Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Erki Kuus

Optimaalse juhtimise rakendusi majanduses

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: kaasprof. Ella Puman

Tartu

2021

OPTIMAALSE JUHTIMISE RAKENDUSI MAJANDUSES

Bakalaureusetöö

Erki Kuus

Lühikokkuvõte

Antud bakalaureusetöö keskendub majandusmudelitele, täpsemalt optimaalse tööjõu ning firma maksimaalse kasumi mudelitele. Nii optimaalse tööjõu kui ka firma maksimaalse kasumi mudelite puhul on vaadeldud ülesandeid fikseeritud ja fikseerimata lõppseisundi korral. Mõlema kohta on lahendatud ülesandeid. Optimaalse juhtimise teooria abil saavad juhid langetada parimaid võimalikke otsuseid firma kasumi maksimeerimisel.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: optimaalne juhtimine, funktsionaal, Hamiltoni funktsioon.

APPLICATIONS OF OPTIMAL CONTROL THEORY IN ECONOMICS

Bachelor thesis

Erki Kuus

Abstract

Current bachelor thesis focus on economic models, specifically the optimal adjustment of labor demand and the firm maximum profit models. The optimal adjustment of labor demand and the firm maximum profit models has been observed problems with fixed and non-fixed terminal points. Both problems have been solved. With optimal control theory, chief executives can make the best possible decisions to maximize a firm's profits.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: optimal control, functional, Hamiltonian function

Sisukord

Sissejuhatus

Optimaalse juhtimise teooria on suhteliselt noor matemaatika valdkond, mis loodi umbes pool sajandit tagasi automaatse reguleerimise teooria tulemusena. Optimeerimisega tegeles inimkond juba ürgajal, kui tuli piiratud ressursside juures valida optimaalne küttimisrelv. Tänu arvutite arengule on viimaste kümnendite jooksul märgatavalt kasvanud huvi erinevaid protsesse matemaatiliselt modelleerida. [2]

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on uurida erinevaid majandusmudeleid kasutades optimaalse juhtimise teooriat, koostada Jupyteri töölehed kasutades programmeerimiskeelt Python, tuua erinevaid näiteid ning lahendada ülesandeid analüütiliselt. Antud töö on peamiselt referatiivne ning põhineb raamatutel A. Chiang "Elements of Dynamic Optimization"[1] ning J. Lellep "Süsteemide optimeerimine"[2]. Kasutatud on ka D. S. Hamermeshi raamatut "Labor Demand"[5], ülesannete lahendamisel A. Pedase ja G. Vainikko õpikut "Harilikud diferentsiaalvõrrandid"[3] ning M. I. Kamieni ja N. L. Schwartzi õpikut "Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and management"[4]. Kasutame mudeleid, mille tuletamisele selles töös tähelepanu ei pööra.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis tutvustatakse erinevaid majandusmudeleid seoses tööjõuga, nende olulisust ning aktuaalsust. Teises peatükis tutvustatakse variatsioonarvutust ja optimaalse juhtimise teooriat. Kolmandas peatükis keskendutakse dünaamilisele optimaalse tööjõu mudelile, fikseeritud ja fikseerimata lõppseisuga ülesannete lahendamisele ning tuuakse näiteid firmade kohta, kes soovivad oma tööjõukulusid muuta. Neljandas peatükis vaadeldakse ettevõte maksimaalse kasumi mudelit, milles leitakse optimaalne hind ning toodangu kogus, mis annavad maksimaalse kasumi.

Lisades on toodud Jupyter Notebooki töölehed, kus kasutatakse Pythoni sümbolarvutuse mooduli Sympy võimalusi diferentsiaalvõrrandite analüütiliseks lahendamiseks ja graafikute tegemiseks konkreetsete näidete jaoks.

1 Erinevad tööjõu mudelid

See peatükk põhineb D. S. Hamermeshi raamatul "Labor Demand" (1996) [5].

Tööturu majandust võib kirjeldada, kui ükskõik millist otsust tööandja ja töötaja vahel. Näiteks värbamine, tööülesanded, koolitamine, palk ning boonused. Selline käsitlus jaotas eelmise sajandi algul tööturu majanduse kaheks osaks: tööjõu nõudluseks ja pakkumiseks.

Aja jooksul tekkis vajadus keerukamate näitajate ning dünaamiliste mudelite järele. Majandusalaste teadusartiklite põhjal on näha, et tööjõu pakkumise kohta on pea kaks korda rohkem artikleid kui tööjõu nõudluse kohta. Lisaks on märgata kasvavat huvi antud valdkonnas. Tööjõu pakkumise kohta on kirjutatud näiteks populatsiooni suurusest, struktuurist, maksudest, migratsioonist, toetustest, haridusest ja majapidamistoodete tootmisest. Samal ajal tööjõu nõudluse kohta on artikleid üldisest tööjõu nõudlusest, miinimumpalgast ning tööjõu optimiseerimisest ja dünaamikast. Ühe põhilise põhjusena toob Hamermesh välja, et tööjõu nõudluse kohta teatakse oluliselt vähem võrreldes pakkumisega. Järgnevalt tutvustame põhilisi tööjõu nõudlusega seotud mudeleid.

1.1 Ühe sisendiga tööjõu mudel

Vaatleme lähemalt ühe sisendiga tööjõu nõudluse mudelit. Olgu meil tegemist täielikult konkureeriva firmaga. Olgu x tööjõu vajadus, K keskmine palk ning P toote hind. Lühiajaline ettevõte tootmisfunktsioon Ψ on kujul

$$\Psi(x), \quad \Psi' > 0, \quad \Psi'' < 0.$$

Firma kasumit π on võimalik esitada valemiga

$$\pi = P\Psi(x) - Kx,$$

mis kehtib kui

$$\Psi'(x_*) = m,$$

kus $m = \frac{K}{P}$ on tegelik palk optimaalse (maksimaalset kasumit toova) tööjõu x_* korral.

Juhul, kui turul ei eksisteeri täielikku konkurentsi, siis ettevõte kasum avaldub kujul

$$\pi = P(\Psi(x))\Psi(x) - Kx,$$

mis saavutab maksimumi juhul, kui on täidetud tingimus

$$P'(x_*)\Psi'(x_*)\Psi(x_*) + P\Psi'(x_*) = K.$$

1.2 Kahe sisendiga tööjõu mudel

Tihtipeale ei piisa ainult ühest sisendist, mistõttu vaatleme nüüd kahe sisendiga tööjõu mudelit. Lisaks tööjõu vajadusele võetakse teiseks sisendiks kapitali hooldusteenus s.

$$Y = F(x, s), \quad F'_x > 0, \quad F''_{xx} < 0, \quad F''_{xs} > 0.$$

Firma kasumivõrrand on kujul

$$\pi = F(x, s) - \frac{K}{P}x - gs,$$

kus g on kapitali hooldusteenuse eksogeenne hind.

2 Optimiseerimine

Selle peatüki koostamisel on kasutatud A. C. Chiangi raamatut "Elements of Dynamic Optimization" (1999) [1].

2.1 Variatsioonarvutuse ülesanded

Variatsioonarvutusega tegeldi juba 17. sajandi lõpus, kui mitmed matemaatikud eesotsas Newtoni ja vendade Bernoullidega uurisid liikuvaid pöördkehi ning nende omadusi. Sellist tüüpi ülesannete puhul on vaja maksimiseerida või minimiseerida funktsionaali V

$$V = \int_0^T F\big(x(t), \dot{x}(t), t\big)dt,$$

kus F on pidev ja kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon. Vaja leida pidev ja pidevalt diferentseeruv funktsioon $x(t)$, mis rahuldab tingimusi

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T,$$

kus x_0, x_T, T on antud.

Seega leiame kahte punkti läbiva sileda kõvera, mis annab funktsionaalile V ekstremaalse väärtuse. Tegemist on lihtsaima variatsioonarvutuse ülesandega.

