ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.958
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-286-295

Поступила в редакцию 19.07.2021
Received 19.07.2021

В. И. Корзюк[1,2], И. С. Козловская[2], В. Ю. Соколович[2], В. А. Севастюк[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. В аналитическом виде представлено классическое решение в классе непрерывно дифференцируемых функций произвольного порядка со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на второй части в виде полупрямой – условие Неймана. В четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи при построении которого выписывается частное решение исходного волнового уравнения. Для заданных функций задачи выписываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим высокого порядка гладкости и единственным.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, классическое решение, волновое уравнение, смешанные условия

Для цитирования. Решение произвольной гладкости одномерного волнового уравнения для задачи со смешанными условиями / В. И. Корзюк [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 286–295. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-286-295

Viktor I. Korzyuk[1,2], Inessa S. Kozlovskaya[2], Vladimir Y. Sokolovich[2], Vladimir A. Sevastyuk[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

THE SOLUTION OF ARBITRARY SMOOTHNESS OF THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION FOR THE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS

Abstract. In this paper, we represented an analytical form of a classical solution of the wave equation in the class of continuously differentiable functions of arbitrary order with mixed boundary conditions in a quarter of the plane. The boundary of the area consists of two perpendicular half-lines. On one of them, the Cauchy conditions are specified. The second half-line is separated into two parts, namely, the limited segment and the remaining part in the form of a half-line. The Dirichlet condition is specified on the segment, as well as the Neumann condition is fulfilled on the second part in the form of a half-line. In a quarter of the plane, the classical solution of the problem under consideration is determined. To construct this solution, a particular solution of the original wave equation is established. For the given functions of the problem, the concordance conditions are written, which are necessary and sufficient for the solution of the problem to be classical of high order of smoothness and unique.

Keywords: differential equations, classical solution, wave equation, mixed conditions

For citation. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Y., Sevastyuk V. A. The solution of arbitrary smoothness of the one-dimensional wave equation for the problem with mixed conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 286–295 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-286-295

Введение. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения в четверти плоскости с условиями Коши на одной из полупрямых и граничными условиями на другой рассмотрено в работе [1]. В первой части этой статьи излагается конструкция частного решения произвольной гладкости волнового уравнения в четверти плоскости между координатными осями. Построение частного решения для указанной области представлено и в [2, 3]. Следующим важным моментом решения рассматриваемой задачи в данной работе является построение общего классического решения исходного уравнения.

Для задачи Коши в полуплоскости эффективным методом построения частного решения является метод Дюамеля через решение вспомогательной задачи Коши для однородного уравнения [4–7]. В случае других областей рассматриваемых задач, отличных от полуплоскости и полупространства, частное решение строится либо методом Дюамеля с помощью предварительного продолжения заданной функции в правой части уравнения, либо в подобластях задачи [3, 4, 8–10]. В нашем случае необходимо склеить полученные решения на границах подобластей, не теряя их гладкости.

Следует отметить, что в [11] предпринята попытка построить классическое решение для волнового уравнения. Здесь при конструировании формулы решения автором сделана принципиальная ошибка, следовательно, в [11] частное решение не построено.

В данной работе основное внимание уделяется построению классического решения из класса $C^k(\overline{Q})$ неоднородного волнового уравнения. Несомненно, по данной схеме можно в аналитическом виде построить классическое решение из $C^k(\overline{Q})$ для многих других задач в случае волнового уравнения.

Постановка задачи. Относительно независимых переменных $\mathbf{x}=(x_0,x_1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ $(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2)$ рассматривается линейное одномерное волновое уравнение

$$\mathcal{L}u=\left(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2\right)u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,\infty), \tag{1}$$

относительно искомой функции $u:\overline{Q}\ni\mathbf{x}\to u(\mathbf{x})\in\mathbb{R}$, где ∂_{x_0}, ∂_{x_1} – операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно, $\partial_{x_0}^2=\partial_{x_0}\partial_{x_0}$, $\partial_{x_1}^2=\partial_{x_1}\partial_{x_1}$, a^2 – положительное число из $\mathbb{R}$. Для уравнения (1) в четверти плоскости $\mathbb{R}^2$ определяется классическое решение из класса $C^k(\overline{Q})$, $k\geq 2$, k – целое положительное число.

