

ABSTRACT

This article presents the manner to obtain explicit formulas under specific conditions, or using Newton polynomial interpolation, in continuous time, to approximate the probability of failure in the case of risk within the framework of a collective risk model when the amounts of the claims have a distribution of phase type.

KEY WORDS:

probability of failure; distributions of phase type; Newton polynomial interpolator; stochastic process; risk.

RÉSUMÉ

Dans cet article est présente la manière d'obtenir formules explicites dans des conditions spéciales ou par l'intermédiaire de polynômes interpoladores de Newton pour rapprocher la probabilité de la ruine dans le cas de risque à temps continu dans le cadre d'un modèle de risque collectif lorsque les montants des réclamations ont une distribution de type phase.

Mots clés:

probabilité de la ruine; distributions type phase; polynôme interpolador; processus stochastique; processus de risque

Interpolación de la probabilidad de ruina con reclamaciones tipo fase, usando polinomios de Newton

Interpolation of failure probability with phase type claims, using Newton polynomials

Interpolation de la probabilité de la ruine avec réclamations type phase, utilisant polynômes de Newton

ROJAS-SEVILLA SANDRA
Corporación Universitaria del Caribe CECAR
Colombia
saga0810@hotmail.com

SALCEDO-GARCÍA LEIDER
Universidad del Magdalena
Colombia

ZULUAGA-DÍAZ FRANCISCO
Universidad EAFIT
Colombia
fzulug2@eafit.edu.co

RESUMEN

En este artículo se presenta la manera de obtener fórmulas explícitas bajo condiciones especiales o por medio de polinomios interpoladores de Newton para aproximar la Probabilidad de Ruina en el caso de riesgo a tiempo continuo en el marco de un Modelo de Riesgo Colectivo cuando los montos de las reclamaciones tienen una distribución de Tipo Fase.

PALABRAS CLAVE:

probabilidad de ruina; distribuciones tipo fase; polinomio interpolador; proceso estocástico; proceso de riesgo.

Introducción

La probabilidad de ruina es una medida del riesgo; este se utiliza para describir sucesos desconocidos con cierto nivel de incertidumbre. Para las compañías aseguradoras saber medirlo adecuadamente es de vital importancia para su perduración. En el marco de la teoría de riesgo existen dos tipos de teorías; la *teoría del riesgo individual*, y la *teoría del riesgo colectivo*, siendo la probabilidad de ruina de una compañía, uno de los problemas más estudiados en la teoría de riesgo.

En 1903 *Filip Lundberg* introdujo un modelo para estudiar este fenómeno, denominado el *modelo clásico de riesgo*, y que gracias a las investigaciones que realizó posteriormente *Carl Cramér* en 1930, es más conocido como el *modelo clásico de Cramér-Lundberg*, es el proceso estocástico a tiempo continuo $\{C_t\}_{t \geq 0}$ dado por $C_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, donde u representa el capital inicial de la aseguradora, pt corresponde a la entrada por primas durante el periodo $(0, t]$ a una tasa constante $p > 0$ y las Y_i son el monto de las reclamaciones independientes, idénticamente distribuidas (i.i.d) e independientes del proceso de Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$, el cual modela la forma en la que las reclamaciones son recibidas, donde N_t es el número de siniestros ocurridos en $(0, t]$. El proceso $\{C_t\}_{t \geq 0}$ recibe el nombre de *proceso de riesgo* o *proceso de superávit*.

Existen varios métodos para calcular la probabilidad de ruina, pero esto demanda una complejidad analítica que conlleva el uso por lo general de métodos numéricos, tal como se afirma en Escalante y Arango, (2004), ya que involucra resolver una ecuación íntegro diferencial (que se exhibe en la sección 2.4), la cual es soluble cuando las reclamaciones se distribuyen tipo fase.

Este trabajo trata sobre el cálculo exacto de la Probabilidad de Ruina, obteniendo fórmulas explícitas cuando los parámetros $\boldsymbol{\pi}$ y \mathbf{T} tienen dimensiones pequeñas y en caso contrario, se deben aplicar polinomios interpoladores que permitan aproximar tal probabilidad para cualquier capital inicial; en caso de riesgo a tiempo continuo, en el marco de un modelo de riesgo colectivo cuando los montos de las reclamaciones tienen una distribución de tipo fase, tomando como fundamentación teórica lo expuesto por *Mogens Bladt* (2010), elementos teóricos de *Asmussen y Rolski* (1992) y también *Dickson y Hipp* (1998).

Se presenta brevemente el modelo de riesgo colectivo, luego se estudian en detalle las distribuciones tipo fase continuas y finalmente se realizan las aplicaciones correspondientes a través de fórmulas explícitas que permiten el cálculo exacto de la probabilidad de ruina siempre y cuando la distribución de las reclamaciones y los parámetros $\boldsymbol{\pi}$ y \mathbf{T} estén dados, en la medida que no exijan cálculos matriciales complejos, y en caso contrario, se aporta un método implementando polinomios de aproximación de Newton que permite interpolar una tabla de valores de la probabilidad de ruina generada por un código en R, para obtener fórmulas explícitas que facilite calcular tal probabilidad para cualquier capital inicial en un intervalo dado.

RIESGO Y PROBABILIDAD DE RUINA

El *riesgo* es la posibilidad de experimentar ciertos eventos de interés y las consecuencias derivadas de dichos eventos. En seguros, el riesgo es el monto de las reclamaciones totales de los asegurados. En general la forma en la que opera un seguro es la siguiente: un grupo de personas reconocen que están expuestas a sufrir algún tipo de siniestro que puede causarles efectos

irreparables. Al contratar un seguro, cada una de estas personas paga por adelantado una cantidad de dinero llamada *prima* a una compañía aseguradora, quien se compromete a indemnizar monetariamente a todas aquellas personas aseguradas que sufrieron algún siniestro durante el tiempo de vigencia del seguro. Es claro que el número de siniestros, los momentos en los que estos se presentan y el monto de las reclamaciones son variables aleatorias. Los siguientes referentes teóricos fueron tomados de Rincón (2012), Dickson D. (2005), Tse Y. (2009), y Asmussen y Albrecher (2010).

Modelo colectivo

Considérese un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo $(0, t]$. Sea N la variable aleatoria que denota el número de reclamaciones ocurridas en $(0, t]$ y sean las variables positivas Y_1, \dots, Y_N los montos de estas reclamaciones.

Definición 2.1.1. *El monto agregado o monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria S , llamada riesgo, y está definida como sigue:*

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i, \quad (1)$$

donde Y_1, \dots, Y_N es una colección de variables aleatorias positivas i.i.d e independientes de la variable aleatoria N con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$. Cuando $N = 0$ se define S como cero. La ecuación (1) representa el modelo colectivo para contratos de seguros.

Modelo clásico de Cramér-Lundberg

A continuación se presenta una versión a tiempo continuo del proceso de riesgo conocido como el modelo clásico de

Cramér-Lundberg, el cual es el proceso estocástico a tiempo continuo $\{C_t\}_{t \geq 0}$ dado por:

$$C_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (2)$$

donde la constante positiva u representa el capital inicial de la compañía aseguradora, pt corresponde al ingreso por primas durante el periodo $(0, t]$ a una tasa constante $p > 0$, Y_1, Y_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias no negativas, i.i.d e independientes del proceso de Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ de parámetro λ el cual modela la forma en la que las reclamaciones son recibidas, Y_i es el monto de la i -ésima reclamación y N_t es el número de siniestros ocurridos en $(0, t]$. El proceso descrito en (2) recibe el nombre de *proceso de riesgo* o *proceso de superávit* y C_t es el excedente de la compañía aseguradora.

Condición de ganancia neta

Una condición necesaria para la solvencia de la compañía aseguradora es que $p > \lambda\mu$, donde $E(Y_i) = \mu$. La desigualdad anterior se denomina *condición de ganancia neta* y significa que la entrada por primas por unidad de tiempo P , es mayor que la intensidad de la llegada de los reclamos por el valor esperado de estos últimos, es decir $\lambda\mu$, para poder cubrir todas las reclamaciones sin tener pérdidas, esto significa que $E(C_t) = \mu$ a medida que $t \rightarrow \infty$.

Ruina

Es necesario que C_t permanezca por encima de cierto nivel mínimo a , con $0 < a < u$. Suponiendo un nuevo capital inicial de magnitud $u - a$, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que este nivel mínimo es cero. De esta forma cuando $C_t < 0$ para algún $t > 0$ se dice que hay ruina.

Definición 2.4.1. Se dice que el proceso de riesgo se encuentra en ruina al tiempo $t > 0$ si $C_t < 0$ y se define el tiempo de ruina τ como el primer momento en que la ruina se presenta, es decir, $\tau = \inf\{t > 0 : C_t < 0\}$. Se denota la probabilidad de ruina con horizonte infinito en el modelo de Cramér-Lundberg como $\varphi(u)$ y se define $\varphi(u) = P(\tau < \infty | C_0 = u)$. Además dado un valor $x > 0$ fijo, la probabilidad de ruina en el intervalo $(0, x]$ o también llamada probabilidad de ruina con horizonte finito es $\bar{\varphi}(u, x) = P(\tau \leq x | C_0 = u)$.

Se presentan a continuación dos resultados generales sobre la probabilidad de ruina con horizonte infinito y finito respectivamente. A la fórmula explícita para $\bar{\varphi}(0, x)$ y a la ecuación integral para $\bar{\varphi}(u, x)$ que aparecen en el segundo resultado se les conoce como fórmulas de Seal.

Proposición 2.4.1. Supóngase que la función de distribución $F(y)$ de una reclamación en el modelo de Cramér-Lundberg es continua. Entonces:

1. $\frac{d}{du} \bar{\varphi}(u) = \frac{\lambda}{p} \left(\varphi(u) - \int_0^u \bar{\varphi}(u-y) dF(y) \right)$
2. $\varphi(0) = \frac{\lambda \mu}{p}$
3. $\varphi(u) = \frac{\lambda}{p} \left(\int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^u \varphi(u-y) \bar{F}(y) dy \right)$

donde F es la función de distribución de Y , $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$ y $\bar{\varphi}(u) = 1 - \varphi(u)$

Proposición 2.4.2. Considérese el proceso de riesgo de Cramér-Lundberg $C_t = u + pt - S_t$, donde $S_t = \sum_{i=1}^N Y_i$. Supóngase que las reclamaciones tienen distribución absolutamente continua con función de densidad $f(y)$ y defínase la función:

$$\tilde{f}_{S_t}(y) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} f^{*n}(y)$$

Entonces:

1. $F_{S_t}(x) = e^{-\lambda t} + \int_0^x \tilde{f}_{S_t}(y) dy, x \geq 0.$

2. $\bar{\varphi}(0, x) = \frac{1}{px} \int_0^{px} F_{S_t}(y) dy$

3. $\frac{\partial}{\partial u} \bar{\varphi}(u, x) = \frac{\lambda}{p} \left(\bar{\varphi}(u, x) - \int_0^u \bar{\varphi}(u-y, x) dF(y) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\varphi}(u, x) \right)$

4. $\bar{\varphi}(u, x) = F_{S_t}(u + px) - p \int_0^x \bar{\varphi}(0, x-y) \tilde{f}_{S_t}(u + py) dy$

donde F es la función de distribución de Y , F_{S_t} es la función de distribución de S_t y $\bar{\varphi}(u, x) = 1 - \varphi(u, x)$.

Una demostración rigurosa de los dos resultados anteriores puede encontrarse en Rincón (2012).

Distribuciones tipo fase continuas

Estas distribuciones son una de las pocas formas exactas computacionalmente tratables para obtener la probabilidad de ruina $\varphi(u)$. Su definición se genera a partir de los procesos de Markov de saltos. En Bladta & Bo Friis (2010) se considera un proceso de Markov de saltos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, d, d+1\}$, tal que los estados $1, 2, \dots, d$ son transitorios y el estado $d+1$ es absorbente. Por lo tanto el proceso tiene una matriz de intensidad o generador infinitesimal de la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{T} es una matriz de tamaño $d \times d$ de subintensidades, $\mathbf{0}$ es un vector fila de dimensión d y \mathbf{t} es un vector columna de dimensión d , el cual contiene las tasas de salida al estado de absorción. Como las sumas de las filas de Q deben ser cero, entonces $\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e}$, donde \mathbf{e} es el vector columna de dimensión d cuyos elementos son todos 1. Supóngase que $P(X_0 = d+1) = 0$ y sea $\pi_i = P(X_0 = i)$ la distribución inicial para el proceso, con $i = 1, \dots, d$ y $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_d)$. Supóngase que $\tau = \inf\{t > 0 : X_t = d+1\}$ es el tiempo hasta que se da la absorción.

Definición 3.1. Una distribución tipo fase es la distribución del tiempo hasta que se da la absorción (tiempo de paro) $\tau = \inf\{t > 0 : X_t = d + 1\}$ para un proceso de Markov de saltos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, d, d + 1\}$, donde los estados $1, 2, \dots, d$ son transitorios y $d + 1$ es absorbente. Lo anterior se simboliza $\tau \sim PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$.

Ejemplos de distribuciones tipo fase continuas

Los siguientes ejemplos fueron tomados de Rincón (2012) y Bladt (2005).

Distribución exponencial

Supóngase que $d = 1$ y $\mathbf{T} = t_{11} = -\beta$. Entonces $\boldsymbol{\pi} = \pi_1 = 1$, $\mathbf{t} = t_1 = \beta$ y la distribución tipo fase es el tiempo de vida de una partícula con tasa de fallos constante β . El correspondiente generador infinitesimal de la cadena de Markov a tiempo continuo que produce el tiempo de espera hasta la absorción exponencial de parámetro β es:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Distribución Erlang

Sea X_1, \dots, X_d variables aleatorias independientes con $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$ y sea $S = X_1 + \dots + X_d$. Como $S \sim \text{Gamma}(d, \beta)$, entonces S tiene distribución Erlang con d fases definida como la distribución Gamma con parámetro entero d y densidad:

$$f_S(x) = \beta^d \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} e^{-\beta x},$$

la cual es una convolución de d densidades exponenciales con el mismo parámetro β .

Luego S puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con d estados transitorios. Entonces S tiene una distribución tipo fase con representación $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, \dots, 0)$ de dimensión d y además:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -\beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Distribución hipereexponencial

Considérese X_1, \dots, X_d variables aleatorias independientes con $X_i \sim \text{Exp}(\beta_i)$ y f_i la correspondiente densidad exponencial. Sea:

$$M = \sum_{i=1}^d \alpha_i f_i(x),$$

donde $\alpha_i > 0$ y $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$. Dado que M es una mezcla de d distribuciones exponenciales con parámetros β_1, \dots, β_d , entonces M tiene una distribución hipereexponencial con d canales paralelos de tal manera que:

$$M = \sum_{i=1}^d \alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x}.$$

M también puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con d estados transitorios. Entonces M tiene una distribución tipo fase con representación $\boldsymbol{\pi} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de dimensión d y además:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -\beta_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_d \end{bmatrix}, \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \\ \beta_d \end{bmatrix}$$

Modelo clásico de Cramér-Lundberg con reclamaciones tipo fase

Considérese un proceso de riesgo:

$$C_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

donde Y_1, Y_2, \dots son i.i.d con distribución $PH_d(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$ de dimensión d . Es importante para los objetivos del artículo, el cálculo de la probabilidad de ruina $\varphi(u) = P(\inf_{t \geq 0} C_t < 0 | C_0 = u)$. Para tal efecto en lugar del proceso de riesgo, es común considerar el proceso de superávit de reclamaciones $S_t = u - C_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i - pt$. Entonces la probabilidad de ruina se puede escribir como:

$$\varphi(u) = P(\sup_{t \geq 0} S_t > u).$$

El siguiente resultado se tomó de Bladta & Bo Friis (2010), en el cual también se puede encontrar su demostración.

Teorema 3.2.1. La probabilidad de ruina está dada por:

$$\varphi(u) = \nu e^{(\mathbf{T} + t\nu)u} \mathbf{e}$$

donde $\nu = \lambda \boldsymbol{\pi} \mathbf{T}^{-1}$

APLICACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección primero se presentan ejemplos detallados para el monto de las reclamaciones con distribuciones Exponenciales, Hiperexponenciales, Erlang y Erlang(2); bajo condiciones especiales, es decir, cuando los parámetros son pequeños, Sin embargo demandan cálculos matriciales extensos y algunas veces complicados. En la segunda parte del capítulo se presenta la interpolación polinómica de Newton, para el caso en que los parámetros no son pequeños, siendo que es casi

imposible obtener una fórmula explícita para calcular de manera exacta la probabilidad de ruina. A pesar de las pocas bondades de este polinomio se logra mostrar claramente cómo es posible obtener una fórmula explícita usando interpolación.

Reclamaciones exponenciales

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de Dickson & Hipp (1998). Supóngase que las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg tienen distribución continua $PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$ con $\boldsymbol{\pi}_{d+1} = \mathbf{0}$, en donde \mathbf{T} es invertible y se cumple la condición de ganancia neta $\rho = \frac{\lambda \mu}{p}$. Entonces para cualquier capital inicial $u \geq 0$, se tiene que:

$$\varphi(u) = \rho \left(-\frac{1}{\mu} \boldsymbol{\pi} \mathbf{T}^{-1} \right) e^{\left(\mathbf{T} + \rho \left(-\frac{1}{\mu} \boldsymbol{\pi} \mathbf{T}^{-1} \right) \right) u} \mathbf{e} \quad (3)$$

Supóngase además que en este modelo las reclamaciones son exponenciales de parámetro β . Considérese a la distribución exponencial como una distribución tipo fase continua. El correspondiente generador infinitesimal del proceso de Markov que produce el tiempo de espera hasta la absorción exponencial de parámetro β es:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este caso se tiene que $d=1$ y $\mathbf{T} = t_{11} = -\beta$. Entonces $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_1 = \mathbf{1}$ y $\mathbf{t} = t_1 = \beta$. Además $\mu = \frac{1}{\beta}$, por lo tanto $\rho = \frac{\lambda}{\beta p}$. Sustituyendo estos términos en la ecuación (3) se obtiene la siguiente expresión:

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{\beta p} e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{p} \right) u} \quad (4)$$

La ecuación (4) es uno de los pocos modelos para los cuales la probabilidad de ruina puede encontrarse de manera explícita. Se supone que la entrada por primas pt

durante el periodo $(0, t]$ tiene una tasa constante $p = 1$. Por lo tanto la ecuación (4) queda:

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{\beta} e^{-(\beta-\lambda)u}. \quad (5)$$

En la figura 4.1 se ilustra la probabilidad de ruina de la ecuación (5) para una intensidad de llegada $\lambda = 2$, $u \in [0, 5]$ y valores del parámetro $\beta = 2.5$, $\beta = 3$, $\beta = 3.5$ y $\beta = 4$.

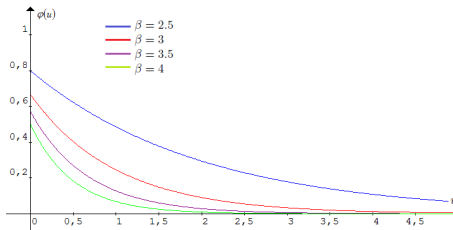


Figura 4.1: Probabilidad de ruina con reclamaciones exponenciales para $\lambda = 2$

Obsérvese que debido a la condición de ganancia neta, el exponente $-(\frac{\beta-\lambda}{\beta})$ es negativo, y por lo tanto la probabilidad de ruina tiende a cero exponencialmente a medida que el capital inicial u aumenta a infinito.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada $\lambda = 2$ y valores de $u \in [0, 5]$.

Tabla 4.1: Algunos valores de la probabilidad de ruina para $\lambda = 2$ y valores de $u \in [0, 5]$.

u	$\beta = 2.5$	$\beta = 3$	$\beta = 3.5$	$\beta = 4$
0.0	0.8000	0.6667	0.5714	0.5000
0.5	0.6230	0.4044	0.2699	0.1839
1.0	0.4852	0.2453	0.1275	0.0677
1.5	0.3779	0.1488	0.0602	0.0249
2.0	0.2943	0.0902	0.0284	0.0092
2.5	0.2292	0.0547	0.0134	0.0034
3.0	0.1785	0.0547	0.0063	0.0012
3.5	0.1390	0.0201	0.0030	0.0005
4.0	0.1083	0.0122	0.0014	0.0002
4.5	0.0843	0.0074	0.0007	0.0000
5.0	0.0657	0.0045	0.0003	0.0000

Reclamaciones hiperexponenciales

La siguiente aplicación fue tomada de Bladta y Bo Friis (2010), cuyo objetivo principal es mostrar la complejidad de los cálculos para determinar la probabilidad de ruina de manera explícita bajo condiciones especiales. Se asume una intensidad de llegada $\lambda = 3$ y el tamaño de las reclamaciones con densidad:

$$M = \frac{3}{2} e^{-3x} + \frac{7}{2} e^{-7x}$$

Pero

$$M = \frac{1}{2}(3e^{-3x}) + \frac{1}{2}(7e^{-7x}) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i f_i(x),$$

donde:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$f_1(x) = 3e^{-3x}$$

$$f_2(x) = 7e^{-7x}$$

Es claro que f_1 y f_2 son densidades exponenciales. Dado que M es una mezcla de dos distribuciones exponenciales con parámetros $\beta_1 = 3$ y $\beta_2 = 3$ respectivamente, entonces M tiene una distribución hiperexponencial con dos canales paralelos.

M también puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con dos estados transitorios. Entonces M tiene una distribución tipo fase con representación:

$$T = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ y } t = -Te = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Luego del teorema 3.2.1, se tiene $v = -\lambda \pi T^{-1} = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{3}{14}\right)$.

$$\text{Sea } Q = T + tv = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

De esta manera $\varphi(u) = ve^{(T+tv)u} e = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{3}{14}\right)e^{Qu} e$. Además:

$$P_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda I_{2 \times 2}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6$$

De lo anterior se obtiene que los vectores característicos asociados a $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = -1$ son $x_1 = \left(-\frac{1}{7} \quad 1\right)$ y $x_2 = \left(\frac{9}{7} \quad 1\right)$ respectivamente. Luego:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $Q = P \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$. Lo cual implica que:

$$e^{Qu} = P \begin{bmatrix} e^{-6u} & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}e^{-6u} + \frac{9}{10}e^{-u} & -\frac{9}{70}e^{-6u} + \frac{9}{70}e^{-u} \\ -\frac{7}{10}e^{-6u} + \frac{7}{10}e^{-u} & \frac{9}{10}e^{-6u} + \frac{1}{10}e^{-u} \end{bmatrix}$$

Tabla 4.2: Algunos valores de la probabilidad de ruina para $\lambda = 3$ y valores de $u \in [0,5]$.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$\varphi(u)$	0.714	0.417	0.252	0.153	0.092	0.056	0.034	0.020	0.012	0.007	0.004

4.3 Reclamaciones con distribución Erlang

La siguiente aplicación fue tomada de Asmussen & Rolski (1992), en la cual se considerara un proceso de riesgo $\{C_t\}_{t \geq 0}$ con las reclamaciones Y_i como un proceso Erlang. Sean W_0, W_1, \dots los tiempos aleatorios de paro en donde la aseguradora recibe re-

De esta manera:

$$\varphi(u) = ve^{(T+tv)u} e = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{3}{14}\right)e^{Qu} e$$

Finalmente se obtiene:

$$\varphi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}. \quad (6)$$

En la figura 4.2 se ilustra la probabilidad de ruina de la ecuación (6) para una intensidad de llegada $\lambda = 3, u \in [0,5]$. Se observa que $\varphi(u)$ tiende a cero exponencialmente a medida que u aumenta a infinito.

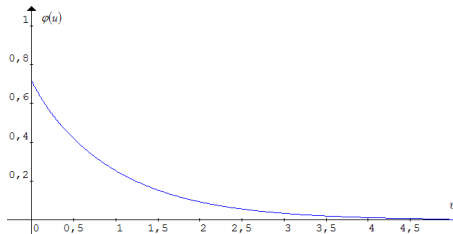


Figura 4.2: Probabilidad de ruina con reclamaciones hipereponenciales para $\lambda = 3$.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada $\lambda = 3$ y algunos valores de :

clamaciones con $W_0 = 0$. Supóngase que los tiempos de inter-arribo $T_k = W_k - W_{k-1}$, para $k = 1, 2, \dots$ son i.i.d con función de densidad:

$$f(t) = \beta^2 t e^{-\beta t} = \beta^2 \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} e^{-\beta t}, \text{ para } t > 0.$$

Es decir los T_k tienen distribución Erlang(2, β). Sea μ la media del monto de la reclamación individual y p el ingreso por primas

de la aseguradora por unidad de tiempo. Cuando el tamaño de las reclamaciones tiene distribución tipo fase, la probabilidad de ruina puede darse de forma explícita para el caso exponencial (tal como se mostró en la primera aplicación) así como para tiempos de inter-arribo $Erlang(2, \beta)$. Según el modelo clásico de Poisson compuesto, si los tiempos de inter-arribo tienen distribución exponencial de parámetro β , entonces la probabilidad de ruina es no trivial si:

$$\rho = \frac{\beta\mu}{p} < 1$$

Si el tamaño de las reclamaciones tienen una distribución tipo fase $PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$, entonces $\mu = -\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{e}$. De esta manera $\varphi(u) = \rho\hat{\boldsymbol{\pi}}e^{Qu}\mathbf{e}$, donde $\hat{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \rho\boldsymbol{\pi}\hat{\boldsymbol{\pi}}$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \left(\frac{\beta\mu}{p}\right) \left(-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\right) e^{\left(\mathbf{T} + \left(\frac{\beta\mu}{p}\right)\left(-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\right)\right)u} \mathbf{e} \\ &= -\frac{\beta}{p}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1} e^{\left(\mathbf{T} - \frac{\beta}{p}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\right)u} \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Si se asume que $\lambda = \frac{\beta}{p}$ y $\boldsymbol{\nu} = -\lambda\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}$, entonces se obtiene la fórmula para calcular la probabilidad de ruina del teorema 3.2.1. Supóngase que las reclamaciones tienen distribución $Erlang(2,1)$ y el ingreso por primas de la aseguradora por unidad de tiempo es $p = 4$. Por lo tanto $\beta = 1$ y una reclamación puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con $d = 2$ estados transitorios. Entonces las reclamaciones tienen una distribución tipo fase con representación $\boldsymbol{\pi} = (1 \ 0)$ y además:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para hallar una fórmula explícita para $\varphi(u)$ se determina $\mu = -\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{e}$. Por lo tanto:

$$\rho = \frac{\beta\mu}{p} = 0.5,$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera $\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \rho\boldsymbol{\pi}\hat{\boldsymbol{\pi}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.25 & -0.75 \end{bmatrix}$.
Luego:

$$\varphi(u) = \rho\hat{\boldsymbol{\pi}}e^{Qu}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} e^{Qu}\mathbf{e}.$$

Para hallar e^{Qu} se realiza un procedimiento análogo a la aplicación anterior, obteniéndose:

$$\begin{aligned}e^{Qu} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{-1.3904u} & 0 \\ 0 & e^{-0.3596u} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -0.9315 & -0.8421 \\ 0.3637 & -0.5393 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1.3904u} & 0 \\ 0 & e^{-0.3596u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6669 & 1.0414 \\ -0.4498 & -1.1519 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente se tiene que:

$$\varphi(u) = 0.55317e^{-0.3596u} - 0.05317e^{-1.39039u}. \quad (7)$$

En la figura 4.3 se ilustra la probabilidad de ruina de la ecuación (7) para una intensidad de llegada $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$ y $u \in [0, 5]$

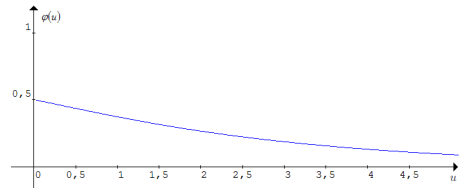


Figura 4.3: Probabilidad de ruina para $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$ y valores de $u \in [0, 5]$

Tabla 4.3: Algunos valores de la probabilidad de ruina para $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$ y $u \in [0,5]$.

u	$\beta = 1.5$	$\beta = 1.6$	$\beta = 1.7$	$\beta = 1.8$	$\beta = 1.9$
0.0	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500
0.5	0.7001	0.7571	0.8156	0.8755	0.9370
1.0	0.6481	0.7119	0.7789	0.8491	0.9228
1.5	0.5975	0.6672	0.7420	0.8222	0.9080
2.0	0.5496	0.6243	0.7060	0.7955	0.8933
2.5	0.5049	0.5836	0.6714	0.7694	0.8786
3.0	0.4636	0.5453	0.6383	0.7440	0.8640
3.5	0.4256	0.5094	0.6067	0.7194	0.8497
4.0	0.3906	0.4758	0.5766	0.6956	0.8356
4.5	0.3584	0.4444	0.5480	0.6725	0.8217
5.0	0.3289	0.4150	0.5208	0.6502	0.8080

4.3.1 Reclamaciones con distribución mezcla de Erlang(2)

La siguiente aplicación fue tomada de Bladt (2005), en la cual se considerara una mezcla de dos distribuciones $Erlang(2, \frac{3}{5})$ y $Erlang(2,9)$, con $\beta_1 = \frac{3}{5}$ y $\beta_2 = 9$ la cual se asume como una distribución tipo fase con representación:

$$\pi = \left(\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \right)$$

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Luego, una reclamación puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con $d = 4$ estados transitorios. Supóngase que el ingreso por primas de la aseguradora por unidad de tiempo es también $p = 4$. En la siguiente tabla se muestran algunos cálculos de la probabilidad de ruina para una

intensidad de llegada $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$ y valores de $u \in [0,5]$.

4.4 Interpolación de la probabilidad de ruina

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de Drekcik & Willmot (2005) y Mathews & Fink (2000). En general, determinar la probabilidad de ruina de manera explícita no es fácil. Para el caso hiperexponencial cuando M tiene una dimensión $d \geq 2$ requiere un cálculo matricial complejo o imposible de realizar, por lo que es necesario implementar alguna rutina para programar las operaciones matriciales necesarias para calcular la probabilidad de ruina para un u fijo, para realizar lo anterior se aplicó un código en R para calcular la probabilidad de ruina para un u fijo. En la tabla 4.5 se muestran algunos cálculos de la probabilidad de ruina para M con representación $\pi = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$, $T = diag[-5 \quad -6 \quad -7]$ de dimensión $d = 3$, $\lambda = 5$ y $u \in [0,3]$.

Tabla 4.4: Algunos valores de la probabilidad de ruina para $\lambda = \frac{\beta_1}{p} = \frac{3}{20}$ y $u \in [0,5]$.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$\varphi(u)$	0.1500	0.1126	0.0958	0.0812	0.0682	0.0569	0.0472	0.0390	0.0321	0.0264	0.0216

Tabla 4.5: Algunos valores de la probabilidad de ruina para M con representación especificada anteriormente y valores de $u \in [0,3]$.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\varphi(u)$	0.8869	0.6475	0.4737	0.3466	0.2536	0.1856	0.1358

Como aporte al trabajo de Bladta & Bo Friis (2010), Asmussen y Rolski (1992) y Dickson y Hipp (1998) se implementó el método de Aproximación Polinomial con Polinomios Interpoladores de Newton para interpolar tablas de valores de la probabilidad de ruina, con el objetivo de encontrar una expresión explícita de naturaleza polinomial que sirva para aproximar la probabilidad de ruina $\varphi(u)$ de la tabla 4.5. El polinomio

de interpolación de Newton viene dado por:

$$P_6(u) = a_0 + a_1u + a_2u(u-0.5) + a_3u(u-0.5)(u-1) + a_4u(u-0.5)(u-1)(u-1.5) + a_5u(u-0.5)(u-1)(u-1.5)(u-2) + a_6u(u-0.5)(u-1)(u-1.5)(u-2)(u-2.5)$$

Las constantes a_0, a_1, \dots, a_6 se determinan por medio de la tabla 4.6 de diferencias divididas generada a través de un código en M de MATLAB.

Tabla 4.6: Diferencias divididas de φ .

u_k	Diferencias divididas						
u_0	0.8869						
u_1	0.6475	-0.4788					
u_2	0.4737	-0.3476	0.1312				
u_3	0.3466	-0.2542	0.0934	-0.0252			
u_4	0.2536	-0.1860	0.0682	-0.0168	0.0042		
u_5	0.1856	-0.1360	0.0500	-0.0121	0.0023	-0.0007	
u_6	0.1358	-0.0996	0.0364	0.0091	0.0015	-0.0003	0.0001

Por lo tanto:

$$P_6(u) = 0.0001u^6 - 0.0018u^5 + 0.011u^4 - 0.0483u^3 + 0.1877u^2 - 0.5618u + 0.8869 \quad (8)$$

Debido a que este polinomio interpola la probabilidad de ruina en los nodos $u_0 = 0$, $u_1 = 0.5$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1.5$, $u_4 = 2$, $u_5 = 2.5$ y $u_6 = 3$ el intervalo $[0,3]$ para un intensidad de llegada $\lambda = 5$, dicho polinomio permite aproximar $\varphi(u)$ para cualquier u en $[0,3]$.

Esto permite aproximar la probabilidad de ruina de manera explícita bajo las condiciones dadas. En la figura 4.4 se ilustra el polinomio de aproximación de la ecuación (8) y los puntos de interpolación.

A continuación se implementa nuevamente los polinomios interpoladores de Newton para interpolar la Tabla 4.4, para hallar un expresión polinomial para

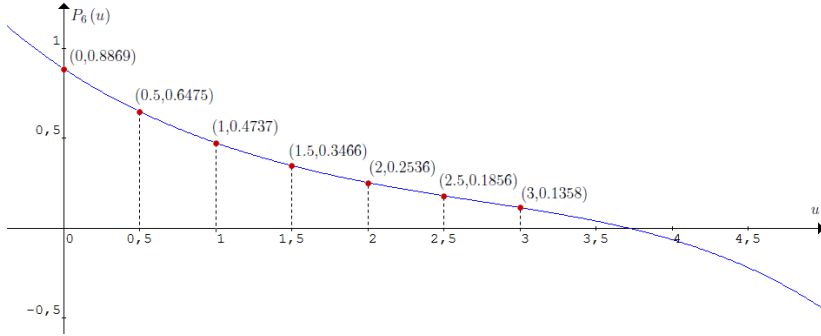


Figura 4.4: Gráfica del polinomio de aproximación y puntos de interpolación.

aproximar $\varphi(u)$ en $[0,5]$. La correspondiente tabla de diferencias divididas para determinar los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{10} es:

Tabla 4.7: Diferencias divididas de φ .

u_k	Diferencias divididas										
u_0	0.1500										
u_1	0.1126	-0.0748									
u_2	0.0958	-0.0336	0.0412								
u_3	0.0812	-0.0292	0.0044	-0.0245							
u_4	0.0682	-0.0260	0.0032	-0.0008	0.0119						
u_5	0.0569	-0.0226	0.0034	0.0001	0.0005	-0.0046					
u_6	0.0472	-0.0194	0.0032	-0.0001	-0.0001	-0.0002	0.0014				
u_7	0.0390	-0.0164	0.0030	-0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	-0.0004			
u_8	0.0321	-0.0138	0.0026	-0.0003	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0001		
u_9	0.0264	-0.0114	0.0024	-0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	
u_{10}	0.0216	-0.0096	0.0018	-0.0004	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000

Por lo tanto:

$$P_{10}(u) = 0.00000234u^{10} - 0.00006920u^9 + 0.00089354u^8 - 0.00662126u^7 + 0.03109107u^6 - 0.09632305 u^5 + 0.19849360 u^4 - 0.26708051 u^3 + 0.22621943 u^2 - 0.14080595 u + 0.15$$

Debido a que este polinomio interpola la probabilidad de ruina en los nodos u_k para $k = 0, 1, \dots, 10$ en el intervalo $[0, 5]$ para una intensidad de llegada $\lambda = \frac{3}{20}$, dicho polinomio permite aproximar $\varphi(u)$ para cualquier u en $[0, 5]$. Esto permite aproximar la

probabilidad de ruina de manera explícita bajo las condiciones dadas. En la figura 4.5 se ilustra la gráfica de dicho polinomio de aproximación y los puntos de interpolación:

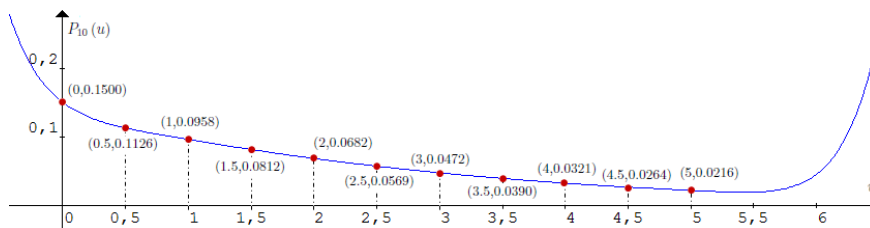


Figura 4.5: Gráfica del polinomio de aproximación y puntos de interpolación.

5. Conclusiones

En este artículo se presentó una metodología para calcular de manera exacta la probabilidad de ruina, suponiendo que las reclamaciones tienen distribuciones tipo fase; observándose que, cuando los parámetros son pequeños (dimensión 2), es posible aunque dispendioso encontrar una fórmula explícita para calcular dicha probabilidad, dado que, demanda laboriosos y extensos procedimientos matriciales. Para el caso en que los parámetros son dimensión mayor que 2, se obtiene una fórmula explícita vía interpolación con el polinomio de Newton.

Es bien conocida la inestabilidad del polinomio de Newton como aproximante, pero la interpolación se le hace a tablas de valores de la probabilidad de ruina, para un capital inicial u , en un intervalo positivo, por lo que resulta ser necesariamente positivo y decreciente. Esta implementación proporciona una expresión explícita de naturaleza polinomial que sirve para aproximar la probabilidad de ruina.

Para simplificar los cálculos es necesario implementar algoritmos para programar

los cálculos matriciales necesarios para determinar las probabilidades de ruina y luego implementar alguna técnica que permita aproximarla de manera uniforme y continua por medio de alguna fórmula de naturaleza polinomial, por tanto, es necesario, seguir trabajando para explorar otros tipos de aproximaciones para establecer comparativos y estudiar los errores de aproximación.

Referencias

- Asmussen, S., & Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities*. Singapur: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Asmussen, S., & Rolski, T. (January de 1992). Computational methods in risk theory: A matrix-algorithmic approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 10(4), 259-274. doi:10.1016/0167-6687(92)90058-J
- Bladt, M. (May de 2005). A review on phase-type distributions and their use in risk theory. *ASTIN Bulletin*, 35(01), 145-161. doi:10.1017/S0515036100014100
- Bladta, M., & Bo Friis, N. (2010). Lecture notes on phase-type distributions.
- Dickson, D. (2005). *Insurance risk and ruin*. London: Cambridge University Press.

Dickson, D., & Hipp, C. (July de 1998). Ruin probabilities for Erlang (2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22(3), 251-262. doi:10.1016/S0167-6687(98)00003-1

Drekic, S., & Willmot, G. (2005). On the moments of the time of ruin with applications to phase-type claims. *North American Actuarial Journal*, 9(2), 17-30. doi:10.1080/10920277.2005.10596195

Escalante, C., & Arango, G. (Diciembre de 2004). Aspectos básicos del modelo de riesgo colectivo. *Matemáticas Enseñanza Universitaria*, XII(2), 3-15. Obtenido de <http://revistaerm.univalle.edu.co/VolXIIN2/escalante.pdf>

Mathews, J., & Fink, K. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. Madrid: PRENTICE HALL.

Rincón, L. (2012). *Introducción a la teoría del riesgo*. México DF: Departamento de Matemática Universidad Nacional Autónoma de México.

Tse, Y.-K. (2009). *Nonlife actuarial models: Theory, methods and evaluation*. London: Cambridge University Press.

SANDRA ROJAS SEVILLA.

Magíster en Matemáticas Aplicadas, Especialista Matemáticas, Licenciada en Matemáticas de la Universidad de Sucre. Actualmente se desempeña como docente en la Corporación Universitaria del Caribe CECAR, en la ciudad de Sincelejo-Sucre. Entre sus líneas de investigación se encuentran: Simulación y Modelación Matemática, y Cálculo Científico y Modelamiento Matemático.

LEIDER SALCEDO GARCÍA.

Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT, Físico e Ingeniero de Sistemas de la Universidad del Magdalena. Actualmente, se desempeña como docente de la Universidad del Magdalena.

FRANCISCO ZULUAGA DÍAZ

Experiencia docente en las siguientes instituciones: Universidad EAFIT desde 2003, Universidad de Medellín, Universidad Pontificia Bolivariana, Escuela de Ingeniería de Antioquia, Universidad Autónoma. Coordinador de la Maestría en Matemáticas Aplicadas. Actualmente se desempeña como Jefe de Pregrado de Ingeniería Matemática. Entre sus intereses académicos e investigativos se encuentran: Economía de la Educación, Teoría de Riesgo y Estadística Multivariada. Curso Estudios de pregrado en Economía en la Universidad de Medellín (1997); y estudios de postgrado en la Maestría en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT (2005). Asimismo, entre sus publicaciones más recientes se encuentran: Análisis de la deserción estudiantil en los programas de pregrado de la Universidad EAFIT, Cuadernos de Investigación ISSN: 1692-0694 (2010). Pertinencia del Programa de Economía: Una mirada desde los egresados ISBN: 978-958-720-053-9 (2009). Determinantes de la tasa de matriculación universitaria, Revista de Economía del Rosario ISSN: 0123-5362 (2008). Demanda de dinero al nivel de la firma: el caso colombiano, Ecos de Economía, ISSN: 1657-4206 (2005).

Recepción del artículo: 10 de marzo de 2013

Aceptación del artículo: 21 de agosto de 2013