

 [doi.org/10.37001/remat25269062v17id293](https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id293)

eISSN: 2526-9062

## **Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória**

**Emily de Vasconcelos Santos**<sup>1</sup> 

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Campina Grande, PB, Brasil

**Silvanio de Andrade**<sup>2</sup> 

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Campina Grande, PB, Brasil

### **Resumo**

O presente estudo tem como objetivo investigar as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas ao processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando como base estudos relacionados à metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas e à Educação Combinatória. O estudo da pesquisa de campo possui cunho qualitativo, em razão de que se empenhou em descrever e analisar detalhadamente os dados coletados por meio de observações, notas de campo, registros escritos feitos pelos alunos e gravações de áudio. Como sujeitos da pesquisa, adotaram-se 16 alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal do Estado da Paraíba. As ações pedagógicas realizadas em contexto de sala de aula apoiaram-se na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas defendida por Andrade (1998; 2017), bem como em estudos que discutem o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória. Na oportunidade, trabalharam-se os quatro tipos de problemas combinatórios (combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano) que precisam ser abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de problemas combinatórios retirados da pesquisa de Pessoa (2009) e propostos pelos alunos. Concluiu-se que a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas contribui para a promoção da aprendizagem combinatória dos alunos, possibilitando o desenvolvimento de um processo educativo reflexivo. Constatou-se que as problematizações provocadas durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas potencializaram o trabalho de reflexão sobre os invariantes dos problemas combinatórios, o que favoreceu o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico dos alunos, além de também ter possibilitado a exploração de diferentes dimensões dos problemas propostos.

**Palavras-chave:** Exploração de Problemas; Análise Combinatória; Ensino Fundamental.

---

**Submetido em:** 15/07/2019**Aceito em:** 29/01/2020**Publicado em:** 01/05/2020

<sup>1</sup> Mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba. Endereço para correspondência: Avenida Felipe Calixto Milken, Condomínio Portal Veredas, apto. 701 – Bloco 1, Morumbi, Uberlândia – Minas Gerais. E-mail: [emily.vasconcelos@gmail.com](mailto:emily.vasconcelos@gmail.com).

<sup>2</sup> Doutor em Educação (Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo, com Doutorado Sanduíche na University of Georgia, EUA. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Endereço para correspondência: Rua Desembargador Trindade, 332, apto. 603, Centro, Campina Grande - Paraíba. E-mail: [silvanio@alumni.usp.br](mailto:silvanio@alumni.usp.br).

## **Problem Solving, Exploration, and Posing in the elementary school: contributions to the teaching and learning of combinatorics**

### **Abstract**

The present study aims to investigate the contributions of the Problem Solving, Exploration and Posing to the teaching and learning process of Combinatorics in the initial years of Elementary School, based on studies related to the teaching-learning methodology of Problem Solving and Combinatory Education. It's a qualitative research, dedicated to describing and analyzing in detail the data collected through observations, field notes, written records made by the students and audio recordings. As subjects of the research, we adopted 16 students from a 5th grade classroom from an Elementary School in the municipal public network of Paraíba State, Brazil. The pedagogical actions carried out in a classroom context were supported by the classroom methodological perspective of Problem Solving, Exploration and Posing defended by Andrade (1998, 2017), as well as in studies that discuss the teaching and learning process of Combinatorics. In the opportunity, the four types of combinatorial problems (combination, arrangement, permutation and Cartesian product) that need to be approached in the initial years of Elementary School, based on combinatorial problems drawn from Pessoa's research (2009) and proposed by the students were worked out. It was concluded that the methodological proposal of the Problem Solving, Exploration and Posing contributes to the promotion of the combinatorial learning of the students, enabling the development of a reflective educational process. It was verified that the problematizations provoked during the Problem Solving, Exploration and Posing process potentiated the work of reflection on the invariants of the combinatorial problems, which favored the development of the combinatorial, generalizing and logical reasoning of the students, besides enabling the researchers to explore different dimensions of the proposed problems.

**Keywords:** Problem Exploration; Combinatorial Analysis; Elementary School.

## **Resolución, Exploración y Proposición de Problemas en los primeros años de la educación fundamental: contribuciones a la enseñanza y aprendizaje de la combinación**

### **Resumen**

El presente estudio tiene como objetivo investigar sobre las contribuciones de la Resolución, Exploración y Proposición de Problemas al proceso de enseñanza aprendizaje de la Combinatoria en los años iniciales de la Enseñanza Primaria, tomando como base estudios relacionados a la metodología de la Resolución, Exploración y Proposición de Problemas y la Educación Combinatoria. Este estudio de la investigación de campo posee carácter cualitativo, en razón de que hubo un empeño en describir y analizar detalladamente los datos colectados por medio de observaciones, notas de campo, registros escritos realizados por los alumnos y grabaciones de audio. Como participantes de este estudio, escogimos 16 alumnos del 5° año de la Enseñanza Primaria de un colegio de la red pública municipal del departamento de Paraíba, Brasil. Las acciones pedagógicas realizadas en el contexto de la clase se apoyaron en la perspectiva metodológica de Resolución, Exploración y Proposición de Problemas defendida por Andrade (1998; 2017), bien como en estudios que discuten el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Combinatoria. En dicho momento, se trabajaron los cuatro tipos de problemas combinatorios (combinación, arreglos, permutación y producto cartesiano) que necesitan ser abordados en los años iniciales en la Enseñanza Primaria, a partir de problemas combinatorios retirados de la investigación de Pessoa (2009) y propuesto por los alumnos. Se concluyó que la propuesta metodológica de la Resolución, Exploración y Proposición de Problemas contribuye para promover el aprendizaje combinatorio de los alumnos, posibilitando el desarrollo de un proceso educativo reflexivo. Se constató que las problematizaciones provocadas durante el proceso de Resolución, Exploración y Proposición de Problemas potencializaron el trabajo

de reflexión sobre los invariantes de los problemas combinatorios, lo que favoreció el desarrollo del raciocinio combinatorio, generalizado y lógico de los alumnos, además de haber posibilitado a la exploración diferentes dimensiones de los problemas propuestos.

**Palabras Clave:** Exploración de Problemas; Análisis Combinatoria; Enseñanza Primaria

### **1. Reflexões iniciais sobre o ensino da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**

Ao longo da nossa trajetória profissional como educadores matemáticos nos deparamos com diferentes perfis de alunos. Essa heterogeneidade encontrada na sala de aula sugere que façamos continuamente reflexões sobre a prática docente que desempenhamos, em prol da qualificação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. No que se refere à Educação Combinatória<sup>3</sup>, questões metodológicas e de conteúdo podem vir a nos inquietar. Os problemas combinatorios possuem diferentes características e requerem o entendimento dos diferentes caminhos de resolução. Enquanto professores de Matemática, cabe-nos questionar, por exemplo: como podemos fazer para que nossos alunos possam compreender as ideias essenciais da Combinatória? Quais seriam estas ideias essenciais? Em que nível de ensino este conteúdo deve ser abordado?