Область $Q=[0,\infty)\times[0,\infty)$ разделим на две подобласти $Q^{(j)}=\left\{\mathbf{x}\middle|(-1)^j(ax_0-x_1)>0\right\}$ независимых переменных $\mathbf{x}=(x_0,x_1)$. В $Q^{(j)}$ рассматриваем уравнение (1). На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,\infty), \tag{2}$$

а на оставшейся части границы ∂Q – граничные условия

$$u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad x_0\in[0,\tau), \tag{3}$$

$$\partial_{x_1}u(x_0,0)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[\tau,\infty), \tag{4}$$

где $\tau\in\mathbb{R}^+=(0,\infty)$. Таким образом, имеем смешанную задачу (1)–(4) для уравнения (1).

З а д а ч а. Определить в аналитическом виде классическое решение задачи (1)–(4) из класса $C^k(\overline{Q})$ – непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, $\overline{Q}$ – замыкание области $Q=(0,\infty)\times(0,\infty)$.

Частное решение уравнения (1). Как известно [3], общее решение u уравнения (1) принадлежит $C^k(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы

$$u(\mathbf{x})=u^{(0)}(\mathbf{x})+v_p(\mathbf{x}), \tag{5}$$

где $u^{(0)}$ – общее решение из класса $C^k(\overline{Q})$ однородного уравнения

$$\mathcal{L}u^{(0)}(x)=0, \tag{6}$$

v_p – частное решение из $C^k(\overline{Q})$ уравнения (1).

О п р е д е л е н и е 1. Классическим решением из $C^k(\overline{Q})$ уравнения (1) называется любая функция $u:\mathbb{R}^2\supset Q\ni\mathbf{x}\to u(\mathbf{x})\in\mathbb{R}$, определенная на замыкании $\overline{Q}$, которая принадлежит классу $C^k(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1).

О п р е д е л е н и е 2. Общим решением из $C^k(\overline{Q})$ уравнения (1) называется совокупность всех классических решений этого уравнения (1) согласно определению 1.

Согласно [3], общее решение $u^{(0)}(\mathbf{x})$ из $C^k(\overline{Q})$ однородного уравнения (6) существует тогда и только тогда, когда оно представимо в виде

$$u^{(0)}(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \tag{7}$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^k\left(D(g^{(j)})\right)$, $j = 1, 2$, $D(g^{(j)})$ – области определения функций $g^{(j)}$, $\forall \mathbf{x} \in \overline{Q}$, $D(g^{(1)}) = \mathbb{R}$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$, $a > 0$ (для определенности).

Решение задачи (1)–(4) находим согласно представлениям (5) и (7). Частное решение уравнения (1) из класса $C^k(\overline{Q})$ в явном виде построено в работах [1, 2]. Воспользуемся этим частным решением v_p. Данную схему и полученные результаты в [1, 2] изложим более подробно.

Область Q характеристиками $\gamma = \{\mathbf{x} \,|\, x_1 = ax_0\}$ и $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \overline{Q} \,|\, ax_0 - x_1 = a\tau\}$ разобьем на три подобласти $Q^{(1)} = \{\mathbf{x} \,|\, ax_0 - x_1 < 0\}$, $Q^{(2)} = \{\mathbf{x} \,|\, 0 < ax_0 - x_1 < a\tau\}$ и $Q^{(3)} = \{\mathbf{x} \,|\, a\tau < ax_0 - x_1\}$.

Общее решение $u(\mathbf{x})$ уравнения (1) из класса $C^{(k)}\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ в областях $Q^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, представимо в виде

$$u^{(j)}(\mathbf{x}) = g^{(1,j)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v_p(\mathbf{x}), \quad x \in \overline{Q^{(j)}}, \tag{8}$$

