© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

rsity of Sultan Syarif Kasim Riau

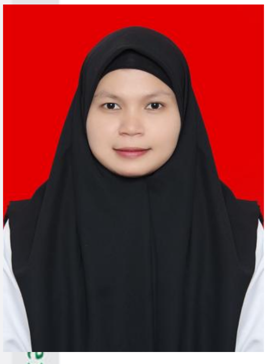
TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika
Fakultas Sains Dan Teknologi

oleh :

FATRI BAYU CENIA
11554202709



UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

UIN SUSKA RIAU

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

alah.

n Riau

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Oleh :

FATRI BAYU CENIA
11554202709

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 07 Juli 2021

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc	**Fitri Aryani, M.Sc**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19770913 200604 2 002**

UIN SUSKA RIAU

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Oleh :

FATRI BAYU CENIA

11554202709

Telah dipertahankan didepan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 07 juli 2021

Pekanbaru, 07 Juli 2021
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Ari Pani Desvina, M.Sc**
NIP.196403011992031003	**NIP.198112252006042003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua	**: Mohammad Soleh, M.Sc**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc**
Anggota II	**: Zukrianto, M.Si**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjaman.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis dalam naskah ini dan disebutkan didalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 07 Juli 2021
Yang Membuat Pernyataan,

FATRI BAYU CENIA
11554202709

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

PERSEMBAHAN

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamiin. P uji syukur saya tuturkan kepada ALLAH SWT atas nikmat yang begitu besar yang tak akan pernah terbalas dalam hidup ini.

Motivasi Hidup

'"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia"(Qs.ar-ra'd: .11)

Untuk Ayahanda dan Ibunda tercinta*, terimakasih banyak menjadi orantua yang paling baik untuk aku telah memberikan kasih saying tak mungkin terbalaskan.*

Untuk kakak-kakakku tersayang , *terima kasih ku ucapkan telah jadi kakak-kakak terhebat saling memotivasi dan dukungan yang berikan kepadaku.*

Untuk Bu Fitri Aryani, M.Sc *terima kasih banyak telah membimbing penulis memberikan ilmunyau serta arahan sehingga penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.*

Terima kasih kepada semua sahabat dunia akhirat(Tina, yanti,eti,rahma) *semoga kita sukses dunia akhirat .*

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

FATRI BAYU CENIA
11554202709

Tanggal Sidang : 07 Juli 2021
Periode Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang *trace* dari matriks simetris berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat diperoleh dengan cara menentukan perpangkatan matriks simetris A_3^2 sampai A_3^{10} dan A_3^{-2} sampai A_3^{-10}. Selanjutnya menduga bentuk umum perpangkatan matriks A_3^n, dan dibuktikan menggunakan induksi matematika berlaku juga untuk bentuk umum perpangkatan matriks A_3^{-n}, kemudian membuktikannya menggunakan aturan invers. Terakhir diperoleh $tr(A_3^n)$ dan $tr(A_3^{-n})$ menggunakan definisi *trace* dan mengaplikasikannya dalam bentuk contoh.

Kata Kunci: *Trace* matriks, invers, matriks simetris, perpangkatan matriks dan induksi matematika.

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

FATRI BAYU CENIA
11554202709

Tanggal Sidang : 07 Juli 2021
Periode Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final project discusses the symmetrical trace of a integer power of real 3x3 special matrices. To get the general form of a symmetrical trace of positive integer power of 3x3 special matrices, it must has an matrix multiplication A_3^2 to A_3^{10} and A_3^{-2} to A_3^{-10}. Then, the general form of the matrix multiplication A_3^n is assumed and proved by using mathematical induction as it is also valid for the general form of an matri multiplication A_3^{-n}. Then, it is proven by using inverse rule. Finally, the $tr(A_3^n)$ and $tr(A_3^{-n})$ is obtained, that is by using *trace definition* which then applied to the example questions.

Keywords: *Trace matrix, inverse, symmetric matrix, matrix multiplication and mathematical induction.*

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur penulis tuturkan kepada ALLAH SWT, yang memberikan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul "***Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 3 $\times$ 3 Berpangkat Bilangan Bulat"**. Shalawat beriring salam penulis curahkan kepada Nabi junjungan yakni Nabi Muhammad *Sallallahu'alaihi Wassalam,* karena atas perjuangannya penulis dapat merasakan kehidupa n yang penuh berilmu pengetuan dimasa sekaang ini.

