



## UMA ANÁLISE DAS DIFERENTES ABORDAGENS DE RESOLUÇÃO DE UMA TAREFA MATEMÁTICA COM BASE NO PERFIL CONCEITUAL DE EQUAÇÃO

**Karina Aguiar Alves**

Universidade Federal do ABC

E-mail: [karinaguilar@alunoufabc.edu.br](mailto:karinaguilar@alunoufabc.edu.br)

**Regina Lucia da Silva**

Secretaria Estadual de Educação

E-mail: [regiluciasilva@hotmail.com](mailto:regiluciasilva@hotmail.com)

**Vivili Maria Silva Gomes**

Universidade Federal do ABC

E-mail: [vivili.gomes@ufabc.edu.br](mailto:vivili.gomes@ufabc.edu.br)

**Marcia Aguiar**

Universidade Federal do ABC

E-mail: [marcia.aguiar@ufabc.edu.br](mailto:marcia.aguiar@ufabc.edu.br)

### Resumo

Neste artigo apresentamos resultados da análise de três resoluções diferenciadas de uma tarefa matemática tendo como abordagem o modelo teórico do Perfil Conceitual de Equação. Esses resultados provêm de um estudo feito no âmbito de um projeto de pesquisa de caráter longitudinal, que teve como objetivo norteador investigar de que forma atividades matemáticas que contemplem zonas de Perfil Conceitual de Equação podem contribuir para a ampliação dos conhecimentos algébricos de professores e futuros professores. Elegemos esse modelo teórico, por se estruturar na premissa de que, ao respeitarmos e valorizarmos as multiplicidades de modos de pensar, enriquecemos as abordagens de ensino em matemática. Nessa linha investigativa optamos, neste artigo, por estudar as ideias que surgiram a partir das resoluções de estudantes do 3º ano do Ensino Médio, quando foram convidados a resolver uma tarefa matemática. Nossa investigação, se pauta em características qualitativas de cunho interpretativo a partir dos dados produzidos e analisados. Os resultados decorrentes desse estudo nos informam que, os estudantes transitaram por conhecimentos geométricos diversificados, nos mostrando a apropriação de seus significados ao mobilizá-los de forma criativa em suas resoluções, como também refletiram sobre suas resoluções de forma ponderada, ao observar as soluções obtidas e esperadas

**Palavras-chave:** Ensino de equação; Perfil Conceitual de Equação; Estratégias de resolução; Conhecimentos algébricos.

## AN ANALYSIS OF THE DIFFERENT RESOLUTION STRATEGIES OF A MATHEMATICAL TASK BASED ON THE CONCEPTUAL PROFILE OF EQUATION

### Abstract

In this paper we present results of the analysis of three different resolutions of a mathematical task taking as an approach the theoretical model of the Conceptual Profile of Equation. These results come from a study carried out within a research project of longitudinal character, whose main objective was to investigate how mathematical activities that contemplate zones of Conceptual Profile of Equation can contribute to the expansion of the algebraic knowledge of teachers and future teachers. We chose this theoretical model, because it is structured on the premise that, by respecting and valuing the thinking modes multiplicities, we enrich the mathematics teaching approaches. In this research line, in this article, we choose to study the ideas that emerged from the resolutions of the third year students at High School, when they were invited to solve a mathematical task. Our research is based on qualitative characteristics of an interpretative nature based on the produced and analyzed data. The study results inform us that the students transited through diverse geometric knowledge, showing us the appropriation of their meanings by mobilizing them in a creative way in their resolutions, as well as reflecting on their resolutions in a weighted way, observing the obtained and expected solutions.

**Key words:** Teaching of Equation; Conceptual Profile of Equation; Resolution Strategies; Algebraic Knowledge.

## UN ANÁLISIS DE LAS DIFERENTES ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE UNA TAREA MATEMÁTICA BASEADO EN EL PERFIL CONCEPTUAL DE ECUACIÓN

### Resumen

En este artículo presentamos los resultados del análisis de tres resoluciones diferenciadas de una tarea matemática teniendo como enfoque el modelo teórico del Perfil Conceptual de Ecuación. Estos resultados provienen de un estudio echo en el alcance de un proyecto de investigación de carácter longitudinal, que tuvo como objetivo rector investigar de qué forma actividades matemáticas que contemplan zonas de Perfil Conceptual de Ecuación pueden contribuir a la ampliación de los conocimientos algebraicos de maestros y futuros maestros. Elegimos este modelo teórico mediante la estructuración de la premisa de que, cuando respetamos y valoramos las multiplicidades formas de pensar, enriquecemos los enfoques de la enseñanza en matemáticas. En esa línea de investigación optamos, en este artículo, por estudiar las ideas que surgieron desde las resoluciones de los estudiantes del 4º ESO, cuando fueron invitados a resolver una tarea matemática. Nuestra investigación, está guiada en características cualitativas de naturaleza interpretativa mediante los datos producidos y analizados. Los resultados derivados de este estudio nos informan que, los estudiantes traspasaron por conocimientos geométricos diversificados, mostrándonos la apropiación de sus significados al movilizarlos creativamente en sus resoluciones, sino que también reflexionaran sobre sus reflexiones de manera ponderada, mediante la observación de las soluciones obtenidas y esperadas.

**Palabras clave:** Enseñanza de la ecuación; Perfil Conceptual de Ecuación, Estrategias de resoluciones y conocimientos algebraicos.

## Introdução

Este artigo se insere num projeto de pesquisa longitudinal desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior (CAPES); que teve como objetivo investigar os conhecimentos que professores que ensinam matemática mobilizam ao trabalhar com abordagens de ensino que contemplem as zonas do perfil conceitual de equação.

Nossa preocupação com o ensino de álgebra remonta a pesquisas que abordaram tal temática no início dos anos 90. Uma dessas pesquisas, por exemplo, seria Booth (1995), que na busca de compreender as dificuldades dos estudantes em aprender álgebra, identifica que esses estudantes apresentam erros semelhantes ao longo dos anos na educação básica, independentemente da idade e do tempo de estudo.

Outra constatação sobre as dificuldades na aprendizagem de álgebra pode ser observada por meio dos resultados de avaliações oficiais, como Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que, apesar de indicar melhorias no desempenho dos educandos, ainda demonstram lacunas conceituais expressivas na aprendizagem de conceitos algébricos (RIBEIRO, 2016). Nesse estudo, realizado com dados dessas provas provenientes do Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), podemos destacar algumas das competências desejáveis que não foram demonstradas pelos estudantes, tais como: (I) identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema; (II) resolver equações do 1º grau com uma incógnita; (III) resolver problemas que envolvam equação do 2º grau; (IV) identificar, em um gráfico de função, o comportamento de crescimento/decrescimento; (V) identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau; (VI) identificar o gráfico de uma reta dada sua equação; dentre outras.

Procurando entender o contexto no qual o desenvolvimento dessas competências deveria ocorrer e para sugerir alguns caminhos, tomamos como base os estudos realizados por Ribeiro (2013) que propõe o modelo do Perfil Conceitual de Equação (PCEq) baseado nas ideias de Mortimer (1994) sobre a convivência de diferentes significados de um conceito no mesmo indivíduo.

A partir de estudos provenientes dos domínios macrogenéticos e microgenéticos, ou seja, estudos de origem histórico-didáticos e investigações realizadas com os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (professores e estudantes); Ribeiro (2013) propõe uma caracterização do conceito de equação baseado em sua polissemia (característica que diversas palavras possuem de assumir diferentes significados dependendo do contexto). Tal composição tem por base diferentes zonas de abordagem, isto é, formas diferenciadas de ver, representar e dar significado para o conceito de equação. A princípio, seria um modelo de caracterização das diferentes significações que um mesmo conceito possa assumir e residir em um indivíduo. Em estudos recentes,

essa noção tem sido ampliada e incorporada a abordagens de ensino que contemplem essas diferentes significações (ALVES; SILVA; GOMES, 2017)<sup>1</sup>.

Inserido nessas premissas, destacamos nosso interesse em tarefas<sup>2</sup> matemáticas que abordem conceitos algébricos de forma diversificada. Investigaremos neste artigo ideias que surgiram nas resoluções de tarefas matemáticas realizadas por estudantes do 3º ano do Ensino Médio (EM) com o intuito de analisar quais resoluções, feitas por estudantes, dialogam com as zonas de perfil conceitual de equação. Acreditamos que esse tipo de discussão possa contribuir para a ampliação dos conhecimentos dos professores sobre os conhecimentos algébricos de seus estudantes.

### O Perfil Conceitual de Equação

Nesta seção, apresentaremos os embasamentos teóricos que nos orientaram na confecção e aplicação da tarefa a ser analisada. Cabe salientar que nosso intuito concentra-se em analisar, por meio da resolução dos estudantes, como seus conhecimentos sobre o conceito de equação são mobilizados na realização de uma tarefa proposta.

A noção de perfil conceitual (MORTIMER, 1994) pode ser sintetizada na afirmação de que existem diferentes “modos de pensar e formas de falar” (DINIZ JÚNIOR; AMARAL, 2017, p. 2). Essa afirmação está inteiramente implicada na importância que a linguagem assume nos processos de desenvolvimento do pensamento e na convivência de diferentes significações de um mesmo conceito num indivíduo, premissa abarcada pela teoria socioconstrutivista de Vygotsky (1987).

Considerando a importância do desenvolvimento da linguagem, vamos nos ater a uma das características que o desenvolvimento da fala implica na apropriação dos significados, a noção de polissemia das palavras. Essa noção pode ser sintetizada na ideia de que determinadas palavras assumem significados próprios dos contextos nos quais são utilizadas, ou seja, as palavras assumem significações sociais, que podem contribuir para um embate entre os conceitos utilizados coloquialmente e cientificamente. A partir dessas divergências de significações, temos a noção de que o conceito promove sentido a uma prática, ou seja, as significações atribuídas a um conceito não são estáveis, elas são dinâmicas e mutáveis, dependendo da sua utilização.

Essas possíveis conceitualizações e atribuições de diferentes significados a uma palavra podem conviver em um mesmo indivíduo, não representando o abandono ou a superação de um significado em detrimento de outro, essa noção é apresentada por Wertsch (1991) como heterogeneidade de pensamentos e pode ser entendida como

<sup>1</sup> Os dados apresentados neste artigo são uma extensão de uma análise prévia já divulgada em eventos da área de Educação Matemática (ALVES; SILVA; GOMES, 2017)

<sup>2</sup> Estamos utilizando o termo “tarefas”, no sentido de Ponte (2005), para as situações matemáticas elaboradas pelos professores-participantes e que foram desenvolvidas junto aos alunos da Educação Básica.

o desenvolvimento de novas formas de pensamento dá origem a novos tipos de pensamento, mas desde muito cedo algumas formas de atividade continuam a cumprir o seu papel cultural, tipos mais antigos de pensamento são preservados e continuam a funcionar bem em contextos apropriados<sup>3</sup>. (EL-HANI; SILVA-FILHO; MORTIMER, 2014, p. 35, tradução nossa)

Baseados nessa mutabilidade de significações que o indivíduo possa ter, foram perfilados alguns conceitos que diante de sua polissemia podem resguardar diferentes significações. Temos diferentes trabalhos no campo da educação em ciências que perfilaram os conceitos de vida (COUTINHO; MORTIMER; EL-HANI, 2007), morte (NICOLLI; MORTIMER, 2012), evolução (SEPULVEDA; MORTIMER; EL-HANI, 2013) e, no campo da educação matemática, temos o trabalho de Machado (1998) com o perfil conceitual de função, de Ribeiro (2013) com o perfil conceitual de equação (PCEq), e mais recentemente, temos o trabalho de Elias (2017) com estudos preliminares sobre as diferentes significações que o conceito de corpo dos números racionais pode assumir na matemática escolar.

O modelo teórico do PCEq se originou a partir de investigações do domínio macrogenético, oriundos da tese de doutoramento de Ribeiro (2007) na qual, a partir de estudos epistemo-histórico-didáticos sobre o conceito de equação nos apresentou o desenvolvimento histórico de como o conceito fora abordado em diferentes épocas, por diferentes civilizações. Posteriormente, com a junção de trabalhos orientados por Ribeiro, provenientes do domínio microgenético, temos o conhecimento de estudantes e professores (BARBOSA, 2009; DORIGO, 2010) investigados acerca de seu entendimento sobre equação. A partir das convergências oriundas desses estudos temos, em 2013, a publicação do perfil conceitual de equação (RIBEIRO, 2013) contendo cinco zonas de significação.

Ribeiro (2013) organizou o modelo teórico do PCEq em um quadro, no qual foram sintetizadas cinco zonas que demarcam diferentes significações do conceito de equação. Cabe salientar que não há hierarquia entre as zonas, elas constituem formas de se observar e pensar sobre o conceito de equação a partir de diferentes lentes.

---

<sup>3</sup> Wertsch claims that the development of news form of activity continues to fulfill some role in culture, older types of thinking are preserved and continue to function well in appropriate contexts.

Quadro 1 - Zonas constituintes do Perfil Conceitual de Equação

<b>Categoria</b>	<b>Breve descrição</b>
Pragmática	Equação interpretada a partir de problemas de ordem prática. Equação admitida como uma noção primitiva. Busca pela solução predominantemente aritmética.
Geométrica	Equação interpretada a partir de problemas geométricos. Busca pela solução predominantemente geométrica.
Estrutural	Equação interpretada a partir de sua estrutura interna. Busca pela solução predominantemente algébrica.
Processual	Equação interpretada a partir de processos de resolução. Busca pela solução aritmética ou algébrica.
Aplicacional	Equação interpretada a partir de suas aplicações. Busca pela solução aritmética ou algébrica.

Fonte: Ribeiro (2013, p.69)

No desenvolvimento da tarefa, foi solicitado aos professores que explorassem uma das zonas constituintes do PCEq; a zona selecionada para a tarefa foi a zona geométrica. Observaremos nas resoluções dos estudantes elementos que remontem as características oriundas da zona geométrica.

Na seção seguinte, apresentaremos os pressupostos metodológicos que embasaram nossa produção, análise e discussão dos dados.

### **Delineamento Metodológico**

A investigação se pauta em características de pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo. Pretendemos discutir, descrever e analisar as diferentes abordagens que estudantes do 3º ano do EM empregam na resolução de uma tarefa matemática.

Bogdan e Biklen (1994), destacam como característica da abordagem qualitativa a coleta de dados a partir de diferentes fontes, tais como, vídeos, transcrições de entrevistas, registros escritos e outros registros oficiais. A partir destes elementos oriundos de diferentes fontes, procura-se analisar os detalhes com maior precisão, a fim de retratar com maior exatidão o fato analisado.

Esta pesquisa situa-se em um curso de extensão, destinado a professores que ensinam matemática na Educação Básica, realizado nas dependências da UFABC no período de março a dezembro de 2016. O curso intitulado “O ensino de álgebra para a educação básica” foi integralmente planejado e ministrado pelos integrantes do projeto OBEDUC.

Como atividade de um dos encontros destinados a trabalhar o conceito de equação e seu ensino, foi proposto aos professores participantes a confecção de planos de aulas que abarcassem o conceito de equação para turmas do 9º ano do Ensino Fundamental (EF) e do 3º ano do EM. Esses planos de aula foram socializados e compartilhados entre os professores. Dessa socialização foram selecionados dois planos: um para o 9º ano do EF e outro para o 3º ano do EM, a serem trabalhados em uma sala de aula por um professor voluntário do curso. Como já dito, o enfoque desta investigação,

destina-se a analisar as resoluções dos estudantes de uma turma do 3º ano do EM, na qual a tarefa proposta no plano foi trabalhada.

O momento seguinte de produção de dados ocorrera em uma escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de Santo André, pertencente à região metropolitana de São Paulo. Para este momento, contamos com a participação voluntária de um dos professores cursistas para aplicar e desenvolver a tarefa selecionada anteriormente no curso de extensão. Tivemos a participação de 35 estudantes do 3º ano do EM que foram organizados em grupos de até cinco pessoas, dispostos em mesas redondas, ao todo formando 7 grupos. Após a organização da sala em pequenos grupos, foram distribuídas as tarefas impressas, que dispuseram de duas aulas de cinquenta minutos cada, para realização da tarefa. Além de contarmos com os protocolos escritos, as ações foram videogravadas. Após esse conjunto de ações, a equipe partiu para as análises, considerando a manifestação dos elementos constituintes da *zona geométrica* do PCEq.

Apresentamos a seguir, a tarefa matemática proposta aos estudantes do 3º ano do EM:

Figura 1 - Tarefa proposta

(IBMEC) Uma Operadora de telefonia quer instalar uma antena para a transmissão da tecnologia 4G que atendam 4 (quatro) cidades: Cuiabá, Brasília, Salvador e Fortaleza, porém para conseguir atender estas 4 cidades esta torre de transmissão terá que ficar exatamente, conforme a seguir:

- A distância entre a torre de transmissão e a cidade de Cuiabá terá que ser igual à distancia entre a torre e a cidade de Brasília.
- Assim como terá a mesma distância da torre entre a cidade de Fortaleza e a Cidade de Salvador

Considerando as coordenadas abaixo, a localização da estação deverá ser em que ponto:

A - Cuiabá (0,0)  
 B - Brasília (50,0)  
 C - Salvador (60,30)  
 D - Fortaleza (30,60)

Fonte: Dante (2014, p. 67-68)

Para este artigo, são consideradas as resoluções de três grupos dos sete que participaram da tarefa. A partir dos dados produzidos, percebemos que cinco grupos tentaram resolver a tarefa a partir dos conceitos discutidos na aula anterior ministrada pelo professor que se basearam em conceitos da geometria analítica. Desses grupos selecionamos o grupo 5 (G5) porque tentou relacionar os conceitos da geometria com os da álgebra para legitimar a solução encontrada. Os outros dois grupos selecionados foram o grupo 4 (G4) e o grupo 3 (G3) que apresentaram resoluções diferenciadas com um repertório baseado na geometria plana. E nessa ordem apresentaremos as análises dos grupos representantes G5, G4 e G3.

Acreditávamos que a influência da aula ministrada, seria observada facilmente na resolução dos estudantes, mas o que pudemos verificar é que os grupos G4 e G3 optaram por estratégias diferenciadas de resolução.

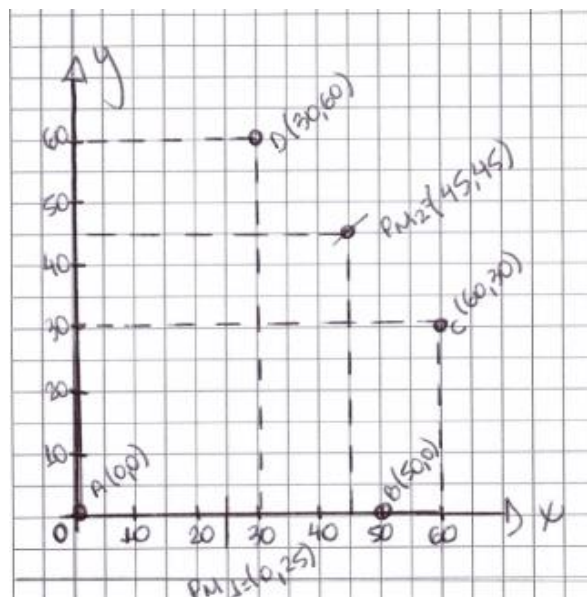
### Analisando com base no Perfil Conceitual de Equação

A partir dos dados produzidos, selecionamos e analisamos, as atividades do G5, do G4 e do G3, nessa ordem, com o intuito de propiciar uma interpretação diversificada das estratégias empregadas pelos estudantes na resolução da tarefa. Apresentaremos uma possível interpretação dos conceitos matemáticos mobilizados pelos estudantes por meio dos protocolos e, em seguida, a análise dessas resoluções, tendo como base as zonas de PCEq do Quadro 1.

### Análise do G5

Para resolver a tarefa (Figura 1) os estudantes fizeram a conversão da linguagem natural (enunciado da tarefa) para uma representação gráfica, plotaram as coordenadas que representam a localização das cidades no sistema cartesiano, o que pode ser observado na figura 2.

Figura 2 - Representação gráfica - G5



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes encontraram os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente  $P_{M1}$  e  $P_{M2}$ , por meio dos cálculos, como podemos perceber na figura 3.



Figura 3 - Cálculo do ponto médio - G5

$$\bullet P_{M_{A+B}} = \left( \frac{0+0}{2}, \frac{50+0}{2} \right) = 0,25$$

$$\bullet P_{M_{C+D}} = \left( \frac{60+30}{2}, \frac{30+60}{2} \right) = 45,45$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 4<sup>4</sup> percebemos que intuitivamente eles conseguiram visualizar a torre de transmissão que deveria estar “aproximadamente no 25”, ou seja, no encontro das mediatrizes.

Figura 4 - Primeiro recorte da descrição do procedimento - G5

• Após fazermos o gráfico efetuamos contas para encontrar o P<sub>M</sub> de A ∪ B ∪ C ∪ D. Depois disso, supomos que no gráfico que a torre se encontrava aproximadamente no 25.