A importância da compreensão do conceito da Combinatória na Educação Matemática é algo pontuado por diversos pesquisadores. Pela relevância de suas contribuições em diversos conhecimentos importantes para o desenvolvimento da sociedade, como os de Probabilidade e Estatística, a necessidade do entendimento do conceito da Combinatória é destacada por diferentes estudos (PESSOA, 2009; SANTOS, 2016). Tais estudos defendem que ao compreender este conceito o aluno conseguirá identificá-lo e relacioná-lo em diferentes situações que fazem parte do seu cotidiano, ajudando-o a responder com mais facilidade as demandas impostas pela sociedade atual.

As contribuições dos conceitos combinatorios ao desenvolvimento da aprendizagem da Matemática e em diferentes áreas do conhecimento têm despertado a atenção de diversos pesquisadores, tais como: Borba (2016); Pessoa e Borba (2009); Pessoa (2009); Almeida (2010) e Santos (2016). O raciocínio combinatorio contribui para a formação do raciocínio lógico-dedutivo, do raciocínio formal e do raciocínio generalizante, que são tipos de raciocínios extremamente importantes para a construção de conceitos matemáticos, que influenciam em conceitos oriundos de outras ciências e que nos ajudam a interpretar diversas situações do cotidiano em que a contagem de agrupamentos de elementos é essencial.

---

<sup>3</sup> Entendemos como Educação Combinatória o processo educativo que desempenha o ensino e aprendizagem da combinatória de maneira articulada.

Uma das principais características do raciocínio combinatório é a capacidade de analisar situações que envolvem procedimentos sistemáticos de enumeração e/ou de determinação do número total de distintas possibilidades. Tal capacidade ajuda o aluno a estruturar o raciocínio lógico e generalizante (PESSOA; SILVA, 2012; PESSOA; SANTOS, 2012). Com relação a isso, Rocha (2011, p.6) ressalta que quando “o aluno busca estratégias para resolução de problemas combinatórios produzem organizações e sistematizações que podem ser aplicáveis a outros ramos da Matemática”.

Em razão de tal relevância, os documentos oficiais (BRASIL, 1997; PARAÍBA, 2010; BRASIL, 2014) que norteiam as práticas educativas em nosso País e Estado apontam a necessidade do ensino da Combinatória começar ainda nos primeiros anos de escolaridade do Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – Anos Iniciais (PCN) (BRASIL, 1997), pontuam que o objetivo da Educação Combinatória no Ensino Fundamental é “levar o aluno a lidar com situações-problemas que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p.40). Assim, no decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental é importante que os alunos consigam desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, uma vez que a organização dos elementos de uma coleção em agrupamentos facilita a contagem e a comparação entre coleções com um grande número de elementos.

Sob este olhar, entendemos que o ensino a ser desenvolvido nesse nível de escolaridade precisa estimular os alunos a fazerem perguntas, estabelecerem relações, construir justificativas, pois à medida que eles progredirem na vida adulta precisam ser autônomos em suas tomadas de decisão. À vista disso, compreendemos que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode ser uma eficiente alternativa metodológica para o ensino deste conteúdo nos anos iniciais.

Diante de tais potencialidades para o ensino e aprendizagem da Matemática, e possivelmente da Combinatória, o presente trabalho tem como objetivo principal analisar as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. E como objetivos específicos avaliar, ao longo de todo o processo de resolução, exploração e proposição dos problemas, a mobilização dos conhecimentos combinatórios, as principais estratégias, insights e processos de resolução utilizadas pelos alunos e o desenvolvimento de seus argumentos.

Ressaltamos que o presente trabalho consiste em um recorte reflexivo e analítico de uma pesquisa de dissertação concluída no ano de 2019 (SANTOS, 2019) que realizou 5 encontros para a coleta de dados, nos quais iremos discutir, de maneira sintetizada, os seus principais resultados. Nas próximas linhas, dialogamos com alguns autores aspectos relacionados ao processo de ensino e

aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental apoiados pela perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas (Andrade, 1998, 2017).

## **2. A perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas: pressupostos teóricos**

Na literatura acadêmica atual existem diferentes perspectivas da Resolução de Problemas. No presente trabalho temos como foco discutir a perspectiva metodológica defendida por Andrade (1998, 2017) em que, almejando-se investigar mais profundamente o desempenho dos alunos na Resolução de Problemas, o professor pode dar ênfase não somente ao processo de resolução dos problemas, mas também ao processo de exploração e proposição destes.

Da literatura acadêmica (SHROEDER, LESTER, 1989; SERRAZINA, 2017; KILPATRICK, 2017; ANDRADE, 2017; entre outros) observa-se que um problema de matemática tem sido interpretado de diversas maneiras.

Nesse estudo, com foco nos pressupostos teóricos defendidos por Andrade (1998, 2017), pensamos um problema como sendo um instrumento que pode impulsionar uma ação de trabalho reflexiva e problematizadora num processo de codificação e descodificação sobre as ideias matemáticas presentes nas situações-problemas postas aos alunos. Esse trabalho impulsiona o aluno a refletir, organizar e sintetizar as informações fornecidas que o levarão à construção de novas ideias e conhecimentos, novos problemas, novas reflexões e sínteses. De acordo com Andrade (1998, 2017), destacamos que a proposição de problemas não ocorre apenas ao final da resolução de problemas, mas também antes e durante todo o processo. E a exploração de problemas faz parte de todo o processo. Ela impulsiona tanto o trabalho da resolução de problemas como o da proposição de problemas.

A perspectiva de Resolução e Exploração de Problemas de Andrade (1998, 2017), com foco na perspectiva de Educação Crítica de Paulo Freire, teorias críticas e pós-críticas, do Falibilismo de Imre Lakatos (1978) e da teoria sociocultural/socio-histórica de Vygotsky, admite a Matemática como um construto social falível e não como um conhecimento absoluto. A proposta visa, a partir de uma articulação aberta entre a teoria e prática, desenvolver uma prática de Resolução e Exploração de Problemas aberta, mas intencionalizada, onde a teoria é uma prática refletida e a prática é uma teoria intencionalizada (ANDRADE, 1998, 2017). De modo que os estudantes “através de um processo de codificação e descodificação, aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática explorando, resolvendo e propondo problemas ou situações problemas” (ANDRADE, 2017, p.357).