где $\overline{Q^{(j)}}$ – замыкание области $Q^{(j)}$, $g^{(1,j)}$ – произвольные функции и $g^{(1,1)} \in C^k\left([0, \infty)\right)$, $g^{(1,2)} \in C^k\left([-a\tau, 0]\right)$, $g^{(1,3)} \in C^k\left((-\infty, -a\tau]\right)$, $g^{(2)}$ – произвольная функции из класса $C^k\left([0, \infty)\right)$, $v_p(\mathbf{x})$ – частное решение уравнения (1) из $C^k(\overline{Q})$. Пусть частное решение v_p из класса $C^k(\overline{Q})$. Следовательно, чтобы общее решение уравнения (1), определяемое соотношениями

$$u(\mathbf{x}) = u^{(j)}(\mathbf{x}) = g^{(1,j)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v_p(\mathbf{x}), \quad x \in \overline{Q^{(j)}}, \tag{9}$$

было из класса $C^k(\overline{Q})$, необходимо и достаточно выполнение требований $u(\mathbf{x}) = u^{(j)}(\mathbf{x})$ из класса $C^k\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, функции $g^{(1,j)}$ должны удовлетворять условиям непрерывности (условиям согласования)

$$d^p g^{(1,2)}(0) = d^p g^{(1,1)}(0), \quad p = 0, 1 \ldots k, \tag{10}$$

$$d^p g^{(1,3)}(-a\tau) = d^p g^{(1,2)}(-a\tau), \quad p = 0, 1 \ldots k. \tag{11}$$

Частное решение v_p определяем согласно [1, 2]. Область Q разделим характеристикой γ на две части $Q^{(1)}$ и $Q^{(2,3)} = Q^{(2)} \cup Q^{(3)} \cup \Gamma$. Пусть функция f принадлежит классу $C^{k-1}(\overline{Q})$. Решение v_p на Q уравнения (1) представляется в виде

$$v_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_p^{(1)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ v_p^{(2,3)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2,3)}}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$v_p^{(1)}(\mathbf{x}) = f^{(1,1)}(x_1 - ax_0) + f^{(2)}(x_1 + ax_0) -$$
$$-\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_1 - ax_0} dy \int_{(x_1 - ax_0)}^{x_1 + ax_0} f\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}\right) dz, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}},$$
$$v_p^{(2,3)}(\mathbf{x}) = f^{(1,2)}(x_1 - ax_0) + f^{(2)}(x_1 + ax_0) -$$
$$-\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_1 - ax_0} dy \int_{(ax_0 - x_1)}^{x_1 + ax_0} f\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}\right) dz, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2,3)}}, \tag{13}$$

$$f^{(1,1)}(\xi) = -\frac{1}{4a^2}\int_0^{\xi} dy \int_0^{y} f\left(\frac{y-z}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \quad \xi \in [0,\infty), \tag{14}$$

$$f^{(2)}(\xi) = \frac{1}{4a^2}\int_0^{\xi} dy \int_0^{y} f\left(\frac{y-z}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \quad \xi \in [0,\infty), \tag{15}$$

$$f^{(1,2)}(\xi) = -\frac{1}{4a^2}\int_0^{\xi} dy \int_0^{y} f\left(\frac{y-z}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz + B^{(k)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty,0], \tag{16}$$

$$B^{(k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{k} b^{(j)} \frac{\xi^j}{j!}, \quad \xi \in (-\infty,0],$$

$$b^{(j)} = \frac{1}{2a^2}\sum_{p=0}^{j-2} A_{jp}\frac{1}{a^p}\left(\partial_{x_0}^{p}\partial_{x_1}^{n-2-p} f\right)(0,0) =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\sum_{i=0}^{n-2} 2^i \sum_{p=0}^{n-i-2} C_{n-2-i}^{p}\left[\left((-1)^{n-2} + (-1)^{n-2-p}\right)\frac{1}{a^{n-2-p}}\left(\partial_{y_0}^{n-2-p}\partial_{y_1}^{p} f\right)(0,0) + \right.$$

$$\left. + \left(1+(-1)^p\right)\frac{1}{a^p}\left(\partial_{y_0}^{p}\partial_{y_1}^{n-2-p} f\right)(0,0)\right], \quad j = 2,3,\ldots,k, \tag{17}$$

C_{n-2-i}^{p} – число сочетаний из $n-2-i$ элементов по p. Если произвести вычисления, то числа A_{jp} для разных индексов можно представить частично в виде следующей таблицы.