Terima kasih sebesar-besarnya kepada kedua orang tua tercinta, abang dan kakak tersayang selama ini selalu ada dan kasih sayang begitu besar tidak habis-habisnnya kepada penulis. Dikesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Hairunnas, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku sekretaris Program Studi Matematika sekaligus Pembimbing Akademik dan pembimbing tugas akhir yang senantiasa ada dan memberi bimbingan serta arahan kepada penulis sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.
5. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc. selaku Penguji I yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak Zukrianto, M.Si selaku Penguji II yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Semua Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuan, nasehat dan juga bimbingan kepada penulis.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

8. Keluarga tercinta ayahanda Khalidi dan ibunda Ilen, terimakasih ku ucapkan yang selalu senantiasa melimpahkan kasih dan sayang, perhatian dan materi yang tak terhingga. Untuk Abang dan Kakak tersayang, Yunardi dan Yeni Rospita yang selalu memberi motivasi, semangat dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
9. Keluarga besar Parit Lubang Mudik bibi-bibiku, paman-pamanku, adek-adekku ponakan dan abang-abangkuku yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
10. Sahabat terbaikku, Suryanti, Hartina, Eti Dayanti, Rahmawati, Dwiga Monik Adelin , Niken Mardiana, Irma Nasesa, Riski Safitri dan Nik Fatimah yang selalu membantu dan memberikan *support* kepada penulis.
11. Teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika khususnya Matematika Kelas B angkatan 2015, semoga selalu diberikan kesehatan dan kemudahan dalam mencapai kesuksesan.

Panulisan pada Tugas Akhir ini penulis menyadari bahwa masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini . Akhir kata penulis berharap semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi pembaca dan pihak-pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 07 Juli 2021

UIN SUSKA RIAU

Fatri Bayu Cenia

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR ISI

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operasi matriks dapat dilakukan diantaranya penjumlahan matriks, perkalian matriks, perpangkatan matriks, *trace* matriks, invers matriks dan determinan matriks. Pada tugas akhir ini, penulis membahas operasi matriks salah satunya yaitu tentang *trace* matriks. *Trace* matriks adalah jumlah dari setiap elemen-elemen diagonal utama suatu matriks bujursangkar [1].

Untuk mendapatkan *trace* suatu matriks berpangkat, matriks tersebut harus dipangkatkan terlebih dahulu sampai pangkat yang diinginkan. Selanjutnya diagonal pada matriks dijumlahkan maka diperoleh *trace* matriks berpangkat dengan menggunakan definisi *trace* matriks. Salah satu penelitian membahas tentang *trace* matriks berpangkat ialah [2], yang membahas mengenai *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Hasil pada penelitian mendapatkan persamaan umum yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n$$

ganjil.

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n$$

genap.

Penelitian *trace* matriks juga dibahas oleh [3] mengenai bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan dalam penelitian tersebut ialah:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in \Re. \tag{1.1}$$

Hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut mendapatkan persamaan bentuk umum *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif yaitu:

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]..[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}, n$$

ganjil;

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} = \frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]..[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}, n$$

genap;

Pada tahun 2017 [4] melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam penelitian tersebut menggunakan matriks ialah:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall a,b,\in \Re \qquad (1.2)$$

Bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif dengan A memiliki invers (A^{-n}) yaitu :

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & , untuk\ n \text{ ganjil} \\ \frac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & , \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Pembahasan tentang *trace* matriks juga dilakukan oleh [5] pada penelitian yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan dalam penelitian tersebut ialah :

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \forall a,b,c,d \in \Re . \qquad (1.3)$$

Penelitian tersebut mempeloreh hasil bentuk umum *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

Pada tahun 2019 [6] meneliti tentang *trace* matriks segitiga 3×3 berpangkat bilangan positif. Matriks yang digunakan yaitu matriks segitiga atas dan segitiga bawah berbentuk sebagai berikut:

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

matriks segitiga atas $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in \Re$,

matriks segitiga bawah $B_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in \Re$.

Penelitian tersebut mendapatkan hasil *trace* yang sama dari kedua matriks yaitu: $tr(A_3^n) = tr\left(B_3^n\right) = 3a^n$.