Ao encontro das ideias de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004, 2011, 2015), English, Sriraman (2010); Kilpatrick (2017), entre outros, Andrade (1998, 2017) também assume que o processo de ensino-aprendizagem do aluno começa sempre a partir de um problema.

Em uma *Experiência de Exploração de Problemas*, de acordo com Andrade (2017), esses conceitos e ideias nunca são construídos apenas a partir de um único problema ou situação-problema, mas de um repertório de problemas ou situações-problemas nas quais, a partir da exploração da resolução e da proposição desses problemas, desenvolve-se o movimento *Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado* que, por sua vez, toma como base o processo de Codificação e Descodificação dos mesmos.

Sob este olhar, em nossa proposta trabalhamos diferentes problemas combinatórios que possuem diferentes significados. Almejamos, com isso, possibilitar aos alunos um repertório de problemas que os ajudem a mobilizar e/ou construir ideias e conceitos que são essenciais para o raciocínio combinatório. Logo, trabalhamos problemas que permitissem ao aluno a sistematização do levantamento de possibilidades, observando se a ordem dos elementos nos agrupamentos formados foi considerada.

Destacamos ainda que esse movimento de *Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado* defendido pelo autor é um “momento aberto, não fechado, embora não solto” (ANDRADE, 2017, p.365) em que inicialmente é proposto um problema que pode partir tanto dos alunos como do professor, sobre o qual realizarão um trabalho sobre ele. Posteriormente, juntamente com o professor, os alunos devem discutir o trabalho desenvolvido em um processo de reflexões e síntese, chegando, assim, possivelmente, “à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses” (ANDRADE, 1998, p.24). Neste movimento, o trabalho de exploração de problemas é inacabado, podendo ir além da solução (ANDRADE, 1998, 2017).

Nesta ótica, compreendemos que o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas acontece em torno do seguinte ciclo, conforme a Ilustração 1:

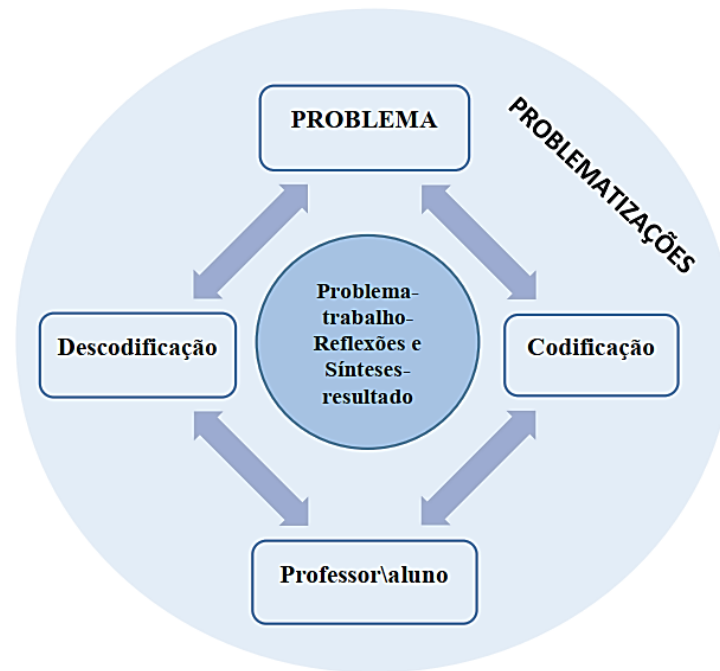


Ilustração 1 :Processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas  
 Fonte: Adaptação de Andrade (1998, 2017)

Os processos de codificação e a descodificação que apoiam o movimento de *Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado* são utilizados como ferramentas no processo de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Estes precisam estar presentes em todo o trabalho de reflexão e síntese que se faz em torno do problema.

A codificação consiste em representar um problema em uma “outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente” (ANDRADE, 1998, p.25). A descodificação, por sua vez, busca o significado do problema, objetivando entendê-lo, de modo a decifrar a mensagem que ele expressa e, sobretudo, fazer uma análise crítica dela. Andrade (1998) explica que “neste trabalho, a descodificação refere-se, principalmente, a toda análise crítica que se faz sobre um problema, sobre sua resolução ou sobre cada trabalho feito” (ANDRADE, 1998, p.24). Estes dois processos podem ocorrer em diferentes momentos: durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas; como também de maneira integrada e simultânea.

Para alcançar uma compreensão mais ampla sobre os conceitos que os problemas envolvem e os processos de resolução e exploração que eles permitem, os professores e os alunos podem fazer diferentes codificações e descodificações dos problemas combinatórios. Durante a exploração destes problemas, diversos caminhos de resolução podem surgir, sendo o trabalho colaborativo entre os alunos primordial para o seu desenvolvimento, uma vez que a codificação e decodificação feita por um aluno pode ajudar outro aluno a compreender melhor o problema.

O ensino da Combinatória na perspectiva da Exploração de Problemas permite que o aluno reflita com maior profundidade sobre os invariantes dos problemas, bem como sobre as problematizações levantadas, o que favorece a compreensão de tais conceitos. Mais do que isso, a partir da exploração de novos problemas, o estudante tem a oportunidade de retornar a problemas anteriores em busca de alcançar um conhecimento mais avançado e estruturado. Com relação a isso, Andrade (1998) afirma que através da Exploração e Proposição de Problemas o professor tem a possibilidade de trabalhar com os alunos um único problema, em diferentes dimensões, níveis de aprofundamento e níveis de ensino. Logo, um mesmo problema trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental pode também ser explorado no Ensino Médio, seguindo uma outra intencionalidade educacional, onde o direcionamento para as reflexões feitas ao seu redor requer uma compreensão mais aprofundada dos conhecimentos combinatórios envolvidos.

Pensando no processo de resolução e exploração de problemas combinatórios, compreendemos que os alunos e professores, visando a simplificar o enunciado do problema em uma forma mais conveniente, podem codificar as situações apresentadas neles em desenhos e traços. E a sua decodificação pode ser por meio de diagramas de árvore, tabelas de dupla entrada, desenhos também, diagramas de Venn, fórmulas etc.