Коэффициенты при различном *j*

Coefficients for different *j*

A_{j0}	A_{j1}	A_{j2}	A_{j3}	A_{j4}	A_{j5}	A_{j6}	A_{j7}	A_{j8}	A_{j9}	A_{j10}
4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	–6	–	–	–	–	–	–	–	–	–
16	0	16	–	–	–	–	–	–	–	–
30	–10	10	–30	–	–	–	–	–	–	–
64	0	64	0	64	–	–	–	–	–	–
126	–14	84	–84	14	–126	–	–	–	–	–
256	0	256	0	256	0	256	–	–	–	–
510	–18	438	–186	186	–438	18	–510	–	–	–
1024	0	1024	0	1024	0	1024	0	1024	–	–
2046	–22	1936	–352	1276	–1276	352	–1936	22	–2046	–
4096	0	4096	0	4096	0	4096	0	4096	0	4096

Так как функция f принадлежит множеству $C^{k-1}(\overline{Q})$, то функции $f^{(1,j)}$, $j = 1,2$, и $f^{(2)}$, определенные формулами (14)–(17), обладают следующими свойствами:

$$f^{(1,2)} \in C^k\left((-\infty,0]\right), \; f^{(2)} \in C^k\left([0,\infty)\right).$$

Кроме того функции $f^{(1,j)}$ ($j = 1,2$) в точке нуль удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$f^{(1,1)}(0) = f^{(1,2)}(0),$$

$$df^{(1,1)}(0) = df^{(1,2)}(0),$$

$$d^2 f^{(1,1)}(0) - d^2 f^{(1,2)}(0) = -\frac{1}{a^2} f(0,0), \quad n = 3,$$

$$-2^j a^2 \left[d^j f^{(1,1)}(0) - d^n f^{(1,2)}(0) \right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2^{-i}} \sum_{p=0}^{j-i-2} C_{j-2-i}^p \left[\left((-1)^{j-2} + (-1)^{j-2-p} \right) \frac{1}{a^{j-2-p}} \partial_{y_0}^{j-2-p} \partial_{y_1}^p f(0,0) + \right.$$
$$\left. + \left(1 + (-1)^p\right) \frac{1}{a^p} \partial_{y_0}^p \partial_{y_1}^{j-2-p} f(0,0) \right], \quad j = 2, 3, 4\ldots . \tag{18}$$

В свою очередь условия согласования (18) для функций $f^{(1,j)}$, j = 1,2, обеспечивают условия согласования (непрерывности до порядка k) функций $v_p^{(1)}$ и $v_p^{(2,3)}$ (13)–(17) на характеристике $\gamma = \left\{ \mathbf{x} \middle| x_1 = ax_0 \right\}$ следующим образом:

$$\partial_{x_0}^p \partial_{x_1}^m v_p^{(1)} \left(\mathbf{x} \middle| x_1 = ax_0 \right) = \partial_{x_0}^p \partial_{x_1}^m v_p^{(2,3)} \left(\mathbf{x} \middle| x_1 = ax_0 \right),$$
$$\mathbf{x} \in \gamma, \quad 0 \le p + m \le k. \tag{19}$$

Из представлений (13)–(15) следуют условия Коши для функции v_p при $x_0 = 0$:

$$v_p(0, x_1) = \partial_{x_1} v_p(0, x_1) = 0. \tag{20}$$

Если вычислить производную второго порядка $\partial_{x_1}^2 v_p(\mathbf{x})$, подставить $x_0 = 0$, то получим соотношение

$$\partial_{x_1}^2 v_p(0, x_1) = f(0,0). \tag{21}$$

Далее рассмотрим уравнение (1), где обе его части продифференцируем по x_1. Затем полагаем $x_1 = 0$. Заметим, что производная $\partial_{x_1}^2 \partial_{x_1} v_p(0, x_1) = 0$ в силу условия (20) – производная по касательному направлению вдоль оси x_1. В этом случае получим

$$\partial_{x_0}^3 v_p(0, x_1) = \partial_{x_0} f(0, x_1). \tag{22}$$

Затем вычисляем производные по x_0 уравнения (1) любого порядка $n \le k$. Используя предыдущие результаты типа (20)–(22), а также и для других производных, методом математической индукции получим формулу

$$\partial_{x_0}^n v_p(0, x_1) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} (a^2)^j \left(\partial_{x_1}^{n-2-2j} \partial_{x_j}^{2j} \right) f(0, x_1), \quad n = 3, 4, \ldots, k, \tag{23}$$

где

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n - \text{целое четное число}, \\ \dfrac{n-1}{2}, & n - \text{целое нечетное число}. \end{cases}$$

Результаты, полученные относительно частного решения v_p уравнения (1), сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция f уравнения* (1) *принадлежит классу* $C^{k-1}(\overline{Q})$, $k \in N$, $k \ge 2$. *Тогда функции*

$$f^{(1,1)} \in C^k\left([0, \infty)\right), \quad f^{(1,2)} \in C^k\left((-\infty, 0]\right), \quad f^{(2)} \in C^k\left([0, \infty)\right),$$

определенные через f формулами (14)–(16), *где* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *(для определенности), коэффициенты* $b^{(j)}$ *из* (16) *определяются формулами* (17) *для* $j = 2, 3, \ldots, k$ *и* $b^{(0)} = b^{(1)} = 0$. *Кроме того, функция* v_p, *согласно формулам* (12)–(16)*, принадлежит классу* $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$, $\bar{Q} = [0,\infty)\times[0,\infty)$, *является частным решением уравнения* (1) *и удовлетворяет условиям* (20)–(23).

Классическое решение задачи (1)–(4). Как известно [2], общее решение $u^{(j)}$, $j = 1,2,3$, уравнения (1) в каждой подобласти $Q^{(j)}$ представимо в виде (8) и принадлежит классу функций $C^k\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, если предположить, что $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ (см. теорему 1), $g^{(1,1)} \in C^k\left([0,\infty)\right)$, $g^{(1,2)} \in C^k\left([-a\tau,0]\right)$, $g^{(1,3)} \in C^k\left((-\infty,-a\tau]\right)$. Тогда общее решение u уравнения (1), определяемое формулой (9), следует из множества $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда будут выполняться условия согласования (10) и (11).

Представление (8) общего решения уравнения (1) для $j = 1$ должно удовлетворять условиям Коши (2). В результате получим систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u(0,x_1) = g^{(1,1)}(x_1) + g^{(2)}(x_1) + v_p(0,x_1) = \varphi(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty), \tag{24}$$

$$\partial_{x_0} u(0,x_1) = -adg^{(1,1)}(x_1) + adg^{(2)}(x_1) + \partial_{x_0} v_p(0,x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty). \tag{25}$$

Уравнение (25) интегрируем. В результате получаем соотношение

$$-ag^{(1,1)}(x_1) + ag^{(2)}(x_1) + \int_0^{x_1} \partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta = \int_0^{x_1} \psi(\zeta)d\zeta + 2aC, \quad x_1 \in [0,\infty). \tag{26}$$

Из уравнения (26) и уравнения (24), как алгебраической системы, находим значения функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$, а именно:

$$g^{(1,1)}(x_1) = \frac{1}{2}\varphi(x_1) - \frac{1}{2a}\int_0^{x_1}\psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}v_p(0,x_1) + \frac{1}{2a}\int_0^{x_1}\partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta - C, \quad x_1 \in [0,\infty), \tag{27}$$

$$g^{(2)}(x_1) = \frac{1}{2}\varphi(x_1) + \frac{1}{2a}\int_0^{x_1}\psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}v_p(0,x_1) - \frac{1}{2a}\int_0^{x_1}\partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta + C, \quad x_1 \in [0,\infty), \tag{28}$$

где C – произвольная константа из $\mathbb{R}$. Удовлетворяем решение (9) граничному условию (3), чтобы получить значения $g^{(1,2)}(z)$ функции $g^{(1,2)}$. С учетом (28) получим значения функции $g^{(1,2)}$ в виде

$$g^{(1,2)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - v_p\left(-\frac{z}{a},0\right) - g^{(2)}(-z),$$

$$g^{(1,2)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - \frac{1}{2}\varphi(-z) - \frac{1}{2a}\int_0^{-z}\psi(\zeta)d\zeta - v_p\left(-\frac{z}{a},0\right) + \frac{1}{2}v_p(0,-z) +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{-z}\partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta - C, \quad z \in [-\tau a, 0]. \tag{29}$$

Аналогично, удовлетворяя решение (9) условию (4), получим

$$\partial_{x_1} u(x_0,0) = dg^{(1,3)}(-ax_0) + dg^{(2)}(ax_0) + \partial_{x_1} v_p(x_0,0) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [\tau,\infty),$$

или

$$g^{(1,3)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(-z) + \frac{1}{2a}\int_0^{-z}\psi\left(\zeta\right)d\zeta + \int_{-a\tau}^{z}\mu^{(2)}\left(-\frac{\zeta}{a}\right)d\zeta - \int_{-a\tau}^{z}\partial_{x_1} v_p\left(-\frac{\zeta}{a},0\right)d\zeta -$$
$$-\frac{1}{2}v_p(0,-z) - \frac{1}{2a}\int_0^{-z}\partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta + C + \tilde{C}, \quad z \in (-\infty,-a\tau], \tag{30}$$

$C, \tilde{C}$ – произвольные постоянные, принимающие значения, независимые друг от друга.

Из формул (27), (29), (30) и теоремы 1 следует, что функции $g^{(1,1)} \in C^k([0,\infty))$, $g^{(1,2)} \in C^k([-a\tau,0])$, $g^{(1,3)} \in C^k((-\infty,-a\tau])$, если предположить выполнение условий гладкости на заданные функции $\varphi \in C^k([0,\infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0,\infty))$, $\mu^{(1)} \in C^k([0,a\tau])$, $\mu^{(2)} \in C^{k-1}([a\tau,\infty])$, $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$. Чтобы функция

$$g^{(1)}(z) = \begin{cases} g^{(1,1)}(z), & z \in C^k([0,\infty)), \\ g^{(1,2)}(z), & z \in C^k([-a\tau,0]), \\ g^{(1,3)}(z), & z \in C^k((-\infty,-a\tau]) \end{cases}$$

принадлежала классу $C^k(-\infty,\infty)$, должны выполняться условия непрерывности (9) и (11).

Следующие вычисления понадобятся нам для определения условий (9) для $p > 0$ через заданные функции задачи (1)–(4):

$$d^p g^{(1,2)}(0) = (-1)^p \left(\frac{1}{a^p} d^p \mu^{(1)}(0) - \frac{1}{2} d^p \varphi(0) - \frac{1}{a^p} \partial_{x_0}^p v_p(0,0) + \frac{1}{2} \partial_{x_1}^p v_p(0,0) \right) +$$
$$+(-1)^{(p-1)} \left(\frac{1}{2a} d^{(p-1)} \psi(0) - \frac{1}{2a} \partial_{x_0} \partial_{x_1}^{(p-1)} v_p(0,0) \right), \quad z \in [-\tau a, 0], \tag{31}$$

$$d^p g^{(1,1)}(0) = \frac{1}{2} d^p \varphi(0) - \frac{1}{2} \partial_{x_1}^p v_p(0,0) +$$
$$+\frac{1}{2a} d^{(p-1)} \psi(0) + \frac{1}{2a} \partial_{x_0} \partial_{x_1}^{(p-1)} v_p(0,0), \quad z \in [-\tau a, 0]. \tag{32}$$

Из представлений (27) и (29) следует, что равенства (9) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\mu^{(1)}(0) - \varphi(0) = 0, \quad d\mu^{(1)}(0) - \psi(0) = 0,$$
$$d^s \mu^{(1)}(0) - a^s d^s \varphi(0) = \partial_{x_0}^s v_p(0,0) - a^s \partial_{x_1}^s v_p(0,0), \quad s = 2,4..., \quad s \le k,$$
$$d^s \mu^{(1)}(0) - a^{s-1} d^{s-1} \psi(0) = \partial_{x_0}^s v_p(0,0) - a^{(s-1)} \partial_{x_0} \partial_{x_1}^{(p-1)} v_p(0,0), \quad s = 3,5..., \quad s \le k. \tag{33}$$