Funktsionaali kujul

$$V = \int_0^T F\Big(x(t), \dot{x}(t), t\Big)dt + U\Big(T, x(T)\Big),$$

kus U on funktsioon, mis sõltub ainult lõppajast T, nimetatakse Bolza funktsionaaliks. Bolza ülesande lahendamisel defineerime uue muutuja y nii, et

$$y(t) \equiv U(t, x(t)),$$

algtingimusega $y(0) = 0$. Siis

$$\int_0^T \dot{y}(t)dt = y(t)\Big|_0^T = y(T) - y(0) = y(T) = U(T, x(T)).$$

2.2 Juhtimisülesanded

Optimaalse juhtimise teooria ülesannete puhul lisaks ajamuutujale t on antud veel muutuja $x(t)$ ja juhtimine $k(t)$, kust tulenebki optimaalse juhtimise nimi. Optimaalse juhtimise ülesanne peab sisaldama võrrandit, mis seob muutujaid $x(t)$ ja $k(t)$. Analoogiliselt variatsioonarvutuse ülesandele minimiseerime või maksimiseerime funktsionaali J

$$J = \int_0^T F\big(x(t), k(t), t\big) dt,$$

kus F on pidev ja kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon ning lisakitsendused on antud kujul

$$\dot{x_j}(t) = f_j(x(t), k(t), t) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Funktsionaal peab rahuldama rajatingimusi

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T,$$

kus x_0, x_T, T on antud.

Ülesande lahendamisel kasutame Hamiltoni funktsiooni (vt [2], 163)

$$H(x, k, \psi, t) = -F(x, k, t) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j f_j(x, k, t), \tag{2.1}$$

kus

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

ning

$$\frac{\partial H}{\partial k_l} = -\frac{\partial F}{\partial k_l} + \sum_{j=1}^{n} \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial k_l}; \qquad l = 1, \ldots, r.$$

Kaasmuutuja ψ avaldub kujul (vt [2],163)

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

3 Optimaalne tööjõu mudel

See peatükk põhineb A. C. Chiangi raamatul "Elements of Dynamic Optimization" (1999) [1] ja J. Lellepi raamatul "Süsteemide optimiseerimine" (2013) [2].

3.1 Ülesande püstitus

Olgu meil firma, mis planeerib oma majandustegevust muuta. Olgu x tööjõu vajadus, C tööjõu maksumus rahaliselt. Vastavalt majandusteadlase Hamermeshi valemile $([1], 75)$ saame tööjõu maksumuse leida seosega

$$C = b\dot{x}^2 + K, \tag{3.1}$$

kus K on kulutused tööjõule firma stabiilse seisundi korral ning b on positiivne konstant.
On teada, et ettevõtte puhaskasum on

$$\prod = \int_0^T (p - C)e^{-\varrho t}dt, \tag{3.2}$$

kus p tähistab ettevõtte sissetulekut, $t = 0$ algusaega, $t = T$ lõppaega ning ϱ diskonteerimise määra (positiivne konstant).
Hamermesh eeldas, et ettevõtte sissetulekut saab täielikult tööjõu kaudu hinnata kujul

$$p = 2mx - nx^2, \tag{3.3}$$

kus $2mx$ on firma tulud ja nx^2 on tööjõu muutumisel tekkiv kasumi kõrvalekalle.
Asendame võrrandid (3.1), (3.3) puhaskasumit kirjeldavasse võrrandisse (3.2), saame

$$\prod = \int_0^T (2mx - nx^2 - b\dot{x}^2 - K)e^{-\varrho t}dt. \tag{3.4}$$

3.2 Fikseeritud lõppseisuga ülesande lahendamine

Tähistame võrrandis (3.4)

$$\dot{x} = k. \tag{3.5}$$

Kuna ettevõtte soovib saada maksimaalset kasumit, siis minimiseerime funktsionaali

$$M = \int_0^T (-2mx + nx^2 + bk^2 + K)e^{-\varrho t} dt, \tag{3.6}$$

lisakitsenduse (3.5) korral. Olgu meil teada tööjõu vajadus algaja $t = 0$ ning lõppaja $t = T$ jaoks

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \tag{3.7}$$

Hamiltoni funktsioon (2.1) on kujul

$$H = (2mx - nx^2 - bk^2 - K)e^{-\varrho t} + \psi k, \tag{3.8}$$

kus kaasmuutuja ψ rahuldab tingimust

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial((2mx - nx^2 - bk^2 - K)e^{-\varrho t} + \psi k)}{\partial x} = -(2m - 2nx)e^{-\varrho t}.$$

ehk

$$\dot{\psi} = (2nx - 2m)e^{-\varrho t}. \tag{3.9}$$

Kuna vastavalt ekstreemumi tarvilikule tingimusele

$$\frac{\partial H}{\partial k} = 0,$$

siis saame, et

$$\frac{\partial((2mx - nx^2 - bk^2 - K)e^{-\varrho t} + \psi k)}{\partial k} = -2kbe^{-\varrho t} + \psi$$

ning

$$-2kbe^{-\varrho t} + \psi = 0. \tag{3.10}$$

Seega

$$k = \frac{\psi}{2b} e^{\varrho t}. \tag{3.11}$$

Asendades seose (3.5) tagasi võrdusesse (3.11), saame

$$\dot{x} = \frac{\psi}{2b} e^{\varrho t}. \tag{3.12}$$

Diferentseerime võrrandit (3.12) aja järgi

$$\ddot{x} = \dot{\psi} \cdot \frac{e^{\varrho t}}{2b} + \psi \cdot \left(\frac{e^{\varrho t}}{2b}\right) \cdot \varrho.$$

Kasutame seoseid (3.9) ja (3.10)

$$\ddot{x} = \frac{(2nx - 2m)e^{-\varrho t}e^{\varrho t}}{2b} + \left(\frac{2kbe^{-\varrho t}e^{\varrho t}\varrho}{2b}\right).$$

Pärast lihtsustamist saame

$$\ddot{x} = \frac{nx - m}{b} + k\varrho.$$

Seose (3.5) kasutamisel

$$\ddot{x} = \dot{x}\varrho + \frac{nx - m}{b}.$$

Saame vastavalt lineaarse konstantsete kordajatega teist järku diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\ddot{x} - \varrho\dot{x} - \frac{n}{b}x = -\frac{m}{b}. \tag{3.13}$$

Lahendamisel kasutame A. Pedase ja G. Vainikko õpikut "Harilikud diferentsiaalvõrrandid" (2011) [3]. Võrrandi üldlahend on kujul

$$x = x_h + x_*, \tag{3.14}$$

kus x_h on vastava homogeense võrrandi lahend ning x_* on mittehomogeense võrrandi üks konkreetne lahend.

Lahendame vastava homogeense võrrandi

$$\ddot{x} - \varrho\dot{x} - \frac{n}{b}x = 0. \tag{3.15}$$

Moodustame võrrandile (3.15) vastava karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - \varrho\lambda - \frac{n}{b} = 0,$$

kus λ on parameeter. Karakteristlikeks väärtusteks saame

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varrho}{2} \pm \sqrt{\frac{\varrho^2}{4} + \frac{n}{b}}. \tag{3.16}$$

Seega võrrandi (3.15) lahend on

$$x_h = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \tag{3.17}$$

kus C_1, C_2 on suvalised konstandid ning $\lambda_{1,2}$ vastava karakteristliku võrrandi juured seosest (3.16).

Leiame mittehomogeense võrrandi ühe konkreetse lahendi.

Kuna võrrandi (3.13) paremal pool on konstant, siis otsime lahendit kujul $x_* = C_*$, kus C_* määrame nii, et x_* rahuldab võrrandit. Kuna

$$\dot{x}_* = \ddot{x}_* = 0,$$

siis võrrandisse (3.13) asendades saame

$$-\frac{n}{b}C_* = -\frac{m}{b}$$

ehk

$$C_* = \frac{m}{n}.$$

Seega võrrandi (3.13) üldlahend on

$$x = x_h + x_* = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{m}{n}. \tag{3.18}$$

Moodustame konstantide C_1 ja C_2 määramiseks võrduste (3.7) ja (3.18) abil süsteemi

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{m}{n} + x_0, \\ C_1 e^{\lambda_1 T} + C_2 e^{\lambda_2 T} = -\frac{m}{n} + x_T. \end{cases} \tag{3.19}$$

Esimesest seosest saame

$$C_2 = -C_1 - \frac{m}{n} + x_0.$$

Asendame selle avaldise (3.19) viimasesse seosesse

$$C_1 e^{\lambda_1 T} + \Big(-C_1 - \frac{m}{n} + x_0 \Big) e^{\lambda_2 T} = -\frac{m}{n} + x_T.$$

Jätame konstanti C_1 sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poole ning viime ülejäänud liikmed paremale poole

$$C_1 e^{\lambda_1 T} - C_1 e^{\lambda_2 T} = -\Big(-\frac{m}{n} + x_0 \Big) e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T.$$

Lihtsustades saame

$$C_1 \Big(-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T} \Big) = \Big(\frac{m}{n} - x_0 \Big) e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T.$$

Jagades läbi teguriga $\Big(-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T} \Big)$ saame avaldada konstandi C_1 järgmisel kujul

$$C_1 = \frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0 \Big) e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}. \tag{3.20}$$

Analoogiliselt süsteemi (3.19) esimesest seosest saame

$$C_1 = -C_2 - \frac{m}{n} + x_0.$$

Asendame teise seosesse

$$C_2e^{\lambda_2 T} + \Big(-C_2 - \frac{m}{n} + x_0\Big)e^{\lambda_1 T} = -\frac{m}{n} + x_T.$$

Jätame C_2 sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poole ning ülejäänud liikmed paremale poole

$$C_2e^{\lambda_2 T} - C_2e^{\lambda_1 T} = -\Big(-\frac{m}{n} + x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T.$$

Lihtsustades avaldist saame

$$C_2\Big(-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}\Big) = \Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T.$$

Jagame läbi teguriga $\Big(-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}\Big)$ ning avaldame konstandi C_2 kujul

$$C_2 = \frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}. \tag{3.21}$$

Seega asendades konstandid C_1, C_2 üldlahendisse (3.18), saame

$$x = \frac{m}{n} + \left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}\right)e^{\lambda_2 t}. \tag{3.22}$$

Võttes tuletise võrrandist (3.22) aja t järgi saame

$$\dot{x} = \lambda_1\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)e^{\lambda_1 t} + \lambda_2\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}\right)e^{\lambda_2 t}. \tag{3.23}$$

Võtame võrrandi (3.23) ruutu. Saame

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 = &\left(\lambda_1\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)e^{\lambda_1 t}\right)^2 + 2\left(\lambda_1\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)e^{\lambda_1 t}\right)\cdot\\ &\cdot\left(\lambda_2\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}\right)e^{\lambda_2 t}\right) + \left(\lambda_2\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}\right)e^{\lambda_2 t}\right)^2.\end{aligned}$$

Asendades viimase esialgsesse Hamermeshi valemisse (3.1), saame leida tööjõu maksumuse

$$\begin{aligned}C = b&\left(\lambda_1\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)e^{\lambda_1 t}\right)^2 + 2\left(\lambda_1\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)e^{\lambda_1 t}\right)\cdot\\ &\cdot\left(\lambda_2\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}\right)e^{\lambda_2 t}\right) + \left(\lambda_2\left(\frac{\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T}{-e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}\right)e^{\lambda_2 t}\right)^2 + K,\end{aligned}$$

kus λ_1, λ_2 on leitavad seosest (3.16). Praegusel juhul on tegemist olukorraga, kus lõppaeg T pole fikseeritud. Lõppaja määramisel kasutame tingimust

$$H\Big|_{t=T} = 0. \tag{3.24}$$

Kaasmuutuja $\psi(t)$ ja juhtimise $k(t)$ määramiseks kõige pealt me diferentseerime seost (3.18) aja t järgi saame,

$$k = \dot{x} = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.25}$$

Kasutame võrdust (3.11), saame

$$\psi = \frac{2bk}{e^{\varrho t}},$$

asendame võrdusest (3.25) k, siis

$$\psi = 2b\left(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right)e^{-\varrho t}. \tag{3.26}$$

Asendame Hamiltoni funktsioonis (3.8) aja t lõppajaga T, saame seose (3.24) kirjutada kujule

$$\Big(2mx(T) - nx^2(T) - bk^2(T) - K\Big)e^{-\varrho T} + \psi(T)k(T) = 0,$$

millest saame

$$x(T)\Big(2m - nx(T)\Big) = K + k(T)\Big(bk(T) - \psi(T)e^{\varrho T}\Big). \tag{3.27}$$

Nüüd saame avaldada võrrandis (3.27) x, k ja ψ vastavalt seoste (3.18), (3.25), (3.26) abil. Saame, et

$$\left(\frac{m}{n} + C_1e^{\lambda_1 T} + C_2e^{\lambda_2 T}\right)\left(2m - n\left(\frac{m}{n} + C_1e^{\lambda_1 T} + C_2e^{\lambda_2 T}\right)\right) = K + \left(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 T} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 T}\right)$$
$$\left(b\left(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 T} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 T}\right) - 2b\left(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 T} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 T}\right)e^{-\varrho T}e^{\varrho T}\right).$$

Pärast lihtsustamist saame, et

$$\frac{m^2}{n} - n\Big(x_T - \frac{m}{n}\Big)^2 - K + b\left(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 T} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 T}\right)^2 = 0.$$

Asendame konstandid C_1 ja C_2 viimasesse võrrandisse

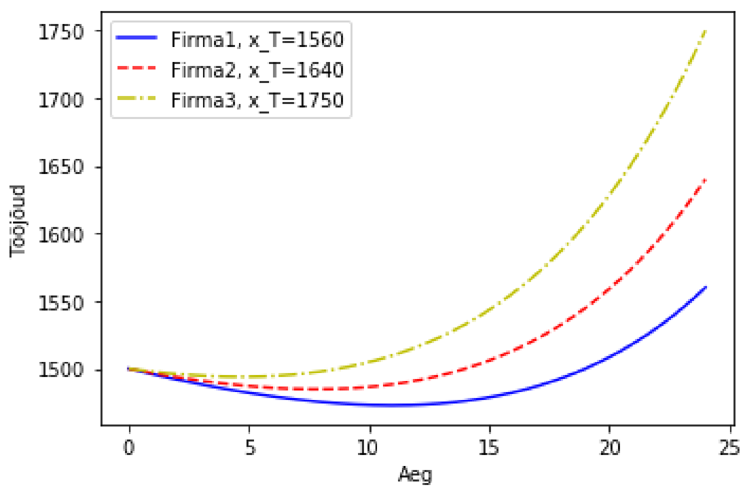
$$\begin{aligned}&\frac{m^2}{n} - n\Big(x_T - \frac{m}{n}\Big)^2 - K + \\ &+ b\left(\frac{\left(\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{n} + x_T\right)\lambda_1e^{\lambda_1 T} + \left(\Big(\frac{m}{n} - x_0\Big)e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{n} + x_T\right)\lambda_2e^{\lambda_2 T}}{-e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}}\right)^2 = 0.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Võrrandit (3.28) on võimalik lahendada numbriliselt etteantud parameetrite m, n, b, K korral. Samuti peab olema teada tööjõu kulu perioodi algul x_0 ning perioodi lõpul x_T. Konstandid λ_1 ja λ_2 on leitavad seosest (3.16).

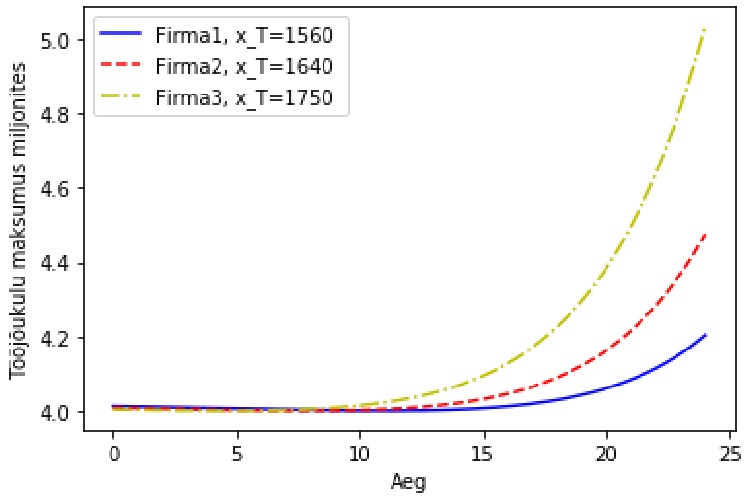
Olgu meil antud kolm ettevõtet, kes soovivad oma tööjõu vajadust tõsta. Kõigil kolmel firmal on stabiilse seisundi korral tööjõukulu maksumus $K = 4$ miljonit ning tööjõukulu perioodi algul $x_0 = 1500$ ja mudeli parameetrid $b = 700$, $m = 3$, $n = 0,3$. On teada, et diskonteerimismäär on $\varrho = 0,1$.

Esimeses firmas on tööjõud perioodi lõpul $x_T = 1560$, teises firmas on tööjõud perioodi lõpul $x_T = 1640$ ja kolmandas firmas on tööjõud perioodi lõpul $x_T = 1750$.

Järgnevalt on kujutatud tulemusi joonistel 1 ja 2. Joonisel 1 on näha tööjõu muutust perioodi jooksul, see tähendab, et algaeg $t = 0$ ning lõppaeg $T = 24$. Joonisel 2 on kujutatud tööjõukulu maksumust miljonites samal perioodil.

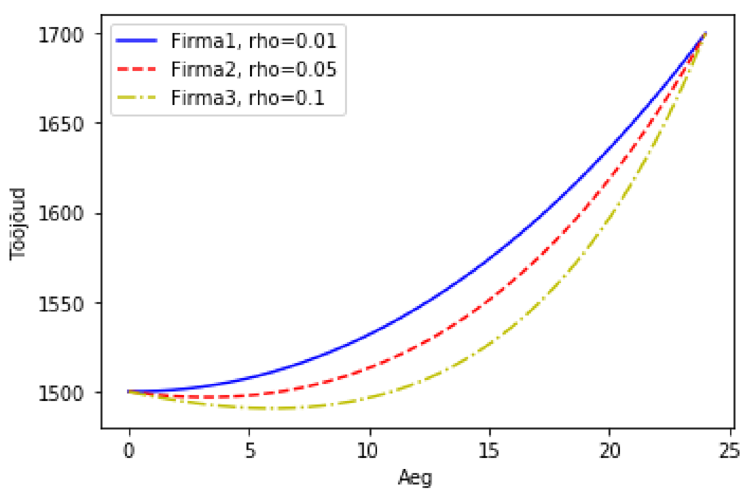


Joonis 1: Optimaalne tööjõu vajadus

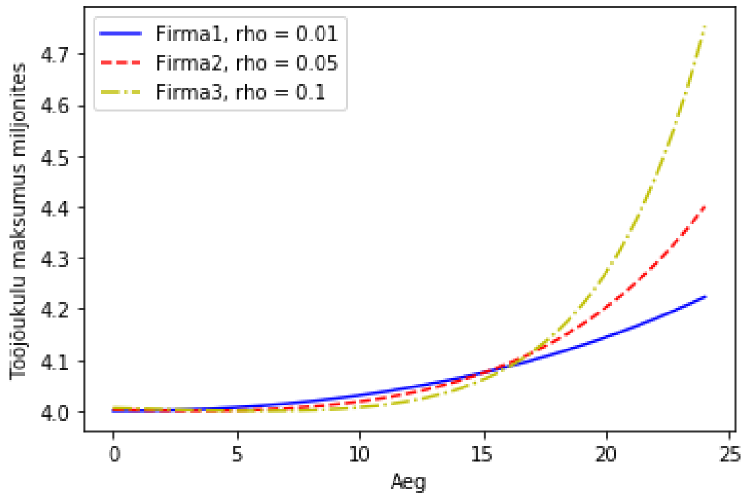


Joonis 2: Optimaalne tööjõukulu maksumus

Teises näites olgu meil samuti kolm ettevõtet, kes soovivad oma tööjõu vajadust tõsta. Mudeli parameetrid on kõigil kolmel $b = 700$, $m = 3$, $n = 0,3$ ning tööjõukulu maksumus stabiilse seisundi korral $K = 4$ miljonit. Lisaks on kõigil kolmel firmal tööjõukulu perioodi algul $x_0 = 1500$ ja perioodi lõpus $x_T = 1700$. Esimesel firmal on diskonteerimismäär $\varrho = 0,01$, teisel firmal $\varrho = 0,05$ ning kolmandal firmal $\varrho = 0,1$. Vastavaid tulemusi on kujutatud joonistel 3 ja 4. Joonisel 3 on näha tööjõu muutust antud perioodil ning joonisel 4 tööjõukulu maksumust samal perioodil.



Joonis 3: Optimaalne tööjõu vajadus



Joonis 4: Optimaalne tööjõukulu maksumus

3.3 Fikseerimata lõppseisuga ülesande lahendamine

Olgu tööjõu vajadus ajahetkel T fikseerimata. Sel juhul jäävad kehtima seosed (3.8) kuni (3.18). Fikseerimata lõpp-punktiga Langrange ülesannete puhul ([2],[4]) on näidatud, et transversaalsuse tingimuste kohaselt

$$\psi(T) = 0,$$

mistõttu nüüd seosest (3.26) saame aja $t = T$ korral

$$C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 T} = -C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 T}. \tag{3.29}$$

Üldlahendist (3.18) saame aja $t = 0$ jaoks

$$x_0 = \frac{m}{n} + C_1 + C_2. \tag{3.30}$$

Seostest (3.29) ja (3.30) saame

$$C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + \Big(- C_1 + x_0 - \frac{m}{n}\Big)\lambda_2 e^{\lambda_2 T} = 0.$$

Seega

$$-C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + C_1\lambda_2 e^{\lambda_2 T} = \Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\lambda_2 e^{\lambda_2 T}.$$

Konstant C_1 avaldub kujul

$$C_1 = \frac{\Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\lambda_2 e^{\lambda_2 T}}{\lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \lambda_1 e^{\lambda_1 T}}.$$

Analoogiliselt seostest (3.29) ja (3.30) saame

$$\Big(-C_2 + x_0 - \frac{m}{n}\Big)\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 T} = 0.$$

Järelikult

$$-C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 T} + C_2\lambda_1 e^{\lambda_1 T} = \Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\lambda_1 e^{\lambda_1 T}.$$

Avaldame konstandi C_2

$$C_2 = \frac{-\Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\lambda_1 e^{\lambda_1 T}}{\lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \lambda_1 e^{\lambda_1 T}}.$$

Saame nüüd üldlahendi kujul

$$x(t) = \frac{m}{n} + \frac{\Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\Big(-\lambda_1 e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 e^{\lambda_2 T} e^{\lambda_1 t}\Big)}{\lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \lambda_1 e^{\lambda_1 T}}.$$

Seega lõppaja määramiseks saame asendame saadud avaldises $t = T$

$$x(T) = \frac{m}{n} + \frac{\Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\Big(-\lambda_1 e^{T(\lambda_1+\lambda_2)} + \lambda_2 e^{T(\lambda_1+\lambda_2)}\Big)}{\lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \lambda_1 e^{\lambda_1 T}}.$$

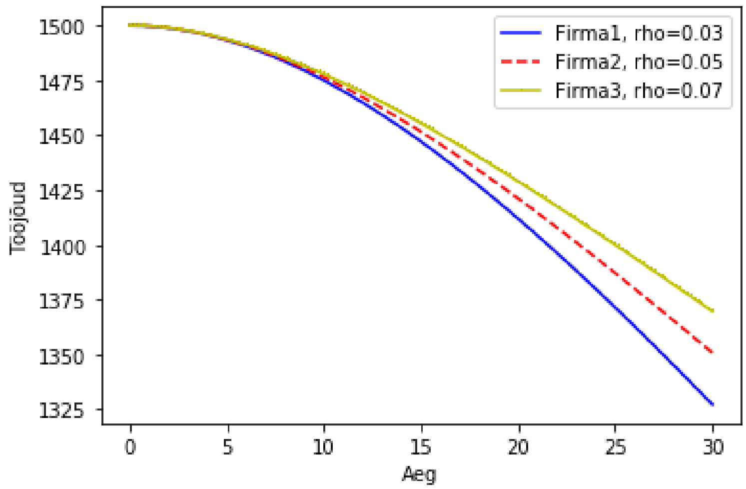
Kuna $\psi(T) = 0$, siis seose (3.11) põhjal ka $k(T) = 0$. Seega seosest (3.27) saame, et

$$x(T)(2m - nx(T)) = K.$$

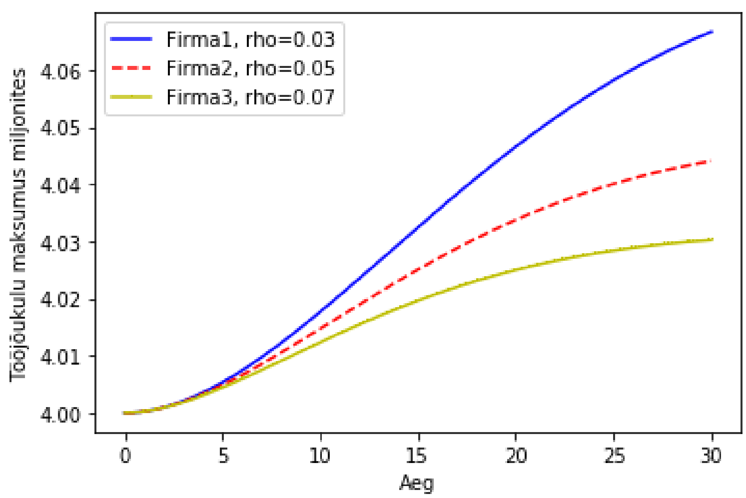
Viimase kahe võrdusega saame määrata optimaalse üleminekuaja T

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{\Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\Big(-\lambda_1 e^{T(\lambda_1+\lambda_2)} + \lambda_2 e^{T(\lambda_1+\lambda_2)}\Big)}{\lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \lambda_1 e^{\lambda_1 T}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(2m - n\left(\frac{m}{n} + \frac{\Big(x_0 - \frac{m}{n}\Big)\Big(-\lambda_1 e^{T(\lambda_1+\lambda_2)} + \lambda_2 e^{T(\lambda_1+\lambda_2)}\Big)}{\lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \lambda_1 e^{\lambda_1 T}}\right)\right) = K.$$

Olgu kolme ettevõtte fikseeritud tööjõu vajadus perioodi algul $x_0 = 1500$. Mudeli konstandid on kõigil $m = 3$, $n = 0,3$, $b = 800$ ja $K = 4$ miljonit. Arvestame, et esimesel firmal on diskonteerimismäär $\varrho = 0,03$, teisel firmal $\varrho = 0,05$ ning kolmandal firmal $\varrho = 0,07$. Järgnevalt on kujutatud tulemusi joonistel 5 ja 6. Joonisel 5 on näha tööjõu vajadust perioodil $T = 0$ kuni $T = 30$. Joonisel 6 on kujutatud tööjõukulu maksumust miljonites samal perioodil.



Joonis 5: Optimaalne tööjõu vajadus



Joonis 6: Optimaalne tööjõukulu maksumus

4 Firma maksimaalne kasum

See peatükk põhineb raamatutel [1] ja [2].

4.1 Ülesande püstitus

Olgu meil vaja maksimiseerida monopoolse ettevõtte kasumit toote hinna P ja tootmismahu Q kaudu. Majandusteadlase Evansi mudeli kohaselt ([1],[2])

$$Q = a - bP(t) + h\dot{P}(t), \tag{4.1}$$

kus $P(t)$ on toote hind, $Q(t)$ toodangu kogus ajaühikus ja a, b, h on antud konstandid ($a, b > 0$, $h \neq 0$). Evans eeldas, et ettevõte kasum on arvutatav valemiga

$$\pi = PQ - \alpha Q^2 - \beta Q - \gamma, \tag{4.2}$$

kus $\alpha Q^2 + \beta Q + \gamma$ on toodangu maksumus ning α, β, γ on mittenegatiivsed konstandid. Analoogiliselt optimaalsele tööjõukulule on ettevõte maksimaalne kasum perioodil leitav funktsionaaliga S. Võrrandi (4.2) järgi saame

$$S = \int_0^T (-PQ + \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma)dt. \tag{4.3}$$

4.2 Fikseeritud lõpphinnaga ülesande lahendamine

Olgu hinnad ajahetkedel $t = 0$ ja $t = T$ antud ehk

$$P(0) = P_0, \quad P(T) = P_T. \tag{4.4}$$

Funktsionaali S maksimumi leidmisel tuleb arvestada lisatingimust (4.1), mille võib kirja panna kujul

$$\dot{P} - \frac{b}{h}P = \frac{Q - \alpha}{h}. \tag{4.5}$$

Ülesandele (4.3) kuni (4.5) vastav Hamiltoni funktsioon on

$$H(P, Q, \psi) = (P - \beta)Q - \alpha Q^2 - \gamma + \psi\Big(\frac{b}{h}P + \frac{Q}{h} - \frac{a}{h}\Big), \tag{4.6}$$

kus kaasmuutuja $\psi = \psi(t)$ rahuldab seost

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial P}.$$

Seega

$$\dot{\psi} = -Q - \frac{b}{h}\psi. \tag{4.7}$$

Ekstreemumi tarvilikust tingimusest ([1],[2])

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

saame võrrandist (4.6)

$$P - \beta - 2\alpha Q + \frac{\psi}{h} = 0, \tag{4.8}$$

kust saame avaldada

$$Q = \frac{P}{2\alpha} + \frac{\psi}{2\alpha h} - \frac{\beta}{2\alpha}. \tag{4.9}$$

Seose (4.9) abil saame võrrandi (4.5) esitada kujul

$$\dot{P} = \frac{P}{h}\Big(b + \frac{1}{2\alpha}\Big) + \frac{\psi}{2\alpha h^2} - \frac{\beta}{2\alpha h} - \frac{a}{h} \tag{4.10}$$

ja (4.7) kujul

$$\dot{\psi} = -\frac{\psi}{h}\Big(b + \frac{1}{2\alpha}\Big) - \frac{P}{2\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha}. \tag{4.11}$$

Süsteemi (4.10) ja (4.11) lahendamiseks diferentseerime (4.10) aja t järgi saame, et

$$\ddot{P} = \frac{\dot{P}}{h}\Big(b + \frac{1}{2\alpha}\Big) + \frac{\dot{\psi}}{2\alpha h^2}. \tag{4.12}$$

Asendades viimasesse võrrandisse suuruse $\dot{P}$ ja kaasmuutuja $\dot{\psi}$ võrduste (4.10) ja (4.11) abil saame nüüd lineaarse konstantsete kordajatega teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{P} - \frac{b+\alpha b^2}{\alpha h^2} P = \frac{a(-1-2\alpha b) - b\beta}{2\alpha h^2}. \tag{4.13}$$

Üldlahend avaldub kujul

$$P = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + P_k, \tag{4.14}$$

kus

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b+\alpha b^2}{\alpha h^2}} \tag{4.15}$$

on vastava homogeense võrrandi lahendamisel saadud karakteristliku võrrandi lahendid. Võrrandis (4.14) on P_k tähistatud diferentsiaalvõrrandi (4.13) üks konkreetne lahend

$$P_k = -\frac{a(-1-2\alpha b) - b\beta}{2b + 2\alpha b^2}. \tag{4.16}$$

Integreerimiskonstandid avaldame rajatingimuste (4.4) kaudu järgmiselt

$$C_1 = \frac{P_0 - P_k - e^{\lambda_1 T}(P_T - P_k)}{1 - e^{2\lambda_1 T}} \tag{4.17}$$

ning

$$C_2 = \frac{P_0 - P_k - e^{\lambda_2 T}(P_T - P_k)}{1 - e^{2\lambda_2 T}}. \tag{4.18}$$

Saadud võrranditest (4.14) kuni (4.18) saame avaldada hinna $P(t)$ nii, et ajahetkel T on kasum maksimaalne.

Olgu mudeli konstandid $\alpha = \frac{1}{10}, \beta = 0, \gamma = 1000, a = 160, b = 8, h = 100.$
Siis

$$Q = 160 - 8P(t) + 100\dot{P}(t)$$

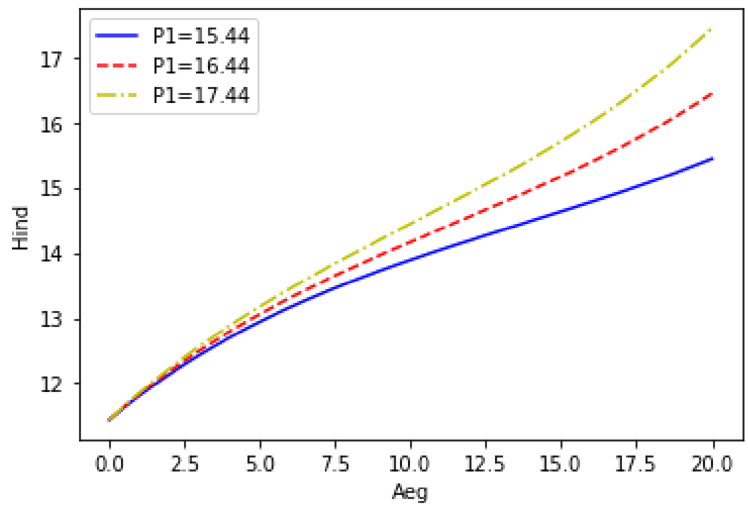
ja

$$\pi = -1000\dot{P}^2(t) + 260\dot{P}(t)P(t) - 3200\dot{P}(t) - \frac{72P^2(t)}{5} + 416P - 3560.$$

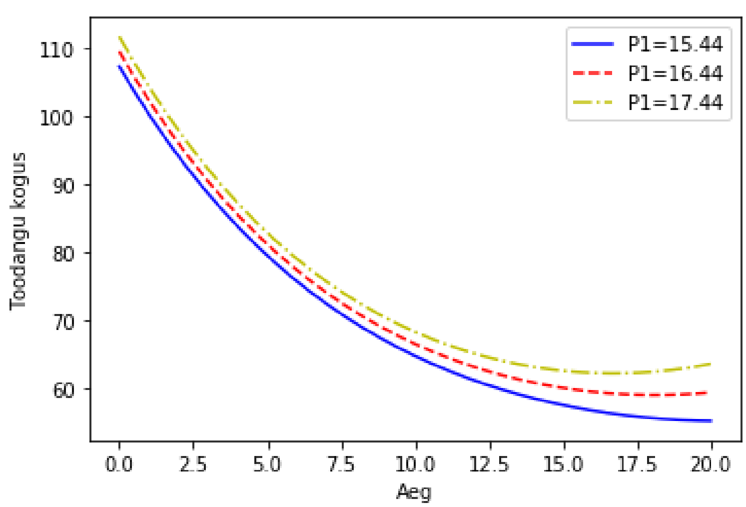
Siis optimaalne hind $P(t)$ avaldub

$$P(t) = C_1 e^{0{,}12t} + C_2 e^{-0{,}12t} + 14\frac{4}{9}.$$

Joonistel 7 ja 8 on kujutatud optimaalsed toote hinnad ja kogused, kui alghind $P_0 = 11\frac{4}{9}$, lõppaja $T = 20$ korral. Lõpphinnad on vastavalt $P_T = 15\frac{4}{9}$, $P_T = 16\frac{4}{9}$, ja $P_T = 17\frac{4}{9}$.



Joonis 7: Optimaalne toote hind



Joonis 8: Optimaalne toote kogus

4.3 Fikseerimata lõpphinnaga ülesande lahendamine

Kui hind P on ajahetkel T fikseerimata, siis just nagu optimaalse tööjõukulu puhul, on ka siin vastavaks traversaalsusese tingimuseks

$$\psi(T) = 0, \tag{4.19}$$

kus $\psi = \psi(t)$ on kaasmuutuja. Kaasmuutuja rahuldab kaasvõrrandit (4.11) ning võrrandit (4.10). Saame seosest (4.10) avaldada

$$\psi = 2\alpha h^2 \left(\dot{P} - \frac{P}{h} \left(b + \frac{1}{2\alpha} \right) \right) + \beta h + 2\alpha a h. \tag{4.20}$$

Võtame tuletise aja t järgi üldlahendist (4.14)

$$\dot{P} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{4.21}$$

kus λ on võimalik leida seosest (4.15). Asendades võrrandisse (4.20) hinna P üldlahendist (4.14) ning selle tuletise $\dot{P}$ võrrandist (4.21), saame

$$\psi = 2\alpha h^2 \left(\left(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \right) - \frac{P_k + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}{h} \left(b + \frac{1}{2\alpha} \right) \right) + \beta h + 2\alpha a h. \tag{4.22}$$

Viimasest võrdusest (4.22) ning transversaalsuse tingimusest (4.19) saame võrrandi

$$2\alpha h^2 \left(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 T} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 T} \right) + \beta h + 2\alpha a h = \left(P_k + C_1 e^{\lambda_1 T} + C_2 e^{\lambda_2 T} \right) \left(2\alpha h b + h \right). \tag{4.23}$$

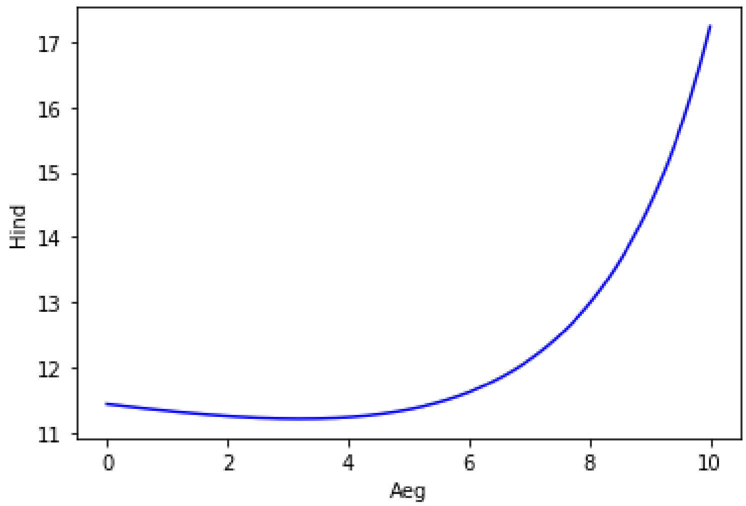
Teame seosest (4.4), et $P(0) = P_0$. Kasutades seda seost üldlahendis (4.14) jõuame võrduseni

$$P_0 = P_k + C_1 + C_2. \tag{4.24}$$

Avaldame konstandid C_1 ja C_2 võrdustest (4.23) ning (4.24), saame optimaalse hinna avaldise, mis annab maksimaalse kasumi lõpphetkeks T. Eelmises punktis toodud konstantide $\alpha = \frac{1}{10}, \beta = 0, \gamma = 1000, a = 160, b = 8, h = 100$ korral kehtib

$$P(t) = C_1 e^{0{,}12t} + C_2 e^{-0{,}12t} + 14\frac{4}{9}.$$

Joonisel 9 on kujutatud optimaalne toote hind, kui alghind $P_0 = 11\frac{4}{9}$. Lõpphind tuleb lõppaja $T = 10$ korral vastavalt $P_T = 17{,}26$.



Joonis 9: Optimaalne toote hind

5 Kasutatud kirjandus

[1] A. C. Chiang, *Elements of Dynamic Optimization.* Waveland Pr Inc, London, 1999.

[2] J. Lellep, *Süsteemide optimeerimine.* Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu, 2013.

[3] A. Pedas ja G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid.* Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu, 2011.

[4] M. I. Kamien ja N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and management.* Elsevier Science, Amsterdam, 1991.

[5] D. S. Hamermesh, *Labor Demand.* Princeton University Press, Princeton, 1996.

6 Lisad

6.1 Optimaalse tööjõukulu fikseeritud lõppseisuga ülesanne Jupyter Notebookis

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rcParams
from sympy import *
from math import *
init_printing()
```

In [2]:
```
t=Symbol('t',positive=True) #algaeg
T=Symbol('T',positive=True) #lõppaeg
b=Symbol('b')    # parameeter
m=Symbol('m')    # parameeter
n=Symbol('n')    # parameeter
rho=Symbol('rho') # diskonteerimismäär
K=Symbol('K')  #parameeter
C=Function('C',real=True) #tööjõukulu maksumus
x=Function('x',real=True)  #tööjõukulu
```

In [3]:
```
dv1=Eq(x(t).diff(t,2)-rho*x(t).diff(t,1)-(n*x(t))/b+m/b) #kirjutame välja dif võrrandi
dv1
```

Out[3]:

$$-\rho\frac{d}{dt}x(t)+\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\frac{m}{b}-\frac{nx(t)}{b}=0$$

In [4]:
```
üld=dsolve(dv1,x(t)) #lahendame dif võrrandi
üld
```

Out[4]:

$$x(t)=C_1e^{\frac{t\left(\rho-\frac{\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}\right)}{2}}+C_2e^{\frac{t\left(\rho+\frac{\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}\right)}{2}}+\frac{m}{n}$$

In [5]:
```
var('x0,xT,C1,C2')
avaldis=üld.rhs
algtingimus=Eq(avaldis.subs(t,0),x0),Eq(avaldis.subs(t,T),xT) #algtingimused
algtingimus
```

Out[5]:

$$\left(C_1+C_2+\frac{m}{n}=x_0,\ C_1e^{\frac{T\left(\rho-\frac{\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}\right)}{2}}+C_2e^{\frac{T\left(\rho+\frac{\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}\right)}{2}}+\frac{m}{n}=xT\right)$$

In [6]:
```
konstant=solve(algtingimus,(C1,C2)) #avaldame konstandid
konstant
```

Out[6]:

$$\left\{C_1:-\frac{\left((m-nx_0)\,e^{\frac{T\left(b\rho+2\sqrt{b(b\rho^2+4n)}\right)}{2b}}-(m-nxT)\,e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{2b}}\right)e^{-\frac{T\rho}{2}}}{n\left(e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}}-1\right)},\ C_2:\frac{\left((m-nx_0)\,e^{\frac{T\rho}{2}}-(m-nxT)\,e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{2b}}\right)e^{-\frac{T\rho}{2}}}{n\left(e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}}-1\right)}\right\}$$

```
In [7]: erilahend=üld.subs(konstant) #leiame erilahendi
        erilahend
```

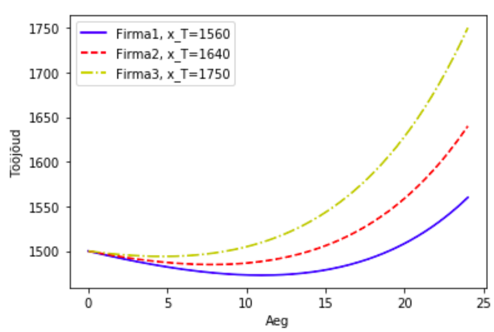
Out[7]:

$$x(t) = \frac{m}{n} + \frac{\left((m - nx_0)\, e^{\frac{T\rho}{2}} - (m - nxT)\, e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{2b}}\right) e^{-\frac{T\rho}{2}}\, e^{\frac{t\left(\rho + \frac{\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}\right)}{2}}}{n\left(e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}} - 1\right)} - \frac{\left((m - nx_0)\, e^{\frac{T\left(b\rho+2\sqrt{b(b\rho^2+4n)}\right)}{2b}} - (m - nxT)\, e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{2b}}\right) e^{-\frac{T\rho}{2}}\, e^{\frac{t\left(\rho - \frac{\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}\right)}{2}}}{n\left(e^{\frac{T\sqrt{b(b\rho^2+4n)}}{b}} - 1\right)}$$

```
In [8]: #asendame parameetrid konkreetsete väärtustega
        pop=erilahend.subs("rho",0.1).subs(m,3).subs(n,0.3).subs(b,700).subs(x0,1500).subs(xT,1560).subs(T,24) #Firma1
        pop2=erilahend.subs("rho",0.1).subs(m,3).subs(n,0.3).subs(b,700).subs(x0,1500).subs(xT,1640).subs(T,24)#Firma2
        pop3=erilahend.subs("rho",0.1).subs(m,3).subs(n,0.3).subs(b,700).subs(x0,1500).subs(xT,1750).subs(T,24)#Firma3

        pop
```

Out[8]: $x(t) = 17.7733695293559e^{0.104116276928217t} + 10.0 + 1472.22663047064e^{-0.00411627692821661t}$

```
In [9]: p=lambdify(t,pop.rhs) #vastav joonis
        c=lambdify(t,pop2.rhs)
        d=lambdify(t,pop3.rhs)
        W=np.linspace(0,24,161)
        P=np.linspace(0,24,161)
        Q=np.linspace(0,24,161)
        plt.plot(W,p(W),"b-", label="Firma1, x_T=1560")
        plt.plot(P,c(P),"r--", label="Firma2, x_T=1640")
        plt.plot(Q,d(Q),"y-.", label="Firma3, x_T=1750")
        plt.xlabel("Aeg")
        plt.ylabel("Tööjõud")
        legend=plt.legend()
        plt.show()
```



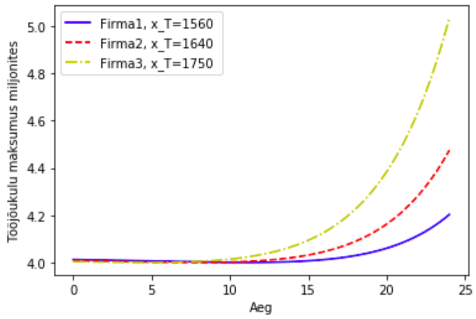

```
In [10]: pops=pop.rhs.diff(t,1) #tuletis
         pops2=pop2.rhs.diff(t,1)
         pops3=pop3.rhs.diff(t,1)

         pops
```

Out[10]: $1.85049706386595e^{0.104116276928217t} - 6.06009251211238e^{-0.00411627692821661t}$

```
In [11]: 
         avaldis2=Eq((b*(pops**2)+K),C(t))  #asendame Hamermeshi valemisse
         avaldis22=Eq((b*(pops2**2)+K),C(t))
         avaldis23=Eq((b*(pops3**2)+K),C(t))
         #asendame parameetrid konkreetsete väärtustega
         aval=avaldis2.subs(b,0.0007).subs(K,4)
         aval2=avaldis22.subs(b,0.0007).subs(K,4)
         aval3=avaldis23.subs(b,0.0007).subs(K,4)

         aval
```

Out[11]: $0.0007\left(1.85049706386595e^{0.104116276928217t} - 6.06009251211238e^{-0.00411627692821\,66t}\right)^2 + 4 = C(t)$

In [12]:
```
p=lambdify(t,aval.lhs) #tööjõukulu maksumuse joonis
c=lambdify(t,aval2.lhs)
d=lambdify(t,aval3.lhs)

W=np.linspace(0,24,161)
P=np.linspace(0,24,161)
Q=np.linspace(0,24,161)

plt.plot(W,p(W),"b-", label="Firma1, x_T=1560 ")
plt.plot(P,c(P),"r--", label="Firma2, x_T=1640 ")
plt.plot(Q,d(Q),"y-.", label="Firma3, x_T=1750 ")
plt.xlabel("Aeg")
plt.ylabel("Tööjõukulu maksumus miljonites")
legend=plt.legend()
plt.show()
```



6.2 Optimaalse tööjõukulu fikseerimata lõppseisuga ülesanne Jupyter Notebookis

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rcParams
from sympy import *
from math import *
init_printing()
```

In [2]:
```
t=Symbol('t',positive=True) #algaeg
T=Symbol('T',positive=True) #lõppaeg
b=Symbol('b')    # parameeter
m=Symbol('m')    # parameeter
n=Symbol('n')    # parameeter
rho=Symbol('rho') # diskonteerimismäär
K=Symbol('K')  #parameeter
C=Function('C',real=True) #tööjõukulu maksumus

x=Function('x',real=True)  #tööjõud
var('x0,x_T,C1,C2')
```

Out[2]: $(x_0,\ x_T,\ C_1,\ C_2)$

In [3]:
```
dv1=Eq(x(t).diff(t,2)-rho*x(t).diff(t,1)-(n*x(t))/b+m/b) #difvõrrand
dv1
```

Out[3]:

$$-\rho\frac{d}{dt}x(t)+\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\frac{m}{b}-\frac{nx(t)}{b}=0$$

In [4]:
```
üld=dsolve(dv1,x(t)) #üldlahend
üld
```

Out[4]:

$$x(t)=C_1e^{\frac{t\left(\rho-\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}+C_2e^{\frac{t\left(\rho+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}+\frac{m}{n}$$

In [5]:
```
pop=üld.rhs.diff(t,1) #tuletis
pop
```

Out[5]:

$$C_1\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{2b}\right)e^{\frac{t\left(\rho-\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}+C_2\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{2b}\right)e^{\frac{t\left(\rho+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}$$

In [6]:
```
algtingimus=Eq(pop,0),Eq(x0,m/n +C1+C2) #tingimused
algtingimus
```

Out[6]:

$$\left(C_1\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{2b}\right)e^{\frac{t\left(\rho-\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}+C_2\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{2b}\right)e^{\frac{t\left(\rho+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}=0,\ x_0=C_1+C_2+\frac{m}{n}\right)$$

In [7]:
```
konstant=solve(algtingimus,(C1,C2)) #avaldame konstandid
konstant
```

Out[7]:

$$\left\{C_1:\frac{\left(m-nx_0\right)\left(b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\left(-\rho+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}+\frac{b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}}{n\left(b\rho-\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}-\left(b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}}\right)},\ C_2:\frac{\left(m-nx_0\right)\left(b\rho-\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)}{n\left(-b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}+\left(b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}}\right)}\right\}$$

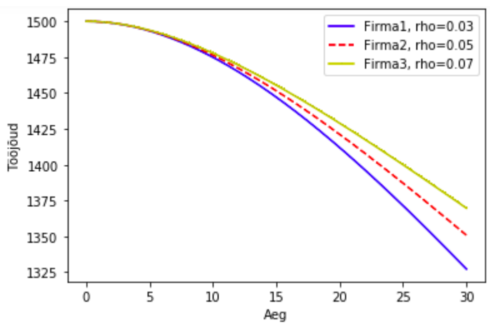
In [8]:
```
erilahend=üld.subs(konstant) #leiame erilahendi
erilahend
```

Out[8]:

$$x(t)=\frac{m}{n}+\frac{\left(m-nx_0\right)\left(b\rho-\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\left(\rho+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}}{n\left(-b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}+\left(b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}}\right)}+\frac{\left(m-nx_0\right)\left(b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\left(\rho-\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}\right)}{2}}e^{\frac{t\left(-\rho+\frac{\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}}{b}+\frac{b\rho+}{}\right.}{2}}}{n\left(b\rho-\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}-\left(b\rho+\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right)}\right)e^{\frac{t\sqrt{b\left(b\rho^2+4n\right.}}{b}}\right.}$$

In [9]:
```
eri=erilahend.subs("rho",0.03).subs(m,3).subs(n,0.3).subs(b,800).subs(x0,1500) #asendame parameetrid konkreetsete väärt
eri2=erilahend.subs("rho",0.05).subs(m,3).subs(n,0.3).subs(b,800).subs(x0,1500)
eri3=erilahend.subs("rho",0.07).subs(m,3).subs(n,0.3).subs(b,800).subs(x0,1500)
```

In [10]:
```
p=lambdify(t,eri.rhs) #tööjõu vajaduse joonis
s=lambdify(t,eri2.rhs)
v=lambdify(t,eri3.rhs)
W=np.linspace(0,30,161)
plt.plot(W,p(W),"b-",label="Firma1, rho=0.03")
plt.plot(W,s(W),"r--",label="Firma2, rho=0.05")
plt.plot(W,v(W),"y-,",label="Firma3, rho=0.07")
plt.xlabel("Aeg")
plt.ylabel("Tööjõud")
legend=plt.legend()
plt.show()
```



In [11]:
```
pops=eri.rhs.diff(t,1) #tuletis
pops2=eri2.rhs.diff(t,1)
pops3=eri3.rhs.diff(t,1)
pops
```

Out[11]:

$$\frac{894.0e^{0.0394948974278318t}}{63.1918358845308e^{0.0489897948556636t}+15.1918358845308}-\frac{70075.0025615411e^{0.0884846922834953t}}{\left(63.1918358845308e^{0.0489897948556636t}+15.1918358845308\right)^2}-\frac{3718.67506403853e^{0.0394948974278318t}}{-63.1918358845308e^{0.0489897948556636t}-15.1918358845308}-\frac{291483.405635391e^{0.0884846922834953t}}{\left(-63.1918358845308e^{0.0489897948556636t}-15.1918358845308\right)^2}$$

In [12]:
```
avaldis=Eq((b*(pops**2)+K),C(t)) #asendame Hamermeshi valemisse
avaldis2=Eq((b*(pops2**2)+K),C(t))
avaldis3=Eq((b*(pops3**2)+K),C(t))
aval=avaldis.subs(b,0.0008).subs(K,4)
aval2=avaldis2.subs(b,0.0008).subs(K,4)
aval3=avaldis3.subs(b,0.0008).subs(K,4)
aval
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Erki Kuus,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Optimaalse juhtimise rakendusi majanduses", mille juhendaja on kaasprofessor Ella Puman, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Erki Kuus

14.06.2021