No trabalho com a Combinatória na perspectiva da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, o interesse do trabalho em sala volta-se à exploração do problema em diversos enfoques. Cabe ao docente incentivar a exploração de novos problemas que podem ser gerados pelos problemas iniciais e não dizer de maneira explícita o que o aluno precisa fazer. Desse modo, o professor estará oportunizando os alunos a refletirem sobre os diferentes significados que um mesmo problema pode possuir. No ensino da Combinatória, por exemplo, o professor pode inicialmente propor um problema que trabalhe o Princípio Fundamental da Contagem e, com o decorrer da exploração do problema, incentivar os alunos a levantarem questionamentos que os conduzam a um novo problema que, por sua vez, trabalhe os invariantes de problemas de combinação ou produto cartesiano.

As ideias próprias dos alunos são algo que precisa ser valorizado na exploração e proposição de problemas. A criatividade dos alunos e sua autonomia precisam ser estimuladas. Durante o processo de exploração e proposição é importante que o docente incentive a criação de processos, insights e estratégias próprias, pois isso favorece o pensamento matemático.

Destacamos, ainda, um modelo mais atual da proposta de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, ligeiramente modificado, onde a proposição de problemas aparece de forma explícita no processo como fazendo parte de movimentos da problematização do processo. Neste novo modelo, a proposição é percebida como uma ferramenta de problematização que estimula o processo de resolução e de exploração do problema ou situação-problema. Nesse processo, a “atividade de



exploração de problemas é considerada a ferramenta mais importante e mais ampla de todas, ela compreende tanto a resolução como a proposição” (ANDRADE, 2017, p.371).

Nosso trabalho em sala de aula pautou-se nesta perspectiva atual do autor, em que a *Experiência de Exploração, Resolução<sub>exploração</sub>, Proposição<sub>exploração</sub> e Codificação – Descodificação de Problemas*, que se trata de uma versão ligeiramente modificada da primeira, considerando como ferramentas essenciais de trabalho o processo de codificação e descodificação e a proposição de problemas ao longo de todo o processo educativo.

Compreendemos que, em todas as perspectivas aqui discutidas, é extremamente importante que o professor escute os questionamentos dos alunos durante o processo de resolução e exploração dos problemas. A metodologia de Resolução de Problemas, em especial a proposta de Andrade (1998), exige que o professor saiba ouvir seus alunos no sentido de saber escutar, buscar compreender suas indagações para que, apoiados nelas, posteriormente, professor e alunos apresentem problematizações e explorações em diferentes dimensões que um problema pode permitir.

O professor que apoia seu trabalho pedagógico na expectativa de conduzir seu aluno a construir o seu próprio conhecimento precisa conseguir identificar os momentos oportunos para introduzir as problematizações, as quais não podem intimidar o aluno, mas impulsioná-lo a buscar o seu conhecimento. Sob a ótica da metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, entendemos que para uma profunda e significativa exploração dos problemas é extremamente necessário que o professor consiga interpretar os registros escritos dos alunos, bem como seus questionamentos e trocas de ideias.

Nas próximas linhas, apresentamos os procedimentos metodológicos realizados no decorrer da pesquisa de campo.

### **3. A Resolução, Exploração e Proposição de Problemas: um caminhar metodológico**

A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola do município de Nova Floresta - PB. A turma era composta por 25 alunos, todavia trabalhamos com apenas 16. A logística empregada para a coleta e aprofundamento de dados (gravações e análise contínua dos registros escritos dos alunos e argumentações) durante as discussões nos encontros foi um dos fatores que influenciaram na determinação da quantidade de alunos que iriam participar do estudo.

Estrategicamente, solicitamos à professora responsável pela turma que, por conhecer melhor o perfil do alunado, organizasse as duplas, seguindo como critério os níveis de facilidades/dificuldades semelhantes na disciplina de Matemática. O interesse em estimular a troca

de ideias entre os componentes das duplas durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição dos Problemas foi a razão pela qual decidimos organizar as duplas dessa maneira.

Os encontros realizados totalizaram 18 horas-aula, distribuídas em 5 encontros com duração de 4 horas cada, com exceção do último, que teve duração de 2 horas. Em todos eles procuramos explorar e analisar a mobilização e construção das ideias essenciais da Combinatória através da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, fundamentando nossa prática pedagógica nas principais ideias defendidas por Onuchic e Allevato (2011) a respeito do ensino da Matemática através da Resolução de Problemas e nos pressupostos teóricos de Andrade (1998; 2017) acerca da relação *Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado*, e pelo trabalho de codificação e decodificação realizado. Reunindo as ideias dos autores, organizamos uma dinâmica para o desenvolvimento dos encontros realizados. Na Ilustração 2, de maneira sintetizada, apresentamos a dinâmica dos encontros:

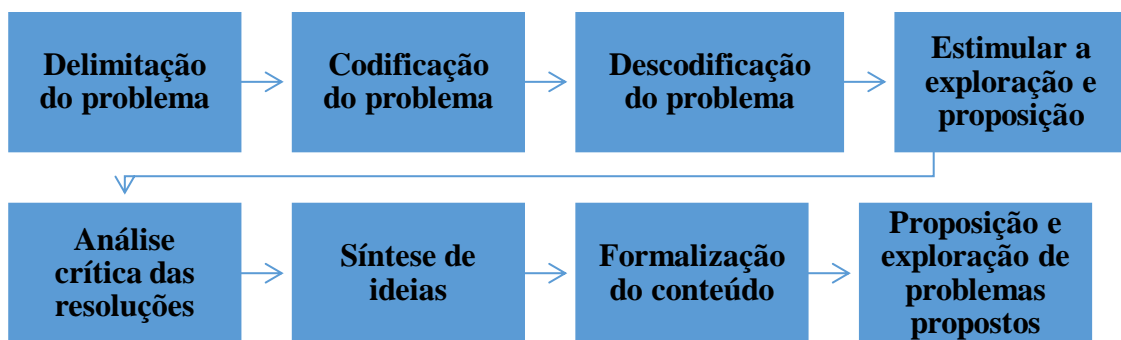


Ilustração 2: Design da dinâmica dos encontros  
Fonte: Autoria própria

Os problemas combinatórios trabalhados foram retirados da pesquisa de Pessoa (2009) e tratam dos quatro tipos de problemas combinatórios (combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano) que precisam ser abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Todos foram explorados com o objetivo de estimular o aluno a elaborar variados tipos de representações (árvores de possibilidades, listas de possibilidades) para a listagem dos agrupamentos. No Quadro 1, expomos os problemas que foram trabalhados ao longo dos quatro encontros.

Quadro 1: Ordem dos problemas trabalhados

ENCONTROS	PROBLEMAS
1º Encontro	1. <sup>4</sup> Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?
2º Encontro	2. Para a festa de São João da escola tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
3º Encontro	3. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?
4º Encontro	4. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?

Fonte: Adaptado de Pessoa (2009)

Reiteramos que a mediação realizada durante o processo de codificação e decodificação do problema teve como intencionalidade direcionar os alunos a um caminho de construção de novos conhecimentos.

Convém ressaltar também que para a análise da construção e mobilização dos conceitos combinatórios dos alunos ao longo dos encontros nós nos apoiamos nos pressupostos teóricos da Teoria dos Campos Conceituais defendida por Vergnaud (1982; 1990; 1991; 1992; 2018). Tal teoria nos ajudou a compreender como ocorre o processo de aprendizagem e a construção de um conceito combinatório dos alunos e, além disso, subsidiou algumas decisões que tomamos ao longo dos encontros no sentido de permitir “[...] prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos” (VERGNAUD, 2008, p. 33).

No que se refere ao *conceito*, Vergnaud (1990) defende que este não pode ser reduzido à sua definição, pela razão de que um conceito adquire significado para uma criança por meio de diferentes situações e problemas que pretendem ser resolvidos. Assim, para estudar profundamente o desenvolvimento de um conceito é necessário se apoiar em três dimensões ao mesmo tempo, sendo elas: (i) um conjunto de *situações* (tarefas); (ii) um conjunto de *invariantes*; e (iii) um conjunto de *representações simbólicas*.

Sob este olhar, em nosso estudo consideramos que as *situações* são como os tipos de problema (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano); seus *invariantes* são as propriedades

<sup>4</sup> Durante o trabalho com este problema, destacamos para os estudantes que cada um dos três alunos mencionados no enunciado do problema, poderiam ganhar somente uma bicicleta, dentre as duas sorteadas, e que além disso, as duas bicicletas seriam do mesmo modelo e cor. Precisamos enfatizar tais informações pois estas não foram apresentadas no enunciado do problema. Logo, os estudantes, sem serem avisados, poderiam considerar as duas bicicletas em diferentes modelos ou cores o que tornaria o problema 1 um do tipo de arranjo, ao invés de um de combinação.

características de cada um desses tipos de problema; e as *representações simbólicas* são as diferentes formas de representar as resoluções dos problemas ou as formas de apresentá-los.

Voltando para os objetivos educacionais delineados para cada encontro, nos dois primeiros objetivamos trabalhar tipos de problemas combinatórios cuja ordem de escolha e combinação dos elementos não gera novas possibilidades de combinação. Buscamos também evidenciar a diferenciação entre o problema de combinação e o de produto cartesiano. Este último envolve todos os elementos dos conjuntos iniciais, já os problemas de combinação não necessariamente precisam envolvê-los.

Objetivando contrastar as características dos problemas abordados nos primeiros encontros, trabalhamos os problemas de permutação e arranjo, respectivamente. Neles, a ordem e seleção dos elementos geram novas possibilidades de agrupamentos, o único aspecto que os diferencia é que no primeiro todos os elementos do conjunto inicial fazem parte dos agrupamentos gerados, ao passo que no segundo isso não necessariamente precisa acontecer.

Uma vez que nos quatro primeiros encontros trabalhamos um tipo diferente de problema combinatório, no último sentimos a necessidade de formalizar as ideias construídas ao longo dos encontros. Assim, no quinto encontro buscamos contrastar as características dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Abaixo, no Quadro 2, apresentamos a sequência dos tipos de problemas trabalhados em cada encontro:

Quadro 2 : Tipos de problemas trabalhados por encontro

<b>Encontros</b>	<b>Tipos de Problemas</b>
<b>1º Encontro</b>	Combinação
<b>2º Encontro</b>	Produto Cartesiano
<b>3º Encontro</b>	Permutação
<b>4º Encontro</b>	Arranjo
<b>5º Encontro</b>	Problemas combinatórios propostos pelos alunos/ Formalização das ideias

**Fonte:** Autoria própria

A fim de compreender a produção dos dados e resultados gerados, na presente pesquisa descrevemos e analisamos detalhadamente os dados coletados – por meio de observações, notas de campo, registros escritos e gravações de áudio –, fazendo inferências e interpretações, almejando concretizar resultados concisos a respeito dos encontros realizados. Esse planejamento metodológico está fundamentado pelas considerações de Bogdan e Biklen (1994, p.48), posto que a avaliação

qualitativa é descritiva, sendo os dados recolhidos “[...] em forma de palavras ou imagens e não números”.

Confiamos que o planejamento metodológico desta pesquisa nos direcionou a caminhos frutíferos de produção e recolha dos dados, o que nos possibilitou realizar uma análise consistente dos mesmos. Na sequência, apresentamos a descrição e análises dos dados recolhidos durante a pesquisa de campo.

#### 4. Descrição e análise de uma experiência didática sob a perspectiva da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas

Ao longo dos encontros, observamos que os processos, insights e as estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos cada vez mais foram se diversificando. Nos dois primeiros encontros foram adotadas como estratégias de resolução apenas o desenho e o texto escrito. Com o decorrer dos encontros, notamos o aparecimento da estratégia das árvores das possibilidades, listagens das possibilidades, tabelas, quadros e, até mesmo, a utilização do algoritmo de divisão e multiplicação. Mediante tais resultados, confiamos que a Resolução potencializa a capacidade de os alunos pensarem matematicamente, tendo em vista que conseguiram utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas (ONUHCIC; ALLEVATO, 2011). Como forma de ilustração de tal evolução, apresentamos alguns registros escritos (Figuras 3, 4, 5 e 6) de resoluções da dupla D1 desenvolvidos ao longo dos encontros:

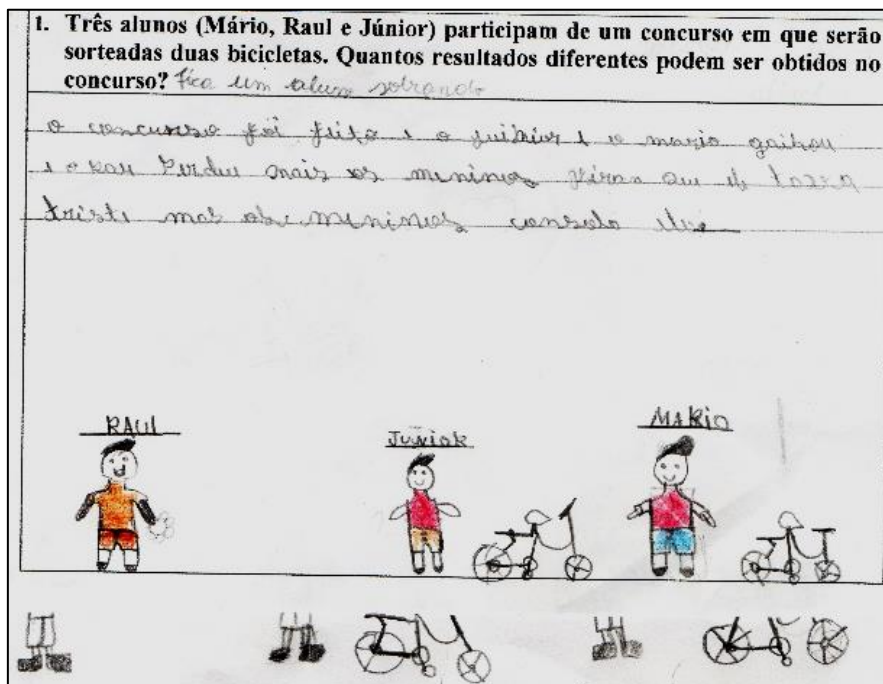


Figura 3: Resolução da dupla D1 do problema 1

Fonte: Acervo dos pesquisadores

2. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? *12 pares*

Mario	Luíza
Pedro gabriel João	Pedro gabriel João
Clara	Beatriz
Pedro gabriel João	Pedro gabriel João

Figura 4: Resolução da dupla D1 do problema 2  
 Fonte: Acervo dos pesquisadores

3. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

$i \overset{p}{<} M$        $p \overset{i}{<} M$   
 $p \overset{M}{<} i$        $M \overset{p}{<} i$   
 $M \overset{i}{<} p$        $i \overset{M}{<} p$

Figura 5:- Resolução da dupla D1 do problema 3  
 Fonte: Acervo dos pesquisadores

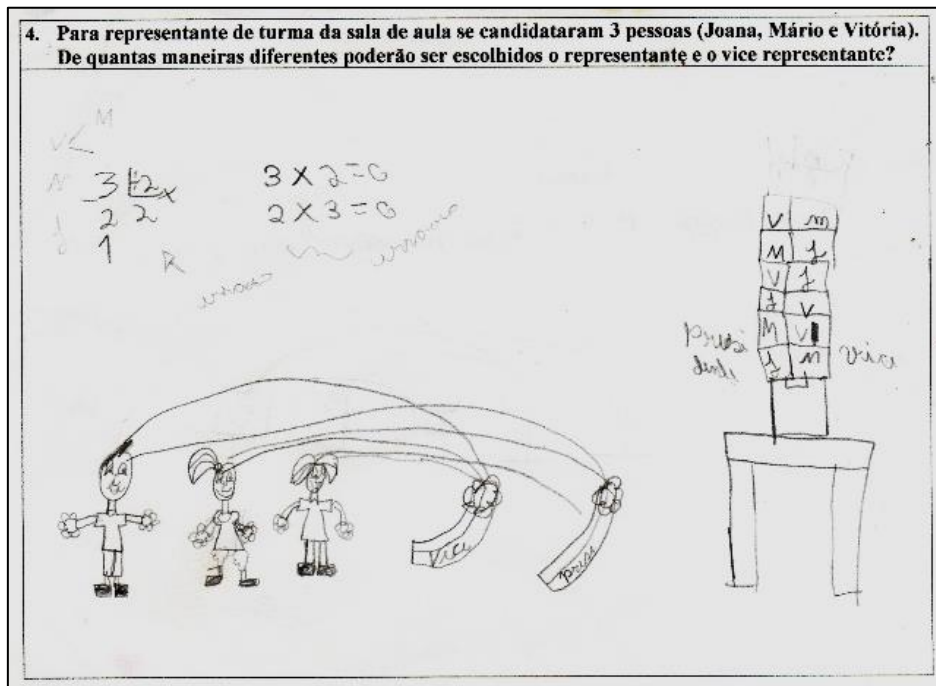


Figura 6: Resolução da dupla D1 do problema

Fonte: Acervo dos pesquisadores

Assim como as estratégias de resoluções, observamos que os argumentos apresentados pelos alunos, ao longo do estudo, tornaram mais consistentes e coerentes as características dos problemas. Nos primeiros encontros, quando questionados sobre as estratégias de resolução utilizadas, os argumentos apresentados por eles fundamentavam-se em conhecimentos espontâneos oriundos de situações extraescolares. No decorrer do estudo, estes argumentos passaram a ser fundamentados também em conhecimentos combinatórios construídos em encontros anteriores.

### Quadro 3 - Evolução dos argumentos apresentados pela a dupla D1

Recorte de diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1 no encontro 01:

*D7 (Aluna A14): O Raul tinha perdido e o Junior e o Mário tinham ganhado as duas bicicletas. Mas como Junior e o Mário eram muito amigos dele, eles foram e emprestaram a bicicleta de algum deles, para os três brincarem juntos.*

*PP: Existe outra possibilidade?*

*D7 (Aluna A13): É Raul pode ganhar e emprestar a dele pra Junior.*

Recorte de diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1 no encontro 04:

*PP: E neste aqui, a ordem importa?*

*D1 (ambas as alunas): Sim! (risos)*

*PP: Porque?*

*D1 (Aluna A2): Porque aqui é vice e aqui é presidente, nem são dois para vice e nem dois para presidente.*

Fonte: Acervo dos pesquisadores

O índice de acertos das resoluções também foi outro ponto no qual observamos uma evolução. Gradativamente, percebemos uma evolução entre os três primeiros encontros e o último. Nos três primeiros, em média, apenas duas ou três duplas conseguiram apresentar a resolução dos problemas corretamente. No quarto encontro, apenas duas duplas apresentaram resultados totalmente incorretos.

No Quadro 4, trazemos de maneira sintetizada os principais resultados que observamos durante os encontros:

**Quadro 4 - Principais representações e produções**

<b>Produções</b> <b>Encontros</b>	<b>Representação de codificação</b>	<b>Representação de descodificação</b>	<b>Tipos de Problemas Propostos</b>	<b>Índice de resoluções corretas<sup>5</sup> por dupla</b>
<b>Encontro 01</b> (combinação)	Oral, desenho e texto escrito	Desenhos e texto escrito	--	02
<b>Encontro 02</b> (produto cartesiano)	Oral, desenho e texto escrito	Desenhos e árvores das possibilidades	Combinação	02
<b>Encontro 03</b> (permutação)	Oral	Desenhos, árvores das possibilidades, listagem das possibilidades e algoritmo de divisão e multiplicação	Combinação e produto cartesiano	03
<b>Encontro 04</b> (arranjo)	Oral	Desenhos, árvores das possibilidades, listagem das possibilidades e algoritmo de divisão e multiplicação	Combinação	05
<b>Encontro 05</b> (problemas propostos pelos alunos e formalização das ideias)	Oral	Desenhos, árvores das possibilidades, listagem das possibilidades e algoritmo de divisão e multiplicação	--	--

**Fonte:** Autoria própria

O aumento no índice de respostas corretas, a consistência e coerência dos argumentos e a variedade de estratégias de resolução percebida evidenciam que a diversidade de problemas

<sup>5</sup> Na contagem também consideramos as resoluções parcialmente corretas por estas apresentarem algumas estratégias de resolução corretas.



trabalhados, bem como as problematizações realizadas ao longo dos encontros favoreceram o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes. Concordamos com Vergnaud (1982) ao compreender que a construção do conceito para o aluno somente confere sentido quando ele o constrói a partir de uma variedade de problemas a serem resolvidos. Contudo, acreditamos também que seja necessário o professor, ao longo do processo educativo, identificar os momentos oportunos para dispor tais problemas aos alunos, de modo que os estimule a refletir sobre as características dos problemas combinatórios, permitindo-os fazer múltiplas observações dos invariantes combinatórios.

O trabalho apoiado na perspectiva da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas exige que o professor seja perspicaz para identificar, durante esses processos, que conceitos precisam ser melhor trabalhados, que questionamentos podem favorecer na construção do conhecimento dos alunos e em que momentos esses devem ser apresentados. Avaliar o que se deve dizer, como dizer, e em que momento dizer, é um dos dilemas mais desconcertantes que os professores podem encontrar, pois, por um lado, o que é dito pode reduzir a reflexão dos alunos sobre o problema, e, por outro, pode conduzi-los à construção de um novo conhecimento (VAN DE WALLE, 2009). Essa questão de que o professor deve incentivar a reflexão dos invariantes dos problemas por meio de questionamentos e problematizações precisa ser analisada e realizada com certa cautela.

À vista disso, entendemos que o trabalho pedagógico pautado na perspectiva metodológica defendida por Andrade (1998, 2017) não é uma tarefa fácil de ser desenvolvida, porém é recompensadora, pois verificamos que ela pode promover uma aprendizagem com significado para nossos alunos.

Observamos que tanto a Resolução de Problemas quanto a Exploração e a Proposição “fornece[m] dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82). No que diz respeito à Resolução de Problemas, em todos os encontros observamos que as primeiras abordagens realizadas nos forneceram evidências sobre o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, auxiliando-nos a delinear as futuras problematizações a serem promovidas em etapas posteriores. Através da resolução, conseguimos avaliar a influência dos conceitos previamente formados sobre as estratégias de resolução adotadas e a causa para a dificuldade de interpretação dos enunciados demonstrada pelos alunos nos dois primeiros encontros.

Pensando nas contribuições que a Exploração de Problemas promoveu ao ensino e aprendizagem da Combinatória, constatamos que ela nos permitiu averiguar com maior aprofundamento o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos. A partir da exploração conseguimos melhor investigar a capacidade de sistematização do raciocínio

combinatório no momento de elencar as possibilidades de agrupamentos, bem como a familiarização dos alunos para fazerem a contagem desses nas diferentes situações propostas ao longo do processo.

As problematizações realizadas nesta etapa potencializaram o trabalho de reflexão sobre os problemas propostos. Mediante isso, confiamos que o trabalho de exploração articulado com o de proposição possibilitou uma compreensão mais aprofundada das características dos invariantes dos problemas combinatórios, bem como o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico, ao passo que nos permitiu trabalhar as diferentes dimensões dos problemas propostos.

No que tange às contribuições da Proposição de Problemas para o ensino e aprendizagem da Combinatória, verificamos que a utilização das situações extraescolares facilitou a elaboração dos problemas propostos pelos alunos. Todos os problemas propostos por eles retratavam situações que faziam parte do seu cotidiano. Nas Figuras 7 e 8, apresentamos alguns problemas propostos pelos alunos ao longo dos encontros:

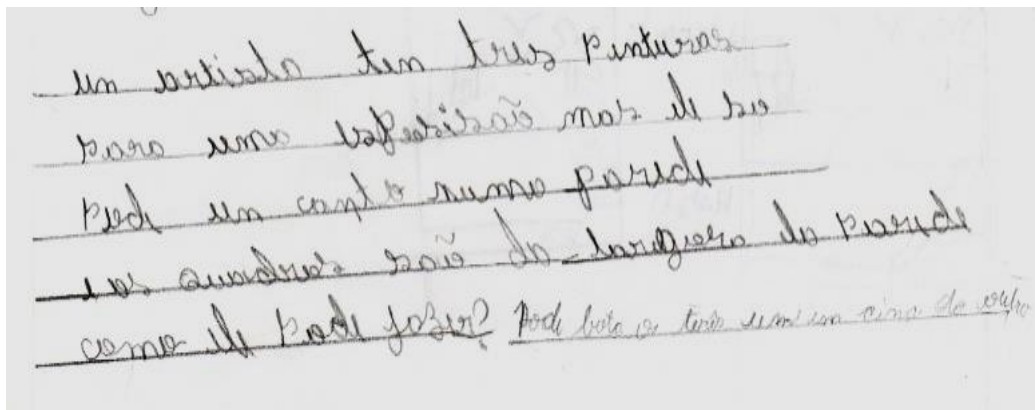


Figura 7: Problema de permutação elaborado pela a dupla D1  
 Fonte: Acervo dos pesquisadores

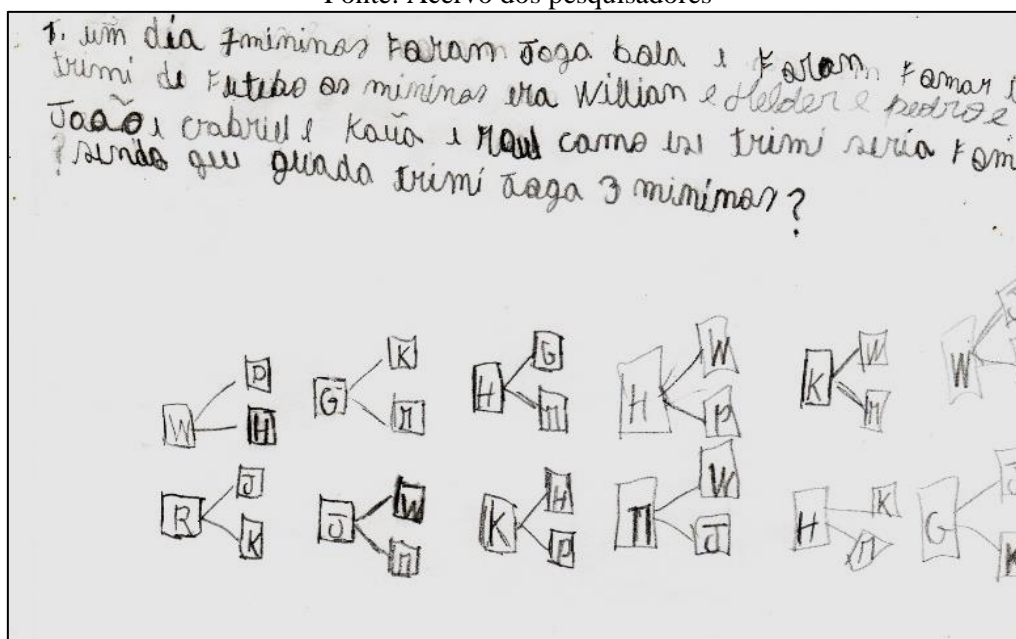


Figura 8 – Problema de combinação elaborado pela a dupla D2  
 Fonte: Acervo dos pesquisadores

Verificamos também que quando enxergada como uma *ferramenta de problematização* a ser utilizada *antes, durante e depois* do processo de resolução e exploração de problemas, a proposição de problema possibilita ao professor realizar um ensino reflexivo, em que os alunos são instigados a refletir sobre a validade e coerência de suas ações e raciocínios.

Além dessas valiosas contribuições, observamos que a proposição de problemas evidencia a compreensão real dos alunos acerca dos invariantes dos problemas. Durante os encontros, observamos que, embora os alunos tenham demonstrado uma compreensão clara dos invariantes dos problemas durante o momento de resolução e exploração dos problemas, quando orientados a produzir seus próprios problemas, demonstraram ter dificuldade em elaborar problemas que envolvessem os mesmos invariantes do problema inicial.

Mesmo com todos os resultados favoráveis, constatamos que seria necessário realizar mais encontros, pois o trabalho de aprofundamento dos conceitos combinatórios durante as discussões teve que se limitar apenas aos encontros cedidos pela professora titular da turma. Assim, houve momentos em que percebemos que poderíamos aprofundar mais as discussões, porém, pelo espaço de tempo, decidíamos progredir para as demais etapas planejadas na dinâmica.

Entendemos que com a realização de mais encontros os alunos poderiam desenvolver mais a maturidade para propor problemas espontaneamente, sem necessitar das provocações da pesquisadora. Ao longo de todos os encontros, observamos que os alunos buscavam sempre reorganizar seus raciocínios com o objetivo de responder as problematizações provocadas apenas pela pesquisadora durante a Resolução, Exploração e Proposição de Problemas. Gostaríamos de ter tido um pouco mais de tempo para provocar nos alunos uma mudança de atitude que os motivasse a propor problemas em busca de compreender cada vez melhor as diferentes dimensões dos problemas propostos e os diversos conhecimentos que os estruturam.

## 5. Considerações Finais

A partir da finalização do trabalho desenvolvido em sala de aula foi possível constatar que a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas contribuiu para a promoção da aprendizagem combinatória dos alunos, possibilitando o desenvolvimento de um processo educativo reflexivo, no qual o estudante tem a oportunidade de significar os conceitos combinatórios construídos e mobilizados durante o processo.

Com o caminhar dos encontros, observamos que o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos tornou-se cada vez mais aparente. As estratégias de resolução e os argumentos apresentados por eles passaram a se fundamentar não somente em conhecimentos espontâneos, oriundos de situações escolares e do cotidiano, mas também em conhecimentos

combinatórios construídos pelo trabalho de reflexão realizado durante os encontros anteriores. Entendemos que este progresso pode ser creditado ao trabalho de reflexão sobre as problematizações provocado pela pesquisadora ao longo de todo o processo de resolução e exploração dos problemas principais e secundários propostos.

Confiamos que a ação pedagógica ancorada na relação *Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado*, defendida por Andrade (1998, 2017), potencializou a aprendizagem Combinatória. As problematizações apresentadas *antes, durante e depois* do processo de codificação e descodificação dos problemas incitaram os alunos a realizarem um trabalho reflexivo mais aprofundado sobre as características dos invariantes dos problemas combinatórios. Isso favoreceu, significativamente, a compreensão dos invariantes, a organização e síntese das ideias e, por conseguinte, a delimitação das estratégias de resolução para os diferentes tipos de problemas combinatórios.

## 6. Referências

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre resolução, exploração e proposição de problemas matemáticos no cotidiano da sala de aula. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 355-395.

BORBA, R. **Antes cedo do que tarde**: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais. Recife – PE, 2016.

BOGDAM, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática: ensino de primeira à quarta série. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, 1997.

BRASIL. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: educação estatística. Secretaria de Educação Básica, Caderno 07, Brasília, 2014.

ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. Problem solving for the 21<sup>st</sup> century. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of mathematics education**: seeking new frontiers. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2010. p. 263-290.

KILPATRICK, J. Reformulando: abordando a resolução de problemas matemáticos como investigação. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p.163-187.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Tradução Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais [...]**. Pirenópolis, GO, 2015.

PARAÍBA. **Referenciais curriculares do ensino fundamental do Estado da Paraíba**. Matemática. Ciências da Natureza. Diversidade Sociocultural. Secretaria do Estado da Educação e Cultura, João Pessoa, PB, 2010.

PESSOA, C. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 267f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp*, v. 17, jan./jun., 2009.

SANTOS, E. V. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2019. 228. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SANTOS, E. **Contribuições teóricas e didáticas para o ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, PB, 2016.

SERRAZINA, L. Resolução de problemas e formação de professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. Livraria da Física: 2017, p.55-83.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-32.

VAN DE WALLE, J.A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação na sala de aula. Tradução de Paulo H. Colenese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. **Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education**: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, p. 31-41, Canadá, 1982.

VERGNAUD, G. Conceptual fields, problem solving and intelligent computer tools. In: De Corte, E.; Linn, M.; Mandl, H.; Verschaffel, L. **Computer-based learning environments and problem solving**, 1992, p. 287-308.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad**: Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherche en Didactique des Mathématiques. v.10, n.2, 3, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **Todos perdem quando não usamos a pesquisa na prática**. Nova Escola, ed.215, set., 2008. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/todos-perdem-quando-nao-usamos-pesquisa-pratica-427238.shtml>. Acesso em: 14 fev. 2018.