Selanjutnya [7] juga membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan adalah matriks segitiga atas (A_4) dan matriks segitiga bawah (B_4) dengan bentuk matriks ialah:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall\, a,b,c,d \in R,$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall\, a,b,c,d \in R.$$

Penelitian tersebut mempeloreh hasil *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat negatif yaitu:

$$tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right).$$

Berdasarkan dari uraian di atas penulis tertarik membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Pada tugas akhir ini, penulis ingin mengembangkan tentang *trace* matriks simetris berpangkat. Judul pada tugas akhir ini ialah "***Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus*** $\mathbf{3 \times 3}$ ***Berpangkat Bilangan Bulat*** ".

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana bentuk umum *trace* matriks simetris bentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini dibatasi oleh matriks simetris yang berbentu sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b, \in \Re, b \neq 0. \qquad (1.4)$$

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Menambah ilmu bagi penulis tentang dari aljabar linear, matriks dan trace matriks.
2. Dapat dijadikan referensi bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan dalam penelitian ini mencakup lima (V) bab yaitu

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan teori-teori yang akan dibahas tentang matriks simetris, *trace* matriks, penjumlahan matriks, perpangkatan matriks, perkalian matriks, invers matriks, determinan matriks dan induksi matematika.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah dalam menentukan bentuk umum dalam menentukan nilai *trace* matriks simetris 3 x 3 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat .

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara jelas dalam mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris 3 x 3 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari semua pembahasan dan saran dari penulis.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisikan landasan teori yang mendukung dalam menyelesaikan permasalahan pada bab selanjutnya.

2.1 Matriks Simetris

Definisi 2.1[1] Suatu matriks bujursangkar A adalah ***simetris*** (symmetris) jika $A = A^t$.

Teorema 2.1 [1] Jika A dan B adalah matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar sebarang, maka:

(a) A^t adalah simetris.

(b) $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris.

(c) kA adalah simetris.

Contoh 2.1

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 12 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ maka tentukan ?

1. A dan B adalah simetris.
2. $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris.
3. kA dan kB adalah simetris.

Penyelesaian :

1. Akan dibuktikan bahwa A dan B adalah simetris.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix} \text{ dipeloreh } A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$B=\begin{bmatrix}3&5&2\\5&12&5\\2&5&8\end{bmatrix}$, maka dipeloreh $B^t=\begin{bmatrix}3&5&2\\5&12&5\\2&5&8\end{bmatrix}$.

Berdasarkan matriks $A=A^t$ dan $B=B^t$ maka matriks A dan B adalah simetrik.

2. Akan dibuktikan $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris.

a) Akan ditunjukan bahwa $A+B=(A+B)^t$.

$$A+B=\begin{bmatrix}4&1&3\\1&5&8\\3&8&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&5&2\\5&12&5\\2&5&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&6&5\\6&17&13\\5&13&14\end{bmatrix},$$ sehingga didapatkan

hasil $(A+B)^t=\begin{bmatrix}7&6&5\\6&17&13\\5&13&14\end{bmatrix}$.

b) Akan ditunjukan bahwa $A-B=(A-B)^t$.

$$A-B=\begin{bmatrix}4&1&3\\1&5&8\\3&8&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&5&2\\5&12&5\\2&5&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&1\\-4&-7&3\\1&3&-2\end{bmatrix}$$ sehingga didapatka

hasil $(A-B)^t=\begin{bmatrix}1&-4&1\\-4&-7&3\\1&3&-2\end{bmatrix}$.

Dari hasil yang diperoleh dari $A+B=(A+B)^t$ dan $(A-B)=(A-B)^t$ maka terbukti $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris .

3. Akan dibuktikan kA dan kB adalah simetris.

a). Akan ditunjukan bahwa $kA=(kA)^t$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$kA = k.\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k & k & 3k \\ k & 5k & 8k \\ 3k & 8k & 6k \end{bmatrix}, \text{ dan } \quad (kA)^t = \begin{bmatrix} 4k & k & 3k \\ k & 5k & 8k \\ 3k & 8k & 6k \end{bmatrix}$$

b). Akan ditunjukan bahwa $kB = (kB)^t$.

$$kB = k\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 12 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & 5k & 2k \\ 5k & 12k & 5k \\ 2k & 5k & 8k \end{bmatrix}, \text{dan} \quad (kB)^t = \begin{bmatrix} 3k & 5k & 2k \\ 5k & 12k & 5k \\ 2k & 5k & 8k \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh $kA = (kA)^t$ dan $kB = (kB)^t$ maka terbukti bahwa kA dan kB adalah simetris.

2.2 Perkalian Matriks

Perkalian suatu matriks dapat dihitung dengan dua cara ialaah perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Berikut diberikan beberapa definisi yang berhubungan dengan perkalian matriks.

2.2.1 Perkalian matriks dengan skalar

Definisi 2.2 [1] Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang di peloreh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar dari A.

Contoh 2.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ tentukan hasil dari $4A$!

Penyelesaian :

Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, maka $4A = 4\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 32 \\ 8 & 28 & 24 \end{bmatrix}$

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

2.2.2 Perkalian Matriks dengan matriks

Definisi 2.3 [1] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang didapatkan.

Contoh 2.3

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan perkalian matriks A dan B !

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 & 88 & 57 \\ 121 & 109 & 68 \\ 52 & 83 & 45 \end{bmatrix}.$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka defenisi dari pangkat integer tak negatif dari A adalah :

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0).$$

Selanjutnya, jika A dibalik maka defenisi dari pangkat integer negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\,faktor}.$$

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Contoh 2.4

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ tentukanlah A^2 dan A^3!

Penyelesaian

$$(A)^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 14 & 10 \\ 21 & 28 & 13 \\ 32 & 24 & 22 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$(A)^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 14 & 10 \\ 21 & 28 & 13 \\ 32 & 24 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 120 & 115 & 79 \\ 192 & 156 & 131 \\ 226 & 230 & 248 \end{bmatrix}.$$

2.4 Determinan Dan Invers Matriks

Definisi 2.5 [1] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinotasikan dengan det dan kita mendefinisikan det(A) sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka det(A) disebut determinan dari A (*determinant of* A).

Dalam menentukan determinan dari sebuah matriks, ada beberapa metode salah satunya adalah metode ekspansi kofaktor. Berikut adalah definisi dan teorema yang berkaitan dengan ekspansi kofaktor.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Definisi 2.6 [1] Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Teorema 2.2 [1] Determinan dari matriks A_{nxn} dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali yang didapatkan di mana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

1. Ekspansi sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}.$$

2. Ekspansi sepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

Definisi 2.7 [1] Jika A adalah matriks $n \, x \, n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut **matriks kofaktor dari *A*.** Tranpos dari matriks ini disebut adjoin dari *A* dan dinyatakan sebagai adj(*A*).

Contoh 2.5

Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ tentukan determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama!

Penyelesaian

Untuk mendapatkan determinannya, pertama harus mencari nilai kofaktornya dari matriks tersebut.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$C_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

maka didapatkan determinan yaitu

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 2(2) + 4(11) + 1(-7) \\ &= 4 + 44 - 7 = 41. \end{aligned}$$

Definisi 2.8 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama demikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik *(invertible)* dan B disebut sebagai ***invers*** (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai ***matriks singular.***

Teorema 2.3 [1] Jika A adalah Matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Contoh 2.6

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka tentukanlah inversnya!

Penyelesaian

Berdasarkan Contoh 2.5 didapatkan $\det(A) = 41$ dan

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

$$Kofaktor(A) = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -7 \\ -11 & 1 & 18 \\ 14 & -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan adj(A) kita menggunakan dari Definisi 2.7 ialah $kof(A)^t = ajd(A)$, maka

di peloreh $A^{-1} = \dfrac{1}{41}\begin{bmatrix} 2 & -11 & 14 \\ 11 & 1 & 5 \\ -7 & 18 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{41} & \frac{-11}{41} & \frac{14}{41} \\ \frac{11}{41} & \frac{1}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{-7}{41} & \frac{18}{41} & \frac{-8}{41} \end{bmatrix}.$

2.5 *Trace* Matriks

Definisi 2.9 [1] Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujur sangkar.

Untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat, pertama matriks harus dipangkatkan, kemudian tambahkan diogonal utama matriks tersebut.

Contoh 2.6

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ tentukanlah $tr(A)$, $tr(A)^2$ dan $tr(A)^3$!

Penyelesaian :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, maka

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 & 22 \\ 40 & 42 & 28 \\ 35 & 17 & 32 \end{bmatrix}, \text{maka}$$

$$tr(A^2) = 43 + 42 + 32 = 117, \text{dan}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 43 & 21 & 22 \\ 40 & 42 & 28 \\ 35 & 17 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 321 & 279 & 216 \\ 486 & 312 & 306 \\ 317 & 241 & 246 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$tr(A^3) = 321 + 312 + 246 = 879.$$

2.6 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat

Pembahasan mengenai tentang *trace* matriks berpangkat dibahas oleh [7] dalam penelitiannya tersebut menggunakan matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah yang berjudul " *Trace Matriks Segitiga 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif*". Pada bagian ini penulis menjabarkan *trace* matriks segitiga atasnya saja. Berikut ini adalah langkah-langkah penelitiannya:

1. Diberikan matriks $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c, d \in \Re$.

2. Menentukan invers matriks A_4 dengan metode adjoin yaitu:

$$A_4^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Ajd(A)$$

$$= \frac{1}{a^4}\begin{bmatrix} a^3 & -a^2b & ab^2 - a^2c & -b^3 - a^2d + 2abc \\ 0 & a^3 & -a^2b & ab^2 - a^2c \\ 0 & 0 & a^3 & -a^2b \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{a^3}{a^4} & \frac{-a^2b}{a^4} & \frac{ab^2-a^2c}{a^4} & \frac{-b^3-a^2d+2abc}{a^4} \\ 0 & \frac{a^3}{a^4} & \frac{-a^2b}{a^4} & \frac{ab^2-a^2c}{a^4} \\ 0 & 0 & \frac{a^3}{a^4} & \frac{-a^2b}{a^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^3}{a^4} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{b^2-ac}{a^3} & \frac{b^3-b^2d+2abc}{a^4} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{b^2-ac}{a^3} \\ 0 & & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} \\ 0 & & & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

3. Menentukan perpangkatan A_4^{-2} sampai A_4^{-11} yaitu:

$$A_4^{-2}=A_4^{-1}.A_4^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{b^2-ac}{a^3} & \frac{b^3-b^2d+2abc}{a^4} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{b^2-ac}{a^3} \\ 0 & & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} \\ 0 & & & \frac{1}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{b^2-ac}{a^3} & \frac{b^3-b^2d+2abc}{a^4} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} & \frac{b^2-ac}{a^3} \\ 0 & & \frac{1}{a} & \frac{-b}{a^2} \\ 0 & & & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-3}=A_4^{-2}.A_4^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{a^3} & \frac{-3b}{a^4} & \frac{6b^2-3ac}{a^5} & \frac{-10b^3-3a^2d+12abc}{a^5} \\ 0 & \frac{1}{a^3} & \frac{-3b}{a^4} & \frac{6b^2-3ac}{a^5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^3} & \frac{-3b}{a^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^3} \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UI ... if Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

$$A_4^{-4} = A_4^{-3}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^4} & \frac{-4b}{a^5} & \frac{10b^2-4ac}{a^6} & \frac{-20b^3-4a^2d+20abc}{a^5} \\ 0 & \frac{1}{a^4} & \frac{-4b}{a^5} & \frac{10b^2-4ac}{a^6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^4} & \frac{-4b}{a^5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^4} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-5} = A_4^{-4}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^5} & \frac{-5b}{a^6} & \frac{15b^2-5ac}{a^7} & \frac{-35b^3-5a^2d+30abc}{a^8} \\ 0 & \frac{1}{a^5} & \frac{-5b}{a^6} & \frac{15b^2-5ac}{a^7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^5} & \frac{-5b}{a^6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^5} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-6} = A_4^{-5}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^6} & \frac{-6b}{a^7} & \frac{21b^2-6ac}{a^8} & \frac{-56b^3-6a^2d+42abc}{a^8} \\ 0 & \frac{1}{a^6} & \frac{-6b}{a^7} & \frac{21b^2-6ac}{a^8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^6} & \frac{-6b}{a^7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^6} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-7} = A_4^{-6}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^7} & \frac{-7b}{a^8} & \frac{28b^2-7ac}{a^9} & \frac{-84b^3-7a^2d+56abc}{a^8} \\ 0 & \frac{1}{a^7} & \frac{-7b}{a^8} & \frac{28b^2-7ac}{a^9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^7} & \frac{-7b}{a^8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^7} \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_4^{-8} = A_4^{-7}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^8} & \frac{-8b}{a^9} & \frac{36b^2-8ac}{a^{10}} & \frac{-120b^3-8a^2d+72abc}{a^{11}} \\ 0 & \frac{1}{a^8} & \frac{-8b}{a^9} & \frac{36b^2-8ac}{a^{10}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^8} & \frac{-8b}{a^9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^8} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-9} = A_4^{-8}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^9} & \frac{-9b}{a^{10}} & \frac{45b^2-9ac}{a^{11}} & \frac{-165b^3-9a^2d+90abc}{a^{12}} \\ 0 & \frac{1}{a^9} & \frac{-9b}{a^{10}} & \frac{45b^2-9ac}{a^{11}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^9} & \frac{-9b}{a^{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^9} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-10} = A_4^{-9}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^{10}} & \frac{-10b}{a^{11}} & \frac{55b^2-10ac}{a^{12}} & \frac{-220b^3-10a^2d+110abc}{a^{13}} \\ 0 & \frac{1}{a^{10}} & \frac{-10b}{a^{11}} & \frac{55b^2-10ac}{a^{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^{10}} & \frac{-10b}{a^{11}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^{10}} \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-11} = A_4^{-10}.A_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^{11}} & \frac{-11b}{a^{12} \backslash} & \frac{66b^2-11ac}{a^{13}} & \frac{-286b^3-11a^2d+132abc}{a^{14}} \\ 0 & \frac{1}{a^{11}} & \frac{-11b}{a^{12}} & \frac{66b^2-11ac}{a^{13}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^{11}} & \frac{-11b}{a^{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^{11}} \end{bmatrix}$$

UIN SUSKA RIAU

Dari hasil perpangkatan A_4^{-2} sampai A_4^{-11}, maka dapat diduga bentuk umum A_4^{-n} sebagai berikut:

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \backslash & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{14}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

4. Membuktikan bentuk umum A_4^{-n} dengan menggunakan aturan invers yaitu:

Teorama 2.4 Diberikan matriks dengan bentuk $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a,b,c,d \in R$

.

Maka:

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \backslash & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{14}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Pembuktian teorema ada pada laporan tugas akhir [7] pada tahun 2020 hal 37.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

© Hak Cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Teorama 2.5 Diberikan matriks dengan bentuk $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a,b,c,d \in R$,

Maka didapatkan $tr\left(A_4^{-4}\right) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

Pembuktian teorema ada pada laporan tugas akhir [7] pada tahun 2020 hal 46.

2.7 Induksi Matematika

Definisi 2.10 [8] Merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Melalui induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan beberapa langkah terbatas. Induksi matematika digunakan untuk membuktikan pernyataan.

Prinsip induksi sederhana sebagai berikut:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

(1) $p(1)$ benar

(2) Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$ hingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.7

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil pertama adalah n^2.

Penyelesaian

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi jumlah n buah bilangan ganjil ialah kelipatan n^2.

1. Akan dibuktikan $p(1)$ benar, maka akan ditunjukan $n^2 = 1$.

   Karena jumlah satu buah bilangan ganjil pertama adalah 1, maka 1^2=1

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2. Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1) = n^2$ akan ditunjukan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

   $1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$, pembuktiannya adalah;

   $1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1) + (2n + 1)$

   = $[1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1)$

   = $n^2 + (2n + 1)$= $n^2 + 2n + 1$

   = $(n + 1)^2$

Dari hasil langkah 1 dan 2, telah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian penulis menjelaskan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut;

1. Diberikan matriks simetris $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in \Re, b \neq 0.$
2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{10}$.
3. Menduga bentuk umum matriks $(A_3)^n$, n bilangan bulat positif
4. Membuktikan bentuk umum matriks simetris $(A_3)^n$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Menduga bentuk umum matriks $tr(A_3)^n$, n bilangan bulat positif
6. Membuktikan $tr(A_3)^n$, n bilangan bulat positif dengan pembuktian langsung
7. Menentukan invers matriks A_3 dengan metode adjoin.
8. Menentukan perpangkatan matriks $(A_3)^{-2}$ sampai $(A_3)^{-10}$.
9. Menduga bentuk umum matriks $(A_3)^n$ dengan n bilangan bulat negatif.
10. Membuktikan bentuk umum matriks $(A_3)^n$,n bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers, yaitu $A_3^{-n}A_3^{n} = A_3^{n}A_3^{-n} = I$
11. Menduga bentuk umum matriks $tr(A_3)^n, n$ bilangan bulat negatif.
12. Membuktikan bentuk umum matriks $tr(A_3)^n$, n bilangan bulat negatif dengan pembuktian langsung.
13. Aplikasi bentuk umum $tr(A_3)^n$ dengan beberapa contoh soal.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dipaparkan pada Bab IV tentang *trace* matriks simetris berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat dengan menggunakan matriks pada Persamaan (1.4) maka diperoleh :

1. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} b \in \Re, b \neq 0.$

   Didapatkan bentuk umum perpangkatan matriks simetris 3×3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$A_3^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}3}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix},$$

   atau

$$A_3^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n; & \text{untuk } i = j \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n; & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

   dan diperoleh juga:

   $tr\left(A_3^{\,n}\right) = 3\left(\frac{(2^n-(-1)^{n+1}2)}{3}b^n\right)$ dengan n bilangan bulat positif.

2. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} b \in \Re, b \neq 0.$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

Didapatkan bentuk umum perpangkatan matriks simetris 3×3 berpangkat bilangan bulat negatif yaitu :

$$A_3^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} \end{bmatrix},$$

atau

$$A_3^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \text{untuk } i = j \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

dan diperoleh juga:

$tr(A_3^{-n}) = 3\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n}\right)$, dengan n bilangan bulat negatif.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas tentang *trace* matriks simetris berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat dengan entri matriks bilangan real. Penulis berharap agar pembaca dapat mengembangkan penelitian ini dengan *trace* matriks simetris yang berbentuk umum.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga, 2004.

[2] J. Pahade and M. Jha, “Trace of Positive Integer Power of Real 2 x2 Matrices,” *Adv. Linear Algebr. & Matrix Theory*, vol. 5, no. 04, p. 150, 2015, doi: 10.4236/alamt.2015.54015.

[3] F. Aryani and M. Solihin, “Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 2, pp. 16–23, 2017.

[4] F. Aryani and Y. Yulianis, “Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 x 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 4, no. 2, pp. 105–113, 2018.

[5] F. Aryani and T. Fatonah, “Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 X 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” in *Talenta Conference Series: Science and Technology (ST)*, 2019, vol. 2, no. 2.

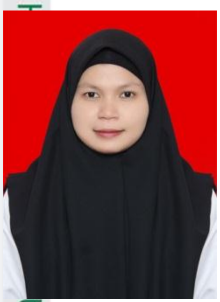
[6] S. Wibowo, “Trace Matriks Segitiga 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, Skripsi Uin Sultan Kasim Riau.,” 2019.

[7] K. Susilowati, “Trace matriks segitiga 4 x 4 berpangkat bilangan bulat negatif, Skripsi Uin Sultan Kasim Riau.,” 2020.

[8] R. Munir, *Matematika Diskrit, Edisi Ketiga.Bandung Infomatika*. Bandung, 2005.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 18 september tahun 1995 di desa ladang panjang kecamatan Tigo Nagari Kabupaten Pasaman Provinsi Sumatra Barat. Penulis adalah anak ketiga dari tiga bersaudara dari pasangan Khalidi dan Ilen. Penulis menyelesaikan pendidikan formal sekolah SD N 10 Parit Batu pada tahun 2008. Pada tahun 2011 penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP N 1 Tigo Nagari, kecamatan Tigo Nagari Kabupaten Pasaman Provinsi Sumatra Barat, dan menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di SMA N 1 Tigo Nagari, kecamatan Tigo Nagari Kabupaten Pasaman Provinsi Sumatra Barat tahun 2014 dengan jurusan ilmu pengetahuan alam (IPA).

Pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan keperguruan tinggi di Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau difakutas Sains dan Teknologi dengan jurusan Matematika. Pada tanggal 15 Juli 2018 sampai 3 September 2018 penulis mengikuti kuliah kerja nyata di desa Aur Kuning Kecamatan Kampar Kirri Hulu Kabupaten Kampar. Selanjutnya pada tahun 2019 pada semester VIII penulis laksakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Pendidikan Provinsi Riau dengan judul "**DESKRIPTIF PERBANDINGAN JUMLAH GURU DAN SISWA DI SEKOLAH LUAR BIASA (SLB) DI PROVINSI RIAU TAHUN 2018"** yang dibimbing oleh ibu Sri Basriati, M.Sc dan diseminarkan pada tanggal 15 Juli 2019.

Pada tanggal 07 Juli tahun 2021 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sajana dengan judul tugas akhir " ***TRACE*** **MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS** 3×3 **BERPANGKAT BILANGAN BULAT"** dibawah bimbingan ibuk Fitri Aryani, M.Sc.