Fonte: Dados da pesquisa

Mais adiante (Figura 5<sup>5</sup>), os estudantes descrevem possíveis estratégias de resolução: numérica (cálculos da média aritmética) e algébrica (equação da reta). Mas, observam que nenhuma das estratégias levantadas se aproximam da figura representada no gráfico (Figura 2).

Figura 5 - Segundo recorte da descrição do procedimento – G5

• Pensamos em fazer a somatória de todos os pontos e ~~dividir~~ dividir por 4 para encontrarmos a torre de transmissão, porém notamos que não é viável. Logo após tentamos usar o  $y - y_0 = m(x - x_0)$  mas não conseguimos.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando os protocolos do G5 notamos que foram mobilizados diferentes conhecimentos provenientes de conteúdos matemáticos, tais como: representação gráfica, ponto médio, média

<sup>4</sup> Neste protocolo os estudantes enunciam suas ideias para a solução: “Após fazermos o gráfico efetuamos contas para encontrar o P<sub>M</sub> de A e B e C e D. Depois disso, supomos que no gráfico que a torre se encontrava aproximadamente no 25.”

<sup>5</sup> Neste protocolo os estudantes enunciam suas ideias para a resolução: “Pensamos em fazer a somatória de todos os pontos e dividir por 4 para encontrarmos a torre de transmissão, porém notamos que não é viável. Logo após tentamos usar o  $(y - y_0) = m(x - x_0)$  mas não conseguimos.”

aritmética e equação da reta. Nas resoluções, o grupo se vale da linguagem natural para comunicar o raciocínio empregado. Observamos que o grupo não chegou a resposta final da tarefa e entendemos que isso se deu porque eles não construíram as retas mediatrizes aos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente, que ao se encontrarem definiriam a localização da torre. Provavelmente não compreenderam a relação do conceito de mediatriz com equação da reta. Cabe destacar que esses são conceitos trabalhados em momentos distintos no processo de escolarização.

A partir da análise do G5, embora não tenham chegado a uma resposta final, observamos que o grupo refletiu sobre possibilidades de resolução e, também, adotaram um caminho que conflitava com a representação gráfica. Os estudantes se apoiaram na representação gráfica para repensar as estratégias de resolução e verificar possíveis incoerências nas suas escolhas. Esta observação realizada pelos estudantes, ratifica a importância de desenvolvermos os aspectos visuais relacionados ao ensino de geometria, característica essa, desejável para a ampliação e significação da *zona geométrica* pertencente ao PCEq.

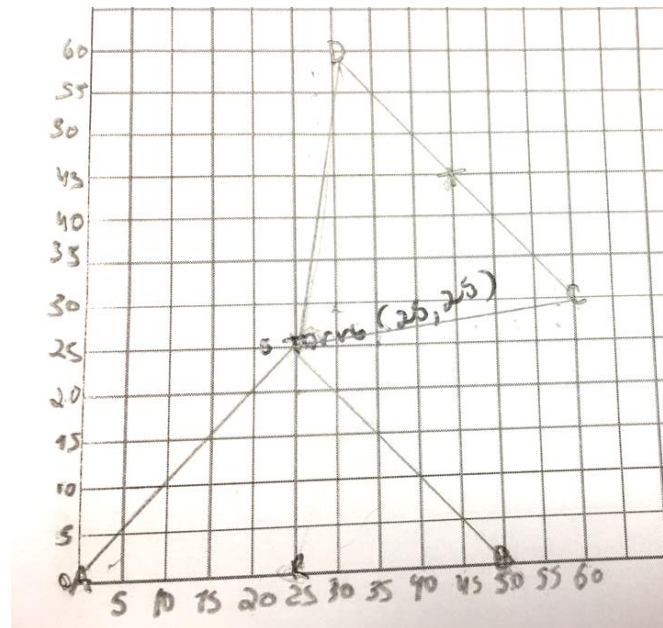
Em suma, a resolução tem no primeiro momento, a representação gráfica, a localização dos pontos no plano cartesiano; no segundo momento, a representação numérica com cálculo do ponto médio e, no terceiro momento, as ideias com conceitos geométricos, a representação dos pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente. Mediante as análises com apoio nos protocolos do grupo, compreendemos que os conhecimentos geométricos predominam nessa resolução, embora surjam elementos associados a aritmética. Assim, dentro do modelo teórico do PCEq essa resolução situa-se na *zona geométrica* e na *zona pragmática*.

Acreditamos que os conhecimentos geométricos permeiam toda a estratégia de resolução utilizada pelos estudantes e, embora, se utilizem de abordagens aritméticas para os cálculos envolvidos, o grupo demonstra possuir uma ideia clara dos procedimentos geométricos que está realizando. Essa característica, de abordar a geometria como estratégia de resolução, é algo desejável para ampliação e aprofundamento da *zona geométrica* no PCEq dos estudantes.

#### **Análise do G4**

O G4 propõe uma resolução baseada em conceitos oriundos da geometria plana (Figura 6 e Figura 7) e, paralelamente, utiliza os cálculos algébricos e a linguagem natural para explicar o seu processo de resolução (Figura 7 e 8).

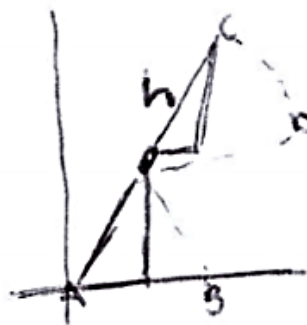
Figura 6 - Representação gráfica - G4



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 6 podemos notar que o grupo localiza os pontos corretamente no plano cartesiano. Já na figura 7, o grupo apresentou um esboço do que estava acontecendo na figura 6 e, então, percebemos que os estudantes trocam as posições dos pontos *C* e *D* entre si e, que colocam os pontos *A*, *C* e *S* alinhados. Os triângulos retângulos construídos na figura 7 não estão construídos na figura 6, mas podem ser, possivelmente, imaginados por meio da malha quadriculada na figura 6.

Figura 7 - Representação geométrica - G4



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 8 aparece a descrição do procedimento passo-a-passo, seguida dos cálculos para encontrar o tamanho das hipotenusas dos triângulos retângulos desenhados na figura 7.

Figura 8 - Primeiro recorte da descrição do procedimento - G4

**Processo**

- Interpretação
- Coleta e organização dos dados
- Colocamos os pontos no gráfico
- Achamos o ponto médio entre A e B e C e D, e pressupomos que estes pontos sejam equidistantes, porém não participam de uma mesma reta que possua o ponto S (torre).

25
25
125
50
625

Fonte: Dados da pesquisa

A partir dos triângulos desenhados na figura 7, fica visualmente identificável que as hipotenusas são elementos-chave, pois no encontro das hipotenusas fica a torre de transmissão que podemos observar tanto na figura 7 quanto na figura 6, embora tenham partido de uma suposição equivocada (a do alinhamento dos pontos nos dois triângulos), os estudantes mobilizam conhecimentos geométricos e algébricos na busca da solução para a tarefa.

O G4 também produziu um registro escrito que revela a compreensão e interpretação da situação apresentada na Figura 9<sup>6</sup>.

Figura 9 - Segundo recorte da descrição do procedimento - G4

Δ parte disto montamos um triângulo retângulo para confirmar a distância calculando a hipotenusa

Fonte: Dados da pesquisa

Não podemos deixar de ressaltar que devido as considerações apresentadas na figura 9, nos parece que o grupo, primeiramente, encontrou a posição da torre (Figura 6) e, depois, buscou uma estratégia de resolução (Figura 7). Com essa resolução o grupo conseguiu provar que a torre de transmissão está equidistante de A e C, mas não conseguiu resolver exatamente o que fora pedido na tarefa (Figura 1).

A partir da estratégia abordada pelo G4, observamos que nesta resolução os estudantes mobilizaram diferentes conhecimentos geométricos, tais como a noção de segmentos congruentes,

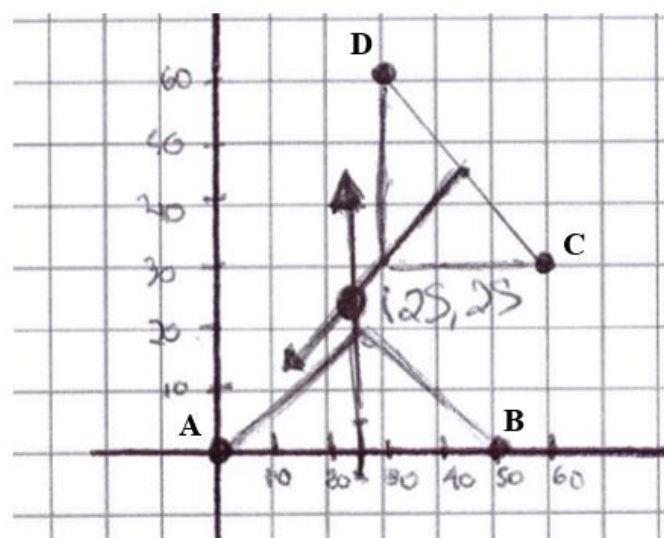
<sup>6</sup> Neste protocolo os estudantes enunciam suas ideias para a resolução da tarefa: “A partir disto montamos um triângulo retângulo para confirmar a distância calculando a hipotenusa”.

ponto médio, triângulos retângulos e Teorema de Pitágoras. Salientamos que esses são conceitos trabalhados em períodos diferentes da escolarização e que a evocação deles nesta resolução demonstra a apropriação dos significados trabalhados anteriormente, embora o grupo tenha utilizado uma estratégia do fim para o começo, ao supor a localização da torre e depois, por meio de cálculos algébricos, confirmar a suposição inicial (localização da torre). Com base nessas observações, notamos que a busca pela solução mobilizou diferentes conhecimentos geométricos trabalhados em diferentes contextos da escolarização. A partir do exposto, observamos que o G5 demonstra certa maturidade na mobilização de seus conhecimentos geométricos ao abordar a tarefa, externando características provenientes da *zona geométrica* do PCEq.

### Análise do G3

A resolução do G3 inicia-se com a representação das coordenadas das cidades no plano cartesiano, como podemos observar na figura 10. Para facilitar nossas análises e discussões, representamos os pontos no plano cartesiano posteriormente.

Figura 10 - Representação gráfica - G3



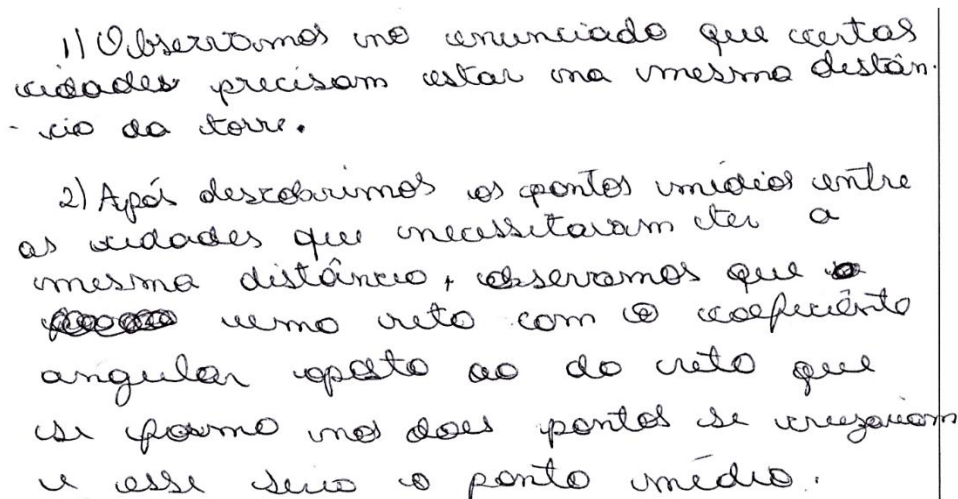
Fonte: Dados da pesquisa

No segmento  $\overline{AB}$ , o grupo localiza o ponto médio de coordenada (25,0) e procura traçar a mediatriz desse segmento, construindo o triângulo isósceles de base  $\overline{AB}$ . Repetem esse procedimento com o segmento  $\overline{CD}$ . Após localizarem os pontos médios e construírem as mediatrizes, observam que o encontro delas é o ponto da localização da torre de transmissão. Em decorrência dessa observação, percebem que as distâncias são iguais entre as retas mediatrizes (oriundas dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ ). A partir dessa verificação, fizeram uma aproximação a respeito das coordenadas da torre como (25,25). Podemos observar essa construção na Figura 10.

Na resolução (Figura 10), o grupo consegue construir a mediatriz de um segmento a partir da propriedade de que “todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento” (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 90).

Em um segundo momento, o G3 apresenta uma descrição sobre sua estratégia de resolução, como podemos observar na Figura 11<sup>7</sup>. Identificamos uma confusão de conceitos sobre a inclinação da reta e retas mediatrizes a um segmento. Como também apresentam equívocos conceituais ao tratar o ponto de interseção como ponto médio, o que podemos observar na figura 11 quando da explicação do procedimento, no qual em um trecho o grupo escreve : *observamos que uma reta com coeficiente angular oposto ao da reta que se forma nos dois pontos se cruzaram e esse seria o ponto médio*. Percebemos nesta frase que eles não conseguem formalizar os conceitos utilizados na representação geométrica (Figura 10).

Figura 11 - Recorte da descrição do procedimento - G3



1) Observamos no enunciado que certas cidades precisam estar na mesma distância da torre.

2) Após descobrimos os pontos médios entre as cidades que necessitavam ter a mesma distância, observamos que ~~a~~ uma reta com o coeficiente angular oposto ao do ~~que~~ que se forma nos dois pontos se cruzaram e esse seria o ponto médio.

Fonte: Dados da pesquisa

Observando a resolução apresentada na figura 10, o grupo privilegia conhecimentos provenientes da geometria plana e, desta forma, mobilizam conhecimentos geométricos característicos da *zona geométrica* proposta pelo PCEq.

### Conclusão e Considerações finais

Retomando o objetivo desse artigo, *analisar quais resoluções de uma atividade matemática feitas por estudantes do 3º ano do EM, dialogam com as zonas de perfil conceitual de equação*, pudemos observar que as zonas foram a *geométrica* e a *pragmática*. Isso se deve ao fato de que a tarefa proposta tinha um apelo à geometria.

<sup>7</sup> A transcrição desse registro para facilitar a leitura é a seguinte: “1-Observamos no enunciado que certas cidades precisam estar na mesma distância da torre.) 2-) Após descobrimos os pontos médios entre as cidades que necessitavam ter a mesma distância, observamos que uma reta com coeficiente angular oposto ao da reta que se forma nos dois pontos se cruzaram e esse seria o ponto médio”

Nos outros quatro grupos participantes, que foram representados pelo G5, notamos que existe uma interpretação e compreensão da tarefa apresentada. De maneira geral, todos os grupos transpõem da linguagem natural para uma linguagem gráfica, localizando as coordenadas dos pontos que representavam as cidades no plano cartesiano. Por meio desta representação gráfica os grupos perceberam que existia uma relação entre os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  com a localização da torre. A partir dessa observação, os grupos tentaram encontrar uma resposta se valendo de estratégias algébricas, aritméticas ou usando conceitos da geometria analítica. Nenhum desses quatro grupos, não apresentados neste artigo, encontraram a resposta por meio desses processos de resolução.

Com exceção do G3, os outros grupos partiram de representação visual para a resolução aritmética ou algébrica (mesmo o G4 que teve uma predominância do desenvolvimento baseado na geometria), ou seja, os alunos se sentem mais confortáveis em trabalhar resoluções de tarefas na *zona pragmática*, mesmo com uma tarefa que provoca o surgimento da *zona geométrica*. Tal observação também pôde ser verificada em trabalhos anteriores envolvendo estudantes e professores da educação básica (BARBOSA, 2009; DORIGO, 2010).

Outra observação que consideramos relevante para nossa investigação, foi a utilização da representação gráfica pelos grupos que se valeram de estratégias diferenciadas na resolução da atividade matemática proposta. Acreditamos que esta representação, por ser visual, acabou contribuindo para uma resolução diferenciada. Contudo, observa-se uma postura reflexiva dos estudantes ao concluírem suas resoluções, procurando por uma coerência entre os resultados esperados e os obtidos, característica que pode ser observada pelos registros escritos dos grupos.

Destacamos como um aspecto positivo dos grupos investigados, que os estudantes procuram escrever suas ideias deixando em evidência seu raciocínio e que possuem uma noção mais ampla da matemática, não restrita somente a cálculos. Nessa tarefa fica claro que os estudantes que obtiveram sucesso na resolução se apoiaram em conhecimentos já adquiridos e conseguiram mobilizá-los em outros contextos. Este ponto para nós, pesquisadoras, foi um dos aspectos mais relevantes, uma vez que, a atividade selecionada tinha toda a sua resolução com fundamentos na geometria analítica.

Com este trabalho pudemos observar que as estratégias empreendidas pelos estudantes e aqui analisados, permeavam conhecimentos geométricos (G4 e G3) e aritméticos, situados nas zonas *pragmática* e *geométrica* do modelo teórico do PCEq.

Nosso intuito com essa proposta, de empregarmos o modelo teórico do PCEq na análise de estratégias de resolução de problemas por estudantes do EM nos permite inferir que elementos geométricos perpassam as estratégias adotadas por todos os grupos investigados. A apropriação de seus significados e relações com outros conceitos também se faz presente na maior parte das resoluções apresentadas, denotando certo amadurecimento conceitual da matemática. O

enriquecimento e ampliação da *zona geométrica* se faz pela propagação e disseminação de estratégias como as apresentadas neste trabalho. Esperamos com esse artigo, apresentar aos professores novas estratégias e abordagens que possam enriquecer suas aulas de matemática, permitindo aos estudantes construir relações entre diferentes conceitos matemáticos na aplicação de uma tarefa matemática.

## Referências

ALVES, K. A.; SILVA, R. L. da; GOMES, V. M. S. Uma análise das diferentes abordagens de resolução de uma situação matemática com base no Perfil Conceitual de Equação. In: XIII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2017, São Paulo. **Anais do XIII Encontro Paulista de Educação Matemática**. São Paulo: Sbem-SP, 2017. p. 220 - 232.

BARBOSA, Y. O. **Multisignificados de equação**: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática. 2009. 196 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Tradutores: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. cap. 1. p. 47-51.

BOOTH, L.R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). Tradução de Hygino H. Domingues. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-36.

COUTINHO, F. A.; MORTIMER, E.; EL-HANI, C. N. Construção de um perfil conceitual para o conceito biológico de vida. **Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre, v.12, n. 1, p. 115-137, 2007.

DANTE. **Matemática**: Contextos e aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2014.

DINIZ JÚNIOR, A. I.; AMARAL, E. M. R. do. Análise de modos de pensar de uma professora de Química sobre substância quando aborda esse conceito em sala de aula. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 11, 2017, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis, SC: XI ENPEC, 2017. p. 1 - 9.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Geometria Plana. 8. ed. São Paulo: Atual. 2005.

DORIGO, M. **Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do ensino médio**. 2010. 137 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2010.

EL-HANI, C. N.; SILVA-FILHO, W. J. da; MORTIMER, E. F. **The Epistemological Grounds of the Conceptual Profile Theory**. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds). *Conceptual Profiles: A Theory of Teaching and Learning Scientific Concepts*. New York: Springer, 2014. p. 35 - 65.

ELIAS, H. R. **Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática**. 2017. 325 f. Tese (Doutorado) - Programa



de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

MACHADO, A. C. **A aquisição do conceito de função: perfil das imagens produzidas pelos alunos**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1998.

MORTIMER, E. F.; **Evolução do atomismo em sala de aula: mudança de perfis conceituais**. 1994. 281f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

NICOLLI, A. A.; MORTIMER, E. F.; Perfil conceitual de equação e a escolarização do conceito de morte no ensino de Ciências. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 44, p. 19-35, abr./jun., 2012.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005.

RIBEIRO, A. J. **Equação e Seus Multisignificados no Ensino de Matemática**: Contribuições de um Estudo Epistemológico. São Paulo, 2007. 141 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013.

RIBEIRO, A. J. Álgebra e seu Ensino: dando eco às múltiplas 'vozes' da Educação Básica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 7, p. 1-14, 2016.

SEPULVEDA, C., MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. Construção de um perfil conceitual de adaptação: implicações metodológicas para o programa de pesquisa sobre perfis conceituais e o ensino de evolução. **Investigações em Ensino de Ciências**, p. 439-479, 2013.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

WERTSCH, J. V. **Voices of the mind**: A sociocultural approach mediated action. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991.

**Recebido em 07/10/2017**

**Aceito em 13/12/2017**

### **Sobre as autoras**

#### **Karina Aguiar Alves**

Mestra em Ensino e História das Ciências e Matemática pela Universidade Federal do ABC e licencianda em matemática pela mesma instituição.

**Regina Lucia da Silva**

Mestra em Educação Matemática pela PUC-SP e professora na rede estadual de ensino do Estado de São Paulo.

**Vivili Maria Silva Gomes**

Doutora em Ciências pela USP. Professora do Centro de Matemática, Computação e Cognição da UFABC.

**Marcia Aguiar**

Doutora em Educação pela USP. Professora do Centro de Matemática, Computação e Cognição da UFABC.