas de RA depende exclusivamente del Diseño Instruccional que proponga el docente. Es decir, de cómo planifique la situación de enseñanza-aprendizaje, de modo que la combinación de los medios, la

metodología y las actividades de los alumnos, nos lleven a cumplir los objetivos educativos propuestos.

La selección de los recursos, se realiza de forma tal que los mismos resulten flexibles, desde el punto de vista técnico, a fin de que su incorporación en el aula, no signifiquen un problema tecnológico para docentes y alumnos. También se tuvo en cuenta la flexibilidad en torno al acceso, pues las experiencias creadas son accesibles mediante una aplicación que puede ser instalada en cualquier dispositivo móvil, sin mayores dificultades y/o requerimientos técnicos.

Desde el punto de vista metodológico, las actividades interactivas que se plantearon en torno a estas herramientas de RA, motivan a los estudiantes y les permite desarrollar destrezas en torno a la conceptualización del límite de una función en un punto. En particular, trabajar este tipo de metodología en la formación de formadores, coadyuva a la capacitación integral del profesorado, en competencias que tiene que ver, no solo con lo académico, sino también con aspectos tecnológicos y pedagógicos.

Consideramos que las experiencias creadas, cumplen algunas de las premisas que menciona Blázquez, A. (2017) cuando caracteriza a las aplicaciones de RA orientadas a la educación, ya que proporciona un aprendizaje claro y conciso; el docente es capaz de introducir nueva información de un modo simple y efectivo; proporciona un entorno de interacción sencilla entre el profesor y el estudiante; y el proceso tecnológico es flexible.

Nos queda pendiente, para futuras investigaciones, analizar cómo estas herramientas pueden impactar en el proceso evaluativo. Esto desde el punto de vista de la formación integral y de su rol como instrumento de evaluación. Está claro, que

estamos frente a un paradigma superador en torno a la enseñanza de la matemática, que se basa en la contextualización, la conceptualización, la visualización, argumentación, entre otros, dejando de lado los enfoques tradicionalmente estructuralistas.

Latinoamericana de Matemática Educativa, Relime, 11(3): 413-450.

6. Referencias Bibliográficas

Blázquez Sevilla, A. (2017). *Realidad aumentada en Educación*. Obtenido de Gabinete de Tele Educación del Vicerrectorado de Servicios Tecnológicos de la Universidad Politécnica de Madrid: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

Cabero Almenara, J., & Barroso Osuna, J. M. (2016). Posibilidades educativas de la Realidad Aumentada. *Journal of New Approaches in Educational Research*, 5(1).46-52.

Cubillo Arribas, J., Martín Gutiérrez, S., Castro Gil, M., & Colmenar Santos, A. (2014). Recursos digitales autónomos mediante realidad aumentada. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 17(2),241-274.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques. *Praxis educativa*, 7 (2).

Parra Rozo, O., & Díaz Pérez, V. (2014). Didáctica de las matemáticas y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Educación y Desarrollo Social*, 60-81.

Pons Tomàs, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto del límite de una función en un punto. Universidad de Alicante.

Valdivé, C., & Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista*