CORRESPONDÊNCIA ENTRE LEIBNIZ E VARIGNON SOBRE O CÁLCULO E A ÁLGEBRA

Tradução de Raquel Anna Sapunaru*
Isabelle Alcaraz**

De Varignon para Leibniz
Paris, 28 de novembro de 1701
(GM IV, p.89-90)

Permita-me tomar a liberdade de prestar-vos meus humildes respeitos e de dar-vos um parecer sobre um escrito que está sendo divulgado aqui em vosso nome, sobre a querela que vós sabeis existir entre o senhor Rolle e mim, em torno do vosso cálculo, que ele pensa ser errado e enganador.

O senhor abade de Galloys, aquele que influencia o senhor Rolle, argumenta que o vós declareis que entendeis por diferencial ou infinitamente pequeno apenas uma grandeza em realidade muito pequena, mas, no entanto, sempre fixa e determinada, tal como a Terra em relação ao firmamento, ou um grão de areia em relação a Terra. Em vez disso, o que eu denominei de infinitamente pequeno ou diferencial de uma grandeza é uma grandeza inesgotável. Eu chamei de infinito ou indefinido, tudo aquilo que é inesgotável; e, infinitamente ou indefinidamente pequeno em relação a uma grandeza, aquilo em que ela é inesgotável. Daí, concluí que no cálculo diferencial, infinito, indefinido, inesgotável em grandeza, maior que qualquer grandeza que se possa atribuir ou “indeterminavelmente”[1] grande significam apenas a mesma coisa. O mesmo ocorre com o infinitamente ou indefinidamente pequeno, menor que qualquer grandeza que se possa atribuir ou “indeterminavelmente” pequeno.

Eu gostaria muito que vós me enviásseis vossa opinião sobre isso, a fim de deter os inimigos desse cálculo que de tal modo abusam de vosso nome para enganar os ignorantes e os crédulos. O professor de matemática dos jesuítas daqui me mostrou esse

*Professora da UFVJM
**Professora de Francês do Centro de Idiomas da UFVJM

[1] Tomamos a liberdade de forjar este termo para melhor representar a letra do autor. NT.

escrito que vós teríeis lhes enviado para ser inserido no *Journaux de Trevoux* como um esclarecimento sobre as dificuldades encontradas na questão do infinito. Estas dificuldades estavam no âmbito do novo método do senhor Bernoulli de Bâle, para encontrar os raios osculadores das curvas algébricas, que foram também inseridas com muitos erros. Eu vi esse escrito, que não é de vossa autoria, exceto por algumas correções entre linhas que parecem terem sido feitas com a vossa caligrafia. Nestas, vós dizeis somente (se bem me lembro), que vossos diferentes gêneros de infinitos, ou de infinitamente pequenos, devem ser considerados como fazemos normalmente com o firmamento em relação à Terra e, a Terra com relação a um grão de areia, de modo que com relação ao firmamento, a Terra seria um diferencial do primeiro gênero e um grão de areia, um do segundo. Como eu não pude negar que esse escrito não era vosso, eu disse ao abade de Galloys que isso era apenas uma comparação grosseira para que vós sejais entendido por todos.

No entanto, os inimigos de vosso cálculo continuam triunfando e divulgando vossa analogia como uma declaração clara e precisa de vossa impressão sobre o assunto. Portanto, eu gostaria muito que vós me enviásseis, o quanto antes, essa declaração clara e precisa de vossa impressão sobre o assunto, dirigida ao nosso ilustre amigo, o senhor Bernoulli de Groningue ou a mim, se vós me julgais digno dessa honra, a fim de silenciar, se for possível, ou pelo menos confundir, esses inimigos da verdade. O senhor Bernoulli de Groningue vos terá falado, sem dúvida, sobre os paralogismos grosseiros do senhor Rolle. Eu lhe envio ainda uma correspondência da qual o senhor Bernoulli de Groningue vos colocará a par. Porém, como esses paralogismos desonrariam a academia, eu vos peço, por favor, segredo sobre o assunto.

Perdoai a liberdade que eu tomo de vos escrever tão diretamente. Faço isto para poupar nosso ilustre e precioso amigo, o senhor Bernoulli de Groningue do trabalho de vos escrever uma carta tão longa. Ele teve a bondade de vos apresentar de tempos em tempos meus humildes respeitos, de vos assegurar a profunda veneração que eu tenho por vosso raro mérito. Eu vos peço para acreditar que esses são os verdadeiros sentimentos do meu coração e que me torna inteiramente etc.

De Leibniz para Varignon
Hanover, 2 de fevereiro de 1702
(GM IV, p.91-95)

Eu respondo à honra de vossa carta de 29 de novembro do ano passado [1701] um pouco tarde porque eu a recebi somente hoje. O senhor Bernoulli tendo enviado [a carta] de Groningue, ela só chegou em Berlim quando eu de lá saí rumo à Hanover com a rainha da Prússia. O que atrasou meu retorno foi o fato de Sua Majestade ter feito a graça de querer que eu estivesse com ela.

Eu vos agradeço e a vossos estudiosos que me fazem a honra de refletir sobre o que eu escrevera a um de meus amigos [o senhor Pinson] na ocasião em que foi publicado no *Journal de Trevoux* contra o cálculo das diferenças e das somas. Eu não me lembro suficientemente das expressões que eu utilizei, mas meu objetivo foi frisar que não é preciso criar uma dependência entre a análise matemática e as controvérsias metafísicas, nem assegurar que existem rigorosamente na natureza linhas infinitamente pequenas comparadas as nossas [experiências]. Por conseguinte, tampouco existem as infinitamente maiores que as nossas (e no entanto acabadas, tanto que me pareceu que o infinito tomado no sentido rigoroso do termo deva ter sua origem no inacabado, sem o qual eu não vejo como encontrar um fundamento apropriado para discerni-lo do finito[2]). Isso porque objetivando evitar essas sutilezas, eu pensei que para tornar o raciocínio sensível a todos, bastava explicar o infinito pelo incomparável, ou seja, conceber quantidades incomparavelmente maiores ou menores que as nossas. Isto proporciona tantos graus de incomparáveis quanto quisermos, uma vez que aquilo que é incomparavelmente menor entra inutilmente na conta em relação ao que é incomparavelmente maior.

Deste modo, uma parcela da matéria magnética que passa através do vidro não é comparável a um grão de areia, nem esse grão ao globo da terra, nem este globo ao firmamento. E por isso eu publiquei nas *Actes de Leipzic* os lemas dos incomparáveis, que podem ser entendidos como bem quisermos, sejam infinitos a rigor, sejam somente grandezas, e que não se comparam entre si. Porém, é preciso ao mesmo tempo considerar que esses incomparáveis comuns, mesmo não sendo de modo algum fixos ou determinados, e podendo ser tomados tão pequenos quanto quisermos em nossos

2 Este adendo não faz parte da carta original de Leibniz. NT.

raciocínios geométricos, têm o efeito dos infinitamente pequenos no sentido *stricto*. Caso um adversário queira contradizer nosso enunciado, conclui-se através do nosso cálculo que o erro será menor que qualquer erro que ele poderá determinar, estando em nosso poder tomar esse incomparavelmente pequeno, suficientemente pequeno, para tal. Assim, podemos sempre tomar uma grandeza tão pequena quanto queremos. Talvez, seja isso que vós entendeis tratando-se do inesgotável. E é sem dúvida nisto que consiste a demonstração rigorosa do cálculo infinitesimal que utilizamos. Ele tem isso de prático: dá diretamente e visivelmente, de uma maneira apropriada para frisar a origem da invenção, aquilo que os antigos, como Arquimedes, davam como argumento na redução ao absurdo, não podendo por falta de tal cálculo, terem chegado a verdades ou soluções confusas, embora possuíssem o fundamento da invenção.

Daí se segue que se alguém não admite linhas infinitas e infinitamente pequenas como coisas reais e no sentido metafísico forte, ele pode utiliza-las certamente como noções ideais que abreviam o raciocínio, semelhantes às que chamamos de raízes imaginárias na análise comum (como por exemplo $\sqrt{-2}$). Mesmo que as chamamos de imaginárias, elas não deixam de ser úteis e até necessárias para exprimir analiticamente grandezas reais, sendo impossível, por exemplo, exprimir sem a intervenção das [raízes] imaginárias o valor analítico de uma reta necessária para fazer a trissecção de um ângulo dado. Do mesmo modo, não poderíamos estabelecer o nosso cálculo das transcendentes sem empregar as diferenças sobre o ponto evanescente, tomando, subitamente, o incomparavelmente pequeno no lugar daquilo que se pode sempre determinar menor no infinito. Igualmente, concebemos ainda dimensões além de três e até potências cujos expoentes não são números ordinários com a finalidade de estabelecer ideias apropriadas e fundamentadas no real para abreviar os raciocínios.

No entanto, não se pode imaginar que a ciência do infinito está degradada e reduzida a ficções devido a essa explicação, pois resta sempre o infinito sincategoremático[3], como dizem os escolásticos. Também é verdadeiro, por exemplo,

[3] "Assim são chamadas, na gramática e na lógica medievais, as partes do discurso que não têm significação em si, mas só a adquirem em contato com as outras partes do discurso. [...] Essa distinção é retomada na lógica de [...] Ockham (Summa log., I, 4), que assim a expõe: "Alguns termos são categoremáticos, outros sincategoremáticos. (...) Estes últimos não têm significado completo e preciso, e não significam coisas diferentes das significadas pelos categoremata; assim como em aritmética o zero nada significa por si mesmo, mas acrescentado a outro algarismo adquire significado". Ockham aplicou essa distinção ao conceito de infinito e fez a distinção entre infinito categoremático, que designa a quantidade do sujeito ao qual se aplica o predicado infinito, e o infinito sincategoremático,

que 2 é igual a $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ etc. Trata-se de uma série infinita, na qual todas as frações cujos numeradores são 1 e os denominadores são uma progressão geométrica de 2. Essas frações podem ser entendidas da mesma maneira, embora empreguemos somente números ordinários e não utilizemos nenhuma fração infinitamente pequena, ou cujo denominador seja um número infinito. Além disso, como as raízes imaginárias têm seu *fundamentum in re*, de modo que o falecido senhor Hugens, quando lhe comuniquei que $\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}}+\sqrt[2]{1-\sqrt{-3}}$ é igual a $\sqrt[2]{6}$, o considerou tão admirável que me respondeu que nisso há algo que nos é incompreensível. Da mesma forma, podemos dizer que os infinitos e os infinitamente pequenos são tão bem fundados que tudo acontece na geometria e até mesmo na natureza, como se fossem realidades perfeitas, testemunhos não somente de nossa análise geométrica das transcendentes, mas também de minha lei da continuidade. Em virtude desta lei, pode-se considerar o repouso como um movimento infinitamente pequeno (quer dizer, equivalente a uma espécie de seu próprio oposto), a coincidência como uma distância infinitamente pequena e a igualdade como a última das desigualdades, etc. Eu expliquei e apliquei a lei da continuidade outras vezes nas *Nouvelles de la Republique des Lettres*, do senhor Bayle, no âmbito das regras do movimento de Descartes e do padre reverendo Malebranche. Eu observei depois (pela segunda edição das regras deste padre feita posteriormente) que toda força não havia sido suficientemente considerada.

No entanto, pode-se dizer em geral que toda a continuidade é algo ideal e que não há nunca nada na natureza que tenha partes perfeitamente uniformes. Contudo, em compensação, o real não se deixa governar perfeitamente pelo ideal e pelo abstrato. Segue-se que as regras do finito funcionam no infinito, como se houvesse átomos (quer dizer, elementos determináveis da natureza), embora não houvesse, uma vez que a matéria é atualmente subdividida sem fim. Em sentido contrário, as regras do infinito funcionam no finito como se houvesse infinitamente pequenos metafísicos, embora não precisássemos deles. A divisão da matéria não chega nunca às parcelas infinitamente pequenas porque tudo se governa por uma razão. De outro modo, não haveria nem

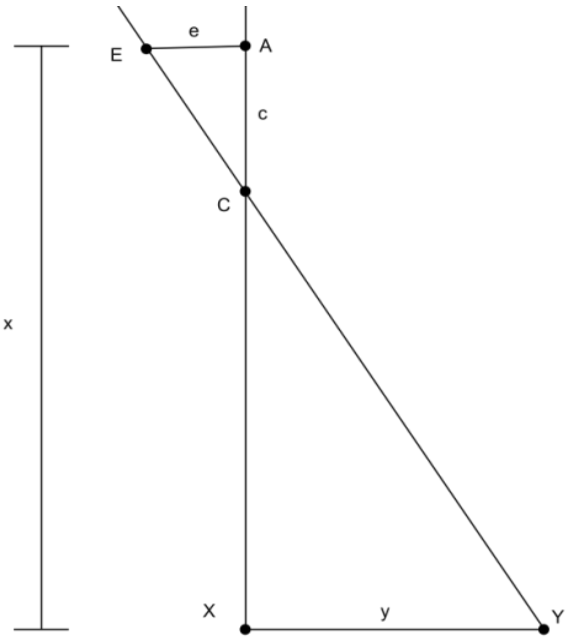
que designa apenas de que maneira o sujeito se comporta com relação ao predicado. Nesse sentido, infinito é aquilo que podemos tornar tão grande quanto queiramos, mas que apesar disso continua finito (Occam, In Sent., I. d. 17, q. 8) [...]” Ver: http://www.filoinfo.bem-vindo.net/filosofia/modules/lexico/entry.php?entryID=843 ciência, tampouco regra, o que não estaria em conformidade com a natureza do soberano princípio.

No mais, quando a leitura do *Journal de Trevoux* me levou a escrever algo sobre o que se dizia contra o cálculo das diferenças, confesso que não pensei na divergência que o senhor, ou melhor, aqueles que se utilizam do cálculo das diferenças, têm com o senhor Rolle. Outrossim, somente após sua última correspondência que eu soube que o senhor abade Galloys, que eu tanto honro, faz parte [dessa divergência]. Talvez, sua oposição vem apenas do fato que ele acredita que fundamos a demonstração desse calculo sobre paradoxos metafísicos, o qual eu mesmo penso ser passível de ser extraído. Eu não estou dizendo que esse sábio abade seja capaz de acreditar que esse cálculo seja tão falho quanto o senhor Rolle parece afirmar, de acordo com o seu relato, mas eu ainda não vi as obras publicadas por este autor [o senhor Rolle]. Eu não deixo de acreditar que ele tenha perspicácia e eu gostaria que ele a voltasse para o lado que lhe abriria um campo próprio, de modo a fazer valer o seu talento em prol do crescimento das ciências. No entanto, sua oposição não deixará de servir ao esclarecimento das dificuldades que os iniciantes podem encontrar em nossa analise. Eu até acho que é muito importante para o bom estabelecimento dos fundamentos das ciências que haja tais contestadores. É assim que os céticos combatiam os princípios da geometria, com toda razão, que o padre Gottignies, sábio jesuíta, quis jogar fora os melhores fundamentos da álgebra e que os senhores Cluver e Nieuwentiit combateram a pouco, embora de outra forma, a nossa análise infinitesimal.

A geometria e a álgebra sobreviveram e eu espero que a nossa ciência dos infinitos não deixe de sobreviver também, mas, ela lhe será eternamente grata pelas luzes que vós difundis nela. Eu frequentemente tenho considerado que um geômetra que responderia às objeções do *Sextus Empiricus* e àquelas que François Suarez, autor do livro *Quod nihil scitur*, enviou a Clavius, ou a outros, faria algo mais útil do que poderíamos imaginar. Eis porque não devemos nos arrepender do cuidado necessário para justificar nossa análise diante de todo tipo de espíritos capazes de entende-la. Todavia, eu ficaria bem chateado se isso vos retardasse, pois o senhor está avançando na ciência através de várias descobertas relevantes. Eu espero ter o proveito e o prazer de ser informado de tempos em tempos sobre essas descobertas, e no entanto eu estou zeloso etc.

Justificativa do cálculo dos infinitesimais pela álgebra ordinária (GM IV, p.104-106)

Duas retas AX e EY se cortam em C. Tomemos dois pontos E e Y, e tornemos EA e YX perpendiculares a reta AX. Chamemos AC , *c* e AE, *e*; AX, *x* e XY, *y*. Devido aos triângulos semelhantes CAE, CXY, teremos *x-c* sobre *y* igual a *c* sobre *e* e, por conseguinte, se a reta EY se aproximasse cada vez mais do ponto A, conservando sempre o mesmo angulo no ponto variável C, ver-se-ia que as retas *c* e *e* diminuiriam sempre. No entanto, a razão entre *c* e *e* permaneceria a mesma que supomos ser diferente da razão da igualdade e o dito angulo [seria] diferente de 45º.



Tomemos agora o caso em que a reta EY venha a cair sobre [o ponto] A. Aí, vê-se que os pontos C e E irão também cair em A, que as retas AC, AE ou *c* e *e* desaparecerão e que da analogia ou da equação $x\text{-}c/y = c/e$ obteremos $x/y = c/e$. Então, no presente caso, teremos $x\text{-}c = x$. Suponhamos que este caso está incluído na regra geral. Entretanto, *c* e *e* não serão absolutamente nulos, uma vez que elas conservam conjuntamente a razão de CX sobre XY, ou a razão que existe entre o seno inteiro ou raio e a tangente relativa ao angulo em C, o qual supomos ter permanecido o mesmo enquanto EY se aproximava do ponto A. Pois, se *c* e *e* fossem absolutamente nulos como ocorre no caso da coincidência dos pontos C, E, A, então *c* e *e* seriam iguais uma vez que um nulo é sempre igual a outro nulo. E da equação ou analogia $x/y = c/e$ teríamos $x/y = 0 : 0 = 1$, ou seja, teríamos $x = y$, o que é um absurdo, uma vez que supomos que o ângulo é diferente de 45º.

Portanto, [as retas] *c* e *e* neste cálculo algébrico são consideradas nulas apenas se comparadas a *x* e *y*. No entanto, *c* e *e* têm relação uma com a outra. E as tratamos como infinitesimais, precisamente como são os elementos que nosso cálculo das diferenças adota nas ordenadas das curvas, isto é, como ascendentes e descendentes momentâneas. Assim, encontramos no cálculo algébrico ordinário o traço do cálculo transcendente das diferenças e as mesmas singularidades das quais alguns escolásticos têm escrúpulos. E mesmo o cálculo algébrico não poderia ficar sem [o cálculo transcendente das diferenças], caso ele quisesse conservar suas vantagens, entre as quais destaco a generalidade que lhe é devida a fim de que ele possa englobar todos os casos, inclusive aquele em que algumas retas dadas desaparecem. Não querer utilizar ou se privar voluntariamente de uma das maiores utilidades deste cálculo seria ridículo. Todos os hábeis analistas especializados em álgebra ordinária tiraram proveito [deste cálculo] para fazer seus próprios cálculos e construções gerais. E esta vantagem aplicada ainda à física e, particularmente as leis do movimento, remete em parte àquilo que eu chamo de lei da continuidade. Esta lei me serve há muito como principio de invenção na física, e ainda de um cômodo exame para verificar se algumas regras dadas estão corretas.

Eu publiquei há vários anos uma amostra dessa lei [lei da continuidade] nas *Nouvelles de la Republique des Lettres*, tomando a igualdade como um caso particular da desigualdade, o repouso como um caso particular do movimento e o paralelismo como um caso da convergência, etc., supondo não que a diferença das grandezas que se tornam iguais seja nula, mas que ela esteja na eminência de desaparecer; e, da mesma maneira, com o movimento que ainda não é absolutamente nulo, mas que está na eminência de sê-lo. E se alguém não estiver satisfeito, podemos mostrar-lhe, do mesmo modo que Arquimedes, que o erro não é demonstrável e não pode ser dado através de qualquer construção. É assim que foi respondido a um matemático, por sinal muito engenhoso, o qual, fundamentado em escrúpulos semelhantes àqueles que se opõem ao nosso cálculo, criticou a quadratura da parábola. Pois, lhe foi perguntado se através de alguma construção ele poderia determinar uma grandeza menor que a diferença que ele pretendia que existisse entre a área parabólica dada por Arquimedes e a verdadeira, como sempre se pode fazer quando uma quadratura está errada.

No entanto, embora não seja rigorosamente verdadeiro que o repouso é uma espécie de movimento ou que a igualdade é uma espécie de desigualdade ou que o círculo é uma espécie de polígono regular, pode-se dizer que o repouso, a igualdade e o círculo encerram os movimentos, as [des]igualdades e os polígonos regulares que, através de uma mudança contínua, atingem este ponto desaparecendo. E, embora estas terminações sejam exclusivas, isto é, não inclusas rigorosamente nas variedades que limitam, elas têm as propriedades da exclusividade, como se elas fossem inclusas, segundo a linguagem dos infinitos ou infinitesimais, que toma o círculo, por exemplo, como um polígono regular cujo número de lados é infinito. Se não fosse assim, a lei da continuidade seria violada, isto é, uma vez que passamos do polígono ao círculo através de uma mudança continua, sem saltos, é preciso também que não se de saltos na passagem das características dos polígonos para a do círculo.