Значения функций $g^{(1,2)}$ и $g^{(1,3)}$, представленные формулами (29) и (30), подставляем в условие (11). Пусть $p = 0$. Тогда

$$g^{(1,2)}(-a\tau) = \mu^{(1)}(\tau) - \frac{1}{2}\varphi(a\tau) - \frac{1}{2a}\int_0^{a\tau} \psi(\zeta)d\zeta - v_p(\tau,0) + \frac{1}{2} v_p(0,a\tau) + \frac{1}{2a}\int_0^{a\tau} \partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta - C =$$
$$= g^{(1,3)}(-a\tau) = \frac{1}{2}\varphi(a\tau) + \frac{1}{2a}\int_0^{a\tau} \psi(\zeta)d\zeta \frac{1}{2} v_p(0,a\tau) - \frac{1}{2a}\int_0^{a\tau} \partial_{x0} v_p(0,\zeta)d\zeta + C + \tilde{C}. \tag{34}$$

Отсюда

$$\tilde{C} = \mu^{(1)}(\tau) - \varphi(a\tau) - \frac{1}{a}\int_0^{a\tau} \psi(\zeta)d\zeta - v_p(\tau,0) + v_p(0,a\tau) + \frac{1}{a}\int_0^{a\tau} \partial_{x_0} v_p(0,\zeta)d\zeta - 2C.$$

В силу (34) видно, что значение $g^{(1,3)}(z)$ функции $g^{(1,3)}$ зависит только от одной произвольной константы и

$$g^{(1,3)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(-z) + \frac{1}{2a}\int_0^{-z} \psi(\zeta)d\zeta + \int_{-a\tau}^{z} \mu^{(2)}\left(-\frac{\zeta}{a}\right)d\zeta - \int_{-a\tau}^{z} \partial_{x_1} v_p\left(-\frac{\zeta}{a},0\right)d\zeta -$$

$$
-\frac{1}{2}v_p(0,-z)-\frac{1}{2a}\int_0^{-z}\partial_{x_0}v_p(0,\zeta)d\zeta+
$$

$$
+\mu^{(1)}(z)-\varphi(az)-\frac{1}{a}\int_0^{az}\psi(\zeta)d\zeta-v_p(z,0)+v_p(0,az)+\frac{1}{a}\int_0^{az}\partial_{x_0}v_p(0,\zeta)d\zeta-C. \tag{35}
$$

Для представления условий согласования (11) через заданные функции задачи (1)–(4) вычислим производные функций $g^{(1,2)}(z)$ и $g^{(1,3)}(z)$, представленных формулами (33) и (34). Итак,

$$
d^s g^{(1,2)}(z)=\frac{(-1)^s}{a^s}d^s\mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right)+\frac{(-1)^{s+1}}{2}d^s\varphi(-z)+
$$

$$
+\frac{(-1)^{s+1}}{2a}d^{s-1}\psi(-z)+\frac{(-1)^s}{a^s}\partial_{x_0}^s v_p\left(-\frac{z}{a},0\right)+
$$

$$
+\frac{(-1)^{s+1}}{2}\partial_{x_1}^s v_p(0,-z)+\frac{(-1)^p}{2a}\partial_{x_0}\partial_{x_1}^{p-1}v_p(0,-z),
$$

$$
s=1,\ldots,k,\ \ z\in[-\tau a,0], \tag{36}
$$

$$
d^s g^{(1,3)}(z)=\frac{(-1)^s}{2}d^s\varphi(-z)+\frac{(-1)^s}{2a}d^{s-1}\psi(-z)\frac{(-1)^{s+1}}{a^{s-1}}d^{s-1}\mu^{(2)}\left(-\frac{z}{a}\right)+
$$

$$
+\frac{(-1)^s}{a^{s-1}}\partial_{x_0}^s\partial_{x_1}v_p\left(-\frac{z}{a},0\right)+\frac{(-1)^{s+1}}{2}\partial_{x_1}^s v_p(0,-z)+
$$

$$
+\frac{(-1)^{s+1}}{2a}\partial_{x_0}\partial_{x_1}^{s-1}v_p(0,-z)s=1,2,\ldots,k,\ z\in(-\infty,-a\tau]. \tag{37}
$$

Согласно формулам (36) и (37), условия согласования (11) в эквивалентном виде запишутся следующим образом:

$$
d^s\mu^{(1)}(\tau)-ad^{s-1}\mu^{(2)}(\tau)-a^s d^s\varphi\left(a\tau\right)-a^{s-1}d^{s-1}\psi\left(a\tau\right)=
$$

$$
=a\partial_{x_0}^{s-1}\partial_{x_1}v_p(\tau,0)-a^{s-1}\partial_{x_0}\partial_{x_1}^{s-1}v_p(0,a\tau),\quad s=1,2,\ldots,k. \tag{38}
$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть*

$$
\varphi\in C^k\left([0,\infty)\right),\ \psi\in C^{k-1}\left([0,\infty)\right),\ f\in C^{k-1}\left([0,\infty)\right),\ \mu^{(1)}\in C^k\left([0,\infty)\right),\ \mu^{(2)}\in C^{k-1}\left([0,\infty)\right).
$$

Существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) *из класса* $C^k(\bar{Q})$, *и оно представимо в аналитическом виде согласно формулам* (8), (12)–(16), (27), (29), (30) *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (33) и (38), *где* k – *любое целое число и* $k\geq 2$.

Выводы. Рассмотрена граничная задача со смешанными условиями Коши, Дирихле и Неймана для одномерного волнового уравнения в четверти плоскости. В аналитическом виде построено классическое решение из класса непрерывно дифференцируемых функций произвольного порядка. Для представления решения задачи без продолжения заданной функции неоднородного уравнения в классе C^k функций построено частное решение. Доказаны необходимые и достаточные условия на заданные функции, при выполнении которых при определенных требованиях гладкости этих функций существует в аналитическом виде классическое решение рассматриваемой задачи.

Без существенных изменений представленная в работе схема переносится на аналогичные задачи с другими смешанными условиями для волнового и иных обобщающих уравнений.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, В. Ю. Соколович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 647–651. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

2. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Ленанд, 2021. – 480 с.

3. Корзюк, В. И. Решение волнового уравнения в четверти плоскости / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, В. Ю. Соколович // Тр. Ин-та математики. – 2020. – Т. 28. № 1/2. – С. 35–50.

4. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 1. – 45 с.

5. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 2. – 52 с.

6. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

7. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.

8. Korzyuk, V. I. Caushy problem in half-plan for hyperbolic equation with constant coefficients. Analytic methods of analysis and differential equations / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya, A. I. Kozlov. – AMA Cambridge Scientific Publ., 2014. – P. 45–71.

9. Моисеев, Е. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения / Е. И. Моисеев, В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.

10. Корзюк, В. И. Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 37–42.

11. Ломовцев, Ф. Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.

References

1. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Yu. Classical solution of the mixed problem in the quarter of the plane for the wave equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 647–651 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

2. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, Lenand Publ., 2021. 480 p. (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Y. The solution of the wave equation in a quarter of the plane. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2020, vol. 28, no. 1–2, pp. 35–50 (in Russian).

4. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical Problem Solutions for Hyperbolic Equations. Part 1.* Minsk, 2017. 48 p. (in Russian)

5. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical Problem Solutions for Hyperbolic Equations. Part 2.* Minsk, 2017. 52 p. (in Russian).

6. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two Independent variables. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 707–716. https://doi.org/10.1134/s0012266112050096

7. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation for a homogeneous differential operator in the case of two independent variables. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 9–13 (in Russian).

8. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Kozlov A. I. *Cauchy Problem in Half-plane for Hyperbolic Equation with Constant Coefficients. Analytical Methods of Analysis and Differential Equations*. AMA Cambridge Scientific Publishers, 2014, pp. 45–71.

9. Moiseev E. I., Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Classical solution of a problem with an integral condition for a one-dimensional wave equation. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1364–1377. https://doi.org/10.1134/s0012266114100103

10. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. About the matching conditions in boundary problems for hyperbolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2013, vol. 57, no. 5, pp. 37–42 (in Russian).

11. Lomovtsev F. E. A method for correcting trial solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Physics. Mathematics. Computer Science*, 2017, no. 3, pp. 38–52 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республик Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь).
E-mail: korzyuk@bsu.by

Козловская Инесса Станиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kozlovskaja@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-5778-9968

Соколович Владимир Юрьевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vovasokoll@gmail.com

Севастюк Владимир Александрович – ведущий инженер-программист, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Inessa S. Kozlovskaya – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kozlovskaja@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-5778-9968

Vladimir Yu. Sokolovich – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vovasokoll@gmail.com

Vladimir A. Sevastyuk – Lead Software Engineer. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus).