

SIRFE Technical Report Series

No. 1

이자율모형 I

최병선

서울대학교



SIRFE Note 1

Interest Rate Models I

이자율모형 I

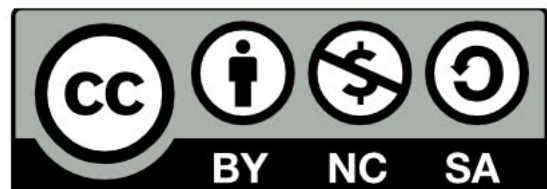
최병선 지음

This page is empty.

이 저작물에는 크리에이티브 커먼즈 저작자표시-비영리 4.0 국제 라이선스가 적용 되어 있습니다. 이 라이선스의 설명을 보고 싶으시면 다음 웹사이트를 참조하세요.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

 **creative
commons**



This page is empty.

머릿글

이 노트는 본저자가 2008년에서 2010년 걸쳐 서울대학교 경제학부에서 가르친 ‘이자율, 채권 그리고 이자율파생상품’에 관한 과목들의 강의안 일부분을 정리한 것이다. 그후 글로벌 금융위기나 코로나사태에 의한 경제위기 등을 겪으면서 금융시장은 아주 많이 바뀌었다. 예를 들어, 양적완화로 인해서 기준금리가 음수인 경우가 발생하고 있다. 또한 지금까지 이자율의 기준점으로 사용되던 London InterBank Offered Rate (LIBOR)가 2023년 6월 30일 역사 속으로 완전히 사라지고, Secured Overnight Financing Rate (SOFR)가 그 자리를 대신하게 될 것이다. 따라서 10여년 전 작성한 강의노트를 세상에 내보내기 위해서는 이러한 변화에 맞추어서 수정하고 보강했어야 할 것이다. 그러나 저자에게는 그럴 시간적 여유가 없다. 그래도 아직은 이 오래된 강의노트 수준으로 이자율모형을 수리적으로 다룬 한글 책이나 한글 보고서가 없으므로, 강의노트를 그냥 버리기 보다는 조금 가다듬어서 서울대학교 금융경제연구원(SIRFE)의 SIRFE노트 형식으로 세상에 내보내기로 마음 먹었다. 이러한 결정 과정에서 금융경제연구원 원장이신 김영식교수님의 권유가 큰 힘이 되었다. 그래서 철지난 강의노트에 최소한 수정을 가했고, 수록된 MATLAB프로그램들이 최신 버전에서 돌아갈 수 있도록 디버깅했다. 저자의 바람은 이 노트가 파이낸스 금융공학, 특히 채권과 이에 연관된 파생상품을 공부하는 독자들에게 조금이나마 도움이 되기를 기대한다. 이 레포트는 서울대학교 금융경제연구원의 지원을 받아 만들어졌음을 밝혀둔다. ¹

최병선

2021. 09. 01.

¹Financial support from the Institute for Research in Finance and Economics of Seoul National University is gratefully acknowledged.

This page is empty.

차례

제1절	서론	p. 1
제2절	일반균형모형과 무재정모형	p. 2
제3절	Black-Scholes환경과 이자율의 변동	p. 5
제4절	금융상품가치의 편미분방정식	p. 6
제5절	이자율모형의 개요	p. 14
제6절	Merton이자율모형	p. 21
제7절	Vasicek이자율모형	p. 35
제8절	Hull-White이자율모형	p. 56
제9절	CIR모형	p. 70
제10절	Ho-Lee이자율모형	p. 110
제11절	기타 1요인 이자율모형	p. 123
참고문헌		p. 137

This page is empty.

제1절 서론

이자율기간구조(interest term structure)는 무위험인 무이표채(zero coupon bond)의 각 만기에 따른 이자율을 나타낸다. 어떤 정해진 시점에서 이자율기간구조는 상향함수, 하향함수 그리고 곱사등함수 등으로 나타날 수 있다. 또한, 시간이 흐름에 따라 이자율기간구조 자체도 변화한다. 이렇게 시간이 흐름에 따라 변화하는 이자율기간구조를 추정하기 위한 모형이 이자율모형이다. 즉, 미래의 어떤 시점에서 만기가 각각 3개월, 6개월, 1년인 무위험인 무이표채의 만기수익률을 추정하기 위해서는 이자율모형을 필요로 한다. 각 시점에서 거래되는 다양한 채권가격들로부터 이자율기간구조를 추정하는 것은 그리 어려운 일은 아니다. 그러나, 이자율기간구조는 현물이자율의 추세와 변동성, 장단기이자율들의 차이인 이자율스프레드, 예상되는 인플레이션을 등 많은 요인들에 의해 결정되며, 이 요인들을 충분히 이자율모형에 반영하는 것이 쉽지가 않다. 즉, 이자율모형을 구하는 것은 그리 간단한 일이 아니다.

우리는 왜 이자율모형을 구해야 하는 것일까? 현재시점에서 이자율기간구조가 주어지면 옵션이 부착되지 않은 채권의 가치를 쉽게 평가할 수 있다. 그러나, 옵션이 부착된 채권의 현금흐름은 특정한 이자율의 미래수준(또는 채권의 미래가격)에 의존하므로, 이러한 이자율파생상품(또는 채권파생상품)의 가치를 평가하기 위해서는 미래의 이자율기간구조를 추정에 필요한 이자율모형을 구해야 한다. 가끔 현재시점의 이자율기간구조가 주어지면 이자율파생상품의 가치를 평가할 수 있다고 주장하는 사람을 만나는 경우가 있다. 그러한 경우, 본저자는 현재시점에서 이자율기간구조가 주어지면 그것은 이미 결정적(deterministic)이고 미래의 이자율수준(또는 채권가격)은 확률적(stochastic)이라는 점을 고려해보라고 권한다. 결론적으로, 옵션, 즉 미래에 대한 조건이 부착된 채권의 가치를 평가하기 위해서는 미래의 이자율기간구조를 필요로 하고, 이러한 미래의 이자율기간구조를 추정하기 위해서 먼저 이자율모형을 필요로 한다.

이 노트에서는 현물이자율(spot interest rate)이나 선도이자율(forward interest rate)의 동적특성을 반영하는 확률미분방정식을 바탕으로 다양한 이자율모형들을 살펴보기로 하자. 이 노트의 원고를 작성할 때는 Rebonato (1998), James & Webber (2000), Shreve (2004), Brigo & Mercurio (2006) 그리고 Fabozzi (2012)를 주로 참조하였다.

제2절 일반균형모형과 무재정모형

이자율기간구조에 관한 실증적 연구는 그 접근법에 따라 크게 두 종류로 나눌 수 있다. 하나는 통계적 접근법이고 다른 하나는 이론적 접근법이다. 이 절에서는 이론적 접근법에 대한 개관을 살펴볼 것이다.

이자율기간구조에 대한 이론적 접근법에서 사용되는 이론적 모형에서는 상태변수로 현물이자율이 가장 많이 사용되고 있다. 그 외에도 현물이자율의 변동성, 장단기이자율들의 차이인 이자율스프레드, 예상인플레이션 등이 상태변수로 사용된다. 이론적 모형에는 채권가치가 시장의 균형가격에 의해 결정되는 일반균형모형(general equilibrium model)과 채권가치가 무재정조건(no arbitrage condition)에 의해 결정되는 무재정모형(arbitrage-free model, no arbitrage model 혹은 arbitrage model)이 있다.

2.1 일반균형모형

일반균형모형은 주어진 경제여건 하에서 개별 경제주체가 효용함수를 극대화함으로써 시장이 균형을 이루는 가격을 통해서 이자율이 결정되는 모형이다. 주어진 상태변수들이 경제전체의 균형가격들을 결정하며, 각 변수의 동태적 움직임은 상태변수들의 확률과정에 의해 결정된다. 따라서, 일반균형모형은 어느 변수를 상태변수로 사용하느냐에 따라 그 모형 자체가 달라진다. 일반균형모형을 이용하는 경우 할인채가격이 몇 개의 모수들에 의존하는 모형에 의해서 결정되기 때문에 다양한 일드곡선의 모양을 설명하는데 한계가 있다. 또한, 모수의 추정값들이 특정한 시점에서 시장가격과 무관하게 결정되므로, 할인채의 이론가격과 실제가격 사이에 괴리가 존재할 수도 있다. 반면, 일반균형모형은 이자율기간구조의 동태적 변화에 대해 일관성 있는 정보를 제공하는 장점을 가지고 있다. 대표적인 일반균형모형으로는 현물이자율을 상태변수로 사용하는 단요인 일반균형모형인 Vasicek모형 (1977), Cox & Ingersoll & Ross (1985)의 CIR모형, 순간이자율과 그 변동성을 상태변수들로 사용하는 2요인 일반균형모형인 Longstaff-Schwartz모형 (1992), 상태변수를 명시적으로 표시하지는 않은 다요인 일반균형모형인 Chen-Scott모형 (1992)이 있다.

현물이자율을 상태변수로 사용하는 Vasicek모형이나 CIR모형에서 채권가격을 정하기 위해서는 먼저 위험의 시장가격(market price of risk)을 알아야만 한다. 이 위험의 시장가격은 역사적 데이터, 즉 과거의 이자율들로부터 통계적으로 추정된다. 이렇게 위험의 시장가격이 추정되면, 각 채권의 변동성과

위험의 시장가격으로부터 그 채권의 가격을 평가할 수 있다. 위험의 시장가격이 과거의 이자율로부터 추정되는 것이므로, 이 시장균형모형들은 과거 이자율기간구조의 변화를 잘 설명한다. 현재 위험을 평가하는 기준이 과거와 크게 다르지 않다면, 즉 현재의 위험의 시장가격이 과거의 것과 크게 다르지 않다면, 시장균형모형을 사용해서 현재 시장에서 거래되는 채권의 적정가격을 추정할 수 있고, 따라서 시장에서 과대평가된 채권과 과소평가된 채권을 골라낼 수 있다. 만일 어떤 시장균형모형을 사용해서 시장보다 더 정확하게 채권의 가치를 평가할 수 있다면, 투자자는 이 시장균형모형을 사용해서 이익을 얻을 수 있을 것이다.

앞에서도 언급했듯이, 일반균형모형에서 어떤 모수의 추정값은 특정한 시점의 시장가격과 무관하게 결정된다. 따라서 채권의 이론가격과 실제가격 사이에 괴리가 존재할 수 있다. 즉, 채권과생상품(또는 이자율과생상품)의 적절한 가격은 원자산인 채권(또는 이자율)의 시장가격에 의해서 산출되는데, 시장균형모형으로는 이 시장가격을 제대로 추정할 수 없다. 따라서, 시장균형모형은 채권과생상품의 가치를 평가하는데 적절하지 않다. 좀 더 자세히 말하면, 채권과생상품의 적정한 가치를 계산할 때는 시장의 채권가격이 적정한지 여부는 중요하지 않고, 단지 그 시점에서 시장에서 채권가격과 그 채권가격의 증분에 대한 채권과생상품가치의 증분의 비율이 중요하다. 시장균형모형은 이러한 채권과생상품의 가치평가의 특성을 잘 반영하는 모형이 아니다.

2.2 무재정모형

무재정모형은 Black-Scholes모형에서와 같이 만기시점이 서로 다른 할인채들로 구성된 무위험포트폴리오를 만든 다음, 이 포트폴리오의 수익률이 무위험이자율과 같아야 한다는 무재정조건을 이용하여 할인채가치들 사이의 무재정관계식을 도출하는 모형이다. 따라서, 무재정모형은 부분균형모형(partial equilibrium model)이라 할 수 있다. 무재정모형을 이용한 실증분석에서는 이 모형으로부터 산출되는 채권가격이 시장에서 관찰되는 실제가격과 일치하도록, 즉 현재시점의 이자율기간구조를 정확히 복제할 수 있도록 모수를 결정한다. 따라서, 일반균형모형에서 존재하는 채권의 이론가격과 실제가격 사이에 괴리가 존재하지 않는다. 그러나, 무재정모형에서는 모수가 시간이질적이므로, 즉 시간에 따라 모수가 변하므로, 이자율기간구조의 동태적 변화에 대한 일관성 있는 설명을 할 수는 없다. 현물이자율을 상태변수로 사용하는 단요인 무재정모형으로 Dothan모형(1978)이 있다. Hull & White (1993)는 현물이자율과 그 추세향을 상태변수들로 사용하는 2요인 무재정모형을 제시하였다. Ho & Lee (1986)는 시장에서 관찰되는 자료와 일관성을 유지하면서 확률적인 충격을 받는 이자율 격자를 생성하는

무재정모형을 제시하였다. Ho-Lee모형을 연속시간형 모형으로 변형한 Heath & Jarrow & Morton (1992)의 HJM모형은 다요인무재정모형이다.

무재정모형으로부터 추정된 적정가격은 실제가격과 일치한다. 따라서, 무재정모형을 바탕으로 채권과생상품의 가치를 평가하면, 채권의 현재 시장가격을 바탕으로 한 채권과생상품의 공정한 가치를 얻는다. 즉, 이렇게 평가된 채권과생상품가치와 채권가격 사이에는 재정기회가 존재하지 않는다. 만일 이 채권과생상품의 시장가격이 계산된 가치와 다르다면, 원자산인 채권과 채권과생상품을 적절히 배합한 포트폴리오를 매입함으로써 재정기회를 얻을 수 있다. 반면에, 무재정모형을 사용하는 목적은 채권의 적정가격이 아닌 현재 시장가격에 적합시키는 것이므로, 무재정모형은 채권투자에 사용하기에 적합한 것이 아니다.

일반균형모형은 균형점에서 재정기회가 존재하지 않는다는 무재정조건을 바탕으로 유도된 모형이다. 실제로, 대표적인 일반균형모형인 CIR모형도 무재정조건을 사용해서 유도할 수 있다. 반면에, 재정기회가 존재하지 않으면, 무재정모형은 균형상태를 이룬다. 따라서, 일반균형모형과 무재정모형을 구분하는 것은 무의미하다. 다만, 일반균형모형에 비해서 무재정모형의 모수들을 더 많이 포함한다. 좀 더 자세하게 설명하면, 일반균형모형에서는 모수가 미지의 상수라는 가정을 하고, 무재정모형에서는 모수가 시간이질적(time-varying)이라는 가정을 한다. 따라서, 일반균형모형과 무재정모형의 차이는 계량경제학적인 측면에서 추정문제에 불과하다.

제3절 Black-Scholes 환경과 이자율의 변동

표준적 Black-Scholes 환경에서, 원자산을 $S(u)$ 로 하는 금융파생상품의 시점 t 에서 무재정가치 $F(t, S(t))$ 는 다음 Black-Scholes 방정식을 만족한다.

$$-rF + \frac{\partial F}{\partial t} + rS(t)\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0 \quad (3.1)$$

여기서 상수 r 은 무위험이자율이다. 편미분방정식 (3.1)에 해당하는 말기조건은 만기시점 T 에서 지불금액 $F(T, S(T))$ 이다. 예를 들어, 만기시점 T 에 행사가격이 K 인 유럽형콜옵션인 경우에, 말기조건은 다음과 같다.

$$F(T, S(T)) = [S(T) - K]^+ \quad (3.2)$$

편미분방정식 (3.1)의 해는 다음과 같이 위험중립확률측도 Q 에서 계산된 조건부기대값이다.

$$F(t, S(t)) = E_t^Q(e^{-r\tau} F(T, S(T))) \quad (3.3)$$

여기서 $\tau \doteq T - t$ 이다.

지금부터는 이자율의 변동에 민감한 금융상품의 가치평가에 대해서 생각해보자. 이자율의 변동에 민감한 금융상품의 경우에도 식 (3.1)과 비슷한 편미분방정식을 얻을 수 있다. 예를 들어, Black-Scholes 방정식의 도출하는 방법과 비슷한 방법으로 할인채가치에 대한 편미분방정식을 유도할 수 있다. 우선 무위험포트폴리오를 구축하고, 이 무위험포트폴리오의 결정적 수익률이 단기금융계좌(money market account)에 순간적으로 투자한 수익률과 동일하다고 하면, 원하는 편미분방정식이 도출된다. 또한, 이자율의 변동에 민감한 금융상품가치를 식 (3.3)과 비슷하게 조건부기대값을 사용해서 나타낼 수도 있다. 예를 들어, 현물이자율이 시점 u 에서 $R(u)$ 인 만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 가치 $B(t, T)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$B(t, T) = E_t^Q\left(\exp\left(-\int_t^T R(s) ds\right)\right) \quad (3.4)$$

식 (3.1)과 같은 편미분방정식의 해와 식 (3.3)의 기대값이 동일한 금융상품가치를 나타내므로, 이 편미분방정식의 해와 이 기대값 사이에는 어떤 연관성이 있어야 한다. 이 연관성은 확률해석에서 이미 잘 알려져 있다. 확률해석에서는 Ito 확산과정의 생성연산자(generator), Kolmogorov의 후진방정식(backward equation), 그리고 Feynman-Kac식을 사용해서 이러한 문제를 다루고 있다. 이러한 기법들을 이용해서, 식 (3.4)와 같은 형태의 조건부기대값이 주어졌을 때, 이에 대응하는 편미분방정식을 얻을 수 있다. 또한, 그 역도 가능하다.

제4절 금융상품가치의 편미분방정식

4.1. 금융상품가치에 대한 편미분방정식의 고전적 도출

이 절에서는 고전적 방법을 사용해서 이자율의 변동에 민감한 금융상품가치가 표준적 Black-Scholes방정식과 같은 형태의 편미분방정식을 만족하는 것을 보이고자 한다. 이 경우에 우리가 다루는 확률변수가 현물이자율 $R(t)$ 이므로, 이 편미분방정식의 도출은 표준적 Black-Scholes방정식을 구하는 것과는 근본적으로 다르다. Black-Scholes환경에서 원자산 $S(t)$ 는 거래되는 금융상품의 가격이지만, 현물이자율 $R(t)$ 는 시장에서 거래되는 것이 아니다. 따라서, 현물이자율 $R(t)$ 의 모형화에 관련된 어려움이 이 편미분방정식의 도출에도 존재한다.

이자율의 변동에 민감한 금융상품가치에 대한 편미분방정식의 고전적 도출은 Vasicek (1977)으로부터 활발하게 전개되었다. 이 편미분방정식을 도출하는 기본적인 아이디어는 여러 금융상품가치의 동적특성에 하나의 Brown운동에 의한 무재정조건을 도입하는 것이다. 이 Brown운동은 두 개 이상의 금융상품가치들에서 관찰되는 확률변동을 결정한다. 표준적 Black-Scholes환경에서 원자산의 확률변동은 해당 옵션의 가치에도 영향을 미친다. 즉, 원자산과 옵션가치는 같은 확률변동에 의해서 움직인다. 따라서, 이 금융상품들을 적당히 결합함으로써, 예측할 수 없는 확률변동을 서로 상쇄할 수 있다. 즉, 무위험포트폴리오를 만들 수 있다. 이 무위험포트폴리오의 수익률이 무위험채권의 수익률과 같아야 한다는 무재정조건으로부터 Black-Scholes식을 유도할 수 있다. 이자율의 변동에 민감한 금융상품에도 이 아이디어를 확장해서 적용할 수 있다. 어떤 회사에서 발행하는 할인채들은 만기시점을 제외하면 서로 비슷한 금융상품들이다. 즉, 이 할인채들은 비슷한 확률변동의 영향을 받는다고 할 수 있다. 따라서, 포트폴리오무게(portfolio weight)들을 적당히 조정함으로써, 두 가지 이상의 할인채들을 조합한 포트폴리오를 무위험으로 만들 수 있다. Black-Scholes방정식의 도출에서 현물이자율은 일정하다고 가정하였다. Black-Scholes환경에서 이 가정은 강건성을 갖는다. 그러나, 이자율의 변동에 민감한 금융상품의 경우에는 이자율이 상수라는 가정은 불가능한 것이다. 오히려 반대로, 이 금융상품가치의 확률변동은 현물이자율 $R(u)$ 에 영향을 미치는 무한소 확률증분들로부터 발생한다. 따라서, 위험중립확률측도 하에서 이자율과정을 나타내는 확률미분방정식의 추세모수와 무위험이자율이 같다고 할 수는 없다. 이러한 점이 이자율의 변동에 민감한 금융상품가치에 대한 편미분방정식의 도출을 어렵게 만든다.

4.2. 편미분방정식을 도출하기 위한 첫 번째 단계

이자율의 변동에 민감한 금융상품가치의 편미분방정식을 도출하기 위한 첫 번째 단계는 문제의 구조(framework)를 설정하는 것이다. 할인채가치들 $B(t, T_1)$ 과 $B(t, T_2)$ 의 동적특성을 기술하는 두 확률미분방정식들이 주어졌다고 가정하자. 여기서 T_1 과 $T_2 (> T_1)$ 는 할인채들의 만기시점들을 나타낸다. 이 할인채가치들은 동일한 Brown운동 $\{W(u)\}$ 에 따라 변동한다. 편의상 다음과 같은 표기법을 사용하기로 하자.

$$B_t^{(1)} \doteq B(t, T_1), \quad B_t^{(2)} \doteq B(t, T_2) \quad (4.1)$$

이 할인채가치들이 다음 확률미분방정식들을 만족한다고 가정하자.

$$dB_t^{(1)} = \mu_1(t, T_1)B_t^{(1)}dt + \sigma_1(t, T_1)B_t^{(1)}dW(t) \quad (4.2)$$

$$dB_t^{(2)} = \mu_2(t, T_2)B_t^{(2)}dt + \sigma_2(t, T_2)B_t^{(2)}dW(t) \quad (4.3)$$

편의상, $\mu_1 \doteq \mu_1(t, T_1)$, $\mu_2 \doteq \mu_2(t, T_2)$, $\sigma_1 \doteq \sigma_1(t, T_1)$ 그리고 $\sigma_2 \doteq \sigma_2(t, T_2)$ 로 표기하자. 식 (4.2)의 확산항과 식 (4.3)의 확산항은 동일한 Brown운동 $\{W(t)\}$ 에 의존하지만, 또한 서로 다른 확산모수들 σ_1 과 σ_2 에 의존한다. 각 확률미분방정식에서 추세모수와 확산모수는 $B_t^{(1)}$ 또는 $B_t^{(2)}$ 에 의존할 수도 있다. 즉, 할인채가치과정이 기하Brown과정일 필요는 없다.

4.3. 편미분방정식을 도출하기 위한 두 번째 단계

이자율의 변동에 민감한 금융상품가치의 편미분방정식을 도출하는 두 번째 단계에서는 이자율모형을 가정한다. 현물이자율 $R(t)$ 가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dR(t) = \alpha(t, R(t))dt + \beta(t, R(t))dW(t) \quad (4.4)$$

여기서 추세계수 $\alpha(t, R(t))$ 와 확산계수 $\beta(t, R(t))$ 는 기지라고 가정하자. 즉, 이 계수들을 과거의 데이터로부터 추정하거나 또는 시장가격으로부터 측정했다고 가정하자. 또한, $\{W(t)\}$ 는 진짜확률측도 P 에서 Brown운동임을 유의하라.

확률미분방정식 (4.4)의 중요한 제약은 추세계수 $\alpha(t, R(t))$ 와 확산계수 $\beta(t, R(t))$ 가 시점 t 의 현물이자율 $R(t)$ 에만 의존한다는 것이다. 즉, 과거시점 $s (< t)$ 의 현물이자율 $R(s)$ 는 추세계수와 확산계수에 영향을 미치지 않는다. 실제시장에서 관찰되는 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 는 이러한 Markov성을 갖지 못한다. 그럼에도 불구하고, 고전적 접근법에서는 $\{R(t)\}$ 의 Markov성을 합리적 근사로 가정한다. 다양한 형태의 추세계수 $\alpha(t, R(t))$ 와 확산계수 $\beta(t, R(t))$, 즉 다양한 현물이자율모형들이 제안되고 있다. 현물이자율모형을 구축하는 가장 큰 목적은 이자율에 민감한 금융상품의 가치를 평가하는 것이다. 지나치게 복잡한

현물이자율모형은 모수추정(parameter estimation)이나 모수조정(parameter calibration)이 어렵고, 따라서 실무에서 사용할 수 없는 경우도 많다. 이 노트에서는 이자율에 민감한 금융상품의 가치평가에 이용되고 있는 대표적인 현물이자율모형들을 다루고자 한다.

4.4. 편미분방정식을 도출하기 위한 세 번째 단계

이자율의 변동에 민감한 금융상품의 편미분방정식을 도출하는 세 번째 단계에서는 이자율위험의 시장가치(market price of interest rate risk)이라는 개념을 도입한다. 할인채가치의 편미분방정식을 도출하기 위해서는, 시점 t 에서 두 할인채들로 이루어진 무위험포트폴리오를 구해야 한다. 일반성을 잃지 않고, 첫 번째 할인채 θ_1 단위에 대한 롱포지션을 취하는 동시에 두 번째 할인채 θ_2 단위에 대한 숏포지션을 취한다고 가정하자. 이 포트폴리오의 시점 t 에서 가치 P_t 는 다음과 같다.

$$P_t = \theta_1 B_t^{(1)} - \theta_2 B_t^{(2)} \quad (4.5)$$

다음과 같은 포트폴리오무게들을 선택하기로 하자.

$$\theta_1 = \frac{\sigma_2}{B_t^{(1)}[\sigma_2 - \sigma_1]} P_t, \quad \theta_2 = \frac{\sigma_1}{B_t^{(2)}[\sigma_2 - \sigma_1]} P_t \quad (4.6)$$

만일 포트폴리오가치과정 $\{P_t\}$ 가 자기금융조건(self-financing condition)을 만족하면, 이 포트폴리오가치의 동적특성은 다음과 같다.

$$dP_t = \theta_1 dB_t^{(1)} - \theta_2 dB_t^{(2)} \quad (4.7)$$

식 (4.2)와 식 (4.3)을 식 (4.7)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dP_t = \theta_1 [\mu_1 B_t^{(1)} dt + \sigma_1 B_t^{(1)} dW(t)] - \theta_2 [\mu_2 B_t^{(2)} dt + \sigma_2 B_t^{(2)} dW(t)] \quad (4.8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \theta_1 \sigma_1 B_t^{(1)} - \theta_2 \sigma_2 B_t^{(2)} \\ &= \left\{ \frac{\sigma_2}{B_t^{(1)}[\sigma_2 - \sigma_1]} \sigma_1 B_t^{(1)} - \frac{\sigma_1}{B_t^{(2)}[\sigma_2 - \sigma_1]} \sigma_2 B_t^{(2)} \right\} P_t = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (4.6)에 의해서 성립한다. 식 (4.8)과 식 (4.9)에서 알 수 있듯이, 포트폴리오가치의 동적특성은 다음과 같다.

$$dP_t = [\theta_1 \mu_1 B_t^{(1)} - \theta_2 \mu_2 B_t^{(2)}] dt \quad (4.10)$$

식 (4.10)에는 Brown운동의 요인이 없다. 즉, 이 포트폴리오는 완전히 예측가능하다. 식 (4.6)의 포트폴리오무게들은 확률미분방정식 (4.8)에서 확률증분항 $dW(t)$ 이 삭제되도록 선택되었다. 이것은 Black-Scholes방정식의 도출과 비슷하다. 식 (4.6)을 식 (4.10)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dP_t = P_t \frac{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} dt \quad (4.11)$$

확률미분방정식 (4.11)은 확산항을 포함하지 않으므로, 이 포트폴리오는 무위험이다. 즉, 이 포트폴리오의 수익 dP_t 는 $R(t)P_t dt$ 와 동일하다. 따라서, 식 (4.11)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$P_t \frac{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} dt = R(t)P_t dt \quad (4.12)$$

식 (4.12)를 정리하면, 다음과 같다.

$$\frac{\mu_1 - R(t)}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - R(t)}{\sigma_2} \quad (4.13)$$

식 (4.13)에서 알 수 있듯이, 만기시점이 서로 다른 할인채들의 위험프리미엄들을 각 할인채의 변동성으로 나눈 값들은 동일하다. 즉, 변동성 당(per volatility) 위험프리미엄은 할인채의 만기시점에 관계없이 동일하다. 이를 달리 말하면, 할인채들의 Sharpe비(Sharpe ratio)들이 동일하다. 즉, 변동성이 높은 할인채에는 그에 걸맞은 높은 위험프리미엄이 있다. 만일 어떤 할인채가치의 변동이 다른 추가적인 Brown운동 $\{W^*(t)\}$ 에 의존한다면, 무재정조건 하에서 이 할인채의 변동성 당 위험프리미엄은 다른 할인채의 것과는 다를 것이다. 할인채의 만기시점은 임의로 선택되었으므로, 동일한 Brown운동 $\{W(t)\}$ 에 의해 움직이는 모든 할인채가치들에 대하여 식 (4.13)이 성립한다. 따라서, 임의의 만기시점 $T(> t)$ 에 대해서, 다음 식을 만족하는 $\lambda(t, R(t))$ 가 존재한다.

$$\frac{\mu_B - R(t)}{\sigma_B} = \lambda(t, R(t)) \quad (4.14)$$

여기서 $\mu_B \doteq \mu_B(t, T)$ 와 $\sigma_B \doteq \sigma_B(t, T)$ 는 각각 만기시점 T 인 할인채가치의 시점 t 에서 확률미분방정식의 추세모수와 확산모수이다. 앞서서도 언급했듯이, 이 $\lambda(t, R(t))$ 를 이자율위험의 시장가치라 한다. 이자율위험의 시장가치 $\lambda(t, R(t))$ 는 $R(t)$ 와 t 의 함수이다. 이후 이 종속관계를 엄두에 두면서, $\lambda(t, R(t))$ 를 간단히 λ_t 로 표기하자. 이 λ_t 가 할인채의 만기시점에 의존하지 않는다는 것이 이자율모형의 무재정조건이다. Black-Scholes환경에서도 같은 형태의 주식위험의 시장가치(market price of equity risk)가 존재했지만, 이를 명시적으로 Black-Scholes방정식에 사용하지는 않았다. 그러나, 이자율의 변동에 민감한 금융상품가치에 대한 편미분방정식을 도출하는데는 이자율위험의 시장가치 λ_t 를 명시적으로 사용해야만 한다.

4.5. 편미분방정식을 도출하기 위한 네 번째 단계

이자율의 변동에 민감한 금융상품의 편미분방정식을 도출하는 네 번째 단계는 할인채가치 $B(t, T)$ 에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하는 것이다. 만기시점이 T 인

할인채의 무재정가치 $B(t, T)$ 가 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$dB(t, T) = \mu_B(t, T)B(t, T)dt + \sigma_B(t, T)B(t, T)dW(t) \quad (4.15)$$

여기서 $\{W(t)\}$ 는 진짜확률측도 P 에서 Brown운동이다. 확률미분방정식 (4.15)는 확률미분방정식 (4.2)와 확률미분방정식 (4.3)을 일반적인 형태로 표현한 것이다. 할인채가치 $B(t, T)$ 는 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 함수이다. 따라서, 할인채가치 $B(t, T)$ 에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 다음 식이 성립한다.

$$dB(t, T) = B_t(t, T)dt + B_R(t, R(t))dR(t) + \frac{1}{2}\beta^2(t, R(t))B_{RR}(t, T)dt \quad (4.16)$$

여기서 다음 식들이 성립한다.

$$B_t(t, T) \doteq \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} \quad (4.17)$$

$$B_R(t, T) \doteq \frac{\partial B(t, T)}{\partial R(t)}, \quad B_{RR}(t, T) \doteq \frac{\partial^2 B(t, T)}{\partial R^2(t)} \quad (4.18)$$

식 (4.4)를 식 (4.16)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dB(t, T) = \left[B_t(t, T) + \alpha(t, R(t))B_R(t, T) + \frac{1}{2}\beta^2(t, R(t))B_{RR}(t, T) \right] dt + \beta(t, R(t))B_R(t, T)dW(t) \quad (4.19)$$

식 (4.15)와 식 (4.19)로부터, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\sigma_B B(t, T) = \beta(t, R(t))B_R(t, T) \quad (4.20)$$

$$\mu_B B(t, T) = B_t(t, T) + \alpha(t, R(t))B_R(t, T) + \frac{1}{2}\beta^2(t, R(t))B_{RR}(t, T) \quad (4.21)$$

여기서 $\mu_B \doteq \mu_B(t, T)$ 이고 $\sigma_B \doteq \sigma_B(t, T)$ 이다.

4.6. 편미분방정식을 도출하기 위한 다섯 번째 단계

이자율의 변동에 민감한 금융상품가치의 편미분방정식을 도출하는 다섯 번째 단계는 무재정조건을 식 (4.20)과 식 (4.21)에 적용하는 것이다. 식 (4.21)이 미지의 μ_B 를 포함하고 있는 것을 제외하면, 식 (4.21) 자체가 편미분방정식이다. 식 (4.21)에서 이 미지의 μ_B 를 제거하기 위해서, 무재정조건을 사용하기로 하자. 모든 할인채가치들이 동일한 Brown운동에 의해 움직인다고 가정하고 있으므로, 이 할인채가치들 사이에는 무재정조건이 존재해야 한다. 식 (4.14)에서 알 수 있듯이, 이자율위험의 시장가치 λ_t 가 할인채의 만기시점 T 에 의존하지 않는다는 것이 무재정조건이다. 표준적 Black-Scholes식을 구할 때는 μ_B 를 상수인 현물이자율 r 로 치환하면 되었다. 그러나, 식 (4.21)의 우변에서 현물이자율의 추세계수 $\alpha(t, R(t))$ 를 사용하고 있기 때문에, 이러한 단순한 치환은 불가능하다. 만일 식 (4.21)에서 μ_B 를 $R(t)$ 로 치환한다면, 현물이자율의 추세계수 $\alpha(t, R(t))$ 도

위험중립이 되도록 조정해야만 한다. 그러나, $R(t)$ 는 시장에서 거래되는 금융상품의 가치가 아니므로, 이러한 조정이 어떻게 이루어져야 하는지가 명확하지 않다. 이러한 문제를 이자율위험의 시장가치 λ_t 를 이용해서 다음과 같이 해결할 수 있다. 식 (4.14)를 식 (4.20)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\mu_B B(t, T) = R(t)B(t, T) + \beta(t, R(t))B_R(t, T)\lambda_t \quad (4.22)$$

식 (4.21)과 식 (4.22)에서 $\mu_B B(t, T)$ 를 소거하면, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & [\alpha(t, R(t)) - \beta(t, R(t))\lambda_t]B_R(t, T) + B_t(t, T) \\ & + \frac{1}{2}\beta^2(t, R(t))B_{RR}(t, T) - R(t)B(t, T) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

식 (4.23)이 할인채가치 $B(t, T)$ 의 편미분방정식이다. 그러나, 편미분방정식 (4.23)에는 미지인 이자율위험의 시장가치 λ_t 가 모수로 포함되어 있음에 유의하라. 편미분방정식 (4.24)에 대한 말기조건은 표준적 Black-Scholes방정식의 경우보다 훨씬 간단하다. 만기시점 T 에서 그 때의 현물이자율의 수준에 상관없이 할인채의 가치는 1이다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$B(T, T) = 1 \quad (4.24)$$

4.7. 이자율위험의 시장가치

현물이자율모형 (4.4)의 추세계수 $\alpha(t, R(t))$ 와 확산계수 $\beta(t, R(t))$ 를 알고 있다고 가정해도, 실제로 편미분방정식 (4.23)를 이용하기 위해서는 이자율위험의 시장가치 λ_t 를 추정할 필요가 있다. 다음 식을 만족하는 확률변수 $W^Q(t)$ 를 정의하자.

$$dW^Q(t) \doteq dW(t) + \lambda_t dt \quad (4.25)$$

Girsanov정리에서 알 수 있듯이, 확률과정 $\{W^Q(t)\}$ 가 Brown운동이 되는 합성확률측도 Q 가 존재한다. 이 Q 를 위험중립확률측도라 한다. 즉, 위험중립확률측도 Q 하에서 $\{W^Q(t)\}$ 는 Brown운동이다. 식 (4.4)에 식 (4.25)를 대입하면, 다음과 같이 현물이자율 $R(t)$ 에 대한 새로운 확률미분방정식을 얻는다.

$$dR(t) = [\alpha(t, R(t)) - \beta(t, R(t))\lambda_t]dt + \beta(t, R(t))dW^Q(t) \quad (4.26)$$

확률미분방정식 (4.26)의 추세계수는 이자율위험이 조정된 것이다. 또한, 식 (4.15)에 식 (4.25)를 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dB(t, T) = [\mu_B - \sigma_B \lambda_t]B(t, T)dt + \sigma_B B(t, T)dW^Q(t) \quad (4.27)$$

이자율위험의 시장가치식 (4.14)를 식 (4.27)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt + \sigma_B B(t, T)dW^Q(t) \quad (4.28)$$

할인채가치 $B(t, T)$ 의 추세계수를 $\mu_B = \mu_B(t, T)$ 에서 현물이자율 $R(t)$ 로 치환하면, Brown운동은 $\{W(t)\}$ 에서 $\{W^Q(t)\}$ 로 바뀐다. 따라서, 현물이자율 $R(t)$ 의

동적특성의 추계수를 $\alpha(t, R(t))$ 에서 $[\alpha(t, R(t)) - \beta(t, R(t))\lambda_t]$ 로 치환해야 한다. 식 (4.26)에서 알 수 있듯이, 편미분방정식 (4.23)에서 $B_R(t, T)$ 의 계수 $[\alpha(t, R(t)) - \beta(t, R(t))\lambda_t]$ 는 현물이자율의 동적특성에서 위험이 조정된 추계수이다.

4.8. 할인채가치의 편미분방정식

지금까지 다른 할인채가치 $B(t, T)$ 의 편미분방정식 (4.23)의 도출에서 중요한 점들을 요약하고, 이 도출과정을 표준적 Black-Scholes방정식을 도출하는 경우와 비교해 보자. 편미분방정식 (4.23)을 도출하는 전반적인 전략은 Black-Scholes방정식을 도출하는 경우와 같았다. 주된 차이점은 원자산이 금융상품가치 $S(t)$ 가 아니고 현물이자율 $R(t)$ 라는 것에서 발생한다. 따라서, 미지의 추계수를 무위험이자율로 대체하는 Black-Scholes방정식의 도출과는 다른 방법으로 무재정조건을 도입해야 한다. 편미분방정식 (4.23)을 도출할 때, 이자율위험의 시장가치 λ_t 를 이용해서 할인채가치의 확률미분방정식의 추계항을 수정하였다. 이 과정에서 식 (4.22)를 사용함으로써 무재정조건을 암묵적으로 도입하였다.

할인채가치를 평가하기 위한 편미분방정식 (4.23)과 Black-Scholes방정식 사이에는 아주 중요한 차이가 있다. Black-Scholes방정식을 도출하는 경우에는, 무재정조건에 의해서 원자산 $S(t)$ 의 추계수를 추정해야 할 필요를 완전히 제거하였다. 실제로, Black-Scholes방정식을 만족하는 옵션가치는 원자산 $S(t)$ 의 기대수익률에는 무관하고 단지 변동성에만 의존한다. 이자율의 변동에 민감한 금융상품가치를 평가하는 고전적 접근법에서 무재정조건식 (4.14)를 이용하면, 편미분방정식에 현물이자율 $R(t)$ 가 도입된다. 또한, $R(t)$ 와 더불어 두 가지 모수들, 즉 현물이자율의 추계수 $\alpha(t, R(t))$ 와 이자율위험의 시장가치 λ_t 가 편미분방정식 (4.23)에 도입된다. 따라서, 만일 현실세계에서 이 편미분방정식을 사용해서 할인채가치를 결정하려면, 이 모수들을 추정할 필요가 있다. 따라서, 편미분방정식 (4.23)을 이용하기 위해서는, 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 의 완전한 모형화가 필요하다. 이것은 Black-Scholes방법의 기본적 아이디어와 다른 점이다. 할인채가치의 평가를 위한 편미분방정식 (4.23)의 유도에서 중요한 점은 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 에 관한 가정이다. 지금까지 모든 할인채가치들이 동일한 단변량Brown운동 $\{W(t)\}$ 에 의해 움직인다고 가정하였다. 즉, 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 의 확률변동이 동일한 단변량Brown운동 $\{W(t)\}$ 에 기인한다는 가정에 의해서, 이자율위험의 시장가치 λ_t 로 표현된 무재정조건을 얻을 수 있었다. 이것은 현실시장을 반영하지 못할 수도 있다. 즉, Black-Scholes환경에서처럼 하나의

주가를 하나의 단변량Brown운동 $\{W(t)\}$ 의 함수로 나타내는 것은 받아들일 만한 근사이다. 그러나, 아주 단기로부터 아주 장기에 이르는 다양한 할인채들의 가치들을 하나의 단변량Brown운동 $\{W(t)\}$ 로 나타낼 수 있다는 가정이 현실적인지 매우 의문스러운 것이다.

무심코 생각한다면, 이자율위험의 시장가치 λ_t 는 양수일 것 같다. 그러나, 일반적으로 이자율위험의 시장가치는 음수이다. 할인채가치 $B(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 단조감소함수이다. 즉, $B_R(t, T)$ 는 음수이다. 따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$\sigma_B = \frac{1}{B(t, T)} \beta(t, R(t)) \frac{\partial B(t, T)}{\partial R(t)} < 0 \quad (4.29)$$

여기서 등호는 식 (4.20)에 의해서 성립한다. 할인채의 수익률 μ_B 는 현물이자율 $R(t)$ 보다 크다. 따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$\lambda(t, R(t)) = \frac{\mu_B - R(t)}{\sigma_B} < 0 \quad (4.30)$$

즉, 이자율위험의 시장가치는 음수이다. 그러나, 이자율 자체는 시장에서 거래되는 금융상품이 아니고 채권이 시장에서 거래되는 금융상품이고 또한 채권가격이 이자율의 감소함수라는 점을 고려하면, 식 (4.30)은 타당하다고 생각한다. 식 (4.29)를 식 (4.28)에 대입하면, 할인채가치 $B(t, T)$ 는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt + \beta(t, R(t))B_R(t, T)dW^Q(t) \quad (4.31)$$

제5절 이자율모형의 개요

이자율모형은 현물이자율모형과 선도이자율모형으로 나눌 수 있고, 현물이자율모형은 단요인이자율모형(single factor interest model)과 다요인이자율모형(multi factor interest model)으로 나눌 수 있다.

5.1. 단요인이자율모형

앞에서 간단히 언급한 Vasicek이자율모형, Hull-White이자율모형 그리고 CIR이자율모형이 대표적인 단요인이자율모형들이다. 이러한 현물이자율모형은 Markov모형이기 때문에, 이 현물이자율과정을 원자산으로 하는 이자율과생상품가치의 해석해가 얻어지는 경우가 많다. 해석해가 얻어지지 않는 경우에도, 계산재무적 기법들을 적용하기가 쉽다는 장점을 갖고 있다. Hull-White이자율모형은 Vasicek이자율모형의 추세계수인 상수 a 대신에 시간함수 $a(t)$ 를 사용해서 확장한 이자율모형이다. Vasicek이자율모형이나 Hull-White이자율모형을 따르는 현물이자율은 정규분포를 따르기 때문에, 이자율이 음수가 될 확률이 양수인 구조적인 문제를 포함하고 있다. 이에 반해, CIR이자율모형은 확산계수가 현물이자율의 제곱근으로 주어져서, 현물이자율이 음수가 될 확률이 0이라는 장점을 지니고 있다.

현물이자율이 대수정규분포에 따른다고 가정함으로써, 이자율이 음수가 될 수 있는 가능성을 제거한 이자율모형로서 Black & Derman & Toy (1990)가 제시한 이산시간형 이자율모형인 BDT이자율모형, 그리고 이 BDT이자율모형의 연속시간형인 Dothan이자율모형 (1978)이 있다. 이 Dothan이자율모형을 기하Brown운동이자율모형이라 한다. 기하Brown운동이자율모형을 확장한 것으로는 Black-Karasinski이자율모형 (1991) 등이 있다. 그 외에, 초창기 모형인 Merton이자율모형 (1971), Brennan-Schwartz이자율모형 (1979) 등이 알려져 있다.

5.2. 다요인이자율모형

단요인이자율모형은 일드곡선의 움직임을 나타내는 최대요인인 평행이동(parallel shift)을 잘 표현하지만, 기울기의 변화나 곡률(curvature)의 변화와 같은 보다 고차원의 변화를 잘 표현하지 못한다. 따라서, 단요인이자율모형을 사용하면, 서로 다른 만기시점들의 이자율변화를 완전히 같은 방향과 같은 크기로 나타낼 수 밖에 없다는 결점이 있다. 즉, 단요인이자율모형은

spread옵션과 같은 장기이자율과 단기이자율의 차이를 원자산으로 하는 관한 이자율과생상품의 가치평가에는 적합하지 않다. 따라서, 이러한 금융상품의 가치평가를 하기 위해서는 2요인 이상의 다요인이자율모형을 사용할 필요가 있다.

Brennen & Schwartz (1982)는 단기이자율과 장단이자율의 차이를 나타내는 2요인이자율모형을 제안했다. 또한 Longstaff & Schwartz (1992)는 CIR이자율모형을 2요인이자율모형으로 확장했다. 다요인CIR이자율모형이라 불리우는 이 모형은 아핀일드모형(affine yield model)의 특수한 형태라고 할 수 있다. 아핀일드모형이란 일드 $R(t, T)$ 가 현물이자율 $R(t)$ 의 아핀함수가 되는 모형으로서, 앞에서 다룬 Merton이자율모형, Vasicek이자율모형, Hull-White이자율모형, CIR이자율모형 등을 포함한다.

5.3. 선도이자율모형

현물이자율이 아닌 선도이자율을 모형화하는 것이 선도이자율모형이다.

첫째, HJM이자율모형은 이자율의 이자율기간구조 전체의 변동을 직접 표현하는 모형으로서, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$dF(t, T) = \alpha_F(t, T)dt + \sum_{i=1}^N \beta_i(t, T)dB_i^Q(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5.1)$$

여기서 $\{B_1^Q(t)\}, \{B_2^Q(t)\}, \dots, \{B_N^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동들이다. 변동성 $\beta_i(t, T)$ 가 선물이자율 $F(t, T)$ 에 의존하는 경우도 있다. HJM이자율모형을 따르는 선도이자율을 원자산으로 하는 이자율과생상품의 가치평가에서 특수한 경우를 제외하고는 해석해가 얻어지지 않는다. 또한, HJM이자율모형으로부터 도출되는 현물이자율과정이나 할인채가치과정이 Markov성을 갖지 않기 때문에, 계산재무적기법을 적용하는 것이 쉽지 않다. Carverhill (1994)은 현물이자율과정이 Markov성을 갖도록 변동성에 제약을 가하는 방법을 제시하였다.

둘째, Brace & Gatarek & Musiela (1997)이 제시한 선도LIBOR모형인 BGM이자율모형은 이자율이 복리가 아닌 단리라는 가정을 바탕으로 한 것이다. 스왑선, 캘릿, 플로어릿, 캡, 그리고 플로어 등 이른바 LIBOR상품의 평가에는 Black공식이 널리 사용되어 왔다. 이 Black공식은 LIBOR가 기하Brown운동을 따른다고 가정하는 가치평가식으로서 이자율과생상품의 가치평가식을 해석적으로 구할 수 있다는 장점이 있다. 그러나, 이 Black모형에서는 선도LIBOR의 변동성이 일정하다고 가정하고 있기 때문에, 실제시장에서 추정된 변동성이

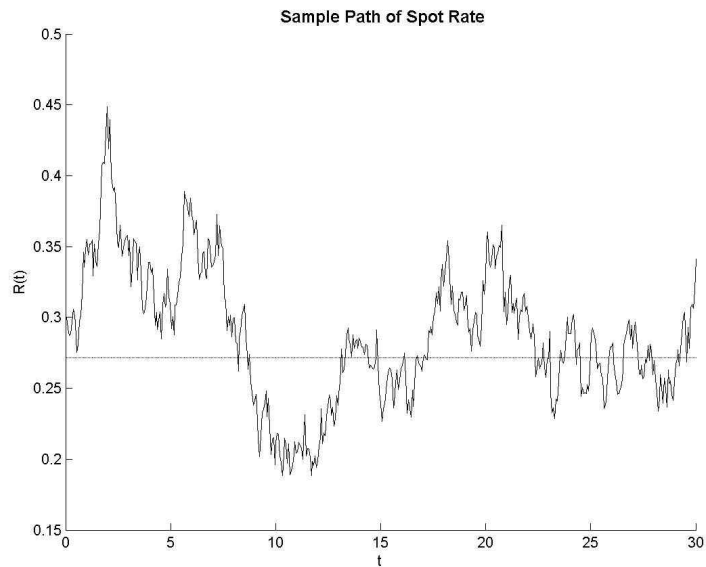
이자율기간구조를 보이는 경우, 즉 변동성이 만기시점 T 의 함수인 경우에는 재정기회가 발생할 수 있다. BGM모형은 선도LIBOR모형의 변동성이 HJM이자율모형과 정합성을 갖도록 만든 것이다.

5.4. CEV모형

앞에서 설명했듯이, 엄밀한 의미에서 순간적 현물이자율을 시장에서 관측하는 것은 불가능하다. 따라서, 실제 이자율모형을 구축하기 위해서는 잔여기간이 비교적 짧은 이자율을 시장에서 관측되는 현물이자율로 간주한다. 그림 5.4.1에는 다음과 같은 이자율모형에서 발생시킨 현물이자율의 표본경로가 그려져 있다.

$$dR(t) = 0.2945[0.2713 - R(t)] + 0.1005\sqrt{R(t)}dW(t) \quad (5.2)$$

여기서 $\{W(t)\}$ 는 Brown운동이다. 그림 5.4.1을 그리기 위해서는 아래 수록한 MATLAB파일 CEVspot101.m을 실행하라.



[그림 5.4.1] 현물이자율의 표본경로

```

% -----
% Filename: CEVspot101.m
% Sample path of CEV spot interest rate model
% Programmed by CBS
%-----

```

```

clear all, close all
rng('default')
% Mt = NO of subintervals of [t,T];
% N = NO of generating sample paths
N = 1; tau = 30; Mt = 500;
sqrtau = sqrt(tau);
Deltat = tau/Mt;
sqDeltat = sqrt(Deltat);
ttTT = Deltat:Deltat:tau;
kk = 0.2945;
theta = 0.2713;
sigma = 0.1005;
aa = kk*theta;
bb = kk;
beta = sigma;
Rt = 0.3;
Rmean = aa/bb;
% make sample pathes
hold on
Rmat = Rt*ones(N,Mt);
for i=1:N
    for tj=1:Mt-1
        zz = randn(1,1);
        Rmat(i,tj+1) = Rmat(i,tj) ...
            +(aa-bb*Rmat(i,tj))*Deltat ...
            + beta*sqrt( abs(Rmat(i,tj)) )*sqDeltat*zz;
    end
    Rvec = Rmat(i,:);
    plot( ttTT, Rvec,'k', ttTT, Rmean*ones(size(ttTT)), 'r--')
end
title('Wbf Sample Path of Spot Rate','fontsize', 12)
ylabel('R(t)', xlabel('t')
saveas(gcf,'CEVspot101.png')
% end of program
% -----

```


그림 5.4.1에서 볼 수 있듯이, 현물이자율과정은 매우 복잡한 움직임을 한다. 이러한 현물이자율과정의 동적특성을 확률미분방정식 (4.4)로 나타내기 위해서는, 추계수 $\alpha(t, R(t))$ 를 모형화하는 것이 매우 중요하다. 그림 5.4.1에서처럼, 장기적으로 볼 때 현물이자율과정에는 어떤 수준(level)의 평균이 존재하며, 현물이자율과정은 그 평균 주변을 움직이며 또한 시점이 흐름에 따라 평균으로 회귀(mean-reverting)하는 성질을 갖는다고 가정한다. 이와 같은 가설을 표현하는 가장 단순한 방법은 다음과 같은 추계수를 상정하는 것이다.

$$\alpha(t, R(t)) = a[R - R(t)] \quad (5.3)$$

여기서 상수 a 는 현물이자율 $R(t)$ 가 평균 R 에 회귀하는 속도를 나타낸다. 식 (5.3)처럼 추계수 $\alpha(t, R(t))$ 를 현물이자율 $R(t)$ 의 1차식으로 나타내는 모형을 평균회귀모형(mean-reverting model)이라 부른다. 추계수 $\alpha(t, R(t))$ 가 현물이자율 $R(t)$ 의 1차식이 아닌 모형을 비선형모형이라 한다.

Black-Scholes환경에서 원자산과정 $\{S(t)\}$ 가 기하Brown운동을 하고 현물이자율이 상수라면, Black-Scholes방정식을 풀어서 Black-Scholes식을 얻을 수 있다. 마찬가지로, 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 에 대한 적당한 모형이 구축되면, 할인채가치에 대한 편미분방정식을 풀어서 해석해를 구할 수 있는 경우도 있다. 즉, 할인채가치 $B(t, T)$ 를 시점 t , 만기시점 T , 현물이자율 $R(t)$, 모수들 $\alpha(t, R(t))$, $\beta(t, R(t))$ 와 λ_t 로 나타낼 수도 있다.

지금부터는 대표적인 평균회귀모형들을 간단히 살펴보기로 하자. 현물이자율 $R(t)$ 의 일반적인 평균회귀모형을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dR(t) = [a - bR(t)]dt + \beta R^\gamma(t)dW(t), \quad (t \geq 0) \quad (5.4)$$

여기서 a , b , β 그리고 γ 는 상수들이고, $\{W(t)\}$ 는 Brown운동이다. 이 평균회귀모형은 단요인모형이다. 확률미분방정식 (5.4)를 만족하는 현물이자율 $R(t)$ 가 평균회귀성을 갖기 위해서 다음 식들이 성립해야 한다.

$$a > 0, \quad b > 0 \quad (5.5)$$

예외적으로 식 $a = b = 0$ 이 성립하는 경우를 생각할 수 있으나, 이 경우에 식 $\beta = 0$ 가 성립하지 않으면, 현물이자율과정은 기하Brown운동과 비슷한 형태를 보인다. 즉, 시점 t 가 커짐에 따라, 현물이자율이 0으로 수렴하거나 무한히 커진다. 식 (5.4)의 확산계수는 다음과 같다.

$$\beta(t, R(t)) = \beta R^\gamma(t) \quad (5.6)$$

여기서 β 와 γ 는 비음(nonnegative)인 상수들이다. 이 확산계수 $\beta(t, R(t))$ 는 시간동질적(time-homogeneous)이다. 즉, 이 확산계수는 현물이자율 $R(t)$ 를 통해서만 시점 t 에 의존한다. 식 (5.6)과 같은 확산계수를 갖는 현물이자율모형을 탄력성(elasticity)이 상수인 모형, 즉 CEV모형(constant elasticity of variance model)이라

고 하자. 또한, γ 를 CEV지수라 하자. Brigo & Mercurio (2006)에서 알 수 있듯이, 확률미분방정식 (5.4)의 일의적인 해가 존재하기 위해서는 모수 γ 가 다음 식들을 만족해야 한다.

$$\gamma \in \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad (5.7)$$

만약 모수 γ 가 조건 (5.7)을 만족하지 못하면, 확률미분방정식 (5.5)의 해의 존재성을 보증하기 위해서는 0에 가깝거나 1에 가까운 현물이자율 $R(t)$ 의 값에 대한 확산계수 $\beta(t, R(t))$ 의 형태를 수정할 필요가 있다. CEV모형에 관한 자세한 내용은 Cox & Ross (1976) 와 Andersen & Andreasen (2000)을 참조하라.

확률미분방정식 (5.4)를 따르는 현물이자율의 기대값 $E(R(t))$ 를 구해보자. 확률미분방정식 (5.4)를 다음과 같은 확률적분방정식으로 쓸 수 있다.

$$R(t) = R(0) + \int_0^t [a - bR(s)]ds + \beta \int_0^t R^\gamma(s) dW(s) \quad (5.8)$$

식 (5.8)의 양변에서 기대값을 취하면, 다음 식을 얻는다.

$$E(R(t)) = R(0) + \int_0^t [a - bE(R(s))]ds \quad (5.9)$$

식 (5.9)는 $E(R(t))$ 의 상적분방정식이다. 식 (5.9)의 양변을 미분하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{dE(R(t))}{dt} = a - bE(R(t)) \quad (5.10)$$

또한, 초기조건은 다음과 같다.

$$E(R(0)) = R(0) \quad (5.11)$$

초기조건 (5.11)을 만족하는 상미분방정식 (5.10)의 해를 구하면, 다음과 같다.

$$E(R(t)) = \frac{a}{b} + \left[R(0) - \frac{a}{b} \right] e^{-bt}, \quad (t \geq 0) \quad (5.12)$$

즉, 모형에서 현물이자율 $R(t)$ 의 기대값은 확산계수와는 독립적이다.

(예제 5.4.1) 현물이자율 $R(t)$ 가 상수 r 이라고 가정하자. 이 현물이자율 $R(t)$ 에 대한 확률미분방정식을 다음과 같이 표기하자.

$$dR(t) = \alpha(t, R(t))dt + \beta(t, R(t))dW(t) \quad (1)$$

확률방정식 (1)의 계수들이 다음 식들을 만족하는 것은 자명하다.

$$\alpha(t, R(t)) = 0, \quad \beta(t, R(t)) = 0 \quad (2)$$

즉, 이 현물이자율모형은 CEV모형이며, 다음 식들을 만족한다.

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \beta = 0 \quad (3)$$

더구나, 이자율위험이 존재하지 않으므로, 아무런 위험프리미엄도 지불할 필요가 없다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lambda_t = 0 \quad (4)$$

식 (2)와 식 (4)를 식 (4.23)에 대입하면, 다음 편미분방정식이 성립한다.

$$B_t(t, T) - R(t)B(t, T) = 0 \quad (5)$$

편미분방정식 (5)의 일반해는 다음과 같다.

$$B(t, T) = A \exp(-r\tau) \quad (6)$$

여기서 $\tau = T - t$ 이다. 또한, 경계조건은 다음과 같다.

$$B(T, T) = 1 \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)에 의해서, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$B(t, T) = \exp(-r\tau) \quad (8)$$



제6절 Merton이자율모형

6.1. 모형

Merton (1971)은 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 동적특성이 다음과 같은 현물이자율모형을 제안하였다.

$$dR(u) = a du + \beta dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (6.1)$$

여기서 $a(> 0)$ 와 $\beta(> 0)$ 는 상수들이고 $\{W^Q(u)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 이 현물이자율모형에서 $b = 0$ 이고 또한 CEV지수는 $\gamma = 0$ 이다. 이 현물이자율과정은 추세계수가 a 인 일반화Brown운동이다. 확률변수 $W^Q(t)$ 는 정규분포를 따르므로, Merton이자율모형에서는 현물이자율 $R(t)$ 가 음의 값을 가질 확률이 양수이다. 또한, 이 Merton이자율모형에는 평균회귀성이 존재하지 않는다. 이 Merton이자율모형의 Merton의 장난감모형(toy model)이라 부르기도 한다. 각 $t > s$ 에 대해서 식 (6.1)의 해는 다음과 같다.

$$R(t) = R(s) + a[t - s] + \beta[W^Q(t) - W^Q(s)] \quad (6.2)$$

따라서, 시점 s 에서 정보집합 \mathcal{F}_s 가 주어진 조건 하에서 $R(t)$ 의 조건부확률분포는 다음과 같다.

$$R(t) | \mathcal{F}_s \stackrel{d}{\sim} N(R(s) + a[t - s], \beta^2[t - s]) \quad (6.3)$$

(예제 6.1) 다음과 같은 Merton이자율모형을 살펴보자.

$$dR(u) = 0.02du + 0.06dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. Merton이자율모형 (1)에서 발생되고 또한 시점 $t = 1$ 에서 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 인 표본경로들이 그림 6.1에 수록되어 있다. 그림 6.1을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 MertonSpot101.m을 실행하라.

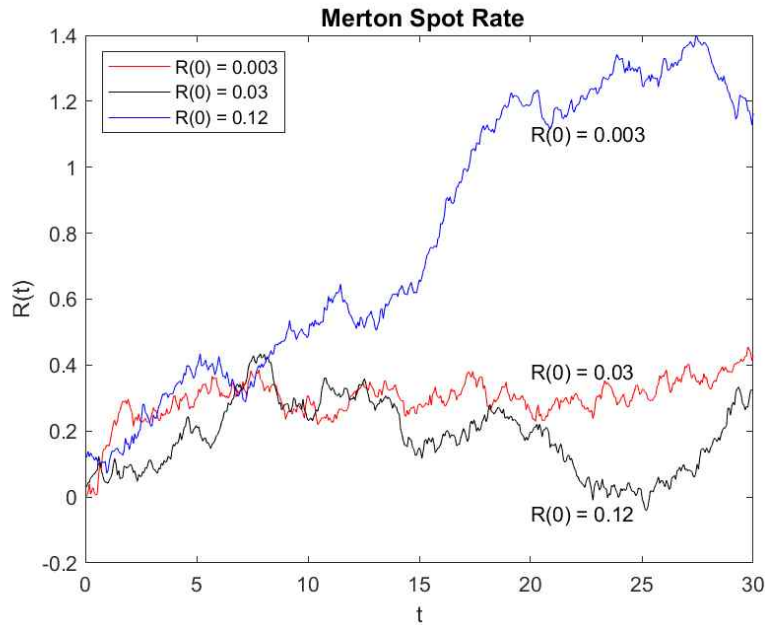
```
% -----
% Filename: MertonSpot101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
rng('default')
% Mt = NO of subintrvals of [t,T];
tau = 30; Mt = 500;
```

```

sqttau = sqrt(tau);
Deltat = tau/Mt;
sqDeltat = sqrt(Deltat);
ttTT = Deltat:Deltat:tau;
% make sample pathes
a = 0.02;
beta = 0.06;
Rvec003 = 0.003*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec003(tj+1) = Rvec003(tj) + a*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec03 = 0.03*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec03(tj+1) = Rvec03(tj) + a*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec12 = 0.12*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec12(tj+1) = Rvec12(tj) + a*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
plot( ttTT, Rvec003,'r',ttTT, Rvec03,'k',ttTT, Rvec12,'b')
legend('R(0) = 0.003','R(0) = 0.03','R(0) = 0.12','location','NW')
text(20, 1.10, 'R(0) = 0.003')
text(20, 0.38, 'R(0) = 0.03')
text(20, -0.05, 'R(0) = 0.12')
title('Wbf Merton Spot Rate','fontsize', 12)
ylabel('R(t)'), xlabel('t')
saveas(gcf,'Mertonspot101.png')
% end of program
% -----

```

그림 6.1에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에 의한 현물이자율과정의 표본경로들은 시점 t 가 증가함에 따라 증가하는 추세를 보이며, 또한 현물이자율이 1보다 크거나 0보다 작은 경우가 나타난다. 이는 Merton이자율모형이 현실성을 결여했음을 보여준다. ■



[그림 6.1] Merton이자율모형에 의한 현물이자율과정

6.2. 할인채가치

각 $s < t$ 에 대해서, 다음 변수를 정의하자.

$$I(s, t) \doteq \int_s^t R(u) du \quad (6.4)$$

시점 u 에서 정보집합 F_u 에 관해 가측인 금융상품가치 $V(u)$ 는 다음 위험중립가치평가식을 만족한다.

$$V(s) = E_s^Q(e^{-I(s, t)} V(t)), \quad (s < t) \quad (6.5)$$

따라서, 만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 무재정가치 $B(t, T)$ 의 가치평가식은 다음과 같다.

$$B(t, T) = E^Q(e^{-I(t, T)}) \quad (6.6)$$

식 (6.6)을 이용해서 할인채가치 $B(t, T)$ 를 계산하기 위해서, 우선 $I(t, T)$ 의 확률분포를 구해보자. 식 (6.2)와 식 (6.4)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} I(t, T) &= \int_t^T \{R(u) + a[u - t] + \beta[W^Q(u) - W^Q(t)]\} du \\ &= R(t)[T - t] + \frac{1}{2} a[T - t]^2 + \beta \int_t^T [W^Q(u) - W^Q(t)] du \end{aligned} \quad (6.7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& E_t^Q\left(\int_t^T [W^Q(u) - W^Q(t)] du\right) \\
&= \int_t^T E_t^Q(W^Q(u) - W^Q(t)) du \\
&= \int_t^T [E_t^Q(W^Q(u)) - W^Q(t)] du \\
&= \int_t^T [W^Q(t) - W^Q(t)] du \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

여기서 첫 번째 등호는 Fubini정리에 의해서 성립한다. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& \int_t^T [T - u] dW^Q(u) \\
&= [T - u]W^Q(u) \Big|_{u=t}^T - \int_t^T W^Q(u)(-du) \\
&= -[T - t]W^Q(t) + \int_t^T W^Q(u) du \\
&= -\int_t^T du W^Q(t) + \int_t^T W^Q(u) du \\
&= \int_t^T [W^Q(u) - W^Q(t)] du
\end{aligned} \tag{6.9}$$

여기서 첫 번째 등호는 Wiener적분의 부분적분공식에 의해서 성립한다. 또한, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& E_t^Q\left(\int_t^T [W^Q(u) - W^Q(t)] du\right)^2 = E_t^Q\left(\int_t^T [T - u] dW^Q(u)\right)^2 \\
&= \int_t^T [T - u]^2 du = \frac{1}{3}[T - t]^3
\end{aligned} \tag{6.10}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (6.9)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 Ito적분의 등거리성에 의해서 성립한다. 식 (6.7), 식 (6.8) 그리고 식 (6.10)에서 알 수 있듯이, $I(t, T)$ 의 조건부평균과 조건부분산은 각각 다음과 같다.

$$m(t, T) \doteq E_t^Q(I(t, T)) = R(t)[T - t] + \frac{1}{2} a [T - t]^2 \tag{6.11}$$

$$v(t, T) \doteq \text{Var}_t^Q(I(t, T)) = \frac{1}{3} \beta^2 [T - t]^3 \tag{6.12}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& \int_t^T [W^Q(u) - W^Q(t)] du \\
&= \int_0^T W^Q(u) du - \int_0^t W^Q(u) du - [T - t]W^Q(t) \\
&= \int_0^T [T - u] dW^Q(u) - \int_0^t [t - u] dW^Q(u) - [T - t]W^Q(t)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (6.9)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 Wiener적분의 부분적분공식에 의해서 성립한다. 식 (6.7)과 식 (6.13)에서 알 수 있듯이, 시점 t 의 정보집합 F_t 가 주어진 조건 하에서 $I(t, T)$ 는 정규분포 $N(m(t, T), v(t, T))$ 를

따른다.

정규분포의 적률모함수를 사용해서, 다음 명제가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

[명제 6.1] 만일 확률변수 x 가 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$ 를 따르면, 확률변수 e^x 는 대수정규분포를 따르며 또한 다음 식이 성립한다.

$$E(e^x) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad \square$$

정보집합 F_t 가 주어진 조건 하에서 $I(t, T)$ 가 정규분포 $N(m(t, T), v(t, T))$ 를 따르므로, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} E^Q(e^{-I(t, T)}) &= \exp\left(-m(t, T) + \frac{1}{2}v(t, T)\right) \\ &= \exp\left(-R(t)[T-t] - \frac{1}{2}a[T-t]^2 + \frac{\beta^2}{6}[T-t]^3\right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

여기서 첫 번째 등호는 명제 6.1에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (6.11)과 식 (6.12)에 의해서 성립한다. 식 (6.6)과 식 (6.14)에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에 의한 할인채의 가치평가식은 다음과 같다.

$$B(t, T) = \exp\left(-R(t)[T-t] - \frac{1}{2}a[T-t]^2 + \frac{\beta^2}{6}[T-t]^3\right) \quad (6.15)$$

여기서 a 와 β 는 상수들이므로, 시점 t 에서 모든 만기시점들에 대한 할인채가치들은 완전상관한다.

식 (6.15)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$B_R(t, T) = -\tau \exp\left(-R(t)\tau - \frac{1}{2}a\tau^2 + \frac{\beta^2}{6}\tau^3\right) < 0 \quad (6.16)$$

식 (4.16)을 식 (4.31)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= R(t)B(t, T)dt \\ &\quad - \beta\tau \exp\left(-R(t)\tau - \frac{1}{2}a\tau^2 + \frac{\beta^2}{6}\tau^3\right)dW^Q(t) \end{aligned} \quad (6.17)$$

즉, Merton이자율모형에 의한 할인채가치의 변동성은 음수이다.

(예제 6.2) 예제 6.1에서 다룬 다음과 같은 Merton이자율모형을 다시 살펴보자.

$$dR(u) = 0.02du + 0.06dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이라 하자.

Merton이자율모형 (1)에 의한 할인곡선들이 그림 6.2에 그려져 있다. 그림 6.2를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 MertonDC101.m을 실행하라.


```

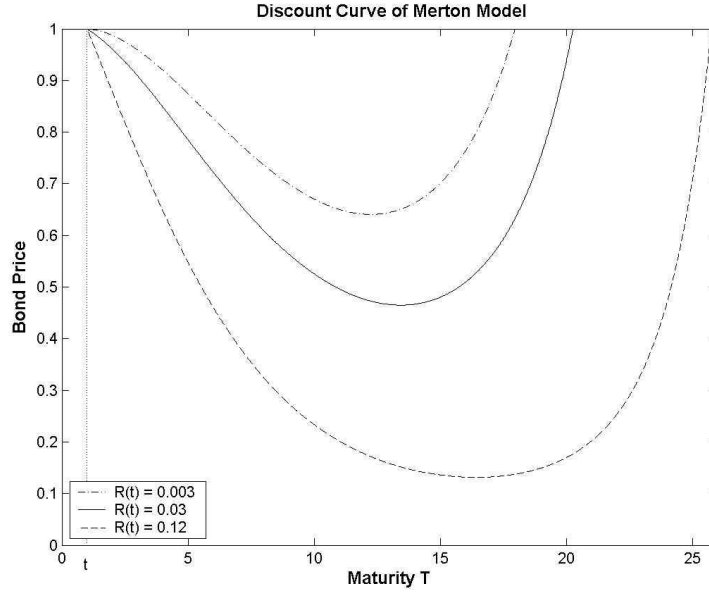
% -----
% Filename: MertonDC101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,2000);
tau = TT - tt+delta;
%
aa = 0.02;
beta = 0.06;
Rt003 = 0.003;
BtT003 = exp(-Rt003*tau - 1/2*aa*tau.^2 + beta^2/6*tau.^3 );
Rt03 = 0.03;
BtT03= exp(-Rt03*tau - 1/2*aa*tau.^2 + beta^2/6*tau.^3 );
Rt12 = 0.12;
BtT12 = exp(-Rt12*tau - 1/2*aa*tau.^2 + beta^2/6*tau.^3 );
yref = 0:1/100:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,BtT003,'k-', TT,BtT03,'k',TT,BtT12,'k--',xref,yref,'k:')

legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','SW')
axis( [ 0, 26, 0, 1 ] )
ylabel('\bf{Bond Price}','fontsize',12)
xlabel('\bf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\bf Discount Curve of Merton Model','fontsize',12)
text(1,-0.03,'t')
saveas(gcf,'Mertondc101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 6.2에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에 의한 할인채가치는 만기시점 T 가 증가함에 따라 감소하다가 다시 증가하는 형태를 보인다. 잔여기간이 긴 할인채는 짧은 할인채보다 위험을 더 포함한다. 따라서, 일반적으로 잔여기간이 긴 할인채의 가치는 짧은 할인채의 가치보다 낮아야 한다. 즉, 할인곡선은 잔여기간의 단조감소함수이다. 그러나, 그림 6.2에서 볼 수 있듯이, Merton이자율모형의 할인곡선은 잔여기간의 단조함수가 아니다. 따라서, 이 Merton이자율모형은

현실성을 결여되었다. ■



[그림 6.2] Merton이자율모형에 의한 할인곡선

(예제 6.3) 다음 Merton이자율모형을 살펴보자.

$$dR(u) = a du + \beta dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 무재정가치를 $B(t, T) = f(t, R(t))$ 라 하자.

식 (4.23)에서 알 수 있듯이, 이 Merton이자율모형에 의한 할인채의 시점 t 에서 가치 $f(t, R(t))$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$-R(t)f(t, R(t)) + f_t(t, R(t)) + a f_R(t, R(t)) + \frac{1}{2} \beta^2 f_{RR}(t, R(t)) = 0 \quad (2)$$

우선, 편미분방정식 (2)가 다음과 같은 형태의 해를 갖는다고 하자.

$$f(t, R(t)) = \exp(-R(t)C(t, T) - A(t, T)), \quad (t \in [0, T]) \quad (3)$$

다음 식들이 성립한다.

$$f_t(t, R(t)) = [-R(t)C_t(t, T) - A_t(t, T)]f(t, R(t)) \quad (4)$$

$$f_R(t, R(t)) = -C(t, T)f(t, R(t)) \quad (5)$$

$$f_{RR}(t, R(t)) = C^2(t, T)f(t, R(t)) \quad (6)$$

식 (4)-식 (6)을 편미분방정식 (2)에 대입하면, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & [-C_t(t, T) - 1]R(t) \\ & - A_t(t, T) - aC(t, T) + \frac{1}{2} \beta^2 C^2(t, T) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)은 $R(t)$ 에 대해서 항등식이다. 따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$-C_t(t, T) - 1 = 0 \quad (8)$$

$$-A_t(t, T) - aC(t, T) + \frac{1}{2}\beta^2 C^2(t, T) = 0 \quad (9)$$

다음 만기조건이 성립한다.

$$f(T, R(T)) = 1, \quad (R(T) \in (0, 1)) \quad (10)$$

따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$C(T, T) = 0 \quad (11)$$

$$A(T, T) = 0 \quad (12)$$

상미분방정식 (8)과 만기조건 (11)을 만족하는 해 $C(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$C(t, T) = T - t \quad (13)$$

식 (9), 식 (12)와 식 (13)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$A(t, T) = \frac{1}{2}a[T-t]^2 - \frac{\beta^2}{6}[T-t]^3 \quad (14)$$

식 (3), 식 (13)과 식 (14)에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에 의한 할인채가치는 다음과 같다.

$$B(t, T) = \exp\left(-R(t)[T-t] - \frac{1}{2}a[T-t]^2 + \frac{\beta^2}{6}[T-t]^3\right) \quad (15)$$

식 (15)는 식 (6.15)와 동일하다. ■

6.3. 선도이자율

식 (6.15)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\ln B(t, T) = -A(T-t) - [T-t]R(t) \quad (6.18)$$

여기서 $A(\tau)$ 는 잔존기간 $\tau = T-t$ 의 함수로서 다음과 같다.

$$A(\tau) \doteq \frac{1}{2}a\tau^2 - \frac{1}{6}\beta^2\tau^3 \quad (6.19)$$

선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$F(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} = R(t) + a[T-t] - \frac{1}{2}\beta^2[T-t]^2 \quad (6.20)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.37)에 의해서, 두 번째 등호는 식 (6.18)에 의해서 성립한다. 식 (6.20)에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에서 선도이자율 $F(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이다. 따라서, 정규분포를 따른다. 또한, 이 1차함수에서 현물이자율 $R(t)$ 의 계수는 1이다.

식 (6.3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(R(T)) = R(t) + a[T-t] \quad (6.21)$$

식 (6.20)과 식 (6.21)에서, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$E_t^Q(R(T)) = F(t, T) + \frac{1}{2} \beta^2 [T-t]^2 \quad (6.22)$$

식 (6.22)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 현물이자율에 대한 위험프리미엄은 $\beta^2 [T-t]^2/2$ 이다.

식 (6.20)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} F(t, T) = R(t) \quad (6.23)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(t, T) = -\infty \quad (6.24)$$

따라서, 할인채의 잔존기간 $\tau = T-t$ 가 충분히 길면, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 음수이다. 이 성질은 Merton이자율모형이 현실성이 결여됐음을 의미한다.

(예제 6.4) 예제 6.1에서 다룬 다음과 같은 Merton이자율모형을 다시 살펴보자.

$$dR(u) = 0.02du + 0.06dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이라 하자. Merton이자율모형 (1)에 의한 선도이자율곡선이 그림 6.3에 그려져 있다. 그림 6.3을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 MertonForward101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: MertonForward101.m
% Programmed by CBS
%-----

clear all, close all
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,2000);
tau = TT - tt+delta;
%
aa = 0.02;
beta = 0.06;
Rt003 = 0.003;
Forward003 = Rt003 + aa*tau - 1/2*beta^2*tau.^2;
xref = 1.0;
Rt03 = 0.03;
Forward03 = Rt03 + aa*tau - 1/2*beta^2*tau.^2;
Rt12 = 0.12;
Forward12 = Rt12 + aa*tau - 1/2*beta^2*tau.^2;

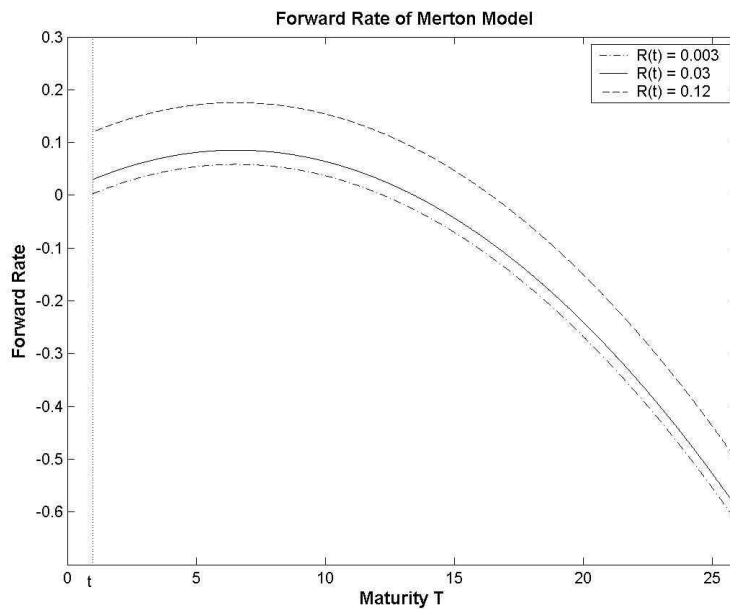
```

```

yref = -0.7:1/100:0.3;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,Forward003,'k-.',TT,Forward03,'k',TT,Forward12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, -0.7, 0.3 ] )
ylabel('\Wbf{Forward Rate}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Forward Rate of Merton Model','fontsize',12)
text(1,-0.73,'t')
saveas(gcf,'MertonForward101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 6.3에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에 의한 선도이자율이 잔여기간의 단조함수가 아니며 또한 음수가 되기도 한다. 이는 이 Merton이자율모형이 현실성을 결여했음을 보여준다. ■



[그림 6.3] Merton이자율모형에 의한 선도이자율곡선

6.4. 일드

만기시점 T 인 할인채의 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \ln \frac{1}{B(t, T)} \\ &= R(t) + \frac{1}{T-t} A(T-t) \\ &= R(t) + \frac{1}{2} a [T-t] - \frac{\beta^2}{6} [T-t]^2 \end{aligned} \quad (6.25)$$

여기서 두 번째 등호는 식 (6.18)에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 식 (6.19)에 의해서 성립한다. 식 (6.25)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 도 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이다. 따라서, Merton이자율모형은 아핀일드모형 (affine-yield model)이다. 식 (6.3)와 식 (6.25)에서 알 수 있듯이, 일드 $R(t, T)$ 는 정규분포를 따른다.

시간구간 $[t, T]$ 에서 현물이자율의 평균 \bar{R} 는 다음과 같다.

$$\bar{R} = \frac{1}{T-t} \int_t^T R(u) du = \frac{1}{T-t} I(t, T) \quad (6.26)$$

식 (6.11), 식 (6.12) 그리고 식 (6.26)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 정보집합 F_t 가 주어진 조건 하에서 현물이자율의 평균 \bar{R} 의 조건부평균과 조건부분산은 각각 다음과 같다.

$$E_t^Q(\bar{R}) = \frac{1}{T-t} E_t^Q(I(t, T)) = R(t) + \frac{1}{2} a [T-t] \quad (6.27)$$

$$\text{Var}_t^Q(\bar{R}) = \frac{1}{[T-t]^2} \text{Var}_t^Q(I(t, T)) = \frac{\beta^2}{3} [T-t] \quad (6.28)$$

식 (6.25)와 식 (6.27)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(\bar{R}) = R(t, T) + \frac{\beta^2}{6} [T-t]^2 \quad (6.29)$$

따라서, 일드 $R(t, T)$ 의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한 위험프리미엄은 $\beta^2 [T-t]^2 / 6$ 이다. 확산모수 β 가 커지면, 일드 $R(t, T)$ 의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한 위험프리미엄은 커진다. 또한, 이 위험프리미엄은 할인채의 잔존기간 $\tau = T-t$ 의 증가함수이다. 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow T} [E_t^Q(\bar{R}) - R(t, T)] = \lim_{t \rightarrow T} \frac{\beta^2}{6} [T-t]^2 = 0 \quad (6.30)$$

즉, 만일 $\tau \rightarrow 0$ 이면, 일드 $R(t, T)$ 의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한 위험프리미엄은 0으로 수렴한다. 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [E_t^Q(\bar{R}) - R(t, T)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{6} [T-t]^2 = \infty \quad (6.31)$$

즉, 만일 $\tau \rightarrow \infty$ 이면, 일드 $R(t, T)$ 의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한

위험프리미엄은 ∞ 로 발산한다. 할인채의 잔존기간 τ 이 길수록, 일드 $R(t, T)$ 의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한 위험프리미엄은 커진다.

식 (6.22)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(R(T)) = F(t, T) + \frac{1}{2} \beta^2 [T-t]^2 \quad (6.32)$$

즉, 만기시점 T 에서 현물이자율 $R(T)$ 의 위험중립적 기대값은 선도이자율 $F(t, T)$ 에 일드 $R(t, T)$ 의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한 위험프리미엄의 3배인 $\beta^2 [T-t]^2/2$ 을 더한 것이다. 일드의 현물이자율의 평균 \bar{R} 에 대한 위험프리미엄 $\beta^2 [T-t]^2/6$ 은 할인채의 잔존기간 $[t, T]$ 에서 선도이자율의 위험프리미엄 $\beta^2 [T-u]^2/2$ 의 평균과 같다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\beta^2}{6} [T-t]^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{1}{2} \beta^2 [u-t]^2 du \quad (6.33)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, T) = R(t), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, T) = -\infty \quad (6.34)$$

식 (6.25)에서 알 수 있듯이, 일드 $R(t, T)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$dR(t, T) = \left\{ -\frac{1}{2} a + \frac{\beta^2}{3} [T-t] \right\} dt + dR(t) \quad (6.35)$$

식 (6.1)과 식 (6.35)에 의해서, 일드 $R(t, T)$ 는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$dR(t, T) = \left\{ \frac{1}{2} a + \frac{\beta^2}{3} [T-t] \right\} dt + \beta dW^Q(t) \quad (6.36)$$

(예제 6.5) 예제 6.1에서 다룬 다음과 같은 Merton이자율모형을 살펴보자.

$$dR(u) = 0.02du + 0.06dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이라 하자.

Merton이자율모형 (1)에 의한 일드곡선들이 그림 6.4에 그려져 있다. 그림 6.4를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 MertonYield101.m을 실행하라.

```

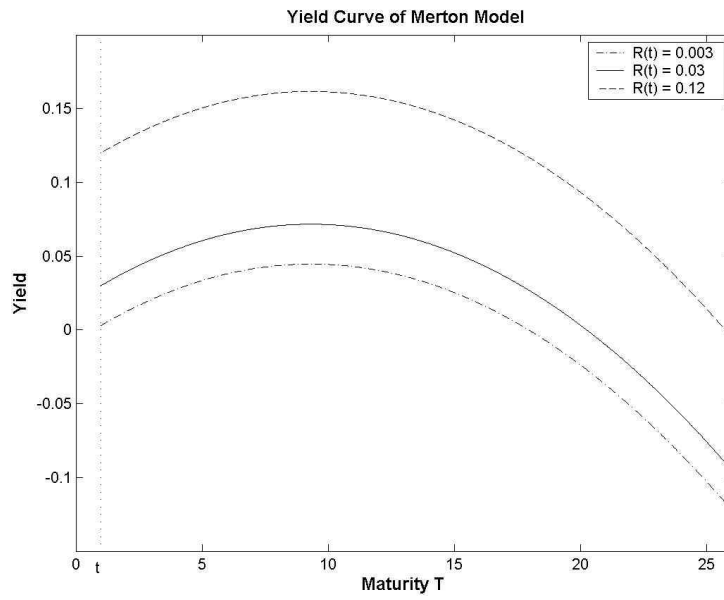
% -----
% Filename: MertonYield101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.001;
TT = linspace(tt+delta, barTT, 2000);
```

```

tau = TT - tt+delta;
%
aa = 0.02;
beta = 0.06;
Rt003 = 0.003;
Yield003 = Rt003 + 1/2*aa*tau - 1/6*beta^2*tau.^2;
Rt03 = 0.03;
Yield03 = Rt03 + 1/2*aa*tau - 1/6*beta^2*tau.^2;
Rt12 = 0.12;
Yield12= Rt12 + 1/2*aa*tau - 1/6*beta^2*tau.^2;
yref = -0.15:1/200:0.2;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,Yield003,'k-', TT,Yield03,'k',TT,Yield12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, -0.15, 0.2] )
ylabel('\Wbf{Yield}','fontsize',12), xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Yield Curve of Merton Model','fontsize',12)
text(1,-0.154,'t')
saveas(gcf,'CIRyield101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 6.4에서 알 수 있듯이, Merton이자율모형에 의한 일드곡선은 잔여기간의 단조함수가 아니며 또한 음수가 되기도 한다. 이는 이 Merton이자율모형이 현실성을 결여했음을 보여준다. ■



[그림 6.4] Merton이자율모형에 의한 일드곡선

제7절 Vasicek이자율모형

7.1. 모형

어떤 용액 안의 입자는 주위 분자들과의 충돌에 의해서 무작위적인 방향으로 이동한다. 그러나, 용액의 점성저항 때문에 그 속도가 제어된다. 이러한 상황을 설명하기 위해서, Uhlenbeck & Ornstein (1930)이 도입한 확률과정인 Ornstein-Uhlenbeck과정이다. Vasicek (1977)은 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 가 다음 확률미분방정식을 만족하는 Ornstein-Uhlenbeck과정이라고 가정하는 현물이자율모형을 제안하였다.

$$dR(u) = [a - bR(u)]du + \beta dW(u) \quad (7.1)$$

여기서 $\{W(u)\}$ 는 Brown운동이고, $a(> 0)$, $b(> 0)$ 와 $\beta(> 0)$ 는 상수들이다. Vasicek이자율모형 (7.1)에서는 상대적 변동성이 아닌 절대적 변동성이 β 임을 유의하라.

Ito-Doebelin보조정리를 이용해서 확률미분방정식 (7.1)을 풀면, 다음과 같다.

$$R(t) = e^{-bt} \left\{ R(0) + \frac{a}{b} [e^{bt} - 1] + \beta \int_0^t e^{bu} dW(u) \right\} \quad (7.2)$$

다음 식이 성립한다.

$$E \left(\int_0^t e^{bu} dW(u) \right) = 0 \quad (7.3)$$

또한, Ito적분의 등거리성에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$E \left(\int_0^t e^{bu} dW(u) \right)^2 = \int_0^t E(e^{2bu}) du = \frac{1}{2b} [e^{2bt} - 1] \quad (7.4)$$

식 (7.2)-식 (7.4)에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$E(R(t)) = e^{-bt} \left\{ R(0) + \frac{a}{b} [e^{bt} - 1] \right\} \quad (7.5)$$

$$\text{Var}(R(t)) = \frac{\beta^2}{2b} [1 - e^{-2bt}] \quad (7.6)$$

식 (7.2)에서 알 수 있듯이, 현물이자율 $R(t)$ 는 정규분포를 따른다.

이 정규분포성에서 알 수 있듯이, 현물이자율 $R(t)$ 가 음수가 될 확률이 양(+)이다. 따라서, Vasicek이자율모형이 현물이자율의 동적특성을 나타낸다고 가정하는 것은 비현실적이다. 또한, Chan & Karolyi & Longstaff & Sanders (1992)는 실증분석을 통해서 현물이자율 $R(t)$ 의 (절대적) 변동성이 Vasicek이자율모형에서 가정하는 것처럼 상수가 아닌 $R(t)$ 의 증가함수임을 보였다. 그러나, 이러한 단점들이 있음에도 불구하고, Vasicek이자율모형은 아주 간단하기 때문에 현물이자율과정을 나타내는 모형으로 자주 이용된다.

이자율위험의 시장가치 λ 가 상수라고 가정하고, 다음 확률변수를 정의하자.

$$W^Q(u) \doteq W(u) + \lambda u, \quad (u \geq 0) \quad (7.7)$$

여기서 $\{W^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 식 (7.7)을 식 (7.1)에 대입하면, Vasicek이자율모형이 다음 확률미분방정식을 얻는다.

$$dR(u) = [a - bR(u)]du + \beta[dW^Q(u) - \lambda du] \quad (7.8)$$

다음 상수를 정의하자.

$$R \doteq \frac{1}{b}[a - \beta\lambda] \quad (7.9)$$

식 (7.8)과 식 (7.9)에서 알 수 있듯이, Vasicek이자율모형은 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$dR(u) = b[R - R(u)]du + \beta dW^Q(u) \quad (7.10)$$

즉, 현물이자율 $R(u)$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서도 Ornstein-Uhlenbeck과정을 따른다.

식 (7.10)에서 알 수 있듯이, 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 동적특성을 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동 $\{W^Q(u)\}$ 를 이용한 확률미분방정식으로 나타내면, 이 확률미분방정식의 추세계수는 0이 아니다. 또한, 식 (7.1)과 식 (7.10)에서 알 수 있듯이, a/b 와 R 는 각각 진짜확률측도 P 와 위험중립확률측도 Q 하에서 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 평균회귀수준(mean-reverting level)이다. 모수 β 는 양수이다. 따라서, 식 (7.9)에서 알 수 있듯이, 진짜확률측도 P 하에서 평균회귀수준은 위험중립확률측도 Q 하에서 평균회귀수준보다 작다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$R < \frac{a}{b} \quad (7.11)$$

(예제 7.1) 식 (7.10)의 Vasicek이자율모형에서 모수들이 다음과 같다고 하자.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06dW^Q(u) \quad (2)$$

그림 7.1에 위험중립확률측도 Q 하에서 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 표본경로들이 그려져 있다. 그림 7.1을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 VasicekSpot101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: VasicekSpot101.m
% Programmed by CBS
%-----

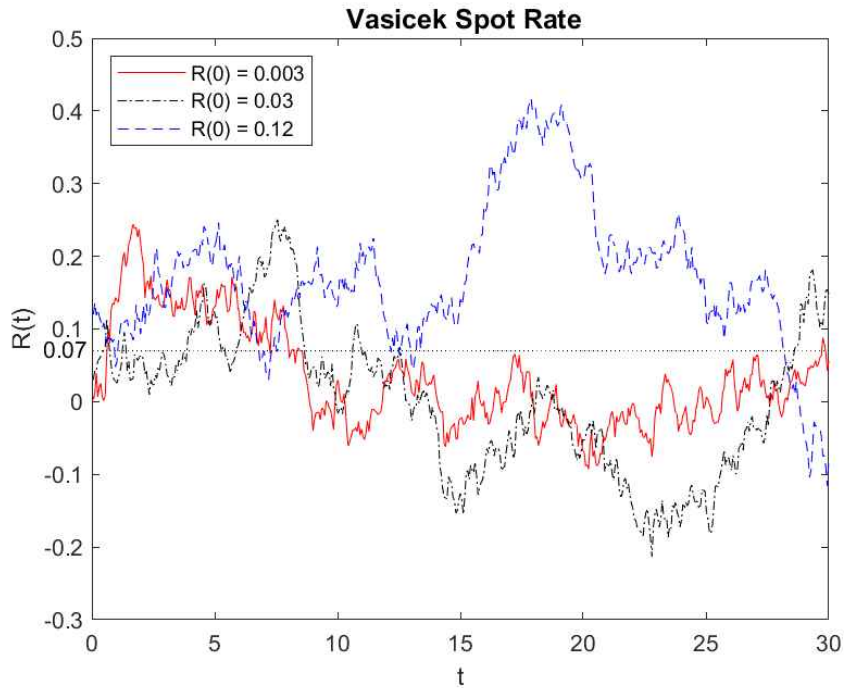
```

```

clear all, close all
rng('default')
% Mt = NO of subintrvals of [t,T];
clear, clf
tau = 30; Mt = 500;
sqttau = sqrt(tau);
Deltat = tau/Mt;
sqDeltat = sqrt(Deltat);
ttTT = Deltat:Deltat:tau;
% make sample pathes
b = 0.21;
beta = 0.06;
tildeR = 0.07;
tildeRR = tildeR*ones(size(ttTT));
Rvec003 = 0.003*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec003(tj+1) = Rvec003(tj) ...
        + b*( tildeR - Rvec003(tj) )*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec03 = 0.03*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec03(tj+1) = Rvec03(tj) ...
        + b*( tildeR - Rvec03(tj) )*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec12 = 0.12*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec12(tj+1) = Rvec12(tj) ...
        + b*( tildeR - Rvec12(tj) )*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
plot( ttTT, Rvec003,'r',ttTT, Rvec03,'k-.',ttTT, Rvec12,'b--', ...
    ttTT,tildeRR,'k:')
legend('R(0) = 0.003','R(0) = 0.03','R(0) = 0.12','location','NW')
text(-2, 0.073, '0.07')
title('Wbf Vasicek Spot Rate','fontsize', 12)
ylabel('R(t)'), xlabel('t')
saveas(gcf,'VasicekSpot101.png')
% end of program

```

이 표본경로들의 초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 7.1] Vasicek이자율과정의 표본경로

7.2. 할인채가치

만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 무재정가치 $B(t, T)$ 는 다음 위험중립가치평가식을 만족한다.

$$B(t, T) = E_t^Q(e^{-I(t, T)}) \quad (7.12)$$

여기서 $I(s, t) = \int_s^t R(u) du$ 이다. 식 (7.12)를 이용해서 할인채가치 $B(t, T)$ 를 계산하기 위해서, 먼저 $I(t, T)$ 를 계산하기로 하자.

[명제 7.1] 식 (7.1)의 Vasicek이자율모형에 대해서, 각 $t \in [0, T]$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$I(t, T) = [T-t]R + \frac{1}{b} \{1 - e^{-b[T-t]}\}[R(t) - R] \\ + \frac{\beta}{b} \int_t^T \{1 - e^{-b[T-v]}\} dW^Q(v)$$

□

(증명) Ito-Doebelin보조정리를 사용해서, 확률미분방정식 (7.10)의 해가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$R(u) = \mathcal{R} + e^{-b[u-t]}[R(t) - \mathcal{R}] + \beta \int_t^u e^{-b[u-v]} dW^Q(v) \quad (1)$$

식 (1)에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$I(t, T) = \int_t^T R(u) du = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2)$$

여기서 I_1 , I_2 그리고 I_3 는 각각 다음과 같다.

$$I_1 \doteq \int_t^T \mathcal{R} du \quad (3)$$

$$I_2 \doteq \int_t^T e^{-b[u-t]}[R(t) - \mathcal{R}] du \quad (4)$$

$$I_3 \doteq \int_t^T \beta \int_t^u e^{-b[u-v]} dW^Q(v) du \quad (5)$$

다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$I_1 = [T-t]\mathcal{R} \quad (6)$$

$$I_2 = \frac{1}{b}\{1 - e^{-b[T-t]}\}[R(t) - \mathcal{R}] \quad (7)$$

또한, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} I_3 &= \beta \int_t^T \int_t^u e^{-bu} e^{bv} dW^Q(v) du \\ &= \beta \int_t^T \int_v^T e^{-bu} e^{bv} du dW^Q(v) \\ &= \frac{\beta}{b} \int_t^T [1 - e^{-b[T-v]}] dW^Q(v) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 두 번째 등호는 Fubini정리에 의해서 성립한다.

식들 (6)-(8)을 식 (2)에 대입하면, 원하는 결과를 얻는다.

Q.E.D.

명제 7.1에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 정보집합 F_t 가 주어지면 $I(t, T)$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 정규분포를 따른다. 또한, 다음 식들이 성립한다.

$$m(t, T) \doteq E_t^Q(I(t, T)) \quad (7.13)$$

$$= [T-t]\mathcal{R} + \frac{1}{b}\{1 - e^{-b[T-t]}\}[R(t) - \mathcal{R}]$$

$$v(t, T) \doteq \text{Var}_t^Q(I(t, T))$$

$$= \frac{\beta^2}{b^2} \int_t^T \{1 - e^{-b[T-z]}\}^2 dz \quad (7.14)$$

$$= \frac{\beta^2}{b^2} \int_t^T [1 - 2e^{-b[T-z]} + e^{-2b[T-z]}] dz$$

$$= \frac{\beta^2}{2b^3} \{2b[T-t] + 4e^{-b[T-t]} - e^{-2b[T-t]} - 3\}$$

식 (7.14)의 조건부분산 $v(t, T)$ 는 만기시점 T 와 시점 t 각각이 아닌 잔존기간

$\tau = T - t$ 에 의존한다. 따라서, $v(\tau) \doteq v(t, T)$ 라고 표기하자. 다음 식이 성립한다.

$$v(\tau) = \frac{\beta^2}{2b^3} [4e^{-b\tau} - e^{-2b\tau} + 2b\tau - 3] \quad (7.15)$$

식 (7.12)-식 (7.14) 그리고 명제 4.5.1에서 알 수 있듯이, 만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 가치 $B(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$B(t, T) = \exp\left(-m(t, T) + \frac{1}{2} v(\tau)\right) \quad (7.16)$$

다음 식들을 정의하자.

$$C(\tau) \doteq \frac{1}{b} [1 - e^{-b\tau}] \quad (7.17)$$

$$A(\tau) \doteq [\tau - C(\tau)]R - \frac{1}{2} v(\tau) \quad (7.18)$$

식 (7.13), 식 (7.14), 식 (7.17)과 식 (7.18)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$-m(t, T) + \frac{1}{2} v(\tau) = -A(\tau) - C(\tau)R(t) \quad (7.19)$$

식 (7.16)과 식 (7.19)에 의해서, 만기시점 T 인 할인채의 시점 t 에서 가치 $B(t, T)$ 가 다음 식을 만족함을 알 수 있다.

$$B(t, T) = \exp(-A(\tau) - C(\tau)R(t)) \quad (7.20)$$

여기서 b 와 R 은 상수들이고 함수 $v(t)$ 는 시간 t 의 결정적 함수이므로, $C(\tau)$ 와 $A(\tau)$ 도 시간 t 의 결정적 함수들이다. 따라서, 시점 t 에서 모든 만기시점들에 대한 할인채가치들이 완전상관한다.

다음 식들이 성립함을 자명하다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} v(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} v(\tau) = \infty \quad (7.21)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} C(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) = \frac{1}{b} \quad (7.22)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} A(\tau) = 0 \quad (7.23)$$

식 (7.20)-식 (7.23)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} B(t, T) = 1 \quad (7.24)$$

식 (7.20)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$B_R(t, T) = -C(\tau)B(t, T) < 0 \quad (7.25)$$

식 (7.25)을 식 (4.31)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - \beta C(\tau)B(t, T)dW^Q(t) \quad (7.26)$$

즉, Vasicek이자율모형에 의한 할인채가치의 변동성은 음수이다.

(예제 7.2) 예제 7.1의 Vasicek이자율모형에서 모수들은 다음과 같다.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06dW^Q(u) \quad (2)$$

시점 $t = 1$ 에서 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 과 $R(1) = 0.12$ 에 해당하는 할인곡선 $\{B(t, t+\tau) | 0 \leq \tau \leq 24\}$ 을 그린 것이 그림 7.2다. 그림 7.2를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 VasicekDC101.m을 실행하라.

```
% -----  
% Filename: VasicekDC.m  
% Programmed by CBS  
%-----  
clear all, close all  
% Define functions  
vv = inline('beta^2 / 2 / b^3 * ( 4*exp(-b*tau) - exp(-2*b*tau)  
          + 2*b*tau - 3)', 'beta', 'b', 'tau')  
  
% Caution: vv should write in one line  
CC = inline('(1 - exp(-b*tau))/b', 'b', 'tau')  
AA = inline('(tau - C)*tilR - 1/2*v', 'tau', 'C', 'tilR', 'v')  
%  
tt = 1; barTT = 25;  
delta = 0.0001;  
TT = linspace(tt+delta, barTT, 100);  
tau = TT - tt;  
%  
b = 0.21;  
beta = 0.06;  
tilR = 0.07;  
%  
v = vv(beta, b, tau);  
C = CC(b, tau);  
A = AA(tau, C, tilR, v);  
Rt = 0.003;  
%  
BtT003 = exp( -A - Rt*C);  
%  
Rt = 0.03;  
BtT03 = exp( -A - Rt*C);  
%%  
Rt = 0.12;  
BtT12 = exp( -A - Rt*C);  
%
```

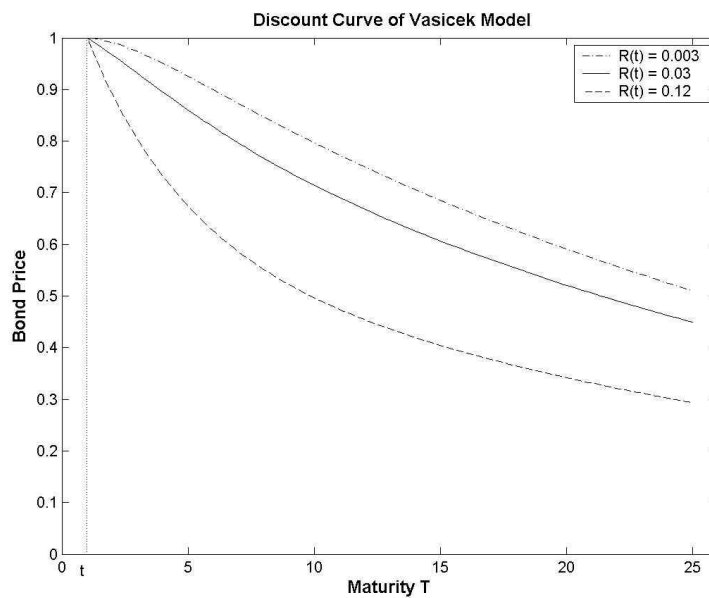


```

yref = 0:1/100:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,BtT003,'k-.', TT,BtT03,'k',TT,BtT12,'k--',xref,yref,'k')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','SW')
axis( [ 0, 26, 0, 1 ] )
ylabel('\Wbf{Bond Price}','fontsize',12), xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Discount Curve of Vasicek Model','fontsize',12)
text(1,-0.03,'t')
saveas(gcf,'VasicekDC101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 7.2에서 알 수 있듯이, 현물이자율 $R(t)$ 를 고정시키면, 잔존기간 τ 가 0으로 수렴할 때 $B(t, t+\tau)$ 는 액면금액 1에 수렴한다. 현물이자율 $R(t)$ 가 고정되어있지 않다 하더라도, 잔존기간 τ 가 0으로 수렴하면 $B(t, t+\tau)$ 는 확률 1로 액면금액 1에 수렴한다. ■



[그림 7.2] Vasicek이자율모형에 의한 할인곡선 I

(예제 7.3) 현물이자율 $R(u)$ 가 식 (7.1)의 Vasicek이자율모형을 따른다고 가정하자. 즉, 현물이자율 $R(u)$ 의 동적특성이 다음과 같다고 하자.

$$dR(u) = [a - bR(u)]du + \beta dW(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W(u)\}$ 는 진짜확률측도 P 에 대한 Brown운동이다. 앞에서 가정했듯이, 이자율위험의 시장가치 λ_t 가 상수 λ 라고 하자.

식 (4.23)에서 알 수 있듯이, 이 Vasicek이자율모형을 따르는 할인채의 시점 t 에서 가치 $B(t, T) = f(t, R(t))$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \{[a - bR(t)] - \beta\lambda\}f_R(t, R(t)) + f_t(t, R(t)) \\ & + \frac{1}{2}\beta^2 f_{RR}(t, R(t)) - R(t)f(t, R(t)) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

또한, 말기조건은 다음과 같다.

$$B(T, T) = 1 \quad (3)$$

예제 2.2.7에서 다룬 Hull-White이자율모형에서, $a(u)$ 가 상수 a 이고 $b(u)$ 가 상수 b 이면, Vasicek이자율모형 (1)이 된다. 따라서, 예제 2.2.7의 결과를 식 (2)와 식 (3)에 적용하면, Vasicek이자율모형 (1)에 의한 할인채가치가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$B(t, T) = \exp\left(\frac{1 - e^{-b\tau}}{b}[\mathcal{R} - R(t)] - \tau R - \frac{\beta^2}{4b}\left[\frac{1 - e^{-b\tau}}{b}\right]^2\right) \quad (4)$$

여기서 \mathcal{R} 은 다음과 같다.

$$\mathcal{R} = \frac{a}{b} - \frac{\beta}{b}\lambda - \frac{\beta^2}{b^2} \quad (5)$$

예를 들어, 현물이자율이 회귀속도 $b = 0.21$ 로 평균 $\frac{a}{b} = 0.07$ 로 회귀하는 경우를 생각해보자. 또한, 이자율의 절대적 변동성을 $\beta = 0.06$ 이라 하자. 식 (4)를 적용하기 위해서는, 이자율위험의 시장가치가 필요하다. 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$\mu_B - R(t) = -0.1\sigma_B \quad (6)$$

여기서 μ_B 와 σ_B 는 할인채가치의 추세계수와 확산계수이다. 식 (6)에 의해서, 이자율위험의 시장가치는 다음과 같다.

$$\lambda_t = -0.10 \quad (7)$$

이 모수들을 사용해서, 식 (4)의 할인채가치 $B(t, T)$ 를 계산할 수 있다. 그림 4.4.1에 이 할인곡선 $\{B(t, T)\}$ 가 그려져 있다. 그림 7.3을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 VasicekDC102.m을 실행하라.

```

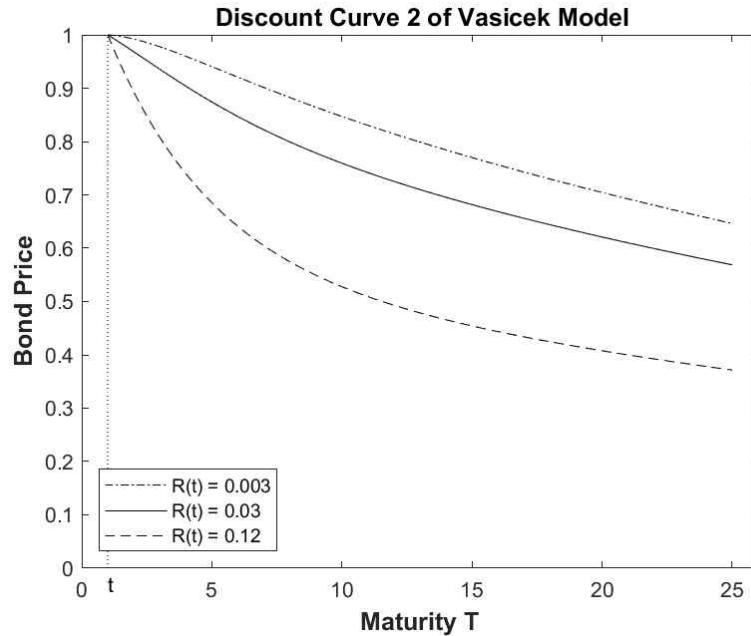
% -----
% Filename: VasicekDC102.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
CC = inline('(1 - exp(-b*tau))/b','b','tau')
%
```

```

tt = 1; barTT = 25;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
tildeR = 0.07;
b = 0.21;
beta = 0.06;
a = b*tildeR
lambda = - 0.1;
hatR = a/b - beta/b*lambda - (beta/b)^2
%
C = CC(b,tau);
dum1 = -hatR*tau - beta^2/4/b.*C.*C;
%
Rt= 0.003;
BtT003 = exp( (hatR - Rt )*C + dum1 );
%
Rt = 0.03;
BtT03 = exp( (hatR - Rt )*C + dum1 );
%%
Rt = 0.12;
BtT12 = exp( (hatR - Rt )*C + dum1 );
%
yref = 0:1/100:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,BtT003,'k-.', TT,BtT03,'k',TT,BtT12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','SW')
axis( [ 0, 26, 0, 1 ] )
ylabel('\Wbf{Bond Price}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Discount Curve 2 of Vasicek Model','fontsize',12)
text(1,-0.03,'t')
saveas(gcf,'VasicekDC102.png')
% End of Program
%-----

```

그림 7.3에는 시점 t 에서 현물이자율이 각각 $R(t) = 0.003$, $R(t) = 0.03$ 그리고 $R(t) = 0.12$ 인 3가지 할인곡선들이 그려져 있다. 그림 7.3에서 알 수 있듯이, 단기채권의 가치가 1에 가까운 반면에, 잔여기간이 길수록 채권가치는 점차적으로 감소한다. ■



[그림 7.3] Vasicek이자율모형에 의한 할인곡선 II

(예제 7.4) 예제 7.3의 식 (4)에서 알 수 있듯이, Vasicek이자율모형에 의한 할인채가치 $B(t, T)$ 의 시점 t 에서 변동성 $\sigma_B(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$\sigma_B(t, T) = -\frac{\beta}{b}\{1 - e^{-b[T-t]}\} < 0 \quad (1)$$

또한, 이자율위험의 시장가치는 상수 λ 이다. 따라서, 식 (3.4.42)에서 알 수 있듯이, 산술적 기간프리미엄은 다음과 같다.

$$\varepsilon_A(t, T) = -\frac{\lambda\beta}{b}\{1 - e^{-b[T-t]}\} \quad (2)$$

따라서, Vasicek이자율모형에 의한 산술적 기간프리미엄은 모든 만기시점 T 에 대해서 동일한 부호를 갖는다. 또한, 이 산술적 기간프리미엄은 현물이자율 $R(t)$ 와는 무관하다. 일반적으로 할인채의 평균수익률 $\mu_B(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 보다 크다. 따라서, 식 (1)에서 알 수 있듯이, Vasicek이자율모형에 의한 이자율위험의 시장가치 λ 는 음수이다. 따라서, 이 산술적 기간프리미엄은 임의의 만기시점과 임의의 현물이자율에 대해서 양수이다. 기하적 기간프리미엄도 같은 성질을 갖음을 쉽게 보일 수 있다. ■

(예제 7.5) 잔여기간이 $\bar{\tau} (> 0)$ 인 할인채에 대해서 시점 t 에서 장기이자율(long interest rate) $L(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$L(t) \doteq -\frac{1}{\bar{\tau}} \ln B(t, t+\bar{\tau}) \quad (1)$$

각 $s < t$ 에 대해서, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} L(t) - L(s) &= \frac{1}{\bar{\tau}} \ln B(s, s+\bar{\tau}) - \frac{1}{\bar{\tau}} \ln B(t, t+\bar{\tau}) \\ &= \frac{1}{\bar{\tau}} \{ [-A(\bar{\tau}) - C(\bar{\tau})R(s)] - [-A(\bar{\tau}) - C(\bar{\tau})R(t)] \} \\ &= \frac{C(\bar{\tau})}{\bar{\tau}} [R(t) - R(s)] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (1)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (7.20)에 의해서 성립한다. 따라서, Vasicek이자율모형에서는 장기이자율의 시간스프레드 $[L(t) - L(s)]$ 와 단기이자율의 스프레드 $[R(t) - R(s)]$ 는 완전상관하고 있다. 특히, $[L(t) - L(0)]$ 와 단기이자율의 스프레드 $[R(t) - R(0)]$ 는 완전상관하고 있다. 이러한 결과는 Vasicek이자율모형 좀 더 일반적으로 1요인모형이 장기이자율의 위험이 단기이자율의 위험보다 크다는 사실을 반영하지 못하고 있음을 의미한다. 이러한 약점을 극복하기 위해서, 현물이자율의 다요인모형들이 제시되었다. ■

7.3. 선도이자율

앞에서 정의된 $A(\tau)$ 와 $C(\tau)$ 그리고 $v(\tau)$ 는 모두 연속미분가능이며, 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \frac{\beta^2}{b^2} [-2e^{-b\tau} + e^{-2b\tau} + 1] \\ &= \beta^2 \frac{[1 - e^{-b\tau}]^2}{b^2} = \beta^2 C^2(\tau) \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$A'(\tau) = [1 - e^{-b\tau}]R - \frac{1}{2} C^2(\tau)\beta^2 \quad (7.28)$$

$$C'(\tau) = e^{-b\tau} \quad (7.29)$$

식 (7.20)에서 알 수 있듯이, 할인채가치 $B(t, T)$ 는 만기시점 T 에 관해서 연속미분가능하다. 따라서, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} F(t, T) &= -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \\ &= A'(T-t) + C'(T-t)R(t) \\ &= \{1 - e^{-b(T-t)}\}R - \beta^2 \frac{[1 - e^{-b(T-t)}]^2}{2b^2} + e^{-b(T-t)}R(t) \end{aligned} \quad (7.30)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.37)에 의해서, 두 번째 등호는 식 (7.20)에 의해서, 그리고 세

번째 등호는 식 (7.27), 식 (7.28)과 식 (7.29)에 의해서 성립한다. 식 (7.30)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이고 정규분포를 따른다.

식 (7.27)과 식 (7.30)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 추세모수 β 에 관한 편도함수는 다음과 같다.

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial \beta} = -\beta C^2(\tau) = -\frac{\beta}{b^2} [e^{-b\tau} - 1]^2 < 0 \quad (7.31)$$

즉, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 β 의 감소함수이다. 식 (7.27)과 식 (7.30)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$F(t, T) = [1 - e^{-b\tau}]R - \frac{1}{2} C^2(\tau)\beta^2 + e^{-b\tau}R(t) \quad (7.32)$$

식 (7.32)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} F(t, T) = R(t) \quad (7.33)$$

즉, 잔존기간 τ 가 0에 가까우면, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 0에 $R(t)$ 에 수렴한다. 식 (7.32)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(t, T) = R - \frac{\beta^2}{2b^2} \quad (7.34)$$

즉, 잔존기간 τ 가 아주 길어도, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 발산하지 않고 수렴한다.

식 (7.32)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 에 대한 위험중립확률측도 Q 하에서 평균회귀수준 R 의 영향은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial R} = 1 - e^{-b\tau} > 0 \quad (7.35)$$

따라서, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 R 의 단조증가함수이다. 식 (7.35)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial F(t, T)}{\partial R} = 0 \quad (7.36)$$

즉, 잔존기간 τ 가 0에 가까우면, 평균회귀수준 R 의 작은 변화에 대한 선도이자율 $F(t, T)$ 의 변화량은 미미하다. 식 (7.35)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial F(t, T)}{\partial R} = 1 \quad (7.37)$$

즉, 잔존기간 τ 가 아주 커지면, 평균회귀수준 R 의 작은 변화량은 선도이자율 $F(t, T)$ 의 변화량은 그대로 반영된다.

식 (7.32)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 에 대한 현물이자율 $R(t)$ 의 영향은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial R(t)} = e^{-b\tau} > 0 \quad (7.38)$$

즉, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 $R(t)$ 의 단조증가함수이다. 식 (7.38)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial F(t, T)}{\partial R(t)} = 1 \quad (7.39)$$

즉, 잔존기간 τ 가 0에 수렴하면, 현물이자율 $R(t)$ 의 작은 변화량은 선도이자율 $F(t, T)$ 의 변화량은 그대로 반영된다. 식 (7.38)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial F(t, T)}{\partial R(t)} = 0 \quad (7.40)$$

즉, 잔존기간 τ 가 아주 커지면, 현물이자율 $R(t)$ 의 작은 변화에 대한 선도이자율 $F(t, T)$ 의 변화량은 미미하다.

식 (7.35)와 식 (7.38)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial R} = 1 - \frac{\partial F(t, T)}{\partial R(t)} \quad (7.41)$$

즉, 선도이자율 $F(t, T)$ 에 대한 위험중립확률측도 Q 하에서 평균회귀수준 R 의 영향과 현물이자율 $R(t)$ 의 영향은 서로 반대 방향이다.

확률미분방정식 (7.10)의 해는 다음과 같다.

$$R(T) = R + e^{-b(T-t)}[R(t) - R] + \beta \int_t^T e^{-b(T-v)} dW^Q(v) \quad (7.42)$$

식 (7.42)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(R(T)) = e^{-b\tau}R(t) + [1 - e^{-b\tau}]R \quad (7.43)$$

식 (7.29)와 식 (7.32)를 식 (7.43)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$E_t^Q(R(T)) = F(t, T) + \frac{1}{2} v'(\tau) \quad (7.44)$$

식 (7.44)에서 우변의 마지막 항 $v'(\tau)/2$ 를 선도이자율 $F(t, T)$ 의 위험프리미엄으로 해석할 수 있다. 즉, 미래시점 T 에서 현물이자율 $R(T)$ 의 기대값은 시점 t 에서 알고 있는 선도이자율 $F(t, T)$ 에 이 위험프리미엄을 더 한 것이다. 식 (7.27)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 위험프리미엄 $v'(\tau)/2$ 은 잔존기간 τ 의 증가함수이며 현물이자율의 변동성 β 의 증가함수이다. 식 (7.27)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2} v'(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2} v'(\tau) = \frac{\beta^2}{2b^2} \quad (7.45)$$

따라서, 잔존기간 τ 가 0에 수렴하면, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 위험프리미엄 $v'(\tau)/2$ 은 0으로 수렴한다. 반면에, 잔존기간 τ 가 아주 커지면, 이 위험프리미엄은 상수 $\beta^2/[2b^2]$ 에 수렴한다.

(예제 7.6) 예제 7.1의 Vasicek이자율모형에서 모수들은 다음과 같다.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다고 하자.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06dW^Q(u) \quad (2)$$

식 (7.45)에서 알 수 있듯이, 잔존기간 τ 이 증가함에 따라 선도이자율의 위험프리미엄이 다음 값에 수렴한다.

$$\frac{\beta^2}{2b^2} = 0.0408 \quad (3)$$

시점 $t = 1$ 의 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 과 $R(1) = 0.12$ 에 해당하는 선도이자율곡선을 그린 것이 그림 7.4이다. 그림 7.4를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 VasicekForward101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: VasicekForward101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
CC = inline('(1 - exp(-b*tau))/b','b','tau')
%
tt = 1; barTT = 25;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
TT1 = linspace(0,barTT,1000);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
tilR = 0.07;
%
C = CC(b,tau);
%
Rt= 0.003;
ForwardT003 = tilR*b*C - 1/2*beta^2*C.*C + Rt*exp(-b*tau);
%
Rt = 0.03;
ForwardT03 = tilR*b*C - 1/2*beta^2*C.*C + Rt*exp(-b*tau);
%%
Rt = 0.12;
ForwardT12 = tilR*b*C - 1/2*beta^2*C.*C + Rt*exp(-b*tau);
%

```



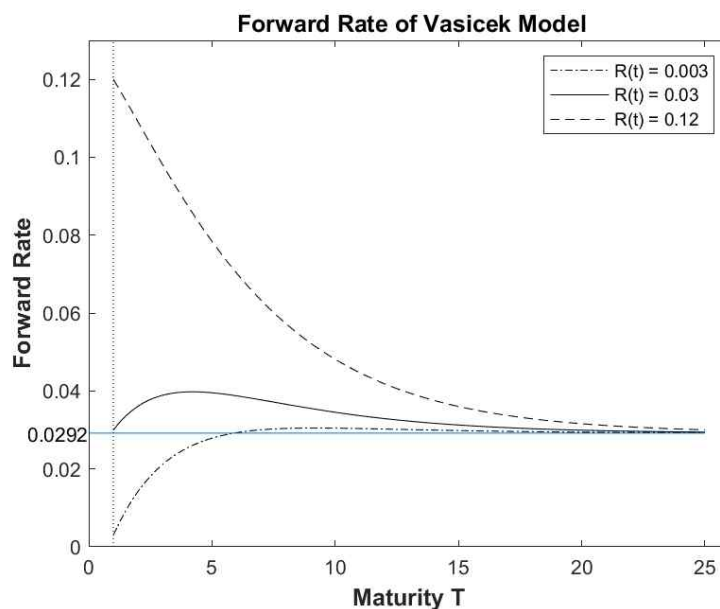
```

yref = -0.7:1/100:0.13;
xref = 1.0*ones(size(yref));
yref2 = tilR - beta^2/2/b^2
% 2-D Plot
plot(TT,ForwardT003,'k-',TT,ForwardT03,'k',TT,ForwardT12,'k--', ...
      xref,yref,'k',[0,25],yref2*[1,1])
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 0.13 ] )
ylabel('\Wbf{Forward Rate}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Forward Rate of Vasicek Model','fontsize',12)
text(-2.5, 0.029,'0.0292')
text(1,-0.03,'t')
saveas(gcf,'VasicekForward101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 7.4에서 선도이자율 $F(t, T)$ 의 극한값이 다음과 같음을 확인할 수 있다.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(t, T) = R - \frac{\beta^2}{2b^2} = 0.0292 \quad (4)$$



[그림 7.4] Vasicek이자율모형에 의한 선도이자율곡선

7.4. 일드

이 절에서는 Vasicek이자율모형의 일드곡선에 대해 살펴보자. 만기시점 T 인 할인채의 시점 t 에서 일드는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{\tau} \ln B(t, T) \\ &= \frac{1}{\tau} [A(\tau) + C(\tau)R(t)] = \frac{1}{\tau} \left[m(t, T) - \frac{1}{2} v(\tau) \right] \end{aligned} \quad (7.46)$$

여기서 두 번째 등호는 식 (7.20)에 의해서, 그리고 마지막 등호는 식 (7.19)에 의해서 성립한다. 식 (7.46)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이다. 따라서, Vasicek이자율모형은 아핀일드모형(affine-yield model)이다. 또한, 일드 $R(t, T)$ 는 정규분포를 따른다.

시간구간 $[t, T]$ 에서 현물이자율의 평균 R 는 다음과 같다.

$$R = \frac{1}{\tau} \int_t^T R(u) du = \frac{1}{\tau} I(t, T) \quad (7.47)$$

시점 t 에서 정보집합 \mathcal{F}_t 가 주어진 경우, R 는 정규분포를 따른다. 또한, 그 조건부평균과 조건부분산은 각각 다음과 같다.

$$E_t^Q(R) = \frac{1}{\tau} E_t^Q(I(t, T)) = \frac{1}{\tau} m(t, T) \quad (7.48)$$

$$\text{Var}_t^Q(R) = \frac{1}{\tau^2} \text{Var}_t^Q(I(t, T)) = \frac{1}{\tau^2} v(\tau) \quad (7.49)$$

식 (7.46)과 식 (7.48)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(R) = R(t, T) + \frac{1}{2\tau} v(\tau) \quad (7.50)$$

식 (7.50)에서 우변의 두 번째 항을 일드 $R(t, T)$ 의 위험프리미엄이라고 할 수 있다. 이 위험프리미엄 $v(\tau)/(2\tau)$ 은 다음 식들을 만족한다.

$$\frac{1}{2} \tau \text{Var}_t^Q(R) = \frac{1}{2\tau} v(\tau) = \frac{\beta^2}{4b^3\tau} [4e^{-b\tau} - e^{-2b\tau} + 2b\tau - 3] \quad (7.51)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (7.49)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (7.15)에 의해서 성립한다.

[명제 7.2] 함수 $C(\tau)/\tau$ 는 τ 의 협의감소함수이고, 다음 식들을 만족한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C(\tau)}{\tau} = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = 0$$

또한, $v(\tau)/\tau$ 는 τ 의 협의증가함수이고, 다음 식들을 만족한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{v(\tau)}{\tau} = \frac{\beta^2}{b^2} \quad \blacksquare$$

(증명) 식 (7.29)에서 알 수 있듯이, $C'(\tau) = e^{-b\tau}$ 이다. 따라서, $C'(\tau)$ 는 τ 의 협의감소함수이고, $C(\tau)$ 는 협의오목함수이다. 따라서, 점 $(0, C(0))$ 와 점 $(\tau, C(\tau))$ 를 잇는 직선의 기울기인 $C(\tau)/\tau$ 는 τ 의 협의감소함수이다.

L'Hospital정리에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b} \frac{1 - e^{-b\tau}}{\tau} = \frac{1}{b} b = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = 0 \quad (2)$$

식 (7.27)에서 알 수 있듯이, $v'(\tau) = \beta^2 [1 - e^{-b\tau}]^2 / b^2$ 이다. 따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$v'(\tau) = 2 \frac{\beta^2}{b^2} [1 - e^{-b\tau}] b e^{-b\tau} > 0 \quad (3)$$

즉, $v(\tau)$ 는 협의불록함수이다. 따라서, 점 $(0, v(0))$ 과 점 $(\tau, v(\tau))$ 를 잇는 직선의 기울기인 $v(\tau)/\tau$ 는 τ 의 협의감소함수이다. L'Hospital정리에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v(\tau)}{\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\beta^2}{2b^3} \frac{4e^{-b\tau} - e^{-2b\tau} + 2b\tau - 3}{\tau} \\ &= -\frac{\beta^2}{2b^3} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[4 \frac{1 - e^{-b\tau}}{\tau} - \frac{1 - e^{-2b\tau}}{\tau} - 2b \right] \\ &= -\frac{\beta^2}{2b^3} [4b - 2b - 2b] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{v(\tau)}{\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{2b^3} \frac{4e^{-b\tau} - e^{-2b\tau} + 2b\tau - 3}{\tau} \\ &= -\frac{\beta^2}{2b^3} [-2b] = \frac{\beta^2}{b^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Q.E.D.

명제 7.2에서 알 수 있듯이, 일드 $R(t, T)$ 의 위험프리미엄 $v(\tau)/[2\tau]$ 는 잔존기간 τ 의 협의증가함수이며, 다음 식들을 만족한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v(\tau)}{2\tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{v(\tau)}{2\tau} = \frac{\beta^2}{2b^2} \quad (7.52)$$

식 (7.45)와 식 (7.52)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 위험프리미엄의 극한값들과 일드 $R(t, T)$ 의 위험프리미엄의 극한값들은 같다.

식 (7.50)과 식 (7.52)에서 알 수 있듯이, 일드 $R(t, T)$ 가 다음 식들을 만족한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, T) = R(t), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, T) = \mathcal{R} - \frac{\beta^2}{2b^2} \quad (7.53)$$

따라서, Vasicek이자율모형에 의한 콘솔채(console bond)는 현물이자율의 위험조정

후의 평균 R 보다 작다.

할인채의 일드 $R(t, T)$ 가 확산모수 β 에 의해서 어떠한 영향을 받는지 살펴보자. 만일 현물이자율의 평균 R 가 상수라면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(t, T)}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{2\tau} v(\tau) \right) \\ &= -\frac{1}{2\tau} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta^2}{2b^3} [4e^{-b\tau} - e^{-2b\tau} + 2b\tau - 3] \right) \\ &= -\frac{1}{2\tau} [2\beta] \left(\frac{1}{2b^3} [4e^{-b\tau} - e^{-2b\tau} + 2b\tau - 3] \right) \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{v(\tau)}{\tau} \end{aligned} \tag{7.54}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (7.46)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (7.15)에 의해서 성립한다. 식 (7.54)에서 알 수 있듯이, $\partial R / \partial \beta$ 는 음수이다. 또한, 명제 7.2에서 알 수 있듯이, $\partial R / \partial \beta$ 는 τ 의 협의감소함수이다.

식 (7.46)에서 알 수 있듯이, 현물이자율 $R(t)$ 가 할인채의 일드에 미치는 영향은 다음과 같다.

$$\frac{\partial R(t, T)}{\partial R(t)} = \frac{b(\tau)}{\tau} > 0 \tag{7.55}$$

명제 7.2와 식 (7.55)에서, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial R(t, T)}{\partial R(t)} = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial R(t, T)}{\partial R(t)} = 0 \tag{7.56}$$

(예제 7.7) 예제 7.1의 Vasicek이자율모형에서 모수들은 다음과 같다.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \tag{1}$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다고 하자.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06dW^Q(u) \tag{2}$$

식 (7.53)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, T) = R - \frac{\beta^2}{2b^2} = 0.0292 \tag{3}$$

시점 $t = 1$ 의 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 과 $R(1) = 0.12$ 에 해당하는 일드곡선을 그린 것이 그림 7.5이다. 그림 7.5를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 VasicekYield101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: VasicekYield101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
```

```

% Define functions
vv = inline('beta^2 / 2 / b^3 * ( 4*exp(-b*tau) - exp(-2*b*tau)
          + 2*b*tau - 3)','beta','b','tau')

% 주의: vv는 한 줄로 써야합니다
CC = inline('(1 - exp(-b*tau))/b','b','tau')
AA = inline('(tau - C)*tilR - 1/2*v','tau','C','tilR','v')
%
tt = 1; barTT = 25;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
tilR = 0.07;
%
v = vv(beta, b,tau);
C = CC(b,tau);
A = AA(tau,C,tilR,v);
Rt= 0.003;
%
BtT003 = exp( -A - Rt*C);
Yield003 = - 1./tau.*log(BtT003);
%
Rt = 0.03;
BtT03 = exp( -A - Rt*C);
Yield03 = - 1./tau.*log(BtT03);
%%
Rt = 0.12;
BtT12 = exp( -A - Rt*C);
Yield12 = - 1./tau.*log(BtT12);
%
yref = 0:1/100:0.13;
xref = 1.0*ones(size(yref));
yref2 = tilR - beta^2/2/b^2
% 2-D Plot
plot(TT,Yield003,'k-', TT,Yield03,'k',TT,Yield12,'k--',xref,yref,'k:', ...
      TT,yref2,'k',[0,25],yref2*[1,1])
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')

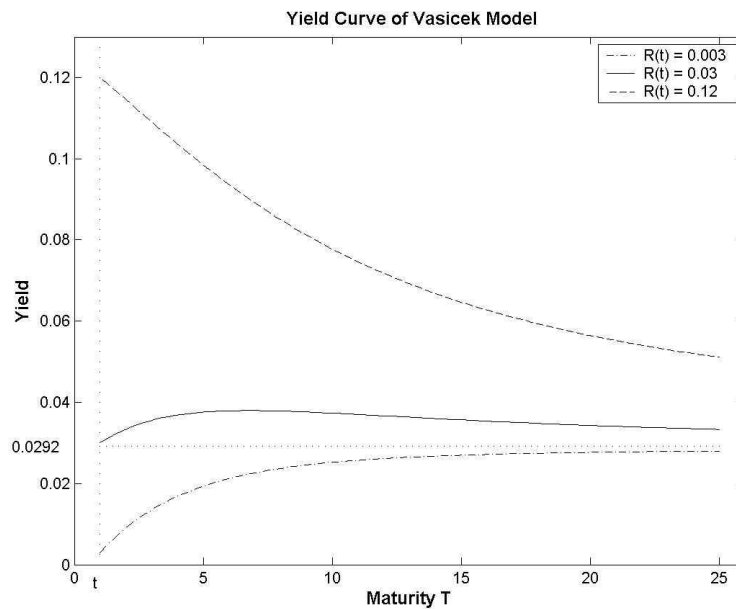
```

```

axis( [ 0, 26, 0, 0.13 ] )
ylabel('\Wbf{Yield}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Yield Curve of Vasicek Model','fontsize',12)
text(-2.5, 0.029,'0.0292')
text(1,-0.0154,'t')
saveas(gcf,'VasicekYield101.png')
% End of Program
%-----

```

일반적으로, 시점 $t = 1$ 의 현물이자율 $R(1)$ 의 값이 작으면, 여기서는 $R(1) = 0.003$ 인 경우에는 Vasicek이자율모형에 의한 일드는 단조증가한다. 그러나, 현물이자율 $R(1)$ 이 크면, 여기서는 $R(1) = 0.12$ 인 경우에는 일드는 단조감소한다. 또한, 현물이자율 $R(1)$ 이 중간 정도이면, 여기서는 $R(1) = 0.03$ 이면, 일드가 증가하다가 감소하는, 즉 낙타등과 같은 형태를 보이기도 한다. ■



[그림 7.5] Vasicek이자율모형에 의한 일드곡선

제8절 Hull-White이자율모형

8.1. 모형

Vasicek이자율모형을 확장한 모형들 중의 하나가 Hull & White (1990)에 의해 제시된 현물이자율모형이다. 이 Hull-White이자율모형에서 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 동적특성은 다음과 같다.

$$dR(u) = [a(u) - b(u)R(u)]du + \beta(u)dW^Q(u) \quad (8.1)$$

여기서 $a(u)(> 0)$, $b(u)(> 0)$ 와 $\beta(u)(> 0)$ 는 결정적(deterministic) 함수들이고, $\{W^Q(u) | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 또한, 식 $R(0) > 0$ 이 성립한다고 가정하자. 원래, Hull & White는 $b(u)$ 를 상수 b 라고 가정하였다.

(예제 8.1) 다음 확률미분방정식을 만족하는 Hull-White이자율모형을 살펴보자.

$$dR(u) = \{[0.015 + 0.005e^{-0.21u}] - 0.21R(u)\}du + 0.06dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다.

그림 8.1에 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 표본경로들이 그려져 있다. 그림 8.1을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HWspot101.m을 실행하라.

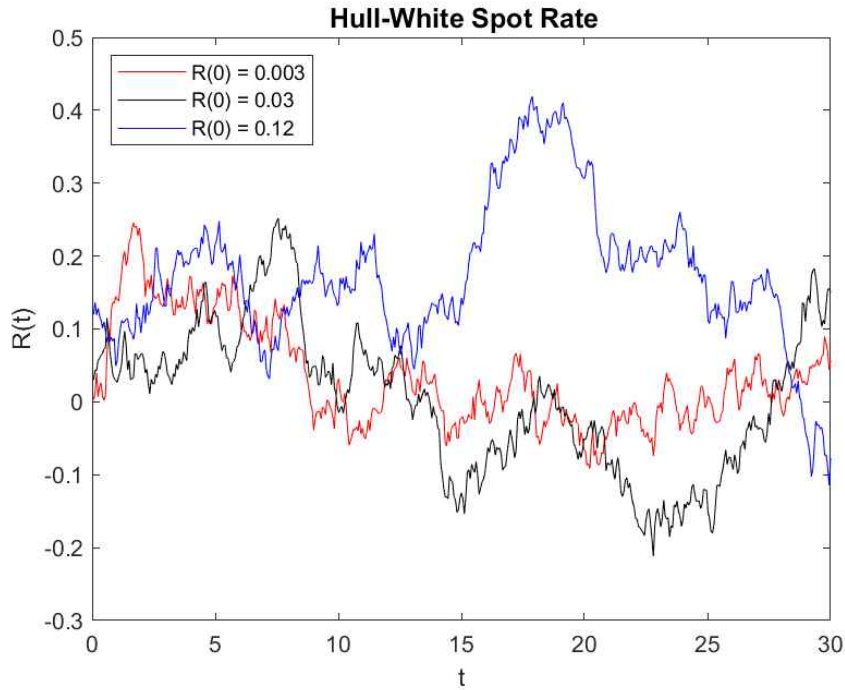
```
% -----  
% Filename: HWSpot101.m  
% Programmed by CBS  
%-----  
clear all, close all  
rng('default')  
% Mt = NO of subintervals of [t,T];  
tau = 30; Mt = 500;  
sqttau = sqrt(tau);  
Deltat = tau/Mt;  
sqDeltat = sqrt(Deltat);  
ttTT = Deltat:Deltat:tau;  
% make sample pathes  
b = 0.21;  
aa= inline('0.015+0.005*exp(-0.21*t)','t');  
beta = 0.06;  
Rvec003 = 0.003*ones(1,Mt);
```

```

for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec003(tj+1) = Rvec003(tj) ...
        + ( aa(tj) - b*Rvec003(tj) )*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec03 = 0.03*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec03(tj+1) = Rvec03(tj) ...
        + ( aa(tj) - b*Rvec03(tj) )*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec12 = 0.12*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec12(tj+1) = Rvec12(tj) ...
        + ( aa(tj) - b*Rvec12(tj) )*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
plot( ttTT, Rvec003,'r',ttTT, Rvec03,'k',ttTT, Rvec12,'b')
legend('R(0) = 0.003','R(0) = 0.03','R(0) = 0.12','location','NW')
title('Wbf Hull-White Spot Rate','fontsize', 12)
ylabel('R(t)'), xlabel('t')
saveas(gcf,'HWspot101.png')
% end of program
% -----

```

이 표본경로들의 초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. 그림 8.1에서 알 수 있듯이, Hull-White이자율모형에 의한 현물이자율은 음(-)이 될 수 있다. 이러한 점에서 Hull-White이자율모형은 좋은 모형이라 할 수 없다. ■



[그림 8.1] Hull-White이자율모형의 현물이자율

다음 함수를 정의하자.

$$H(u) \doteq \int_0^u b(s)ds \quad (8.2)$$

확률미분방정식 (8.1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} e^{H(u)}dR(u) + e^{H(u)}b(u)R(u)du \\ = e^{H(u)}a(u)du + e^{H(u)}\beta(u)dW^Q(u) \end{aligned} \quad (8.3)$$

식 (8.3)에 Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$d(e^{H(u)}R(u)) = e^{H(u)}a(u)du + e^{H(u)}\beta(u)dW^Q(u) \quad (8.4)$$

식 (8.4)에서 알 수 있듯이, 확률미분방정식 (8.1)의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R(u) = e^{-H(u)+H(t)}R(t) \\ + e^{-H(u)}\left[\int_t^u e^{H(s)}a(s)ds + \int_t^u e^{H(s)}\beta(s)dW^Q(s) \right] \end{aligned} \quad (8.5)$$

식 (8.5)에서 알 수 있듯이, 현물이자율 $R(u)$ 는 정규분포를 따른다. 즉, Hull-White이자율모형을 따르는 현물이자율이 음의 값을 갖을 확률은 양수이다. 또한, 식 (8.5)에서 알 수 있듯이, 각 $u(\geq t)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(R(u)) = e^{-H(u)+H(t)}R(t) + e^{-H(u)}\int_t^u e^{H(s)}a(s)ds \quad (8.6)$$

식 (8.5)와 Ito적분의 등거리성에 (8.5)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$\text{Cov}_t^Q(R(u), R(v)) = e^{-H(u)-H(v)} \int_t^{u \wedge v} e^{2H(s)} \beta^2(s) ds \quad (8.7)$$

여기서 $u \wedge v = \min\{u, v\}$ 이다.

식 (8.5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_t^T R(u) du &= e^{H(t)} R(t) e(t) + \int_t^T e^{-H(u)} \int_t^u e^{H(s)} a(s) ds du \\ &+ \int_t^T e^{-H(u)} \int_t^u e^{H(s)} \beta(s) dW^Q(s) du \end{aligned} \quad (8.8)$$

여기서 함수 $e(u)$ 는 다음과 같다.

$$e(u) \doteq \int_u^T e^{-H(s)} ds \quad (8.9)$$

식 (8.8)에서 알 수 있듯이, $\int_t^T R(u) du$ 는 정규분포를 따르며 또한 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} E_t^Q\left(\int_t^T R(u) du\right) &= e^{H(t)} R(t) e(t) + \int_t^T e^{-H(u)} \int_t^u e^{H(s)} a(s) ds du \\ &= e^{H(t)} R(t) e(t) + \int_t^T a(s) e^{H(s)} \int_t^s e^{-H(u)} du ds \end{aligned} \quad (8.10)$$

여기서 두 번째 등호는 Fubini정리에 의해서 성립한다. 또한, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{Var}_t^Q\left(\int_t^T R(u) du\right) &= \text{Var}_t^Q\left(\int_t^T e^{-H(u)} \int_t^u e^{H(s)} \beta(s) dW^Q(s) du\right) \\ &= E_t^Q\left(\left[\int_t^T e^{H(s)} \beta(s) \int_t^s e^{-H(u)} du dW^Q(s)\right]^2\right) \\ &= \int_t^T e^{2H(s)} \beta^2(s) \left[\int_t^s e^{-H(u)} du\right]^2 ds \end{aligned} \quad (8.11)$$

여기서 두 번째 등호는 Fubini정리에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 Ito적분의 등거리성에 의해서 성립한다.

같은 방법으로, 확률벡터 $\left[R(T) \int_t^T R(u) du\right]^t$ 는 2변량 정규분포를 따르며, 또한 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Cov}_t^Q\left(R(T), \int_t^T R(u) du\right) &= E_t^Q\left(\int_t^T [R(u) - E_t^Q(R(u))] du [R(T) - E_t^Q(R(T))]\right) \\ &= \int_t^T E_t^Q([R(u) - E_t^Q(R(u))][R(T) - E_t^Q(R(T))]) du \\ &= \int_t^T \text{Cov}_t^Q(R(u), R(T)) du \end{aligned} \quad (8.12)$$

식 (8.7)을 식 (8.12)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\text{Cov}^Q\left(R(T), \int_t^T R(u)du\right) = \int_t^T e^{-H(u)-H(T)} \left[\int_t^u e^{2H(s)} \beta^2(s) ds \right] du \quad (8.13)$$

Hull-White이자율모형의 모수들은 비교적 간단한 형태이므로, 이 모형은 실용적이다. 앞서서도 언급했듯이, Hull & White (1990)은 확산계수를 상수로 둘 것을 제안하고 있지만, 이 경우에 cap의 무재정가치를 정확하게 평가할 수 없다고 알려져 있다.

8.2. 할인채가치

식 (5.6)에서 알 수 있듯이, 만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 무재정가치 $B(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$B(t, T) = E_t^Q\left(\exp\left(-\int_t^T R(u)du\right)\right) \quad (8.14)$$

현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 는 확률미분방정식 (8.1)을 만족하는 Ito확산과정이다.

따라서, 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 는 Markov과정이다. 즉, 식 (8.14)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B(t, T) = E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T R(u)du\right) \middle| R(t)\right) \quad (8.15)$$

제8.1절에서 언급했듯이, 확률변수 $\int_t^T R(u)du$ 는 정규분포를 따른다.

정규분포의 적률모함수를 이용해서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$B(t, T) = \exp\left(-E_t^Q\left(\int_t^T R(u)du\right) + \frac{1}{2} \text{Var}^Q\left(\int_t^T R(u)du\right)\right) \quad (8.16)$$

식 (8.10), 식 (8.11) 그리고 식 (8.16)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$B(t, T) = \exp(-R(t)C(t, T) - A(t, T)) \quad (8.17)$$

여기서 $C(t, T)$ 와 $A(t, T)$ 는 각각 다음과 같다.

$$C(t, T) \doteq e^{H(t)}e(t) \quad (8.18)$$

$$A(t, T) \doteq \int_t^T \left\{ a(s)e^{H(s)} \int_t^s e^{-H(u)} du - \frac{1}{2} e^{2H(s)} \beta^2(s) \left[\int_t^s e^{-H(u)} du \right]^2 \right\} ds \quad (8.19)$$

다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$C(t, T) = \int_t^T e^{H(t)-H(s)} ds = \int_t^T \exp\left(-\int_t^s b(u)du\right) ds \quad (8.20)$$

$$A(t, T) = \int_t^T \left[a(s)C(s, T) - \frac{1}{2} \beta^2(s)C^2(s, T) \right] ds \quad (8.21)$$

함수들 $a(t)$ 와 $\beta(t)$ 는 시간 t 의 결정적(deterministic) 함수들이므로, $C(t, T)$ 와

$A(t, T)$ 도 시간 t 의 결정적 함수들이다. 따라서, 각 시점 t 에서 모든 만기시점들에 대한 (대수변환된) 할인채가치들이 완전한 상관관계에 있다.

(예제 8.2) 예제 8.1에서 다룬 Hull-White이자율모형을 살펴보자. 즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = \{[0.015 + 0.005e^{-0.21u}] - 0.21R(u)\} du + 0.06 dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 다음 식들이 성립한다.

$$b = 0.21, \quad a(u) = 0.015 + 0.005e^{-bu}, \quad \beta = 0.06 \quad (2)$$

$$H(u) = bu, \quad e(u) = \frac{1}{b}[e^{-bu} - e^{-bT}] \quad (3)$$

$$C(t, T) = \frac{1 - e^{-b[T-t]}}{b} \quad (4)$$

$$I_1 \doteq \int_t^T C(u, T) du = \frac{1}{b}[T-t] - \frac{1}{b^2}\{1 - e^{-b[T-t]}\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\doteq \int_t^T e^{-bu} C(u, T) du = \frac{1}{b} \left[-\frac{1}{b} e^{-bu} - e^{-bTu} \right] \Big|_t^T \\ &= \frac{1}{b} e^{-bT} [T-t] - \frac{1}{b^2} [e^{-bT} - e^{-bt}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_3 &\doteq \int_t^T C^2(u, T) du \\ &= \frac{1}{2b^3} e^{-2b[T-u]} - \frac{2}{b^3} e^{-b[T-u]} - \frac{1}{b^2} [T-u] \Big|_t^T \\ &= \frac{1}{2b^3} \{1 - e^{-2b[T-t]}\} - \frac{2}{b^3} \{1 - e^{-b[T-t]}\} + \frac{1}{b^2} [T-t] \end{aligned} \quad (7)$$

$$A(t, T) = 0.015I_1 + 0.005I_2 - \frac{1}{2} \beta^2 I_3 \quad (8)$$

그림 8.2에 Hull-White이자율모형에 의한 할인곡선이 그려져 있다. 그림 8.2를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HWdc101.m을 실행하라.

```

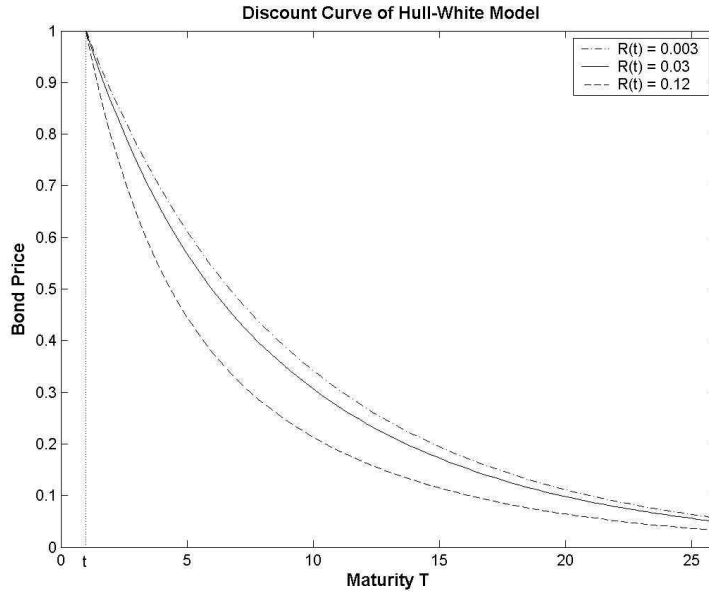
% -----
% Filename: HWdc101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
CC = inline('(1 - exp(-b*(TT-t)))/b','b','TT','t')
I1 = inline('(TT-t)/b - (1 - exp(-b*(TT-t)))/b^2','b','TT','t')
```

```

I2 = inline(' exp(-b*TT).*(TT-t)/b - ( exp(-b*TT)-exp(-b*t) )/b^2','b','TT','t')
I3 = inline(' (1 - exp(-2*b*(TT-t)))/b^3/2 - 2*(1 - exp(-b*(TT-t)))/b^3
            - (TT-t)/b^2 ','b','TT','t')
% 주의: I3는 한 줄로 입력해야함을 명심하세요
AA = inline('0.015*I1 + 0.005*I2 - 0.5*beta^2*I3','beta','I1','I2','I3')
%
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
C = CC(b,TT,tt);
II1= I1(b,TT,tt); II2= I2(b,TT,tt); II3= I3(b,TT,tt);
A = AA(beta,II1,II2,II3);
%
Rt= 0.003;
%
BtT003 = exp( -A - Rt*C);
%
Rt = 0.03;
BtT03 = exp( -A - Rt*C);
%%
Rt = 0.12;
BtT12 = exp( -A - Rt*C);
yref = 0:1/30:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,BtT003,'k-.', TT,BtT03,'k',TT,BtT12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 1 ] )
ylabel('\Wbf{Bond Price}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf{Discount Curve of Hull-White Model}','fontsize',12)
text(1,-0.02,'t')
saveas(gcf,'HWdc101.png')
% End of Program
%-----

```

초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 8.2] Hull-White이자율모형의 할인곡선

지금부터는 할인채가치의 확률미분방정식을 구해보자. 식 (8.17)에 Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 dB(t, T) &= B(t, T)[-C(t, T)]dR(t) \\
 &\quad + B(t, T)[-R(t)C_t(t, T) - A_t(t, T)]dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} B(t, T)\beta^2(t)C^2(t, T)dt
 \end{aligned} \tag{8.22}$$

식 (8.1)과 식 (8.22)에 의해서, 다음 식이 성립하다.

$$\begin{aligned}
 \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} &= -\left\{C(t, T)[a(t) - b(t)R(t)] - \frac{1}{2} C^2(t, T)\beta^2(t)\right\}dt \\
 &\quad - [R(t)C_t(t, T) + A_t(t, T)]dt - C(t, T)\beta(t)dW^Q(t)
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

할인채가치 $B(t, T)$ 의 위험중립확률측도 Q 하에서 기대수익률은 현물이자율 $R(t)$ 와 같아야 한다. 만일 그렇지 않으면, 이 시장에는 재정이 존재한다. 따라서, 식 (8.23)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 R(t) &= -C(t, T)[a(t) - b(t)R(t)] + \frac{1}{2} C^2(t, T)\beta^2(t) \\
 &\quad - R(t)C_t(t, T) - A_t(t, T)
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

식 (8.24)를 식 (8.23)에 대입하면, 다음과 같은 할인채가치의 확률미분방정식을

얻는다.

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - B(t, T)C(t, T)\beta(t)dW^Q(t) \quad (8.25)$$

식 (8.25)에서 알 수 있듯이, 이 할인채가치의 변동성은 $-C(t, T)\beta(t)$ 이다. 식 (8.20)과 가정 $\beta(t) > 0$ 에 의해서, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$-C(t, T)\beta(t) < 0 \quad (8.26)$$

즉, Hull-White이자율모형에 의한 할인채가치의 변동성은 음수이다.

8.3. 선도이자율

식 (8.20)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\partial C(t, T)}{\partial T} = \exp\left(-\int_t^T b(u)du\right) \quad (8.27)$$

만기시점 T 에서 할인채가치 $B(T, T)$ 는 1이므로, 다음 식들이 성립한다.

$$C(T, T) = 0, \quad A(T, T) = 0 \quad (8.28)$$

Leibniz법칙을 식 (8.21)에 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, T)}{\partial T} &= a(T)C(T, T) - \frac{1}{2}\beta^2(T)C^2(T, T) \\ &+ \int_t^T \left[a(u)\frac{\partial C(u, T)}{\partial T} - \beta^2(u)C(u, T)\frac{\partial C(u, T)}{\partial T} \right] du \end{aligned} \quad (8.29)$$

식 (8.28)을 식 (8.29)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial T} = \int_t^T \left[a(u)\frac{\partial C(u, T)}{\partial T} - \beta^2(u)C(u, T)\frac{\partial C(u, T)}{\partial T} \right] du \quad (8.30)$$

식 (8.27)을 식 (8.30)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial T} = \int_t^T [a(u) - \beta^2(u)C(u, T)] \exp\left(-\int_u^T b(s)ds\right) du \quad (8.31)$$

식 (8.27)과 식 (6.31)을 식 (3.3.37)에 대입하면, 다음과 같이 선도이자율 $F(t, T)$ 를 얻는다.

$$\begin{aligned} F(t, T) &= -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \\ &= \frac{\partial A(t, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(t, T)}{\partial T} R(t) \\ &= \int_t^T [a(u) - \beta^2(u)C(u, T)] \exp\left(-\int_u^T b(s)ds\right) du \\ &\quad + \exp\left(-\int_t^T b(u)du\right) R(t) \end{aligned} \quad (8.32)$$

식 (6.32)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이고 정규분포를 따른다. 선도이자율 $F(t, T)$ 가 정규분포에 따르므로, 선물이자율이 음의 값을 갖는 확률이 양수이다.

(예제 8.3) 예제 8.1에서 다룬 Hull-White이자율모형을 살펴보자. 즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = \{[0.015 + 0.005e^{-0.21u}] - 0.21R(u)\}du + 0.06dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 다음 식들이 성립한다.

$$b = 0.21, \quad a(u) = 0.015 + 0.005e^{-bu}, \quad \beta = 0.06 \quad (2)$$

$$\frac{\partial C(t, T)}{\partial T} = e^{-b[T-t]} \quad (3)$$

$$J_1 \doteq \frac{\partial}{\partial T} \int_t^T C(u, T)du = \frac{1}{b}\{1 - e^{-b[T-t]}\} \quad (4)$$

$$J_2 \doteq \frac{\partial}{\partial T} \int_t^T e^{-bu}C(u, T)du = e^{-bT}\left\{\frac{2}{b} - [T-t]\right\} \quad (5)$$

$$J_3 \doteq \frac{\partial}{\partial T} \int_t^T C^2(u, T)du = \frac{1}{b^2}\{e^{-2b[T-t]} - 2e^{-b[T-t]} + 1\} \quad (6)$$

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial T} = 0.015J_1 + 0.005J_2 - \frac{1}{2}\beta^2J_3 \quad (7)$$

식 (8.32)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$F(t, T) = \frac{\partial A(t, T)}{\partial T} + \frac{\partial C(t, T)}{\partial T}R(t) \quad (8)$$

그림 8.3에 Hull-White이자율모형에 의한 선도이자율곡선이 그려져 있다. 그림 8.3을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HWforward101.m을 실행하라.

```
% -----
% Filename: HWforward101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all. close all clf
% Define functions
dCC = inline('exp(-b*(TT-t))','b','TT','t')
J1 = inline('( 1 - exp( -b*(TT-t) ) )/b','b','TT','t')
J2 = inline(' exp(-b*TT).*( 2/b - ( TT-t ) )','b','TT','t')
J3 = inline(' ( exp(- 2*b*(TT-t) )-2*exp( -b*(TT-t) )+1 )/b^2 ','b','TT','t')
dAA = inline('0.015*J1 + 0.005*J2 - 0.5*beta^2*J3','beta','J1','J2','J3')
%
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
```

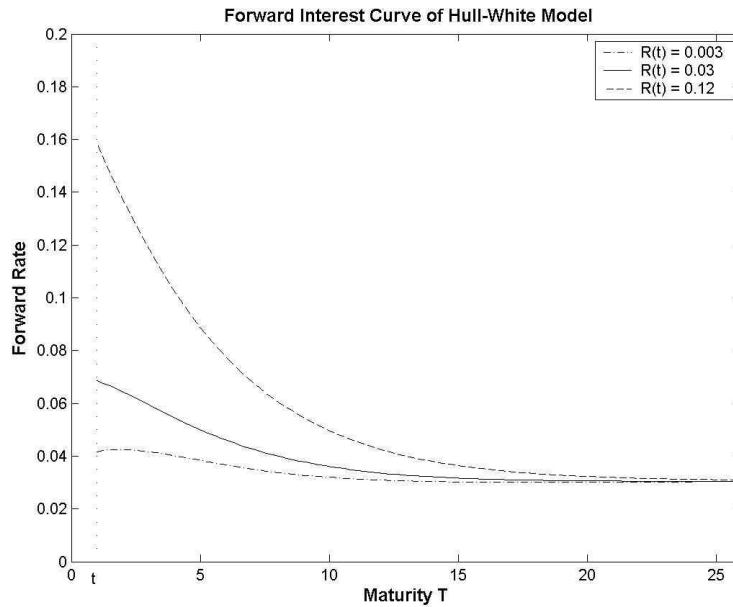


```

beta = 0.06;
%
dC = dCC(b,TT,tt);
JJ1= J1(b,TT,tt); JJ2= J2(b,TT,tt); JJ3= J3(b,TT,tt);
dA = dAA(beta,JJ1,JJ2,JJ3);
%
Rt= 0.003; For003 = dA + Rt*dC;
Rt= 0.03; For03 = dA + Rt*dC;
Rt= 0.12; For12 = dA + Rt*dC;
%
yref = 0:1/30:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,For003,'k-', TT,For03,'k',TT,For12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 0.2 ] )
ylabel('\Wbf{Forward Rate}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Forward Interest Curve of Hull-White Model','fontsize',12)
text(1,-0.004,'t')
% End of Program
%-----

```

초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 8.3] Hull-White이자율모형의 선도이자율곡선

8.4. 일드

이 절에서는 Hull-White이자율모형의 일드곡선에 대해 살펴보자. 만기시점 T 인 할인채의 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$R(t, T) = -\frac{1}{\tau} \ln B(t, T) = \frac{1}{\tau} [A(t, T) + C(t, T)R(t)] \quad (8.33)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.43)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (8.17)에 의해서 성립한다. 식 (8.20)의 $C(t, T)$ 와 식 (8.21)의 $A(t, T)$ 를 식 (8.33)에 대입하면, 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 를 얻는다. 식 (8.33)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이다. 따라서, Hull-White이자율모형은 아핀일드모형(affine-yield model)이다. 또한, 일드 $R(t, T)$ 는 정규분포를 따른다.

(예제 8.4) 예제 8.1에서 다룬 Hull-White이자율모형을 살펴보자. 즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = \{[0.015 + 0.005e^{-0.21u}] - 0.21R(u)\} du + 0.06 dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) \mid u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 예제 8.2에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (2)$$

$$C(t, T) = \frac{1 - e^{-b[T-t]}}{b} \quad (3)$$

$$I_1 = \frac{1}{b}[T-t] - \frac{1}{b^2}\{1 - e^{-b[T-t]}\} \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{1}{b}e^{-bT}[T-t] - \frac{1}{b^2}[e^{-bT} - e^{-bt}] \quad (5)$$

$$I_3 = \frac{1}{2b^3}\{1 - e^{-2b[T-t]}\} - \frac{2}{b^3}\{1 - e^{-b[T-t]}\} + \frac{1}{b^2}[T-t] \quad (6)$$

$$A(t, T) = 0.015I_1 + 0.005I_2 - \frac{1}{2}\beta^2I_3 \quad (7)$$

식 (8.33)에서 알 수 있듯이, Hull-White이자율모형에 의한 일드는 다음과 같다.

$$R(t, T) = \frac{1}{\tau}[A(t, T) + C(t, T)R(t)] \quad (8)$$

그림 8.4에 Hull-White이자율모형에 의한 일드곡선이 그려져 있다. 그림 8.4를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HWyield101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: HWyield101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
CC = inline('(1 - exp(-b*(TT-t)))/b','b','TT','t')
I1 = inline('(TT-t)/b - (1 - exp(-b*(TT-t)))/b^2','b','TT','t')
I2 = inline(' exp(-b*TT).*(TT-t)/b - ( exp(-b*TT)-exp(-b*t) )/b^2','b','TT','t')
I3 = inline(' (1 - exp(-2*b*(TT-t)))/b^3/2 -
            2*(1 - exp(-b*(TT-t)))/b^3 - (TT-t)/b^2 ','b','TT','t')
% 주의: I3는 한 줄로 입력해야 한다.
AA = inline('0.015*I1 + 0.005*I2 - 0.5*beta^2*I3','beta','I1','I2','I3')
%
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
%
C = CC(b,TT,tt);
I11= I1(b,TT,tt); I12= I2(b,TT,tt); I13= I3(b,TT,tt);
A = AA(beta,I11,I12,I13);

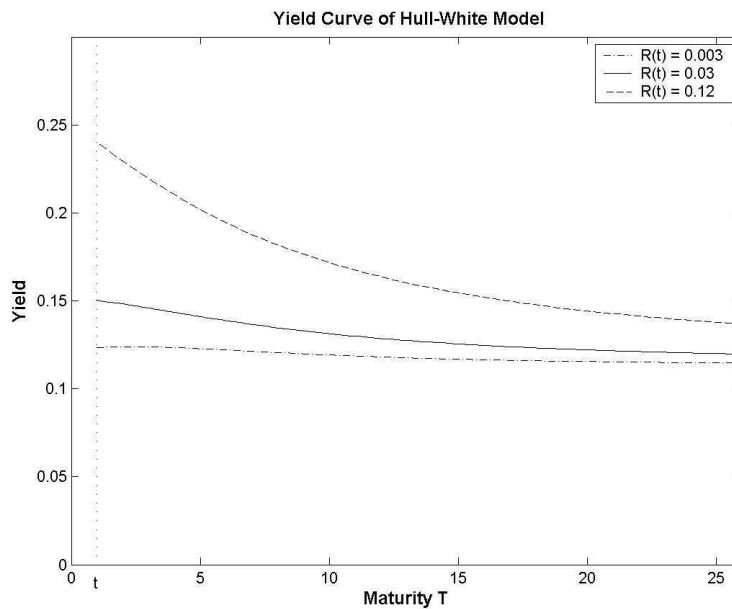
```

```

Rt= 0.003; yield003 = (A + Rt*C)./(TT-tt);
Rt = 0.03; yield03 = (A + Rt*C)./(TT-tt);
Rt = 0.12; yield12 = (A + Rt*C)./(TT-tt);
%
yref = 0:1/30:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,yield003,'k-', TT,yield03,'k',TT,yield12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 0.3 ] )
ylabel('\Wbf{Yield}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Yield Curve of Hull-White Model','fontsize',12)
text(1,-0.004,'t')
% End of Program
% -----

```

초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 8.4] Hull-White이자율모형의 일드곡선

제9절 CIR모형

9.1. 모형

Vasicek이자율모형을 발전시킨 현물이자율모형들 중의 하나가 Cox & Ingersoll & Ross (1985)가 제시한 CIR모형이다. Vasicek이자율모형과 Hull-White이자율모형에서는 현물이자율 $R(t)$ 가 정규분포를 따른다고 가정하므로, 현물이자율 $R(t)$ 가 음의 값을 가질 가능성이 있다. 반면에, CIR모형에서 현물이자율 $R(t)$ 의 확률미분방정식은 비음(nonnegative)인 해를 갖는다. 또한, 현물이자율 $R(t)$ 의 확률분포가 알려져 있다. 따라서, Vasicek이자율모형과 마찬가지로 CIR이자율모형도 이자율에 민감한 금융상품의 가치모형으로 널리 사용되고 있다. 이 CIR모형은 일반균형이론을 바탕으로 한 것이다.

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 에서 정의되는 n 변량 Brown운동 $\{\mathbf{W}(u) \doteq [W_1(u) \ W_2(u) \ \cdots \ W_n(u)]^t \mid u \geq 0\}$ 와 이 $\{\mathbf{W}(u)\}$ 에 의해서 생성된 자연증대정보계 $\{\mathcal{F}_u \mid u \geq 0\}$ 그리고 $\{\mathcal{F}_u\}$ -적합과정 $\{\mathbf{x}(u) \doteq [x_1(u) \ x_2(u) \ \cdots \ x_n(u)]^t\}$ 를 생각해보자. 또한, 다음 확률미분방정식들이 성립한다고 가정하자.

$$dx_i(u) = -\frac{\delta}{2} x_i(u) du + \frac{\beta}{2} dW_i(u), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.1)$$

식 (9.1)과 Ito-Doebelin보조정리에 의해서, 각 i 에 대해 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$x_i(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \delta t\right) \left[x_i(0) + \frac{\beta}{2} \int_0^t \exp\left(\frac{1}{2} \delta u\right) dW_i(u) \right] \quad (9.2)$$

현물이자율 $R(t)$ 가 다음 식을 만족한다고 하자.

$$R(u) = \sum_{i=1}^n x_i^2(u) \quad (9.3)$$

식 (9.3)에 다변량Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} dR(u) &= \sum_{i=1}^n 2x_i(u) \left[-\frac{1}{2} \delta x_i(u) du + \frac{1}{2} \beta dW_i(u) \right] + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \beta^2 du \\ &= -\delta R(u) du + \beta \left[\sum_{i=1}^n x_i(u) dW_i(u) \right] + \frac{n\beta^2}{4} du \\ &= \left[\frac{n\beta^2}{4} - \delta R(u) \right] du + \beta \sqrt{R(u)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{R(u)}} x_i(u) dW_i(u) \end{aligned} \quad (9.4)$$

다음 확률변수를 정의하자.

$$W(t) \doteq \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{x_i(u)}{\sqrt{R(u)}} dW_i(u) \quad (9.5)$$

확률과정 $\{\mathbf{x}(t)\}$ 가 $\{\mathcal{F}_t\}$ -적합이므로, $\{W(t)\}$ 는 정규확률과정이다. 또한, 다음

식이 성립한다.

$$E(W(t)) = 0 \quad (9.6)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} W^2(t) &= 2 \int_0^t W(u) dW(u) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{1}{R(u)} x_i^2(u) du \\ &= 2 \int_0^t W(u) dW(u) + t \end{aligned} \quad (9.7)$$

여기서 첫 번째 등호는 Ito적분의 등거리성에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (9.3)에 의해서 성립한다. 식 (9.7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\text{Var}(W(t)) = t \quad (9.8)$$

즉, Levy정리에서 알 수 있듯이, $\{W(t)\}$ 는 진짜확률측도 P 하에서 Brown운동이다. 따라서, 식 (9.4)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dR(t) = [a_P - b_P R(t)]dt + \beta_P \sqrt{R(t)} dW(t) \quad (9.9)$$

여기서 $a_P (> 0)$, $b_P (> 0)$ 그리고 $\beta_P (> 0)$ 는 상수들이다.

식 (9.9)의 CIR이자율모형을 위험중립확률측도 Q 하에서 모형으로 변형하기 위해서, 다음 확률변수를 정의하자.

$$dW^Q(t) \doteq dW(t) - \lambda \sqrt{R(t)} dt \quad (9.10)$$

여기서 λ 는 상수이다. 각 시점 $t (\geq 0)$ 에서 정보집합 F_t 가 주어졌을 때, 위험중립확률측도 Q 의 진짜확률측도 P 에 대한 Radon-Nikodym 밀도는 다음과 같다.

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{F_t} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 R(s) ds + \int_0^t \lambda \sqrt{R(s)} dW(s) \right) \quad (9.11)$$

식 (9.11)에서 알 수 있듯이, 이러한 측도변환은 이자율위험의 시장가치 λ_t 를 다음과 같다고 가정하는 것이다.

$$\lambda_t = \lambda \sqrt{R(t)} \quad (9.12)$$

여기서 λ 는 상수이다. 물론, 이자율위험의 시장가치 λ_t 가 식 (9.12)의 형태라고 가정할 필요는 없다. 그러나, 이러한 가정을 함으로써 위험중립확률측도 Q 뿐만 아니라 진짜확률측도 P 하에서도 현장이자율모형을 다루기가 쉽다. 식 (9.10)을 식 (9.9)에 대입하면, 다음 확률미분방정식을 얻는다.

$$dR(t) = \{a_P - [b_P - \lambda \beta_P]R(t)\}dt + \beta_P \sqrt{R(t)} dW^Q(t) \quad (9.13)$$

확률미분방정식 (9.13)을 다음과 같이 표기하자.

$$dR(t) = [a - bR(t)]dt + \beta \sqrt{R(t)} dW^Q(t) \quad (9.14)$$

여기서 $a (> 0)$, $b (> 0)$ 그리고 $\beta (> 0)$ 는 상수들로서, 다음 Feller조건을 만족한다고 가정하자.

$$2a > \beta^2 \quad (9.15)$$

뒤에서 자세히 다루겠지만, 조건 (9.15)는 $R(t) > 0$ 이 되기 위한 필요충분조건이다. 확률미분방정식 (9.14)를 만족하는 $\{R(t)\}$ 를 CIR이자율과정이라 한다. 식 (9.14)에서, β 를 $R(t)$ 의 변동성으로 해석할 수 없음을 유의하라. 그러나, 시장에서는 관습적으로 이 β 를 $R(t)$ 의 변동성이라 부른다.

(예제 9.1) 식 (9.14)의 CIR이자율모형에서 모수들이 다음과 같다고 하자.

$$b = 0.21, \quad a = 0.07b, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다고 하자.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06\sqrt{R(u)}dW^Q(u) \quad (2)$$

그림 9.1에 위험중립확률측도 Q 하에서 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 표본경로들이 그려져 있다. 그림 9.1을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 CIRSpot101.m을 실행하라.

```
% -----
% Filename: CIRSpot101.m
% Programmed by CBS
%-----

clear all, close all
% Mt = NO of subintrvals of [t,T];
clear, clf
rng('default')
tau = 30; Mt = 500;
sqrtau = sqrt(tau);
Deltat = tau/Mt;
sqDeltat = sqrt(Deltat);
ttTT = Deltat:Deltat:tau;
% make sample pathes
b = 0.21;
beta = 0.06;
tildeR = 0.07
tildeRR = tildeR*ones(size(ttTT));
Rvec003 = 0.003*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec003(tj+1) = Rvec003(tj) + b*( tildeR - Rvec003(tj) ) ...
        *Deltat + beta*sqrt(Rvec003(tj))*sqDeltat*zz;
end
Rvec03 = 0.03*ones(1,Mt);
```

```

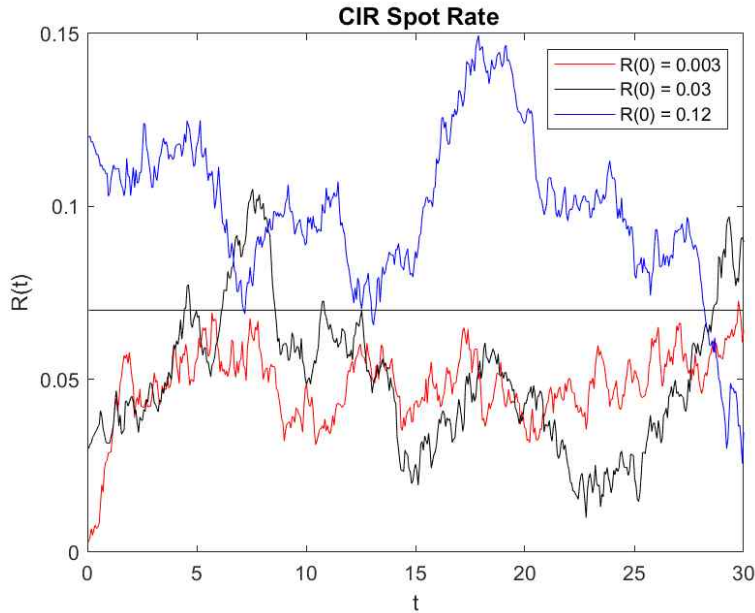
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec03(tj+1) = Rvec03(tj) + b*( tildeR - Rvec03(tj) )*Deltat ...
                + beta*sqrt(Rvec003(tj))*sqDeltat*zz;

end
Rvec12 = 0.12*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec12(tj+1) = Rvec12(tj) ...
                + b*( tildeR - Rvec12(tj) )*Deltat ...
                + beta*sqrt(Rvec003(tj))*sqDeltat*zz;

end
plot(ttTT, Rvec003,'r',ttTT, Rvec03,'k',ttTT, Rvec12,'b',ttTT,tildeRR,'k')
legend('R(0) = 0.003','R(0) = 0.03','R(0) = 0.12','location','NE')
text(tildeR,-0.043,'0.07')
title('Wbf CIR Spot Rate','fontsize', 12)
ylabel('R(t)'); xlabel('t')
saveas(gcf,'CIRspot101.png')
% end of program
% -----

```

이 표본경로들의 초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. 그림 9.1에서 CIR이자율모형에 의한 현물이자율은 항상 양(+)임을 확인할 수 있다. ■



[그림 9.1] CIR이자율과정의 표본경로

확률미분방정식 (9.14)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e^{bt}dR(t) + R(t)de^{bt} = ae^{bt}dt + e^{bt}\beta\sqrt{R(t)}dW^Q(t) \quad (9.16)$$

식 (9.16)에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 다음 확률미분방정식이 성립한다.

$$d(e^{bt}R(t)) = ae^{bt}dt + e^{bt}\beta\sqrt{R(t)}dW^Q(t) \quad (9.17)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$R(t) = \frac{a}{b} + \left[R(0) - \frac{a}{b}\right]e^{-bt} + e^{-bt} \int_0^t e^{-bu}\beta\sqrt{R(u)}dW^Q(u) \quad (9.18)$$

안타깝게도 확률미분방정식 (9.18)을 해석적으로 풀어서, 현물이자율 $R(t)$ 를 Brown운동 $\{W^Q(u)\}$ 의 함수로 나타낼 수 없다. 즉, 이 확률미분방정식의 해석하는 존재하지 않는다.

9.2. 이자율의 적률

식 (9.18)에서 알 수 있듯이, $R(0)$ 가 주어진 조건 하에서 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$E^Q(R(t)) = \frac{a}{b} + \left[R(0) - \frac{a}{b}\right]e^{-bt} \quad (9.19)$$

$$\text{Var}^Q(R(t)) = R(0)\frac{\beta^2}{b}e^{-bt}[1 - e^{-bt}] + \frac{a\beta^2}{2b^2}[1 - e^{-bt}]^2 \quad (9.20)$$

따라서, $\{R(t)\}$ 의 정상분포(stationary distribution)의 평균과 분산은 각각 a/b 와

$a\beta^2/[2b^2]$ 이다.

식 (9.18)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_0^t R(u) du &= \frac{a}{b} t + \left[R(0) - \frac{a}{b} \right] \frac{1}{b} [1 - e^{-bt}] \\ &+ \int_0^t e^{-bu} \int_0^u e^{bs\beta} \sqrt{R(s)} dW^Q(s) du \end{aligned} \quad (9.21)$$

Fubini정리를 사용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{-bu} \int_0^u e^{bs\beta} \sqrt{R(s)} dW^Q(s) du \\ &= \int_0^u \left[\int_s^t e^{-bu} du \right] e^{bs\beta} \sqrt{R(s)} dW^Q(s) \\ &= \int_0^u \frac{1}{b} \{1 - e^{-b[t-s]}\} \beta \sqrt{R(s)} dW^Q(s) \end{aligned} \quad (9.22)$$

식 (9.21)에서 알 수 있듯이, 위험중립확률측도 Q 하에서 $\int_0^t R(u) du$ 의 평균 $m_I(t)$ 과 표준편차 $s_I(t)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$m_I(t) \doteq E^Q\left(\int_0^t R(u) du\right) = \frac{a}{b} t + \left[R(0) - \frac{a}{b} \right] \frac{1}{b} [1 - e^{-bt}] \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} s_I^2(t) &\doteq \text{Var}^Q\left(\int_0^t R(u) du\right) \\ &= E^Q\left(\left[\int_0^u \frac{1}{b} \{1 - e^{-b[t-s]}\} \beta \sqrt{R(s)} dW^Q(s)\right]^2\right) \\ &= \int_0^u E^Q\left(\frac{1}{b^2} \{1 - e^{-b[t-s]}\}^2 \beta^2 R(s)\right) ds \\ &= \int_0^u \frac{1}{b^2} \{1 - e^{-b[t-s]}\}^2 \beta^2 \left\{ \frac{a}{b} + \left[R(0) - \frac{a}{b} \right] e^{-bt} \right\} ds \end{aligned} \quad (9.24)$$

식 (9.24)의 두 번째 등호는 식 (9.21)-식 (9.23)에 의해서, 세 번째 등호는 Ito적분의 등거리성에 의해서, 그리고 네 번째 등호는 식 (9.19)에 의해서 성립한다.

(예제 9.2) 초기시점이 0이 아닌 s 인 경우를 살펴보자. 확률미분방정식 (9.14)에서 알 수 있듯이, 각 $s < t$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$R(t) = R(s) + \int_s^t [a - bR(u)] du + \beta \int_s^t \sqrt{R(u)} dW^Q(u) \quad (1)$$

식 (1)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_s^Q(R(t)) = R(s) + \int_s^t [a - bE_s^Q(R(u))] du \quad (2)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이, 함수 $m_1(t) \doteq E_s^Q(R(t))$ 는 다음 상미분방정식을 만족한다.

$$m_1'(t) = a - bm_1(t) \quad (3)$$

또한, 경계조건은 다음과 같다.

$$m_1(s) = R(s) \quad (4)$$

상미분방정식 (3)과 초기조건 (4)로 이루어진 문제를 풀면, 다음 식이 성립한다.

$$m_1(t) = \frac{a}{b} + \left[R(s) - \frac{a}{b} \right] e^{-b[t-s]} \quad (5)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$E_s^Q(R(t)) = \frac{a}{b} + \left[R(s) - \frac{a}{b} \right] e^{-b[t-s]} \quad (6)$$

함수 $f(R(t)) = R^2(t)$ 에 대해서 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 식 (1)로부터 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} R^2(t) &= R^2(s) + \beta^2 \int_s^t R(u) du + 2 \int_s^t [a - bR(u)] R(u) du \\ &\quad + 2\beta \int_s^t [R(u)]^{3/2} dW^Q(u) \end{aligned} \quad (7)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} R^2(t) &= R^2(s) + [\beta^2 + 2a] \int_s^t R(u) du - 2b \int_s^t R^2(u) du \\ &\quad + 2\beta \int_s^t [R(u)]^{3/2} dW^Q(u) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} E_s^Q(R^2(t)) &= R^2(s) + [\beta^2 + 2a] \int_s^t E_s^Q(R(u)) du \\ &\quad - 2b \int_s^t E_s^Q(R^2(u)) du \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 알 수 있듯이, 함수 $m_2(t) \doteq E_s^Q(R^2(t))$ 는 다음 상미분방정식을 만족한다.

$$m_2'(t) = [\beta^2 + 2a]m_1(t) - 2bm_2(t) \quad (10)$$

또한, 초기조건은 다음과 같다.

$$m_2(s) = R^2(s) \quad (11)$$

함수 $V(t) \doteq \text{Var}_s^Q(R(t))$ 는 다음 식을 만족한다.

$$V(t) = m_2(t) - m_1^2(t) \quad (12)$$

식 (3)과 식 (12)를 식 (10)에 대입하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} V'(t) &= m_2'(t) - 2m_1(t)m_1'(t) \\ &= [\beta^2 + 2a]m_1(t) - 2b[V + m_1^2(t)] - 2m_1(t)a + 2bm_1^2(t) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (5), 식 (11) 그리고 식 (12)에서 알 수 있듯이, 초기조건은 다음과 같다.

$$V(s) = 0 \quad (14)$$

식 (5)를 식 (13)에 대입하면, 다음 상미분방정식이 성립한다.

$$V'(t) = \beta^2 \left\{ \frac{a}{b} + \left[R(s) - \frac{a}{b} \right] e^{-b[t-s]} \right\} - 2bV(t) \quad (15)$$

경계조건 (14)를 만족하는 상미분방정식 (15)의 해는 다음과 같다.

$$V(t) = R(s) \frac{\beta^2}{b} e^{-bt} \{ e^{-b[t-s]} - e^{-2b[t-s]} \} + \frac{a\beta^2}{2b^2} \{ 1 - e^{-b[t-s]} \}^2 \quad (16)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{Var}_s^Q(R(t)) &= R(s) \frac{\beta^2}{b} e^{-bt} \{e^{-b[t-s]} - e^{-2b[t-s]}\} \\ &\quad + \frac{a\beta^2}{2b^2} \{1 - e^{-b[t-s]}\}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

■

9.3. 할인채가치

예제 2.2.8에서처럼 Feynman-Kac정리를 사용해서 CIR이자율모형을 따르는 할인채의 무재정가치를 평가할 수 있다. 이 절에서는 좀 더 일반적인 경우를 다루기 위해서, 우선 확률벡터 $\left[\int_t^T R(u) du \ R(T) \right]^t$ 의 Laplace변환을 구해보자. 이 Laplace변환은 CIR이자율과정에 의한 할인채의 가치평가뿐 아니라 이 할인채를 원자산으로 하는 유럽형옵션의 가치평가에 유용하다.

[정리 9.1] 확률미분방정식 (9.14), 즉 다음 확률미분방정식의 해를 $\{R(u)\}$ 라 하자.

$$dR(u) = [a - bR(u)]du + \beta\sqrt{R(u)}dW^Q(u), \quad (u \geq 0)$$

여기서 $\{W^Q(u)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 각 $\eta(> 0)$ 와 각 $\zeta(> 0)$ 그리고 각 $t(\in[0, T])$ 에 대해서, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q \left(\exp \left(-\eta R(T) - \zeta \int_t^T R(u) du \right) \right) = \exp(-a\phi_{\eta, \zeta}(t, T) - \eta\psi_{\eta, \zeta}(t, T))$$

여기서 $\phi_{\eta, \zeta}(t, T)$ 와 $\psi_{\eta, \zeta}(t, T)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{\eta, \zeta}(t, T) &\doteq -\frac{2}{\beta^2} \ln \frac{2\gamma \exp\left([T-t] \frac{b+\gamma}{2}\right)}{[\beta^2\eta + \gamma + b][e^{\gamma[T-t]} - 1] + 2\gamma} \\ \psi_{\eta, \zeta}(t, T) &\doteq \frac{\eta\{[\gamma - b][e^{\gamma[T-t]} - 1] + 2\gamma\} + 2\zeta\{e^{\gamma[T-t]} - 1\}}{[\beta^2\eta + \gamma + b]\{e^{\gamma[T-t]} - 1\} + 2\gamma} \end{aligned}$$

단, $\gamma \doteq \sqrt{b^2 + 2\beta^2\zeta}$ 이다. □

(증명) 어떤 초기시점 $s(\geq 0)$ 에 대해서 조건 $R(s) = x$ 를 만족하는 확률미분방정식 (9.14)의 해를 $\{R^{s,x}(u) \mid u \geq s\}$ 라 하자.

확률미분방정식 (9.14)의 해의 일의성으로부터, 각 $T(\geq t)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$R^{0,x}(T) = R^{t, R^{0,x}(t)}(T) \quad (1)$$

식 (1)과 확률과정 $\{R^{0,x}(t)\}$ 의 Markov성에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& E_t^Q \left(\exp \left(-\eta R^{t, R^{0,x}(t)}(T) - \zeta \int_t^T R^{0,x}(u) du \right) \right) \\
&= E^Q \left(\exp \left(-\eta R^{0,x}(T) - \zeta \int_t^T R^{0,x}(u) du \right) \middle| R^{0,x}(t) \right)
\end{aligned} \tag{2}$$

다음 확률변수를 정의하자.

$$\begin{aligned}
& V(t, R^{0,x}(t)) \\
&\doteq E^Q \left(\exp \left(-\eta R^{0,x}(T) - \zeta \int_t^T R^{0,x}(u) du \right) \middle| R^{0,x}(t) \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

즉, $V(t, R^{0,x}(t))$ 가 우리가 구하고자 하는 Laplace 변환이다.

식 (3)에서 $t = T$ 를 대입하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& V(T, R^{0,x}(T)) \\
&= E^Q(\exp(-\eta R^{0,x}(T)) | R^{0,x}(T)) = \exp(-\eta R^{0,x}(T))
\end{aligned} \tag{4}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& \exp \left(-\zeta \int_0^t R^{0,x}(u) du \right) V(t, R^{0,x}(t)) \\
&= E_t^Q \left(\exp \left(-\zeta \int_0^T R^{0,x}(u) du \right) \exp(-\eta R^{0,x}(T)) \right) \\
&= E_t^Q \left(\exp \left(-\zeta \int_0^T R^{0,x}(u) du \right) V(T, R^{0,x}(T)) \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (4)에 의해서 성립한다. 확률변수 $z(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$z(t) \doteq \exp \left(-\zeta \int_0^t R^{0,x}(u) du \right) \tag{6}$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, $\{z(t)V(t, R^{0,x}(t))\}$ 는 마팅게일이다.

Ito-Doebelin보조정리에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$dz(t) = z(t) [-\zeta R^{0,x}(t)dt] = [-\zeta R^{0,x}(t)z(t)]dt \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
dV(t, R^{0,x}(t)) &= \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial R^{0,x}(t)} dR^{0,x}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta^2 R^{0,x}(t) \frac{\partial V^2(t, R^{0,x}(t))}{[\partial R^{0,x}(t)]^2} dt
\end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)에 확률미분방정식 (9.14)를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
& dV(t, R^{0,x}(t)) \\
&= \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial R^{0,x}(t)} [a - bR^{0,x}(t)] dt \\
&\quad + \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial R^{0,x}(t)} \beta \sqrt{R^{0,x}(t)} dW^Q(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta^2 R^{0,x}(t) \frac{\partial V^2(t, R^{0,x}(t))}{[\partial R^{0,x}(t)]^2} dt
\end{aligned} \tag{9}$$

식 (7), 식 (8) 그리고 Ito-Doebelin보조정리에 의해서, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$d(z(t)V(t, R^{0,x}(t))) = z(t)dV(t, R^{0,x}(t)) + V(t, R^{0,x}(t))dz(t) \tag{10}$$

식 (7)과 식 (9)를 식 (10)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$d(z(t)V(t, R^{0,x}(t))) = \hat{\zeta}_v(t)dt + \hat{\sigma}_v(t)dW^Q(t) \quad (11)$$

여기서 $\hat{\zeta}_v(t)$ 와 $\hat{\sigma}_v(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_v(t) & \doteq \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial t} z(t) + \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial R^{0,x}(t)} [a - bR^{0,x}(t)] z(t) \\ & + \frac{1}{2} \beta^2 R^{0,x}(t) \frac{\partial V^2(t, R^{0,x}(t))}{[\partial R^{0,x}(t)]^2} z(t) \\ & - \zeta R^{0,x}(t) V(t, R^{0,x}(t)) z(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_v(t) \doteq \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial R^{0,x}(t)} \beta \sqrt{R^{0,x}(t)} z(t) \quad (13)$$

앞에서 언급했듯이, $\{z(t)V(t, R^{0,x}(t))\}$ 는 마팅계일이다. 따라서, 식 (11)에서 추계수 $\hat{\zeta}_v(t)$ 는 0이어야만 한다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, R^{0,x}(t))}{\partial R^{0,x}(t)} [a - bR^{0,x}(t)] \\ + \frac{1}{2} \beta^2 R^{0,x}(t) \frac{\partial V^2(t, R^{0,x}(t))}{[\partial R^{0,x}(t)]^2} = \zeta R^{0,x}(t) V(t, R^{0,x}(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

편미분방정식 (14)의 계수들에는 t 가 직접 포함되어 있지 않다. 즉, 이 편미분방정식의 해는 시간동질적(time-homogeneous), 즉 정상적(stationary)이다. 다음 변수를 정의하자.

$$y \doteq R^{0,x}(t) \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)에서 알 수 있듯이, 다음 편미분방정식이 성립한다.

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} [a - by] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, y)}{\partial y^2} \beta^2 y - \zeta y V(t, y) = 0 \quad (16)$$

편미분방정식 (16)의 해가 정상적이므로, 이 해가 다음과 같은 형태라고 할 수 있다.

$$V(t, y) = \exp(-a\phi(\tau) - y\psi(\tau)) \quad (17)$$

여기서 $\tau \doteq T - t$ 이다. 식 (17)을 편미분방정식 (16)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$-a\phi'(\tau) - y\psi'(\tau) = -[a - by]\psi(\tau) - \zeta y + \frac{1}{2} \beta^2 y \psi^2(\tau) \quad (18)$$

식 (18)은 임의의 y 에 대해서 성립하므로, 항등식원리에 의해서 다음 식들이 성립한다.

$$-\psi'(\tau) = \frac{1}{2} \beta^2 \psi^2(\tau) + b\psi(\tau) - \zeta \quad (19)$$

$$\phi'(\tau) = \psi(\tau) \quad (20)$$

말기조건 (4)와 식 (17)에서 알 수 있듯이, 초기조건들은 다음과 같다.

$$\phi(0) = 0, \quad \psi(0) = \eta \quad (21)$$

이 연립미분방정식의 해가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\phi(\tau) = -\frac{2}{\beta^2} \ln \frac{2\gamma \exp\left(\tau \frac{b+\gamma}{2}\right)}{\beta^2 n [e^{\gamma\tau} - 1] + \gamma - b + e^{\gamma\tau} [\gamma + b]} \quad (22)$$

$$\psi(\tau) = \frac{n[\gamma + b] + n e^{\gamma\tau} [\gamma - b] + 2\zeta [e^{\gamma\tau} - 1]}{\beta^2 n [e^{\gamma\tau} - 1] + \gamma - b + e^{\gamma\tau} [\gamma + b]} \quad (23)$$

여기서 $\gamma = \sqrt{b^2 + 2\beta^2 \zeta}$ 이다. 독자들은 식 (22)와 식 (23)이 성립함을 확인해보라. 또한, 다음 식들이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\phi(\tau) = \phi_{n,\zeta}(t, T), \quad \psi(\tau) = \psi_{n,\zeta}(t, T) \quad (24)$$

Q.E.D.

할인채의 시점 t 에서 무재정가치는 다음 위험중립가치평가식을 만족한다.

$$B(t, T) = E_t^Q \left(\exp \left(- \int_t^T R(u) du \right) \right) \quad (9.25)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$B(t, T) = E_t^Q \left(\exp \left(-1 \cdot \int_t^T R(u) du - 0 \cdot R(T) \right) \right) \quad (9.26)$$

식 (9.26)과 명제 9.1에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$B(t, T) = \exp(-A(\tau) - C(\tau)R(t)) \quad (9.27)$$

여기서 다음 식들이 성립한다.

$$A(\tau) \doteq -\frac{2a}{\beta^2} \ln \frac{2\gamma_1 \exp\left(\tau \frac{b+\gamma_1}{2}\right)}{[\gamma_1 + b][e^{\gamma_1\tau} - 1] + 2\gamma_1} \quad (9.28)$$

$$C(\tau) \doteq \frac{2[e^{\gamma_1\tau} - 1]}{[\gamma_1 + b][e^{\gamma_1\tau} - 1] + 2\gamma_1} \quad (9.29)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{b^2 + 2\beta^2} \quad (9.30)$$

식 (9.27)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$B_R(t, T) = -C(\tau)B(t, T) < 0 \quad (9.31)$$

식 (9.31)을 식 (3.31)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - \beta C(\tau)B(t, T)dW^Q(t) \quad (9.32)$$

즉, CIR이자율모형에 의한 할인채가치의 변동성은 음수이다.

(예제 9.3) 예제 9.1의 CIR이자율모형에서 모수들은 다음과 같다.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06\sqrt{R(u)}dW^Q(u) \quad (2)$$

시점 $t = 1$ 에서 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 과 $R(1) = 0.12$ 에

해당하는 할인곡선 $\{B(t, t+\tau) | 0 \leq \tau \leq 24\}$ 을 그린 것이 그림 9.2다. 그림 9.2를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 CIRdc101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: CIRdc101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
deno = inline(' (gam1 + b)*(dum1 -1) + 2*gam1 ', 'b','gam1','dum1');
%
tt = 1; barTT = 25;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
tildeR = 0.07;
a = b*tildeR;
gam1 = sqrt( b^2 + 2*beta^2 );
dum1 = exp( gam1*(TT-tt) );
%
deno1 = deno(b,gam1,dum1);
A = -2*a/beta^2*log( 2*gam1*exp( (TT-tt)*(b + gam1)/2 ) ./deno1 );
C = 2*(dum1 - 1)./deno1;
%
Rt= 0.003; BtT003 = exp( -A - Rt*C);
%
Rt = 0.03; BtT03 = exp( -A - Rt*C);
%
Rt = 0.12; BtT12 = exp( -A - Rt*C);
%
yref = 0:1/100:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,BtT003,'k-.', TT,BtT03,'k',TT,BtT12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
% axis( [ 0, 26, 0, 1 ] )

```

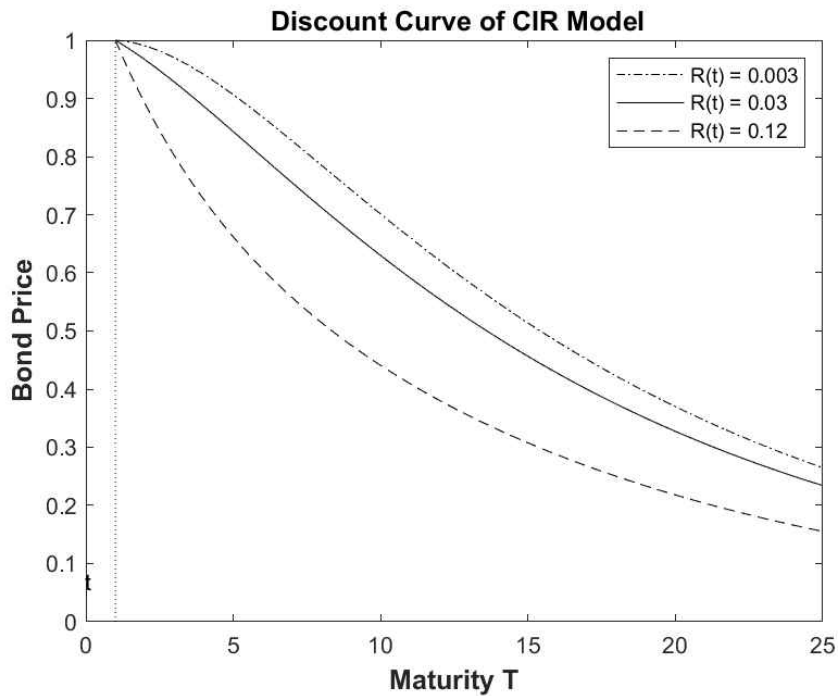


```

ylabel('\Wbf{Bond Price}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Discount Curve of CIR Model','fontsize',12)
text(-0.03,tildeR,'t')
saveas(gcf,'CIRdc101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 4.5.2에서 알 수 있듯이, 현물이자율 $R(t)$ 를 고정시키면, 잔존기간 τ 가 0으로 수렴할 때 $B(t, t+\tau)$ 는 액면금액 1에 수렴한다. 현물이자율 $R(t)$ 가 고정되어있지 않다 하더라도, 잔존기간 τ 가 0으로 수렴하면 $B(t, t+\tau)$ 는 확률 1로 액면금액 1에 수렴한다. ■



[그림 9.2] CIR이자율모형에 의한 할인곡선

9.4. 비중심 확률분포

확률미분방정식 (9.14)를 만족하는 CIR이자율 $R(t)$ 의 확률분포를 조사하기 위해서는 비중심카이제곱분포(noncentral chi-squared distribution)에 대해 알고 있어야 한다. 이 절에서는 비중심 확률분포(noncentral probability distribution)들에 대해서 살펴보자. 이에 대한 자세한 내용은 최병선 (1997, 상권)의 제4.1절과 최병선 (1997, 하권)의 제11.4절을 참조하라.

정규분포가 가정된 모집단에서 표본을 추출해서 가설검정을 할 때, 귀무가설 하에서 검정통계량이 카이제곱분포 또는 F 분포를 갖는다고 하자. 그렇다면 대립가설 하에서 이 검정통계량은 어떤 확률분포를 갖는가? 일반적으로 대립가설 하에서 이 검정통계량은 비중심카이제곱분포 또는 비중심 F 분포를 갖는다. 이 절에서는 이러한 비중심 확률분포들을 다루고자 한다.

확률벡터 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ 가 평균벡터 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$ 이고 분산공분산행렬이 V 인 n 변량정규분포를 갖는다고 하면, 다음과 같이 표기하자.

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, V) \quad (9.33)$$

본서에서는 분산공분산행렬 V 가 양정치행렬이라고 가정하자. 이 n 변량정규분포의 확률밀도함수 $n(\mathbf{y})$ 는 다음과 같다.

$$n(\mathbf{y}) = [2\pi]^{-\frac{n}{2}} [\det(V)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}]' V^{-1}[\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}]\right) \quad (9.34)$$

[정의 9.1] 카이제곱분포

① 만일 확률벡터 \mathbf{y} 가 n 변량 정규분포 $N(\mathbf{0}, I)$ 를 따르면, 이차형식 $\mathbf{y}'\mathbf{y}$ 는 자유도가 n 인 카이제곱분포를 따른다고 하고 다음과 같이 표기하자.

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} \sim \chi_n^2$$

② 만일 확률벡터 \mathbf{y} 가 n 변량 정규분포 $N(\boldsymbol{\mu}, I)$ 를 따르면, 이차형식 $\mathbf{y}'\mathbf{y}$ 는 자유도가 n 이고 비중심모수(noncentrality parameter)가 $\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\mu}$ 인

비중심카이제곱분포를 따른다고 하고 다음과 같이 표기하자.

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} \sim \chi_n^2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}\right)$$

□

정의 9.1의 ②에서 평균벡터 $\boldsymbol{\mu}$ 가 $\mathbf{0}$ 이면 비중심모수가 0이다. 이러한 카이제곱분포를 중심카이제곱분포라고 한다. 즉, 중심카이제곱분포는 카이제곱분포의 다른 이름이다. 문헌에 따라서는 비중심모수를 $\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}/2$ 가 아닌 $\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}$ 를 사용하기도 함을 유의하라.

[정의 9.2] F 분포

① 확률변수들 u 와 v 가 각각 다음과 같은 확률분포를 따르며 서로 독립이라고 하자.

$$u \sim \chi_m^2, \quad v \sim \chi_n^2$$

확률변수 w 를 다음과 같이 정의하자.

$$w \doteq \frac{u/m}{v/n}$$

확률변수 w 는 자유도들이 m 과 n 인 F 분포를 따른다고 하고 다음과 같이 표기하자.

$$w \sim F_{m,n}$$

② 확률변수들 u 와 v 가 각각 다음과 같은 확률분포를 따르며 서로 독립이라고 하자.

$$u \sim \chi_m^2(\lambda), \quad v \sim \chi_n^2$$

확률변수 w 를 다음과 같이 정의하자.

$$w \doteq \frac{u/m}{v/n}$$

이 확률변수 w 는 자유도들이 m 과 n 이고 비중심모수가 λ 인 비중심 F 분포를 따른다고 하고 다음과 같이 표기하자.

$$w \sim F_{m,n}(\lambda)$$

□

정의 9.2의 ②에서 비중심모수 λ 가 0이면, 이 비중심 F 분포를 중심 F 분포라고 한다. 즉, 중심 F 분포는 F 분포의 다른 이름이다.

[명제 9.1] 만일 확률변수 u 가 자유도가 n 이고 비중심모수가 λ 인 비중심카이제곱분포를 따른다고 하면, 확률변수 u 의 적률모함수(moment generating function)는 다음과 같다.

$$M_u(t) \doteq E(e^{tu}) = [1 - 2t]^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda} \exp\left(\frac{\lambda}{1-2t}\right)$$

확률변수 u 의 Laplace변환은 다음과 같다.

$$L_u(t) \doteq E(e^{-tu}) = [1 + 2t]^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda} \exp\left(\frac{\lambda}{1+2t}\right)$$

또한, 확률변수 u 의 확률밀도함수 $f(u)$ 는 다음과 같다.

$$f(u) = 2^{-n/2} \exp\left(-\frac{\lambda+u}{2}\right) u^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{4}\right]^k \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{p}{2} + k\right)} u^k, \quad (u > 0)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$f(u) = 2^{-n/2} \exp\left(-\frac{\lambda+u}{2}\right) u^{\frac{n}{2}-1} \left[\frac{\lambda u}{4}\right]^{-\frac{p}{2} + \frac{1}{2}} I_{\frac{p}{2} - \frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda u}), \quad (u > 0)$$

여기서 $I_q(z)$ 는 q 차 제1종 수정Bessel함수로서 다음과 같다.

$$I_q(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[z/2]^{2k+q}}{k! \Gamma(k+q+1)}$$

□

명제 9.1에서 알 수 있듯이, 비중심카이제곱분포는 감마분포와 Poisson분포의 혼합분포이다.

[명제 9.2] 확률변수 u_1, u_2, \dots, u_k 가 서로 독립이며 다음과 같은 확률분포들을 따른다고 하자.

$$u_i \stackrel{d}{\sim} X_{n_i}^2(\lambda_i), \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

이 확률변수들의 합 $\sum_{i=1}^k u_i$ 는 다음과 같은 확률분포를 따른다.

$$u \stackrel{d}{\sim} \chi_n^2(\lambda)$$

$$\text{단, } n = \sum_{i=1}^k n_i, \lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad \square$$

확률벡터 \mathbf{y} 가 평균벡터가 $\boldsymbol{\mu}$ 이고 분산공분산행렬이 V 인 다변량정규분포를 가질 때, 이차형식 $\mathbf{y}'A\mathbf{y}$ 는 카이제곱분포와 관련된 확률분포를 따른다. 지금부터는 이차형식 $\mathbf{y}'A\mathbf{y}$ 의 확률분포에 대해서 생각해보자.

[명제 9.3] 임의의 양정치행렬 W 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \int \int \cdots \int \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'W^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{g}'\mathbf{x}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= [2\pi]^{-\frac{n}{2}} [\det(W)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{g}'W\mathbf{g}\right) \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ 이다. □

다음 명제를 이용하면 이차형식의 누가적률(cumulant)을 구할 수 있다.

[명제 9.4] 확률벡터 \mathbf{y} 가 다음과 같은 n 변량 정규분포를 따른다고 하자.

$$\mathbf{y} \stackrel{d}{\sim} N(\boldsymbol{\mu}, V)$$

임의의 대칭행렬 A 에 대해서 이차형식 $\mathbf{y}'A\mathbf{y}$ 의 제 r 차누가적률(the r th cumulant) c_r 은 다음과 같다.

$$c_r = 2^{r-1}(r-1)! \{ \text{tr}(AV)^r + r \boldsymbol{\mu}'A[VA]^{r-1}\boldsymbol{\mu} \}$$

확률변수 x 의 누가적률들 $\{c_r\}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\ln E(e^{xt}) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \frac{1}{r!} t^r \quad \square$$

[명제 9.5] 확률벡터 \mathbf{y} 가 다음과 같은 n 변량정규분포를 따른다고 하자.

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, V)$$

확률변수 $\mathbf{y}'A\mathbf{y}$ 는 다음 성질들을 만족한다.

- ① $E(\mathbf{y}'A\mathbf{y}) = \text{tr}(AV) + \boldsymbol{\mu}'A\boldsymbol{\mu}$
- ② $\text{Var}(\mathbf{y}'A\mathbf{y}) = 2\text{tr}(AV)^2 + 4\boldsymbol{\mu}'AVA\boldsymbol{\mu}$
- ③ $\text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'A\mathbf{y}) = 2VA\boldsymbol{\mu}$ □

[명제 9.6] 확률벡터 \mathbf{y} 가 다음과 같은 n 변량 정규분포를 따른다고 하자.

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, I)$$

만일 P 가 $n \times n$ 대칭행렬이라고 하면, 이차형식 $\mathbf{y}'P\mathbf{y}$ 가 비중심카이제곱분포를 따르기 위한 필요충분조건은 $P = P^2$ 이다. 이 경우 자유도는 $\text{rank}(P)$ 이고 비중심모수는 $\boldsymbol{\mu}'P\boldsymbol{\mu}/2$ 이다. □

[명제 9.7] 확률벡터 \mathbf{y} 가 다음과 같은 n 변량 정규분포를 따른다고 하자.

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, V)$$

이차형식 $\mathbf{y}'P\mathbf{y}$ 가 비중심카이제곱분포를 갖기 위한 필요충분조건은 $PV = [PV]^2$ 이다. 이 경우 자유도는 $\text{rank}(P)$ 이고 비중심모수는 $\boldsymbol{\mu}'P\boldsymbol{\mu}/2$ 이다. □

다음 정리들은 이차형식의 독립성에 관한 것들이다.

[명제 9.8] 확률벡터 \mathbf{y} 가 다음과 같은 n 변량정규분포를 따른다고 하자.

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, V)$$

만일 A 가 양정치행렬이면, 확률변수들 $\mathbf{y}'A\mathbf{y}$ 와 $B\mathbf{y}$ 가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $BVA = \mathbf{0}$ 이다. □

9.5. 현물이자율의 확률분포

정리 9.1에서 알 수 있듯이, CIR이자율과정은 각 $\eta (> 0)$ 에 대해서 다음 식을 만족한다.

$$E_t^Q(\exp(-\eta R(T))) = \left[\frac{2be^{b[T-t]}}{[\beta^2\eta + 2b]\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2b} \right]^{\frac{2a}{\beta^2}} \cdot \exp\left(-\frac{2bR(t)\eta}{[\beta^2\eta + 2b]\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2b}\right) \quad (9.35)$$

다음 식이 성립한다.

$$\frac{2be^{b[T-t]}}{[\beta^2\eta + 2b]\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2b} = \frac{1}{1 + 2k_Q\eta} \quad (9.36)$$

여기서 k_Q 는 다음과 같다.

$$k_Q \doteq \frac{\beta^2\{1 - e^{-b[T-t]}\}}{4b} \quad (9.37)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{2bR(t)\eta}{[\beta^2\eta + 2b]\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2b} \\ &= \frac{2bR(t)\eta}{\beta^2\eta\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2be^{b[T-t]}} \\ &= \frac{2bR(t)}{\beta^2\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2\frac{b}{\eta}e^{b[T-t]}} \\ &= \frac{1}{2}c_Q \frac{1}{1 + \frac{1}{2\eta} \frac{4b}{\beta^2\{1 - e^{-b[T-t]}\}}} \end{aligned} \quad (9.38)$$

여기서 c_Q 는 다음과 같다.

$$c_Q \doteq \frac{4bR(t)}{\beta^2\{e^{b[T-t]} - 1\}} \quad (9.39)$$

식 (9.37)을 식 (9.38)에 대입하면, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& \frac{2bR(t)\eta}{[\beta^2\eta + 2b]\{e^{b[T-t]} - 1\} + 2b} \\
&= \frac{1}{2} c_Q \frac{1}{1 + \frac{1}{2\eta k_Q}} = \frac{1}{2} c_Q \frac{2\eta k_Q}{1 + 2\eta k_Q} \\
&= \frac{1}{2} c_Q \left[1 - \frac{1}{1 + 2\eta k_Q} \right]
\end{aligned} \tag{9.40}$$

식 (9.36)과 식 (9.40)을 식 (9.35)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
& E_t^Q(\exp(-\eta R(T))) \\
&= \left[\frac{1}{1 + 2\eta k_Q} \right]^{\frac{2a}{\beta^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} c_Q\right) \exp\left(\frac{c_Q}{2[1 + 2\eta k_Q]}\right)
\end{aligned} \tag{9.41}$$

식 (9.41), 명제 9.1과 정리 9.1에서 알 수 있듯이, 다음 정리가 성립한다.

[정리 9.2] 정리 9.1의 조건이 성립한다고 가정하자. 시점 $t (< T)$ 에서 현물이자율 $R(t)$ 가 주어진 조건 하에서 확률변수 $R(T)/k_Q$ 는 자유도가 $4a/\beta^2$ 이고 비중심모수가 $c_Q/2$ 인 비중심카이제곱분포를 따른다. 여기서 k_Q 와 c_Q 는 각각 다음과 같다.

$$k_Q = \frac{\beta^2\{1 - e^{-b[T-t]}\}}{4b}, \quad c_Q = \frac{4bR(t)}{\beta^2\{e^{b[T-t]} - 1\}} \quad \square$$

9.6. 현물이자율의 비음수성

지금부터는 CIR이자율과정 $\{R(t)\}$ 의 비음수성에 대해서 살펴보자. 결론부터 말한다면, 식 (9.15), 즉 부등식 $2a > \beta^2$ 는 CIR이자율과정이 비음수성을 갖기 위한 필요충분조건이다. 이를 증명하는 것은 상당히 어려운 작업이다. 이에 대해서는 Lamberton & Lapeyre (1996, p. 137)의 연습문제 34와 Cairns (2004, pp. 255-259)를 참조하라.

함수 $s(r) (\in C^2)$ 에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
ds(R(t)) &= \left\{ \frac{\partial s(R(t))}{\partial R(t)} [a - bR(t)] + \frac{1}{2} \beta^2 R(t) \frac{\partial^2 s(R(t))}{[\partial R(t)]^2} \right\} dt \\
&+ \beta \frac{\partial s(R(t))}{\partial R(t)} \sqrt{R(t)} dW^Q(t)
\end{aligned} \tag{9.42}$$

이후, 확률과정 $\{s(R(t)) \mid t \geq 0\}$ 가 국소마팅게일(local martingale)이라고 가정하자. 국소마팅게일에 대해서는 제9.9소절을 참조하라. 확률과정 $\{s(R(t))\}$ 가 국소마팅게일이기 위한 필요충분조건은 다음 식이 성립하는 것이다.

$$\frac{\partial s(R(t))}{\partial R(t)} [a - bR(t)] + \frac{1}{2} \beta^2 R(t) \frac{\partial^2 s(R(t))}{[\partial R(t)]^2} = 0 \tag{9.43}$$

미분방정식 (9.43)의 해는 다음과 같다.

$$s(r) = c_0 + c_1 \int_1^r \exp\left(\frac{2b}{\beta^2} x\right) x^{-2a/\beta^2} dx \quad (9.44)$$

여기서 c_0 와 c_1 는 상수들이다. 일반성을 잃지 않고, 식 $c_0 = 0$ 과 식 $c_1 = 1$ 이 성립한다고 가정하자. 식 (9.43)을 식 (9.42)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$ds(R(t)) = \beta \frac{\partial s(R(t))}{\partial R(t)} \sqrt{R(t)} dW^Q(t) \quad (9.45)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$s(R(t)) = s(R(0)) + \int_0^t \beta s'(R(u)) \sqrt{R(u)} dW^Q(u) \quad (9.46)$$

주어진 $R(0)$ 에 대해서, 다음 식들을 만족하는 상수 ε 과 상수 M 이 존재한다고 하자.

$$0 < \varepsilon < R(0) < M < \infty \quad (9.47)$$

식 (9.44)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$s'(r) = \exp\left(\frac{2b}{\beta^2} r\right) r^{-2a/\beta^2} > 0 \quad (9.48)$$

즉, 함수 $s(r)$ 은 단조증가한다. 각 $r (\in [\varepsilon, M])$ 에 대해서, 다음 식들이 성립한다.

$$s(\varepsilon) \leq s(r) \leq s(M) \quad (9.49)$$

식 (9.48)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\ln s'(r) = \frac{2b}{\beta^2} r - \frac{2a}{\beta^2} \ln r \quad (9.50)$$

식 (9.50)의 양변을 미분하면, 다음 식들을 얻는다.

$$\frac{s''(r)}{s'(r)} = \frac{2b}{\beta^2} - \frac{2a}{\beta^2} \frac{1}{r} = \frac{2b}{r\beta^2} \left[r - \frac{a}{b} \right] \quad (9.51)$$

따라서, 각 $r (\in [\varepsilon, M])$ 에 대해서, 다음 식들이 성립한다.

$$s'(r) \geq \delta \doteq \min\{s'(\varepsilon), s'(M)\} \quad (9.52)$$

다음 정지시점과 집합들을 정의하자.

$$\tau_x \doteq \inf\{t \mid R(t) = x\} \quad (9.53)$$

$$A \doteq \{u \mid u \leq \tau_\varepsilon \wedge \tau_M\} \quad (9.54)$$

$$A(t) \doteq \{u \mid u \leq t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M\} \quad (9.55)$$

식 (9.46)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M)) = s(R(0)) + \int_0^t 1_A(u) \beta s'(R(u)) \sqrt{R(u)} dW^Q(u) \quad (9.56)$$

각 $u (\in A(t))$ 에 대해서, $\beta s'(R(u)) \sqrt{R(u)}$ 는 유계(bounded)이다. 따라서, 식 (9.56)에서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$E_0^Q(s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M))) = s(R(0)) \quad (9.57)$$

즉, 확률과정 $\{s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M)) \mid t \geq 0\}$ 는 확률측도 Q 에 대해 마팅게일이다. 또한, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \text{Var}_0^Q(s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M))) \\ &= E_0^Q\left(\left[\int_0^t 1_A(u) \beta s'(R(u)) \sqrt{R(u)} dW^Q(u)\right]^2\right) \\ &= E_0^Q\left(\int_0^t 1_A(u) [\beta s'(R(u))]^2 R(u) du\right) \\ &= \beta^2 E_0^Q\left(\int_{A(t)} [s'(R(u))]^2 R(u) du\right) \end{aligned} \quad (9.58)$$

여기서 두 번째 등호는 Itô적분의 등거리성에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 식 (9.55)에 의해서 성립한다. 식 (9.52)와 식 (9.58)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \text{Var}_0^Q(s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M))) \geq E_0^Q\left(\int_{A(t)} \beta^2 \delta^2 du\right) \\ &= \beta^2 \delta^2 E_0^Q(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M) \end{aligned} \quad (9.59)$$

식 (9.49)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\text{Var}_0^Q(s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M))) \leq [s(M) - s(\varepsilon)]^2 \quad (9.60)$$

식 (9.59)와 식 (9.60)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\beta^2 \delta^2 E_0^Q(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M) \leq [s(M) - s(\varepsilon)]^2 < \infty, \quad (t \geq 0) \quad (9.61)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$E_0^Q(\tau_\varepsilon \wedge \tau_M) < \infty \quad (9.62)$$

식 (9.62)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$Q(\tau_\varepsilon \wedge \tau_M < \infty) = 1 \quad (9.63)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} s(R(0)) &= E_0^Q(s(R(t \wedge \tau_\varepsilon \wedge \tau_M))) \\ &= s(\varepsilon)Q(\tau_\varepsilon \leq t \wedge \tau_M) + s(M)Q(\tau_M \leq t \wedge \tau_\varepsilon) \\ &\quad + E_0^Q(s(R(t)) | t < \tau_\varepsilon \wedge \tau_M)Q(t < \tau_\varepsilon \wedge \tau_M) \end{aligned} \quad (9.64)$$

또한, 다음 식들이 성립한다.

$$s(\varepsilon) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} E_0^Q(s(R(t)) | t < \tau_\varepsilon \wedge \tau_M) \leq s(M) \quad (9.65)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\tau_\varepsilon \leq t \wedge \tau_M) = 1 \quad (9.66)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t < \tau_\varepsilon \wedge \tau_M) = 0 \quad (9.67)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\tau_M < t \wedge \tau_\varepsilon) = Q(\tau_M < \tau_\varepsilon) \quad (9.68)$$

식 (9.65)-식 (9.68)을 식 (9.64)에 대입하면, 고정된 $M > \varepsilon (> 0)$ 과 각 $R(0) (\in [\varepsilon, M])$ 에 대해서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$s(R(0)) = s(\varepsilon)Q(\tau_\varepsilon \leq \tau_M) + s(M)Q(\tau_M \leq \tau_\varepsilon) \quad (9.69)$$

다음 식들이 성립한다고 가정하자.

$$2a \geq \beta^2, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (9.70)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} -s(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^1 \exp\left(\frac{2b}{\beta^2}x\right)x^{-2a/\beta^2}dx \\ &\geq \int_\varepsilon^1 \exp\left(\frac{2b}{\beta^2}x\right)\frac{1}{x}dx \geq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx \end{aligned} \quad (9.71)$$

식 (9.71)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon) = -\infty \quad (9.72)$$

식 (9.69)와 식 (9.72)에서 알 수 있듯이, 고정된 M 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(\tau_\varepsilon < \tau_M) = 0 \quad (9.73)$$

즉, 각 $R(0) < M (< \infty)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$Q(\tau_0 < \tau_M) = 0 \quad (9.74)$$

다음 집합들을 정의하자.

$$\Omega_\infty \doteq \{\omega \mid \tau_0(\omega) < \infty, \sup_{0 < t < \tau_0(\omega)} R(t)(\omega) < \infty\} \quad (9.75)$$

$$\Omega_e \doteq \{\omega \mid \tau_0(\omega) < \infty, \sup_{0 < t < \tau_0(\omega)} R(t)(\omega) = \infty\} \quad (9.76)$$

$$\Omega_n \doteq \{\omega \mid \tau_0(\omega) < \tau_n(\omega), \sup_{0 < t < \tau_0(\omega)} R(t)(\omega) < \infty\}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9.77)$$

정리 1.2.1의 조건 (C1)에 의해서, 확률미분방정식 (9.14)를 만족하는 CIR이자율과정 $\{R(u)\}$ 가 다음 식을 만족함을 알 수 있다.

$$Q(\Omega_e) = 0 \quad (9.78)$$

또한, 다음 식들이 성립함을 자명하다.

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_\infty, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9.79)$$

각 $\omega (\in \Omega_\infty)$ 에 대해서, 다음 명제를 만족하는 $n_0(\omega)$ 가 존재한다.

$$n \geq n_0(\omega) \Rightarrow \tau_n(\omega) > \tau_0(\omega) \quad (9.80)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\Omega_\infty \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \quad (9.81)$$

식 (9.79)와 식 (9.81)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\Omega_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \quad (9.82)$$

다음 식들이 성립한다.

$$Q(\Omega_n) \leq Q(\{\omega \mid \tau_0(\omega) < \tau_n(\omega)\}) = 0 \quad (9.83)$$

여기서 부등호는 식 (9.77)에 의해서, 그리고 등호는 식 (9.74)에 의해서 성립한다. 다음 식들이 성립한다.

$$Q(\Omega_\infty) = Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Q(\Omega_n) = 0 \quad (9.84)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (9.82)에 의해서, 그리고 세 번째 부등호는 식 (9.83)에 의해서 성립한다. 식 (9.75)와 식 (9.84)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$Q(\{\omega \mid \tau_0(\omega) < \infty\}) = 0 \quad (9.85)$$

다음 식들이 성립한다고 가정하자.

$$0 < 2a \leq \beta^2, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (9.86)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} 0 > s(\varepsilon) &= - \int_{\varepsilon}^1 \exp\left(\frac{2b}{\beta^2} x\right) x^{-2a/\beta^2} dx \\ &\geq - \exp\left(\frac{2b}{\beta^2}\right) \int_{\varepsilon}^1 x^{-2a/\beta^2} dx \end{aligned} \quad (9.87)$$

따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$0 \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon) = - \exp\left(\frac{2b}{\beta^2}\right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-2a/\beta^2} dx > -\infty \quad (9.88)$$

여기서 두 번째 부등호는 식 (9.86)에 의해서 성립한다. 따라서, 다음과 같이 $s(0)$ 를 정의할 수 있다.

$$s(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon) \quad (9.89)$$

다음 식들이 성립한다고 가정하자.

$$\frac{1}{2} \beta^2 \leq 2a < \beta^2, \quad \varepsilon = 0 \quad (9.90)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\text{Var}_0^Q(s(R(t \wedge \tau_0 \wedge \tau_M))) \\ &= \beta^2 E_0^Q\left(\int_{A(t)} [s'(R(u))]^2 R(u) du\right) \\ &= \beta^2 E_0^Q\left(\int_{A(t)} \exp\left(\frac{4b}{\beta^2} R(u)\right) R^{-4a/\beta^2+1}(u) du\right) \end{aligned} \quad (9.91)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (9.58)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (9.48)에 의해서 성립한다. 다음 변수와 함수를 정의하자.

$$d \doteq \frac{4a}{\beta^2}, \quad f(r) \doteq \exp\left(\frac{bd}{a} r\right) r^{1-d} \quad (9.92)$$

식 (9.90)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$1 \leq d < 2 \quad (9.93)$$

우선, 조건 $1 < d < 2$ 이 성립하는 경우를 살펴보자. 식 (9.92)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{bd}{a} - \frac{d-1}{r}, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (9.94)$$

따라서, 함수 $f(r)$ 은 점 $r = \hat{r} \doteq a[d-1]/[bd]$ 에서 다음과 같은 최소값을 갖는다.

$$f(\hat{r}) = e^{d-1} \left\{ \frac{[d-1]a}{bd} \right\}^{1-d} > 0 \quad (9.95)$$

다음으로, 조건 $d = 1$ 이 성립하는 경우를 살펴보자. 식 (9.92)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{bd}{a} > 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (9.96)$$

따라서, 함수 $f(r)$ 은 점 $r = 0$ 에서 다음과 같은 최소값을 갖는다.

$$f(0) = 1 > 0 \quad (9.97)$$

다음 변수를 정의하자.

$$\delta \doteq \min \left\{ e^{d-1} \left\{ \frac{[d-1]a}{bd} \right\}, 1 \right\} \quad (9.98)$$

따라서, 각 $u (\in (0, t \wedge \tau_0 \wedge \tau_M))$ 에 대해서, 다음 식이 성립한다.

$$\beta^2 f(R(u)) \geq \beta^2 \delta \quad (9.99)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{Var}_0^Q(s(R(t \wedge \tau_0 \wedge \tau_M))) &= E_0^Q \left(\int_{A(t)} \beta^2 f(R(u)) du \right) \\ &\geq \beta^2 \delta E_0^Q \left(\int_{A(t)} du \right) = \beta^2 \delta E_0^Q(t \wedge \tau_0 \wedge \tau_M) \end{aligned} \quad (9.100)$$

여기서 등호는 식 (9.91)과 식 (9.92)에 의해서, 그리고 부등호는 식 (9.99)에 의해서 성립한다.

$$\begin{aligned} E_0^Q(t \wedge \tau_0 \wedge \tau_M) &\leq \frac{1}{\beta^2 \delta} \text{Var}_0^Q(s(R(t \wedge \tau_0 \wedge \tau_M))) \\ &\leq \frac{[s(M) - s(0)]^2}{\beta^2 \delta} \end{aligned} \quad (9.101)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (9.100)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (9.49)에 의해서 성립한다. 식 (9.101)이 각 $t (> 0)$ 에 대해서 성립하므로, 다음 식이 성립한다.

$$E_0^Q(\tau_0 \wedge \tau_M) < \infty \quad (9.102)$$

식 (9.102)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$Q(\tau_0 \wedge \tau_M < \infty) = 1 \quad (9.103)$$

식 (9.64)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& s(R(0)) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} s(\varepsilon) Q(\tau_\varepsilon \leq t \wedge \tau_M) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} s(M) Q(\tau_M \leq t \wedge \tau_\varepsilon) \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} E_0^Q(s(R(t)) \mid t < \tau_\varepsilon \wedge \tau_M) Q(t < \tau_\varepsilon \wedge \tau_M)
\end{aligned} \tag{9.104}$$

식 (9.89), 식 (9.103) 그리고 식 (9.104)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$s(R(0)) = s(0) Q(\tau_0 \leq \tau_M) + s(M) Q(\tau_M \leq \tau_0) \tag{9.105}$$

다음 식이 성립함은 명백하다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{2b}{\beta^2} x\right) x^{-2a/\beta^2} = \infty \tag{9.106}$$

따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} s(M) = \int_1^M \exp\left(\frac{2b}{\beta^2} x\right) x^{-2a/\beta^2} dx = \infty \tag{9.107}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (9.44)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (9.106)에 의해서 성립한다. 따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Q(\tau_M < \tau_0) = 0 \tag{9.108}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Q(\tau_0 < \tau_M) = 1 \tag{9.109}$$

다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$0 < 2a < \frac{1}{2} \beta^2 \tag{9.110}$$

다음 확률변수를 정의하자.

$$z(t) \doteq \sqrt{R(t)} \tag{9.111}$$

식 (9.14)과 Ito-Doebelin보조정리에 의해서, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$dz(t) = \left\{ \frac{1}{2} \left[a - \frac{\beta^2}{4} \right] \frac{1}{z(t)} - \frac{b}{2} z(t) \right\} dt + \frac{\beta}{2} dW^Q(t) \tag{9.112}$$

다음 확률미분방정식을 만족하는 Ornstein-Uhlenbeck 확률과정 $\{y(u)\}$ 를 살펴보자.

$$dy(t) = -\frac{b}{2} y(t) dt + \frac{\beta}{2} dW^Q(t) \tag{9.113}$$

또한, 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$y(0) = z(0) \tag{9.114}$$

다음 정지시점들을 정의하자.

$$\tau_0^z \doteq \inf\{t \mid z(t) = 0\} \quad (9.115)$$

$$\tau_0^y \doteq \inf\{t \mid y(t) = 0\} \quad (9.116)$$

각 ω 에 대해서 다음 명제가 성립한다.

$$0 < t < \tau_0^z(\omega) \quad (9.117)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{8z(t)(\omega)}[d-1] - \frac{1}{2}bz(t)(\omega) < -\frac{1}{2}bz(t)(\omega)$$

즉, 각 ω 에 대해서 다음 명제가 성립한다.

$$0 < t < \tau_0^z(\omega) \Rightarrow z(t)(\omega) < y(t)(\omega) \quad (9.118)$$

따라서, 만일 $\tau_0^y(\omega) < \infty$ 이면, 식 $\tau_0^z(\omega) < \infty$ 이 성립한다. 잘 알려져 있듯이, Ornstein-Uhlenbeck 확률과정 $\{y(u)\}$ 는 다음 식을 만족한다.

$$Q(\tau_0^y < \infty) = 1 \quad (9.119)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$Q(\tau_0^z < \infty) = 1 \quad (9.120)$$

즉, 확률측도 Q 하에서 CIR이자율과정 $\{R(u)\}$ 가 0에 도달할 확률은 1이다.

지금까지의 내용을 정리하면, 다음 정리를 얻는다.

[정리 9.3] 정리 9.1의 조건이 성립한다고 가정하자. 주어진 $R(0) (> 0)$ 에 대해서, 다음 명제들이 성립한다.

(a) $2a \geq \beta^2 \Rightarrow Q(\tau_0 = \infty) = 1$

(b) $0 \leq 2a < \beta^2$ and $b \geq 0 \Rightarrow Q(\tau_0 < \infty) = 1$

(c) $0 \leq 2a < \beta^2$ and $b < 0 \Rightarrow Q(\tau_0 < \infty) \in (0, 1)$ □

정리 9.3에서 알 수 있듯이, CIR이자율과정 $\{R(u)\}$ 가 비음과정이기 위해서는 조건 (9.15), 즉 Feller조건 $2a > \beta^2$ 가 만족되어야 한다.

9.7. 선도이자율

선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$F(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} = A'(\tau) + C'(\tau)R(t) \quad (9.121)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.37)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (9.27)에 의해서 성립한다. 유감스럽게도, 도함수들 $A'(\tau)$ 와 $C'(\tau)$ 가 매우 복잡할 것 같다. 이들을 구하기 위해서, 다음 예제를 살펴보자.

(예제 9.4) 다음은 도함수들 $A'(\tau)$ 와 $C'(\tau)$ 를 구하기 위해서, MATLAB을 실행한 결과이다.

```

A1 = log(2*gamma)+1/2*tau*(b+gamma)
A2 = log( (gamma + b)*( exp(gamma*tau) - 1 ) + 2*gamma )
AA = - 2*a/beta^2*(A1 - A2)
AA = -2*a/beta^2*(log(2*gamma)+1/2*tau*(b+gamma)
        -log((b+gamma)*(exp(gamma*tau)-1)+2*gamma))
dum1 = exp(gamma*tau)-1
CC = 2*dum1/( (gamma+b )*dum1 + 2*gamma )
CC =
(2*exp(gamma*tau)-2)/((b+gamma)*(exp(gamma*tau)-1)+2*gamma)
difA = diff(AA,tau)
difA =
-2*a/beta^2*(1/2*b+1/2*gamma-(b+gamma)*gamma*exp(gamma*tau)
        /(b+gamma)*(exp(gamma*tau)-1)+2*gamma))
simplify(difA)
ans =
-a*(b^2*exp(gamma*tau)-b^2-gamma^2*exp(gamma*tau)+gamma^2)/beta^2
/(b*exp(gamma*tau)-b+gamma*exp(gamma*tau)+gamma)

```

```

simple(difA)

-a*(b-gamma)*(b+gamma)*(exp(gamma*tau)-1)/beta^2/(b*exp(gamma*tau)

-b+gamma*exp(gamma*tau)+gamma)

difC = diff(CC,tau)

difC =

2*gamma*exp(gamma*tau)/((b+gamma)*(exp(gamma*tau)-1)+2*gamma)

-(2*exp(gamma*tau)-2)/((b+gamma)*(exp(gamma*tau)-1)+2*gamma)^2

*(b+gamma)*gamma*exp(gamma*tau)

simplify(difC)

ans =

4*gamma^2*exp(gamma*tau)/(b*exp(gamma*tau)-b+gamma*exp(gamma*tau)

+gamma)^2

```

이 MATLAB 프로그램을 수행한 결과에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$A'(\tau) = \frac{-a[b - \gamma_1][b + \gamma_1][e^{\gamma_1\tau} - 1]}{\beta^2\{b[e^{\gamma_1\tau} - 1] + \gamma_1[e^{\gamma_1\tau} + 1]\}} \quad (1)$$

$$C'(\tau) = \frac{4\gamma_1^2 e^{\gamma_1\tau}}{\{b[e^{\gamma_1\tau} - 1] + \gamma_1[e^{\gamma_1\tau} + 1]\}^2} \quad (2)$$



식 (9.121)과 예제 9.2에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$F(t, T) = \frac{-a[b - \gamma_1][b + \gamma_1][e^{\gamma_1\tau} - 1]}{\beta^2\{b[e^{\gamma_1\tau} - 1] + \gamma_1[e^{\gamma_1\tau} + 1]\}} + \frac{4\gamma_1^2 e^{\gamma_1\tau}}{\{b[e^{\gamma_1\tau} - 1] + \gamma_1[e^{\gamma_1\tau} + 1]\}^2} R(t) \quad (9.122)$$

(예제 9.5) 예제 9.1의 CIR이자율모형에서 모수들은 다음과 같다.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06\sqrt{R(u)}dW^Q(u) \quad (2)$$

시점 $t = 1$ 의 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 과 $R(1) = 0.12$ 에 해당하는 선도이자율곡선을 그린 것이 그림 9.3이다. 그림 9.3을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 CIRforward101.m을 실행하라.

```
% -----
% Filename: CIRforward101.m
% Programmed by CBS
%-----

clear all, close all
% Define functions
%
tt = 1; barTT = 25;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
TT1 = linspace(0,barTT,1000);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
tilR = 0.07;
a = b*tilR;
gam1 = sqrt( b^2 + 2*beta^2 );
dum1 = exp( gam1*(TT-tt) );
%
dumA1 = -a*(b - gam1)*(b + gam1)*( dum1 - 1);
dumA2 = beta^2*( b*(dum1-1) + gam1*(dum1 + 1) );
dA = dumA1./dumA2;
dumC1 = 4*gam1^2*dum1;
dumC2 = ( b*(dum1-1) + gam1*(dum1 + 1) ).^2;
dC = dumC1./dumC2;
%
Rt= 0.003; ForwardT003 = dA + dC*Rt;
Rt = 0.03; ForwardT03 = dA + dC*Rt;
Rt = 0.12; ForwardT12 = dA + dC*Rt;
%
```

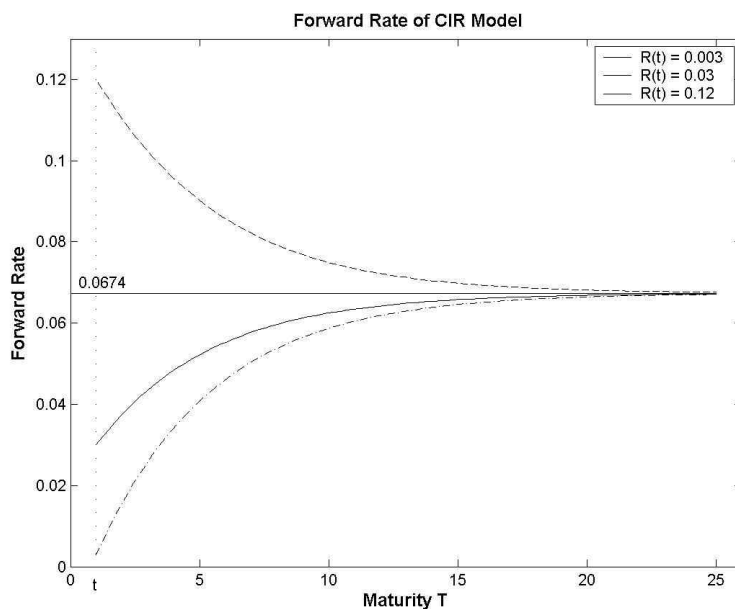
```

yref = 0:1/100:0.13;
xref = 1.0*ones(size(yref));
yref2 = -a*(b-gam1)/beta^2*ones(size(TT1));
% 2-D Plot
plot(TT1,yref2,'k',TT,ForwardT003,'k-.', TT,ForwardT03,'k', ...
      TT,ForwardT12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 0.13 ] )
ylabel('\Wbf{Forward Rate}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Forward Rate of CIR Model','fontsize',12)
text(1,-0.002,'t')
text(0.5,0.06724+0.004,'0.0674')
saveas(gcf,'CIRforward101.png')
% End of Program
%-----

```

그림 9.4에서 선도이자율 $F(t, T)$ 의 극한값이 다음과 같음을 확인할 수 있다.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(t, T) = -\frac{a[b - \gamma_1]}{\beta^2} = 0.0674 \quad (3)$$



[그림 9.3] CIR이자율모형의 선도이자율곡선

9.8. 일드

이 소절에서는 CIR이자율모형의 일드곡선에 대해 살펴보자. 만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 일드는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{\tau} \ln B(t, T) = \frac{1}{\tau} [A(\tau) + C(\tau)R(t)] \\ &= \frac{1}{T-t} [a\phi_{0,1}(\tau) + R(t)\psi_{0,1}(\tau)] \end{aligned} \quad (9.123)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.43)에 의해서, 두 번째 등호는 식 (9.27)에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 명제 9.1에 의해서 성립한다. 식 (9.121)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이다. 따라서, Vasicek이자율모형은 아핀일드모형(affine-yield model)이다.

(예제 9.6) 예제 9.1의 CIR이자율모형에서 모수들은 다음과 같다.

$$R = 0.07, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (1)$$

즉, 다음 확률미분방정식이 성립한다고 하자.

$$dR(u) = 0.21[0.07 - R(u)]du + 0.06\sqrt{R(u)}dW^Q(u) \quad (2)$$

시점 $t = 1$ 의 현물이자율이 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 과 $R(1) = 0.12$ 에 해당하는 일드곡선을 그린 것이 그림 9.4이다. 그림 9.4를 그리기 위해서 **다음** MATLAB프로그램 CIRyield.m을 실행하라.

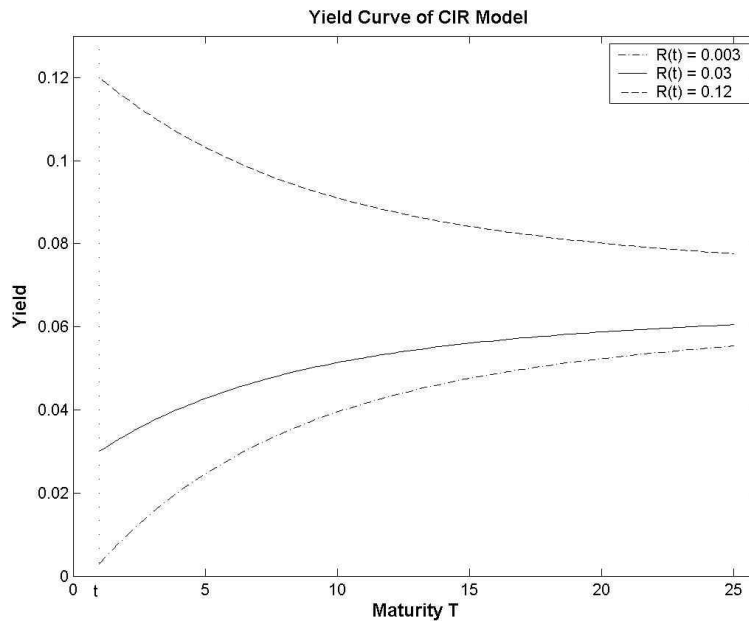
```
% -----
% Filename: CIRyield101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
deno = inline(' (gam1 + b)*(dum1 -1) + 2*gam1 ', 'b','gam1','dum1');
%
tt = 1; barTT = 25;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
tilR = 0.07;
a = b*tilR;
gam1 = sqrt( b^2 + 2*beta^2 );
```

```

dum1 = exp( gam1*(TT-tt) );
%
deno1 = deno(b,gam1,dum1);
A = -2*a/beta^2*log( 2*gam1*exp( (TT-tt)*(b + gam1)/2 ) ./deno1 );
C = 2*(dum1 - 1)./deno1;
%
Rt= 0.003; yield003 = (A + Rt*C)/(TT-tt);
%
Rt = 0.03; yield03 = (A + Rt*C)/(TT-tt);
%
Rt = 0.12; yield12 = (A + Rt*C)/(TT-tt);
%
yref = 0:1/100:0.13;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,yield003,'k-', TT,yield03,'k',TT,yield12,'k--',xref,yref,'k')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 0.13] )
ylabel('\Wbf{Yield}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Yield Curve of CIR Model','fontsize',12)
text(1,-0.002,'t')
saveas(gcf,'CIRyield101.png')
% End of Program
%-----

```

일반적으로, 시점 $t = 1$ 의 현물이자율 $R(1)$ 의 값이 작으면, 예를 들어 $R(1) = 0.003$ 이거나 $R(1) = 0.03$ 인 경우에는 CIR이자율모형에 의한 일드는 단조증가한다. 그러나, 현물이자율 $R(1)$ 이 크면, 예를 들어 $R(1) = 0.12$ 인 경우에는 일드는 단조감소한다. ■



[그림 9.4] CIR이자율모형에 의한 일드곡선

9.9. 국소마팅계일

이산시간형 국소마팅계일(local martingale)에 대해서는 최병선 (2013)의 제7장에서 자세히 다루었다. 여기서는 증명없이 연속시간형 국소마팅계일에 대해서 간단히 살펴보자. 국소마팅계일에 대한 자세한 내용은 Karatzas & Shreve (1991)를 참조하라.

이 절에서는 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 와 증대정보계 $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ 가 주어졌다고 가정하고, 시점집합은 $[0, \infty)$ 이라고 가정하자. 우선, 마팅계일의 정의를 복습해보자.

[정의 9.3] 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 와 증대정보계 $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ 에 대해서, 확률과정 $\{x(t) | t \geq 0\}$ 가 다음 조건들을 만족하면, 이 $\{x(t)\}$ 를 마팅계일이라 한다.

(a) 각 $t(\geq 0)$ 에 대해서, 확률변수 $x(t)$ 는 \mathcal{F}_t -가측이다.

(b) 각 $t(\geq 0)$ 에 대해서, 식 $E(|x(t)|) < \infty$ 이 성립한다.

(c) 각 $s > t(\geq 0)$ 에 대해서, 식 $E(x(s) | \mathcal{F}_t) = x(t)$ 이 성립한다. □

일반화마팅게일(generalized martingale)의 정의는 다음과 같다.

[정의 9.4] 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 와 증대정보계 $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ 에 대해서, 확률과정 $\{x(t) | t \geq 0\}$ 가 다음 조건들을 만족하면, 이 $\{x(t)\}$ 를 마팅게일이라 한다.

- (a) 각 $t(\geq 0)$ 에 대해서, 확률변수 $x(t)$ 는 \mathcal{F}_t -가측이다.
- (b) 식 $E(|x(0)|) < \infty$ 이 성립한다.
- (c) 각 $s > t(\geq 0)$ 에 대해서, 식 $E(|x(s)| | \mathcal{F}_t) < \infty$ 이 성립한다.
- (d) 각 $s > t(\geq 0)$ 에 대해서, 식 $E(x(s) | \mathcal{F}_t) = x(t)$ 이 성립한다. □

국소마팅게일의 정의는 다음과 같다.

[정의 9.5] 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 와 증대정보계 $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ 에 대해서, 확률과정 $\{x(t) | t \geq 0\}$ 가 다음 조건들을 만족하면, 이 $\{x(t)\}$ 를 국소마팅게일이라 한다.

- (a) 확률변수 $x(0)$ 는 \mathcal{F}_0 -가측이다.
- (b) 식 $\tau_n \uparrow \infty$ 을 만족하고 또한 확률과정 $\{x(t \wedge \tau_n) - x(0) | t \geq 0\}$ 이 마팅게일되는 정지시점열(stopping-time sequence) $\{\tau_n | n = 1, 2, \dots\}$ 이 존재한다. □

정의 9.5를 직관적으로 이해하기 위해서, 그림 9.5를 참조하라. 그림 9.5를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 LocalMartingale1101.m을 실행하라.

```

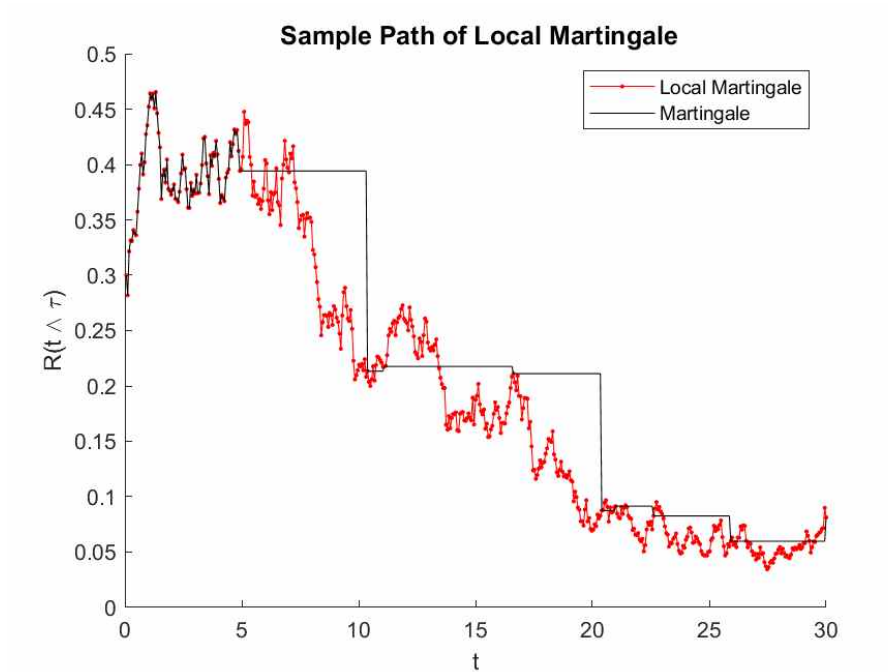
% -----
% Filename: LocalMartingale101.m
% Sample path of Local Martingale
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
rng('default')
% Mt = NO of subintervals of [t,T];
% N = NO of generating sample paths
clear, clf
N = 1; tau = 30; Mt = 500;
sqrtau = sqrt(tau);
Deltat = tau/Mt;
sqDeltat = sqrt(Deltat);
ttTT = Deltat:Deltat:tau;
beta = 0.1005;
```



```

Rt = 0.3;
% stoping time
NST = 10; % number of stopping times
stoptime = 6*rand(NST,1);
sumstop = cumsum(stoptime)
% make sample pathes
hold on
Rmat = Rt*ones(N,Mt);
for i=1:N
    for tj=1:Mt-1
        zz = randn(1,1);
        Rmat(i,tj+1) = Rmat(i,tj) ...
            + beta*sqrt( abs(Rmat(i,tj)) )*sqDeltat*zz;
    end
    Rvec = Rmat(i,:);
    localM = Rvec;
    dumtau = ceil(sumstop/Deltat);
    dumsize = size(dumtau);
    dumtau2 = [];
    for dum0 = 1:dumsize
        if dumtau(dum0) < Mt
            dumtau2 = [dumtau2 , dumtau(dum0) ];
        end
    end
    dumtau2 = [dumtau2, Mt ]
    for dumNST = 1:( size(dumtau2) - 1)
        for dum1 = dumtau2(dumNST):(dumtau2(dumNST + 1) - 1)
            localM(dum1) = Rvec(dumtau2(dumNST));
        end
    end
    plot( ttTT, Rvec, 'r.-', ttTT, localM,'k')
end
legend('Local Martingale','Martingale','location','NE')
title('Wbf Sample Path of Local Martingale','fontsize',12)
ylabel('R(t \wedge \tau)'); xlabel('t')
saveas(gcf, 'LocalMartingale101.png')
% end of program
% -----

```



[그림 9.5] 국소마팅계일

이산시간형 확률과정 $\{x_n | n = 1, 2, \dots\}$ 이 국소마팅계일이기 위한 필요충분조건은 $\{x_n\}$ 이 일반화마팅계일이다. 또한, $\{x_n\}$ 이 일반화마팅계일이기 위한 필요충분조건은 $\{x_n\}$ 이 마팅계일변환이다. 어떤 확률과정이 마팅계일이면, 이 확률과정은 국소마팅계일이다. 그러나, 그 역은 성립하지 않는다. 국소마팅계일이지만 마팅계일이 아닌 확률과정을 협의의 국소마팅계일이라 부르기도 한다.

(예제 9.7) 확률과정 $\{\mathbf{W}(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ W_3(t)]^T | t \geq 0\}$ 는 3변량 Brown운동이다. 다음 확률변수를 정의하자.

$$R(t) \doteq \sqrt{W_1^2(t) + W_2^2(t) + W_3^2(t)} \quad (1)$$

또한, 초기시점 $t = 0$ 에서 $R(0) = 1$ 이라고 가정하자. 확률과정 $\{R(t) | t \geq 0\}$ 를 3차원 Bessel과정이라 한다.

이 3차원 Bessel과정 $\{R(t) | t \geq 0\}$ 는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$dR(t) = \frac{1}{R(t)} dt + dB(t) \quad (2)$$

여기서 $\{B(t) | t \geq 0\}$ 는 1차원 Brown운동이다. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{R(t)}\right) &= -\frac{1}{R^2(t)} dR(t) + \frac{1}{R^3(t)} dt \\ &= -\frac{1}{R^2(t)} \left[\frac{1}{R(t)} dt + dB(t) \right] + \frac{1}{R^3(t)} dt \end{aligned} \quad (3)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$d\left(\frac{1}{R(t)}\right) = -\frac{1}{R^2(t)} dB(t) \quad (4)$$

식 (4)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{R(t)} = 1 - \int_0^t \frac{1}{R^2(u)} dB(u) \quad (5)$$

확률과정 $\left\{ \int_0^t \frac{1}{R^2(u)} dB(u) \mid t \geq 0 \right\}$ 은 국소마팅계일임이 알려져 있다. 이에 대한 자세한 내용은 Revuz & Yor (1991)을 참조하라. 다음 확률변수를 정의하자.

$$x(t) \doteq \frac{1}{R(t)} \quad (6)$$

또한, 초기시점에서 식 $x(0) = 1$ 이 성립한다고 하자. 식 (5)에서 알 수 있듯이, 확률과정 $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ 는 국소마팅계일이다.

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} R^2(t) &= \sum_{i=1}^3 W_i^2(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \{ W_i^2(0) + 2W_i(0)[W_i(t) - W_i(0)] + [W_i(t) - W_i(0)]^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^3 \{ W_i^2(0) + [W_i(t) - W_i(0)]^2 \} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^3 [W_i(t) - W_i(0)]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (1)에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 확률변수들 $W_i(0)$ 와 $[W_i(t) - W_i(0)]$ 의 독립성에 의해서 성립한다. 식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$R^2(t) \stackrel{d}{\sim} 1 + tX_3^2 \quad (8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$E(x(t)) = E\left(\frac{1}{R(t)}\right) = E\left(\frac{1}{\sqrt{1 + tX_3^2}}\right) \quad (9)$$

식 (9)에서 알 수 있듯이, $E(x(t))$ 는 t 의 상수함수가 아니다. 따라서, 확률과정 $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ 는 마팅계일이 아니다. ■

국소마팅계일이 마팅계일이 되기 위한 충분조건에 대해서는 Elworthy & Li & Yor (1997)을 참조하라. 국소마팅계일이 마팅계일이 되기 위한 충분조건으로서 대표적인 것은 다음과 같다.

[정리 9.4] 국소마팅계일 $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ 가 각 $t(\geq 0)$ 에 대해서 다음 식을 만족하면, $\{x(t)\}$ 는 마팅계일이다.

$$E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|\right) < \infty$$

□

최근 재무학연구에서도 국소마팅계일과 마팅계일의 차이에 대한 중요성이 인식되고 있다. 특히, Girsanov측도변환을 한 경우의 밀도는 어떤 국소마팅계일의 Doléans-Dade지수가 되어 다시 국소마팅계일이 되지만, 그것이 마팅계일이 되는지는 여부는 항상 문제가 된다. 그러나, 이러한 문제는 고급확률해석론에서나 다룰 수 있는 것으로서 본서의 수준을 넘는다. 그러나, 조만간 이러한 문제를 재무학에 응용하는 상황이 올 것이라고 생각한다. 비록 초보적인 수준이지만, 재무학의 영역에서 이러한 문제를 다룬 문헌으로는 Shiryaev (1999)가 있다.

제10절 Ho-Lee이자율모형

10.1. 모형

원래 Ho-Lee이자율모형 (1986)은 할인채가치의 기간구조가 이항분포를 따른다고 가정하는 이산시간형 모형이다. 이 이산형 모형은 취급이 간단하다. 그러나, 초기의 기간구조의 형상이 계속 보존되거나 음수인 이자율이 발생하는 등 여러 문제점들을 지니고 있다. Ho-Lee이자율모형을 연속시간형으로 전환하면, 시점에 의존하는 추세계수를 갖는 확장된 Merton이자율모형과 동일하다. 또한, 요인의 개수가 1이고 확산계수를 일정하다고 가정 하에서 HJM모형과 일치한다. 이 절에서는 연속시간형 Ho-Lee이자율모형을 다루기로 하자.

Ho & Lee (1986)는 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 가 다음 확률미분방정식을 만족하는 현물이자율모형을 제안하였다.

$$dR(u) = a(u)du + \beta dW^Q(u) \quad (10.1)$$

여기서 $a(u)(> 0)$ 는 결정적 함수이고, $\beta(> 0)$ 는 상수이며, $\{W^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. Ho-Lee이자율모형은 제8절에서 다룬 Hull-White이자율모형에서 $b(u)$ 가 0이고 또한 $\beta(u)$ 가 상수 β 인 특수한 경우이다. 따라서, Ho-Lee이자율모형은 Hull-White이자율모형의 단점들을 모두 포함하고 있다. 제8절의 결과로부터 Ho-Lee이자율모형의 성질을 알 수 있다.

확률미분방정식 (10.1)을 풀면, 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 가 다음 식을 만족함을 알 수 있다.

$$R(t) = R(0) + \int_0^t a(u)du + \beta W^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (10.2)$$

(예제 10.1) 다음 확률미분방정식을 만족하는 Ho-Lee이자율모형을 살펴보자.

$$dR(u) = [0.015 + 0.005e^{-0.21u}]du + 0.06dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다.

그림 10.1에 현물이자율과정 $\{R(u)\}$ 의 표본경로들이 그려져 있다. 그림 10.1을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HLspot101.m을 실행하라.

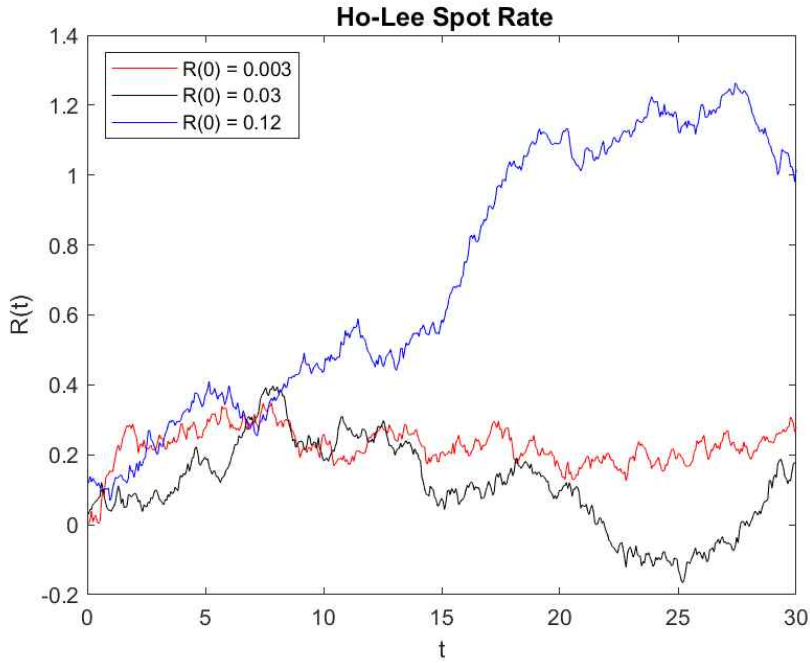
```
% -----  
% Filename: HLSpot101.m  
% Programmed by CBS  
%-----
```

```

clear all, close all
rng('default')
% Mt = NO of subintrvals of [t,T];
tau = 30; Mt = 500;
sqttau = sqrt(tau);
Deltat = tau/Mt;
sqDeltat = sqrt(Deltat);
ttTT = Deltat:Deltat:tau;
% make sample pathes
b = 0.21;
alpha= inline('0.015+0.005*exp(-0.21*t)','t');
beta = 0.06;
Rvec003 = 0.003*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec003(tj+1) = Rvec003(tj) ...
        + alpha(tj)*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec03 = 0.03*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec03(tj+1) = Rvec03(tj) ...
        + alpha(tj)*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
Rvec12 = 0.12*ones(1,Mt);
for tj=1:Mt-1
    zz = randn(1,1);
    Rvec12(tj+1) = Rvec12(tj) ...
        + alpha(tj)*Deltat + beta*sqDeltat*zz;
end
plot( ttTT, Rvec003,'r',ttTT, Rvec03,'k',ttTT, Rvec12,'b')
legend('R(0) = 0.003','R(0) = 0.03','R(0) = 0.12','location','NW')
title('Wbf Ho-Lee Spot Rate','fontsize', 12)
ylabel('R(t)'); xlabel('t')
saveas(gcf,'HLspot101.png')
% end of program
% -----

```

이 표본경로들의 초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. 그림 10.1에서 알 수 있듯이, Ho-Lee이자율모형에 의한 현물이자율은 음(-)이 될 수 있다. 이러한 점에서 Ho-Lee이자율모형은 좋은 모형이라 할 수 없다. ■



[그림 10.1] Ho-Lee이자율과정의 표본경로

10.2. 할인채가치

시점 t 에서 정보집합이 주어진 조건 하에서 $I(t, T) = \int_t^T R(u) du$ 는 정규분포를 따른다. 또한, $I(t, T)$ 의 평균 $m(t, T)$ 와 분산 $v(t, T)$ 는 각각 다음과 같다.

$$m(t, T) = \tau R(t) + \int_t^T \int_t^u \alpha(x) dx du \quad (10.3)$$

$$v(t, T) = \int_t^T \beta^2 [t-x]^2 dx = \frac{\beta^2}{3} \tau^3 \doteq v(\tau) \quad (10.4)$$

여기서 $\tau = T - t$ 이다. 따라서, Ho-Lee이자율모형 하에서 할인채가치 $B(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
B(t, T) &= E_t^Q(\exp(-I(t, T))) \\
&= \exp\left(-m(t, T) + \frac{1}{2} v(t, T)\right) \\
&= \exp\left(-\tau R(t) - \int_t^T \int_t^u a(z) dz du + \frac{\beta^2}{6} \tau^3\right)
\end{aligned} \tag{10.5}$$

다음 확률변수를 정의하자.

$$A(t, T) \doteq \int_t^T \int_t^u a(z) dz du - \frac{1}{2} v(s, t) \tag{10.6}$$

다음 식이 성립한다.

$$A(t, T) = \int_t^T \int_t^u a(z) dz du - \frac{\beta^2}{6} \tau^3 \tag{10.7}$$

식 (10.5)와 식 (10.7)에서 알 수 있듯이, 할인채가치가 다음과 같다.

$$B(t, T) = \exp(-A(t, T) - \tau R(t)) \tag{10.8}$$

식 (10.8)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$B_R(t, T) = -\tau < 0 \tag{10.9}$$

식 (10.9)를 식 (3.31)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - \beta\tau dW^Q(t) \tag{10.10}$$

즉, CIR이자율모형에 의한 할인채가치의 변동성은 $-\beta\tau (< 0)$ 이다.

(예제 10.2) 예제 10.1에서 다룬 Ho-Lee이자율모형을 살펴보자. 즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = [0.015 + 0.005e^{-0.21u}]du + 0.06 dW^Q(u) \tag{1}$$

여기서 $\{W^Q(u) \mid u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 다음 식들이 성립한다.

$$a(u) = 0.015 + 0.005e^{-bu}, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \tag{2}$$

$$\int_t^u a(z) dz = 0.015[u - t] + 0.005e^{-bt} \frac{1 - e^{-b[u-t]}}{b} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^T \int_t^u a(z) dz du &= 0.0075[T - t]^2 + \frac{0.005}{b} e^{-bt}[T - t] \\
&\quad + \frac{0.005}{b^2}[e^{-bT} - e^{-bt}]
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= 0.0075[T - t]^2 + \frac{0.005}{b} e^{-bt}[T - t] \\
&\quad + \frac{0.005}{b^2}[e^{-bT} - e^{-bt}] - \frac{1}{6} \beta^3 [T - t]^3
\end{aligned} \tag{5}$$

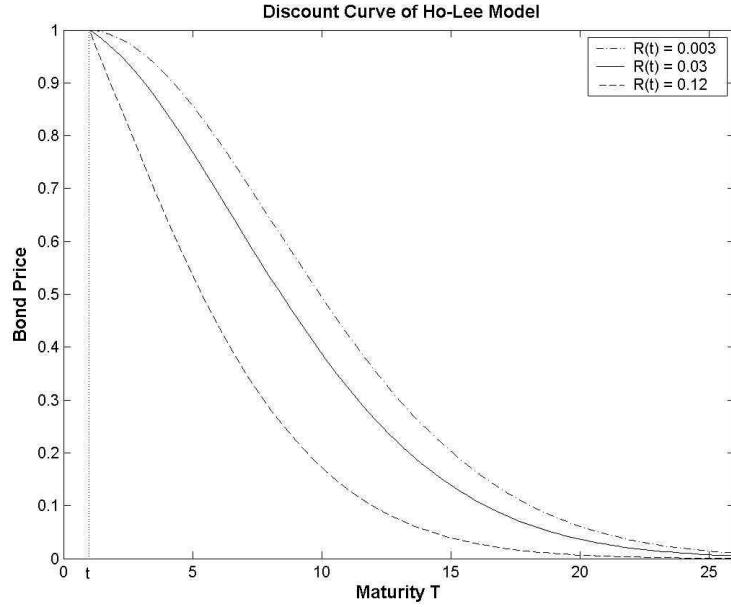
그림 10.2에 Ho-Lee이자율모형에 의한 할인곡선이 그려져 있다. 그림 10.2를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HLdc101.m을 실행하라.


```

% -----
% Filename: HLdc101.m
% Programmed by CBS
clear all, close all
% Define functions
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
%
A = 0.0075*tau.^2 + 0.005/b*exp(-b*tt)*tau ...
    + 0.005/b^2*( exp(-b*TT) - exp(-b*tt) ) - 1/6*beta^3*tau.^3;
%
Rt= 0.003;
%
BtT003 = exp( -A - Rt*tau);
%
Rt = 0.03;
BtT03 = exp( -A - Rt*tau);
%%
Rt = 0.12;
BtT12 = exp( -A - Rt*tau);
%
yref = 0:1/100:1;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,BtT003,'k-.', TT,BtT03,'k',TT,BtT12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, 0, 1 ] )
ylabel('\Wbf{Bond Price}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf{Discount Curve of Ho-Lee Model}','fontsize',12)
text(1,-0.02,'t')
saveas(gcf,'CIRdc101.png')
% End of Program
%-----

```

이 표본경로들의 초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 10.2] Ho-Lee이자율과정의 할인곡선

Fubini정리에 의해서, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_t^T \int_t^u \alpha(z) dz du = \int_t^T \int_z^T \alpha(z) du dz = \int_t^T [T-z] \alpha(z) dz \quad (10.11)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_t^T \int_t^u \alpha(z) dz du \right] = -\tau \alpha(t) \quad (10.12)$$

식 (10.7)과 식 (10.12)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = -\tau \alpha(t) + \frac{1}{2} \beta^2 \tau^2 \quad (10.13)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= B(t, T) \left\{ \left[-\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} + R(t) \right] dt - \tau dR(t) + \frac{1}{2} \beta^2 \tau^2 dt \right\} \\ &= B(t, T) \left\{ \left[\tau \alpha(t) - \frac{1}{2} \beta^2 \tau^2 + R(t) \right] dt + \frac{1}{2} \beta^2 \tau^2 dt \right\} \\ &\quad - B(t, T) \tau [\alpha(t) dt + \beta dW^Q(t)] \\ &= B(t, T) [R(t) dt - \beta \tau dW^Q(t)] \end{aligned} \quad (10.14)$$

여기서 첫 번째 등호는 Ito-Doebelin보조정리에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (10.1)과 식 (10.13)에 의해서 성립한다. 따라서, 만기시점 T 인 할인채의 시점 t 에서 무재정가치 $B(t, T)$ 는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = R(t)dt - \tau\beta dW^Q(t) \quad (10.15)$$

10.3. 선도이자율

선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$F(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} = \frac{\partial A(t, T)}{\partial T} + R(t) \quad (10.16)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.37)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (10.8)에 의해서 성립한다. 식 (10.7)과 식 (10.16)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$F(t, T) = \int_t^T \alpha(z)dz - \frac{\beta^2}{2} \tau^2 + R(t) \quad (10.17)$$

식 (10.17)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 현물이자율 $R(t)$ 를 $[R(t) + \Delta]$ 로 이동하면, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 $[F(t, T) + \Delta]$ 로 이동한다. 이는 선도이자율의 좋은 성질이라 할 수 없다.

(예제 10.3) 예제 10.1에서 다룬 Ho-Lee이자율모형을 살펴보자. 즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = [0.015 + 0.005e^{-0.21u}]du + 0.06 dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) \mid u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 다음 식들이 성립한다.

$$\alpha(u) = 0.015 + 0.005e^{-bu}, \quad b = 0.21, \quad \beta = 0.06 \quad (2)$$

$$\int_t^T \alpha(z)dz = 0.015\tau + 0.005e^{-bt} \frac{1 - e^{-b\tau}}{b} \quad (3)$$

식 (10.15)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$F(t, T) = 0.015\tau + 0.005e^{-bt} \frac{1 - e^{-b\tau}}{b} - \frac{\beta^2}{2} \tau^2 + R(t) \quad (4)$$

그림 10.3에 Hull-White이자율모형에 의한 선도이자율곡선이 그려져 있다. 그림 10.3을 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 HWforward101.m을 실행하라.

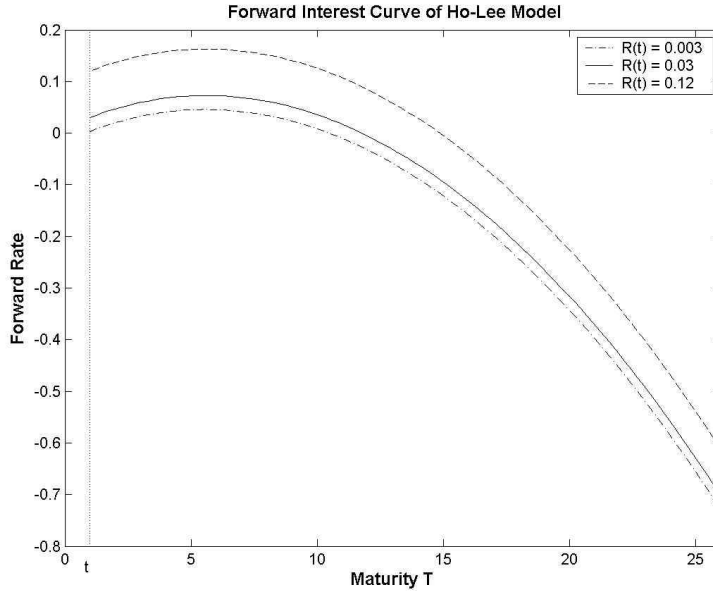
```
% -----
% Filename: HLforward101.m
% Programmed by CBS
```

```

%-----
clear all, close all
% Define functions
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
%
dum = 0.015*tau + 0.005*exp(-b*tt)*( 1- exp(-b*tau) )/b - beta^2/2*tau.^2 ;
%
Rt= 0.003; For003 = dum + Rt;
Rt= 0.03; For03 = dum + Rt;
Rt= 0.12; For12 = dum + Rt;
%
yref = -0.8:1/100:0.2;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,For003,'k-.', TT,For03,'k',TT,For12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, -0.8, 0.2 ] )
ylabel('\bf{Forward Rate}','fontsize',12)
xlabel('\bf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\bf Forward Interest Curve of Ho-Lee Model','fontsize',12)
text(1,-0.82,'t')
saveas(gcf,'HLforward101.png')
% End of Program
%-----

```

초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 10.3] Ho-Lee이자율과정의 선도이자율

식 (10.2)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 E_t^Q(R(T)) &= R(t) + \int_t^T \alpha(z) dz + \beta E(W^Q(T) - W^Q(t)) \\
 &= R(t) + \int_t^T \alpha(z) dz
 \end{aligned}
 \tag{10.18}$$

식 (10.17)과 식 (10.18)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(R(T)) = F(t, T) + \frac{\beta^2}{2} \tau^2
 \tag{10.19}$$

따라서, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 위험프리미엄은 $\beta^2 \tau^2 / 2$ 이다. 이는 Merton이자율모형의 경우와 동일하다. 선도이자율 $F(t, T)$ 에 대한 변동성 β 와 현물이자율 $R(t)$ 의 영향은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial T} = -\beta \tau^2
 \tag{10.20}$$

$$\frac{\partial F(t, T)}{\partial R(t)} = 1
 \tag{10.21}$$

식 (10.17)에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 만기시점 T 에서 선도이자율 $F(t, T)$ 가 다음과 같은 Ito확률방정식으로 표현됨을 알 수 있다.

$$dF(t, T) = [dR(t) - \alpha(t) dt] + \tau \beta^2 dt
 \tag{10.22}$$

식 (10.1)을 식 (10.22)에 대입하면, 다음 확률미분방정식이 성립한다.

$$dF(t, T) = \tau\beta^2 dt + \beta dW^Q(T) \quad (10.23)$$

식 (10.23)에서 알 수 있듯이, 선도이자율 $F(t, T)$ 의 확률미분방정식은 함수 $\alpha(t)$ 에 의존하지 않는다. 식 (10.17)에서, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\alpha(t) = -F_t(t, T) + \tau\beta^2 \quad (10.24)$$

10.4. 일드

만기시점이 T 인 할인채의 시점 t 에서 일드는 다음과 같다.

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln \frac{1}{B(t, T)} = -\frac{1}{T-t} A(t, T) + R(t) \quad (10.25)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (3.3.43)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (10.8)에 의해서 성립한다. 식 (10.7)과 식 (10.25)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$R(t, T) = R(t) + \frac{1}{T-t} \int_t^T \int_t^u \alpha(v) dv du - \frac{\beta^2}{6} \tau^2 \quad (10.26)$$

식 (10.26)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 일드 $R(t, T)$ 는 현물이자율 $R(t)$ 의 1차함수이다. 따라서, Ho-Lee이자율모형은 아핀일드모형(affine-yield model)이다. 일드 $R(t, T)$ 는 정규분포를 따른다. 식 (10.24)에서 알 수 있듯이, 시점 t 에서 현물이자율 $R(t)$ 를 $[R(t) + \Delta]$ 로 이동하면, 일드 $R(t, T)$ 는 $[R(t, T) + \Delta]$ 로 이동한다. 이는 일드의 좋은 성질이라 할 수 없다.

(예제 10.4) 예제 10.1에서 다룬 Ho-Lee이자율모형을 살펴보자. 즉, 다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dR(u) = [0.015 + 0.005e^{-0.21u}] du + 0.06 dW^Q(u) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(u) | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 다음 식들이 성립한다. 예제 10.2의 식 (5)와 식 (10.25)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} A(t, T) + R(t) \\ &= -\frac{1}{\tau} \left\{ 0.0075 [T-t]^2 + \frac{0.005}{b} e^{-bt} [T-t] \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.005}{b^2} [e^{-bT} - e^{-bt}] - \frac{1}{6} \beta^3 [T-t]^3 \right\} + R(t) \end{aligned} \quad (2)$$

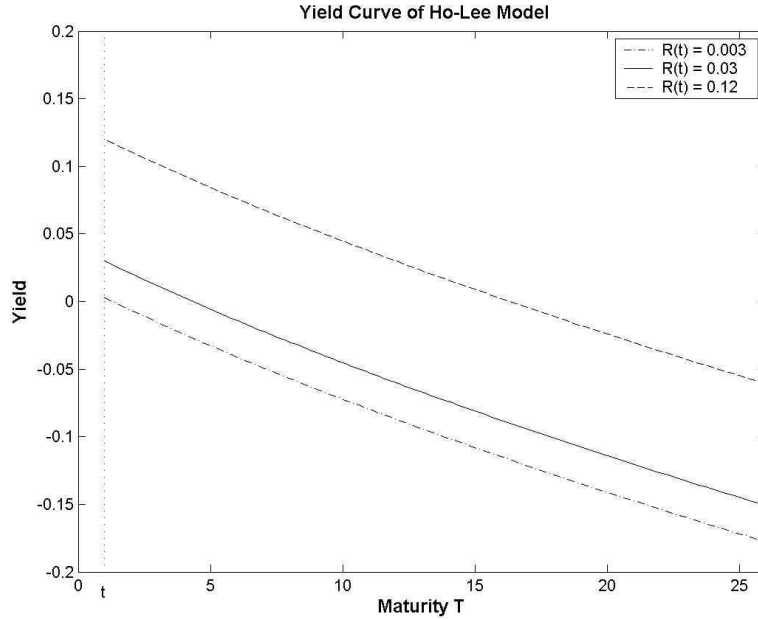
그림 10.4에 Ho-Lee이자율모형에 의한 일드곡선이 그려져 있다. 그림 10.4를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 Hlyield101.m을 실행하라.

```

% -----
% Filename: HLYield101.m
% Programmed by CBS
%-----
clear all, close all
% Define functions
%
tt = 1; barTT = 26;
delta = 0.0001;
TT = linspace(tt+delta,barTT,100);
tau = TT - tt;
%
b = 0.21;
beta = 0.06;
A = 0.0075*tau.^2 + 0.005/b*exp(-b*tt)*tau ...
    + 0.005/b^2*( exp(-b*TT) - exp(-b*tt) ) - 1/6*beta^3*tau.^3;
dum = - A./tau;
%
Rt= 0.003; yield003 = dum + Rt;
Rt = 0.03; yield03 = dum + Rt;
Rt = 0.12; yield12 = dum + Rt;
%
yref = -0.2:1/100:0.2;
xref = 1.0*ones(size(yref));
% 2-D Plot
plot(TT,yield003,'k-', TT,yield03,'k',TT,yield12,'k--',xref,yref,'k:')
legend('R(t) = 0.003','R(t) = 0.03','R(t) = 0.12','location','NE')
axis( [ 0, 26, -0.2, 0.2 ] )
ylabel('\Wbf{Yield}','fontsize',12)
xlabel('\Wbf{Maturity T}','fontsize',12)
title('\Wbf Yield Curve of Ho-Lee Model','fontsize',12)
text(1,-0.202,'t')
saveas(gcf,'HLYield101.png')
% End of Program
%-----

```

여기서 초기시점 $t = 1$ 에서 현물이자율은 각각 $R(1) = 0.003$, $R(1) = 0.03$ 그리고 $R(1) = 0.12$ 이다. ■



[그림 10.4] Ho-Lee이자율과정의 일드

식 (10.2)에서 알 수 있듯이, 시간구간 $[t, T]$ 에서 현물이자율의 평균 \bar{R} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{1}{T-t} \int_t^T R(u) du \\ &= R(t) + \frac{1}{T-t} \int_t^T \int_t^u \alpha(v) dv du + \frac{\beta}{T-t} \int_t^T W^Q(u) du \end{aligned} \quad (10.27)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(\bar{R}) = R(t) + \frac{1}{T-t} \int_t^T \int_t^u \alpha(v) dv du \quad (10.28)$$

식 (10.26)과 식 (10.28)에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q(\bar{R}) = R(t, T) + \frac{\beta^2}{6} \tau^2 \quad (10.29)$$

따라서, 일드의 위험프리미엄은 $\beta^2 \tau^2 / 6$ 이다. 이는 Merton이자율모형의 경우와 동일하다.

식 (10.26)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_t^T \int_t^u a(v) dv du = \tau R(t, T) + \frac{\beta^2}{6} \tau^3 - \tau R(t) \quad (10.30)$$

식 (10.30)의 양변을 T 에 대해 미분하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_t^T a(v) dv = R(t, T) + \tau R_T(t, T) + \frac{\beta^2}{2} \tau^2 - R(t) \quad (10.31)$$

식 (10.31)을 다시 한번 T 에 대해 미분하면, 다음 식이 성립한다.

$$a(t) = 2R_T(t, T) + \tau R_{TT}(t, T) + \tau \beta^2 \quad (10.32)$$

식 (10.32)를 사용해서, 각 $T(\geq t)$ 에 대해 $a(t)$ 를 직접 계산할 수 있다.

제11절 기타 이자율모형

이 절에서는 지금까지 다룬 1요인 이자율모형들을 정리하고, 또한 지금까지 다루지 않은 일부 모형들에 대해서 간단히 살펴보기로 하자.

11.1. 기간구조모형들의 요약

중요한 1요인 이자율모형들이 표 11.1에 수록되어 있다.

제안자	모형
Merton (1971)	$dR(u) = a du + \beta dW^Q(u)$
Vasicek (1977)	$dR(u) = b[R - R(u)]du + \beta dW^Q(u)$
Dothan (1978)	$dR(u) = \beta R(u) dW^Q(u)$
Brennan-Schwartz (1979)	$dR(u) = [a - bR(u)]du + \beta R(u) dW^Q(u)$
Constantinides-Ingersoll (1984)	$dR(u) = \beta R^{3/2}(u) dW^Q(u)$
Cox-Ingersoll-Ross (1985)	$dR(u) = [a - bR(u)]du + \beta \sqrt{R(u)} dW^Q(u)$
Ho-Lee (1986)	$dR(u) = \alpha(u) du + \beta dW^Q(u)$
Hull-White (1990)	$dR(u) = [a(u) - b(u)R(u)]du + \beta(u) dW^Q(u)$
Heath-Jarrow-Morton (1992)	$dF(t, T) = \alpha_F(t, T)dt + \beta_F(t, T)dW^Q(t)$

[표 11.1] 1요인 이자율모형

11.2. 기하Brown운동이자율모형

식 (5.4)의 CEV모형에서 모수들을 $\gamma = 1$ 그리고 $a = 0$ 라 놓으면, 다음과 같은 기하Brown운동을 따르는 이자율모형이 된다.

$$dR(u) = -bR(u)du + \beta R(u)dW^Q(u), \quad (u \geq 0) \quad (11.1)$$

여기서 $\{W^Q(u) \mid u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 이

기하Brown운동이자율모형은 Dothan (1978)이 할인채가치를 평가하기 위해서 이용한 것으로서, Black & Derman & Toy (1990)가 제시한 이산시간형 모형의 극한이다.

확률미분방정식 (11.1)의 해는 다음과 같다.

$$R(t) = R(0) \exp\left(\left[-b - \frac{1}{2}\beta^2\right]t + \beta W^Q(t)\right), \quad (t \geq 0) \quad (11.2)$$

식 (11.2)에서 알 수 있듯이, CIR이자율모형과 마찬가지로 기하Brown운동이자율모형에서도 현물이자율은 비음이다. 또한, 초기이자율 $R(0)$ 가 주어진 조건 하에서 현물이자율 $R(t)$ 는 대수정규분포를 따른다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$\ln \frac{R(t)}{R(0)} \stackrel{d}{\sim} N\left(\left[-b - \frac{1}{2}\beta^2\right]t, \sigma^2 t\right) \quad (11.3)$$

따라서, 초기이자율 $R(0)$ 가 주어진 조건 하에서 현물이자율 $R(t)$ 의 확률밀도함수 $f(R(t))$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(R(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t \beta R(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2 t} \left\{ \ln R(t) - \ln R(0) - \left[-b - \frac{1}{2}\beta^2\right]t \right\}^2\right) \end{aligned} \quad (11.4)$$

현물이자율이 기하Brown운동이자율모형 (11.1)을 따르고 만기시점이 $[t + \delta]$ 인 할인채의 시점 t 에서 가치 $B(t, t + \delta)$ 는 다음과 같다.

$$B(t, t + \delta) = \exp\left(\int_t^{t+\delta} R(u) du\right) \quad (11.5)$$

만일 $\delta (> 0)$ 가 충분히 작다면, 다음 근사식이 성립한다.

$$E(B(t, t + \delta)) \approx E(\exp(\delta R(t))) \quad (11.6)$$

임의의 양수 δ 에 대해서, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} E(\exp(\delta R(t))) &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n R^n(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n E(R^n(t)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n R^n(0) \exp\left(n\left[-b - \frac{1}{2}\beta^2\right]t + \frac{1}{2}n^2\sigma^2 t\right) = \infty \end{aligned} \quad (11.7)$$

식 (11.6)과 식 (11.7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(B(t, t + \delta)) = \infty \quad (11.8)$$

즉, 잔여기간이 아주 짧은 경우, 기하Brown운동이자율모형을 따르는 현물이자율과정에 의한 할인채가치의 기대값은 $+\infty$ 로 발산한다. 이것이 기하Brown운동이자율모형의 최대 결점이다.

11.3. Brennan-Schwartz이자율모형

Brennan-Schwartz이자율모형 (1979)은 다음과 같다.

$$dR(t) = [a - bR(t)]dt + \beta R(t)dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (11.9)$$

즉, Brennan-Schwartz이자율모형은 기하Brown운동이자율모형 (11.1)의 추세계수에 상수 a 를 더한 것이다. 다음 확률변수들을 정의하자.

$$z(t) \doteq \exp\left(\beta W^Q(t) + \left[-b - \frac{1}{2}\beta^2\right]t\right) \quad (11.10)$$

$$y(t) \doteq R(0) + \int_0^t a \exp\left(-\beta W^Q(v) + \left[b + \frac{1}{2}\beta^2\right]v\right)dv \quad (11.11)$$

예제 1.1.17에서 알 수 있듯이, $R(t) = y(t)z(t)$ 가 확률미분방정식 (11.9)의 해이다. 다음 식이 성립한다.

$$R(t) = \exp\left(\beta W^Q(t) - \left[b + \frac{1}{2}\beta^2\right]t\right) \cdot \left[R(0) + \int_0^t a \exp\left(-\beta W^Q(v) + \left[b + \frac{1}{2}\beta^2\right]v\right)dv\right] \quad (11.12)$$

비록 Brennan-Schwartz이자율모형이 흥미로운 모형이기는 하나, 유감스럽게도 식 (11.12)의 우변의 적분에 관한 해석해가 존재하지 않는다. 결국, Brennan-Schwartz이자율모형에서 현물이자율의 확률밀도함수는 Bessel과정의 추이밀도함수에 귀착된다. Rogers & Shi (1995)는 아시아형옵션의 가치평가에 Brennan-Schwartz이자율모형을 사용하였다.

(예제 11.1) 다음 확률미분방정식을 만족하는 같은 현물이자율모형을 살펴보자.

$$dR(t) = \alpha(t, R(t))dt + \beta(R(t))dW^Q(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

확률미분방정식 (1)에서 확산계수는 시간동질적임에 유의하라.

이 현물이자율 $R(t)$ 를 원자산으로 하는 금융과생상품의 무재정가치를 평가하기 위해서 이항나무법을 사용한다고 하자. 확산계수가 $\beta(r)$ 인 경우에 일반적으로 이항나무의 노드들이 재결합(recombining)하지 않는다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 Hull & White (1993)는 다음과 같은 변수변환을 사용하였다.

$$y(t) \doteq \int_a^{R(t)} \frac{1}{\beta(r)} dr, \quad (\alpha > 0) \quad (2)$$

여기서 $\{W^Q(u) \mid u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 식 (2)에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$dy(t) = \left[\frac{\alpha(t, R(t))}{\beta(R(t))} - \frac{1}{2}\beta'(R(t))\right]dt + dW^Q(t) \quad (3)$$

확률미분방정식 (3)의 확산계수가 상수임을 유의하라. 식 (2)의 변수변환을 사용해서, 식 (3)과 같은 모형을 만들어 내는 과정을 계량경제학에서는 분산안정화(variance stabilization)라 하고, 통계학에서는 델타법이라 한다. Hull &

White는 확률미분방정식 (3)을 만족하는 $\{y(t)\}$ 의 이항나무를 구축한 다음, 이 이항나무에 변환 (2)를 적용해서 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 의 이항나무를 구축했다.

다음 식이 성립한다.

$$\int r dr = \ln r + c \quad (4)$$

따라서, 다음 확률변수를 정의하자.

$$y(t) \doteq \ln R(t) \quad (5)$$

다음 식이 성립한다.

$$R(t) = e^{y(t)} \quad (6)$$

식 (3)에서 알 수 있듯이, Brennan-Schwartz이자율모형에 변환 (6)을 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$dy(t) = \frac{1}{\beta} \left[a e^{-y(t)} - b - \frac{1}{2} \beta^2 \right] dt + dW^Q(t) \quad (7)$$

따라서, 확률미분방정식 (7)을 만족하는 $\{y(t)\}$ 의 이항나무를 구축한 다음, 변환 (5)를 이 이항나무에 적용해서 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 의 이항나무를 구축한다. ■

(예제 11.2) 기하Brown운동이자율모형과 Brennan-Schwartz이자율모형을 비교하기 위해서, 다음 확률미분방정식들을 살펴보자.

$$dR_1(t) = [a - bR_1(t)]dt + \beta R_1(t)dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

$$dR_2(t) = -bR_2(t)dt + \beta R_2(t)dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

여기서 $a(> 0)$, $b(> 0)$ 그리고 $\beta(> 0)$ 는 상수들이다. 또한, 다음 식들이 성립한다고 가정하자.

$$R_1(0) = R_2(0) = R(0) \quad (3)$$

식 (1)의 $R_1(t)$ 는 Brennan-Schwartz이자율모형의 현물이자율이고, 식 (2)의 $R_2(t)$ 는 기하Brown운동이자율모형의 현물이자율이다. 이 이자율모형들의 추세계수들은 다음 식을 만족한다.

$$\mu_1(r, t) = a - br \geq -br = \mu_2(r, t) \quad (4)$$

식 (11.12)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$R_1(t) = \exp\left(\beta W^Q(t) - \left[b + \frac{1}{2} \beta^2\right]t\right) \cdot \left[R(0) + \int_0^t a \exp\left(-\beta W^Q(v) + \left[b + \frac{1}{2} \beta^2\right]v\right)dv\right] \quad (5)$$

식 (11.2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$R_2(t) = R(0) \exp\left(\beta W^Q(t) - \left[b + \frac{1}{2} \beta^2\right]t\right) \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$Q(R_1(t) \geq R_2(t) \text{ for all } t) = 1 \quad (7)$$

즉, 확률 1로 Brennan-Schwartz이자율모형의 현물이자율 $R_1(t)$ 는 기하Brown운동이자율모형의 현물이자율 $R_2(t)$ 보다 크다. 따라서, 각 $a(> 0)$ 에 대해서, 다음 식들이 성립한다.

$$E\left(\exp\left(\int_t^{t+\delta} R_1(u) du\right)\right) \geq E\left(\exp\left(\int_t^{t+\delta} R_2(u) du\right)\right) = \infty \quad (8)$$

여기서 등호는 식 (11.8)에 의해서 성립한다. 식 (7)에서 알 수 있듯이, 잔여기간이 아주 짧은 경우 Brennan-Schwartz이자율모형에서도 할인채가치의 기대값이 ∞ 로 발산한다. ■

11.4. Black-Karasinski이자율모형

지금부터 세 절들에 걸쳐서, 현물이자율의 추세계수 $a(t, R(t))$ 가 $R(t)$ 의 선형함수가 아닌 비선형이자율모형을 살펴보자.

비선형이자율모형의 가장 단순한 형태는 현물이자율의 대수(log)가 선형모형을 따른다고 가정하는 것이다. 즉, 현물이자율이 다음 확률미분방정식을 따르면, Black-Karasinski이자율모형 (1991)이라 한다.

$$d \ln R(t) = [a(t) - b(t) \ln R(t)] dt + \beta(t) dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (11.13)$$

여기서 $a(t)$, $b(t)$ 그리고 $\beta(t)$ 는 결정적 함수들이고, $\{W^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. Black-Karasinski이자율모형은 Black-Derman-Toy모형 (1990)의 연속시간형 버전이라고 할 수 있다.

우선, $b(t)$ 와 $\beta(t)$ 가 각각 상수 $b(> 0)$ 와 상수 $\beta(> 0)$ 인 모형, 즉 다음과 같은 이자율모형을 살펴보자.

$$d \ln R(t) = [a(t) - b \ln R(t)] dt + \beta dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (11.14)$$

식 (11.14)에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$dR(t) = R(t) \left[a(t) + \frac{1}{2} \beta^2 - b \ln R(t) \right] dt + \beta R(t) dW^Q(t) \quad (11.15)$$

따라서, 각 $s \leq t$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\ln R(t) = e^{-b[t-s]} \ln R(s) + \int_s^t e^{-b[t-u]} a(u) du + \beta \int_s^t e^{-b[t-u]} dW^Q(u) \quad (11.16)$$

식 (11.16)에서 알 수 있듯이, 시점 s 에서 정보집합 F_s 가 주어진 조건 하에서

$\ln R(t)$ 는 정규분포를 따른다. 즉, $R(t)$ 는 대수정규분포를 따른다. 즉, Black-Karasinski이자율모형은 현물이자율의 대수정규모형의 하나이다. 식 (11.16)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$E_s^Q(R(t)) = \exp\left(g(s, t) + \frac{\beta^2}{4b}\{1 - e^{-2b[t-s]}\}\right) \quad (11.17)$$

$$E_s^Q(R^2(t)) = \exp\left(2g(s, t) + \frac{\beta^2}{b}\{1 - e^{-2b[t-s]}\}\right) \quad (11.18)$$

여기서 $g(s, t)$ 는 다음과 같다.

$$g(s, t) \doteq e^{-b[t-s]}\ln R(s) + \int_s^t e^{-b[t-u]}a(u) du \quad (11.19)$$

식 (11.17)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_s^Q(R(t)) = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} g(s, t) + \frac{\beta^2}{4b}\right) \quad (11.20)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(s, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_s^t e^{-b[t-u]}a(u) du > 0 \quad (11.21)$$

식 (11.20)과 식 (11.21)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_s^Q(R(t)) = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} g(s, t) + \frac{\beta^2}{4b}\right) > \exp\left(\frac{\beta^2}{4b}\right) > 1 \quad (11.22)$$

식 (11.22)는 Black-Karasinski이자율모형의 문제점을 보여준다.

다시, Black-Karasinski이자율모형 (11.13)을 살펴보자. 식 (11.13)에 Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$dR(t) = R(t)\left[a(t) + \frac{1}{2}\beta^2(t) - b(t)\ln R(t)\right]dt + \beta(t)R(t)dW^Q(t) \quad (11.23)$$

식 (11.23)에서 알 수 있듯이, 현물이자율과정 $\{R(t)\}$ 는 국소적 평균회귀수준(local mean-reversion level)은 $\frac{1}{b(t)}\left[a(t) + \frac{1}{2}\beta^2(t)\right]$ 이다. 다음 함수를 정의하자.

$$B(t) \doteq \int_0^t b(u) du \quad (11.24)$$

식 (11.23)에서 알 수 있듯이, 각 $s \leq t$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \ln R(t) &= e^{B(s)-B(t)}\ln R(s) \\ &+ \int_s^t e^{B(u)-B(t)}a(u) du + \int_s^t \beta(u)e^{B(u)-B(t)}dW^Q(u) \end{aligned} \quad (11.25)$$

식 (11.25)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$E_s^Q(\ln R(t)) = e^{B(s)-B(t)}\ln R(s) + \int_s^t e^{B(u)-B(t)}a(u) du \quad (11.26)$$

$$\text{Var}_s^Q(\ln R(t)) = \int_s^t e^{2B(u)-2B(t)}\beta^2(u) du \quad (11.27)$$

현물이자율과정이 Black-Karasinski이자율모형 (11.13)을 따르는 경우에는 할인채가치나 이자율파생상품의 단힌해를 구할 수 없다. 그러나, 나무모형을

이용해서 이들에 대한 수치해들을 구할 수 있다. Sandmann & Sondermann (1997)이 보였듯이, 임의의 시간구간 $[s, t]$ 에 대해서 $E_s^Q\left(\exp\left(\int_s^t R(u) du\right)\right)$ 가 ∞ 이다. 따라서, Black-Karasinski이자율모형을 선도계약의 가치평가에 사용할 수 없다. 이 문제점이 Black-Karasinski이자율모형을 포함한 현물이자율의 대수정규모형들이 실무자의 관심에서 멀어지게 하는 주된 원인이다. 이러한 문제점의 근원은 연복복리이자율을 사용하기 때문에 발생하는 것이다. 따라서, 연속복리이자율 대신에 단리이자율을 사용하는 모형이 최근 주목을 받고 있다.

11.5. 정상분포와 다항식모형

현물이자율 $R(t)$ 가 다음 시간동질적(time-homogeneous) 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dR(t) = \alpha(R(t))dt + \beta(R(t))dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (11.28)$$

여기서 $\{W^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 확률미분방정식 (11.28)의 해 $\{R(t)\}$ 는 Ito확산과정이다. 이 Ito확산과정 $\{R(t)\}$ 의 천이밀도함수 $p(0, t; x, y)$ 는 다음과 같다.

$$p(0, t; x, y) = \frac{\partial}{\partial y} P(R(t) \leq y | R(0) = x), \quad (t > 0) \quad (11.29)$$

이 천이밀도함수 $p(0, t; x, y)$ 는 다음과 같은 Kolmogorov전향방정식(또는 Fokker-Planck방정식)을 만족한다.

$$\frac{\partial p(0, t; x, y)}{\partial t} = -\frac{\partial(\alpha(y)p(0, t; x, y))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\beta^2(y)p(0, t; x, y))}{\partial y^2} \quad (11.30)$$

확률변수 $R(0)$ 의 확률밀도함수 $\psi(x)$ 가 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$\psi(y) = \int \psi(x)p(0, t; x, y)dx, \quad (t > 0) \quad (11.31)$$

식 (11.31)의 좌변의 $\psi(y)$ 는 시점 t 에 의존하지 않는 확률밀도함수이다. 이 $\psi(y)$ 를 정상밀도함수(stationary density)라고 부르고, 이에 해당하는 확률분포를 정상분포(stationary distribution)라 부른다. 천이밀도함수의 정의에서 알 수 있듯이, 식 (11.31)의 우변은 확률변수 $R(t)$ 가 따르는 확률밀도함수이다. 따라서, 식 (11.31)은 이 확률밀도함수 $\int \psi(x)p(0, t; x, y)dx$ 가 초기확률밀도함수 $\psi(y)$ 와 같음을 나타낸다. 즉, 확률과정 $\{R(t)\}$ 가 정상성(stationarity)을 갖음을 보여준다. 식 (11.31)을 정상방정식(stationary equation)이라 부른다.

식 (11.31)에서 알 수 있듯이, 각 y 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\int \psi(x) \frac{\partial p(0, t; x, y)}{\partial t} dx = \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} = 0 \quad (11.32)$$

고정된 x 와 y 에 대해서 $p(0, t; x, y)$ 는 시점 t 의 증가함수이다. 따라서, 식 (11.32)에서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\partial p(0, t; x, y)}{\partial t} = 0 \quad (11.33)$$

식 (11.33)에서 알 수 있듯이, 정상밀도함수 $\psi(y)$ 는 Kolmogorov 전향방정식 (11.30)의 좌변을 0으로 하는 다음 편미분방정식의 해이다.

$$0 = - \frac{\partial(a(y)p(0, t; x, y))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\beta^2(y)p(0, t; x, y))}{\partial y^2} \quad (11.34)$$

또한, 다음과 같은 정규화조건을 만족한다.

$$\psi(y) \geq 0, \quad \int \psi(y) dy = 1 \quad (11.35)$$

역으로, 만일 편미분방정식 (11.34)와 정규화조건 (11.35)를 만족하는 함수 $\psi(y)$ 는 다음 식을 만족함이 알려져 있다.

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t; x, y) \quad (11.36)$$

이에 대한 자세한 내용은 Karlin & Taylor (1981)의 제15.5절을 참조하라.

상태공간의 경계(boundary)에 대해서 살펴보자. 여기서는 상태공간이 (c, ∞) 라 하자. 즉, 이 Ito확산과정은 경계점 c 와 경계점 ∞ 에 도달할 수 없다고 하자. 또한, 함수 $\psi(y)$ 가 다음과 같은 형태라고 가정하자.

$$\psi(x) = \frac{K}{\beta^2(x)} \exp\left(\int_c^x \frac{2a(s)}{\beta^2(s)} ds\right) \quad (11.37)$$

식 (11.37)의 함수 $\psi(y)$ 가 미분방정식 (11.34)를 만족하는 것은 쉽게 확인할 수 있다. 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$\int_c^\infty \frac{1}{\beta^2(x)} \exp\left(\int_c^x \frac{2a(s)}{\beta^2(s)} ds\right) dx < \infty \quad (11.38)$$

식 (11.35)와 식 (11.37)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$K = \frac{1}{\int_c^\infty \frac{1}{\beta^2(x)} \exp\left(\int_c^x \frac{2a(s)}{\beta^2(s)} ds\right) dx} > 0 \quad (11.39)$$

식 (11.39)를 식 (11.37)에 대입하면, 정상밀도함수가 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\psi(x) = \frac{\frac{1}{\beta^2(x)} \exp\left(\int_c^x \frac{2a(s)}{\beta^2(s)} ds\right)}{\int_c^\infty \frac{1}{\beta^2(z)} \exp\left(\int_c^z \frac{2a(s)}{\beta^2(s)} ds\right) dz} \quad (11.40)$$

(예제 11.3) 다음과 같은 Vasicek이자율모형을 살펴보자.

$$dR(t) = b[R - R(t)]dt + \beta dW^Q(t), \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

여기서 $\{W^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 Brown운동이다. 식 (11.40)에서 알 수 있듯이, 이 Vasicek이자율과정의 정상밀도함수는 다음과 같다.

$$\psi(x) = \frac{K}{\beta^2} \exp\left(\frac{2b}{\beta^2} \int_c^x [R - s] ds\right) \quad (2)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\psi(x) = K^* \exp\left(-\frac{b}{\beta^2} [x - R]^2\right) \quad (3)$$

함수 $\psi(x)$ 가 확률밀도함수가 되기 위해서는 b 가 양수이어야 한다. 또한, 정규화조건 (11.35)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$K^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{b}{\pi}} \quad (4)$$

따라서, Vasicek이자율모형에서 정상분포는 정규분포 $N(R, \sqrt{\beta^2/b})$ 이다.

식 (6.2)에서 알 수 있듯이, Vasicek이자율모형 (1)의 해는 다음과 같다.

$$R(t) = e^{-bt} \left\{ x + R[e^{bt} - 1] + \beta \int_0^t e^{bu} dW^Q(u) \right\} \quad (5)$$

즉, $R(t)$ 는 정규분포를 따른다. 식 (6.5)와 식 (6.6)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$E(R(t)) = e^{-bt} \{ x + R[e^{bt} - 1] \} \quad (6)$$

$$\text{Var}(R(t)) = \frac{\beta^2}{2b} [1 - e^{-2bt}] \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(R(t)) = R \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(R(t)) = \frac{\beta^2}{2b} \quad (9)$$

따라서, 천이밀도함수의 극한함수 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t; x, y)$ 는 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t; x, y) = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{b}{\pi}} \exp\left(-\frac{b}{\beta^2} [x - R]^2\right) \quad (10)$$

식 (10)에서 알 수 있듯이, 천이밀도함수의 극한함수 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t; x, y)$ 가 존재하며 이 극한함수는 초기값 x 에 의존하지 않는다.

식 (3)과 식 (10)에서 식 (11.36)이 성립함을 확인할 수 있다. 즉, 정상밀도함수 $\psi(y)$ 와 천이밀도함수의 극한함수 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t; x, y)$ 는 같다. 따라서,

Kolmogorov전향방정식 (11.30)의 좌변을 0으로 하면 정상밀도함수 $\psi(y)$ 가 만족하는 편미분방정식 (11.34)가 됨을 확인할 수 있다. ■

Ait-Sahalia (1996 a, b)는 현물이자율모형의 정상분포를 시장데이터에 적합시키는 실험을 하였다. Ait-Sahalia (1996b)는 1973년부터 1995년까지의 일별 유로달러 7일물의 매수호가와 매도호가의 평균값으로 구성된 데이터에 적합한 정상분포를 구했다. 또한, 각 이자율모형에서 이론적으로 구한 정상분포와 시장데이터에서 실증적으로 얻어진 이 정상분포를 비교해서, 다음과 같은 결론을 제시하였다. 앞에서 설명한 모든 평균회귀모형은 시장데이터에 적합하지 않으며, 유일하게 적합한 이자율모형의 추세계수와 확산계수는 다음과 같다.

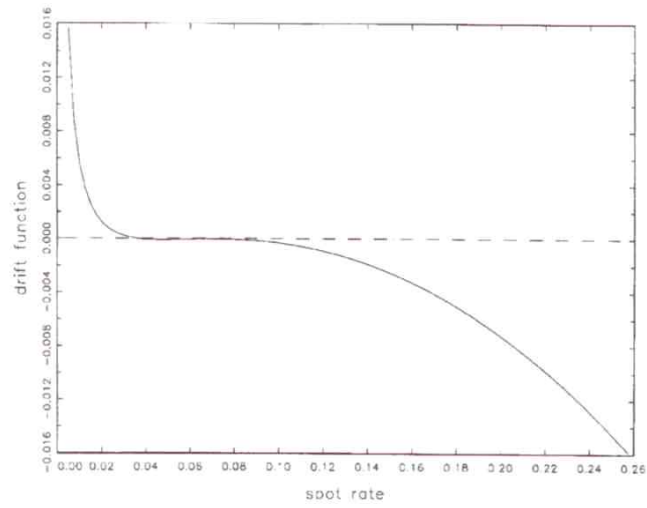
$$\alpha(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \frac{\alpha_3}{r} \quad (11.41)$$

$$\beta^2(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^{\beta_3} \quad (11.42)$$

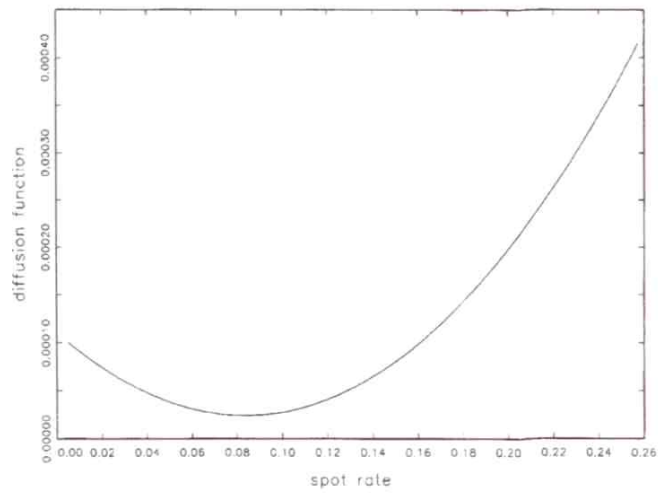
Ait-Sahalia가 정상분포를 시장데이터에 적합시키는 분석법을 적용한 이유는 GMM과 같이 시점을 이산화한 근사모형을 이용하는 방법은 다음과 같은 약점들을 지니고 있기 때문이다.

- (1) Nelson & Ramaswamy (1990)가 보였듯이, 연속시간형 모형을 이산화한 근사모형이 연속시간형 모형에 수렴하는 것이 수학적으로 보증되어 있는 경우는 한정되어 있다.
- (2) 이산화한 근사모형에 의한 확률증분들의 평균과 표준편차가 원래의 확률미분방정식에 의한 평균과 표준편차에 잘 근사하지는 않는다.
- (3) 하루동안의 장중에서 이자율이 움직이는 변동성을 무시할 수 없다.

그림 11.1과 그림 11.2는 Ait-Sahalia (1996b)에서 인용한 것이다. 이 논문에서는 앞에서 언급한 일별 유로달러 7일물로 구성된 데이터세트에서 1983년부터 1995년까지의 이자율데이터가 정상성을 갖는다고 가정하고 다양한 현물이자율모형들을 이 시장데이터에 적합시킨다. 이 중에서 기각되지 않는 모형의 추세계수는 식 (11.41)을 만족한다. 이렇게 추정된 모형의 현물이자율모형의 추세계수 대 현물이자율의 그래프가 그림 11.1이고, 현물이자율모형의 확산계수 대 현물이자율의 그래프가 그림 11.2이다. 이 추정에서는 비모수적 기법인 커널추정법(kernel estimation)이 사용되었다. 커널추정법을 현물이자율모형에 적용하는 과정에 대해서는 James & Webber (2000)의 제6장을 참조하라. 그림 11.1에서 알 수 있듯이, 이 추세계수에는 강한 비선형성이 존재한다. 즉, 현물이자율의 구간 $[0.03, 0.08]$ 에서 현물이자율의 추세계수는 0이고, 이 범위에서 멀어질수록 추세계수의 절대값이 커짐을 알 수 있다. 그림 11.2에서 알 수 있듯이, 확산계수는 현물이자율이 0.08인 중앙부분에서 값이 작고, 현물이자율이 0.08에서 멀어질수록 확산계수는 커진다. 즉, CEV모형과는 크게 다른 형태를 보이고 있다.



[그림 11.1] 비선형 추세계수



[그림 11.2] 비선형 확산계수

11.6. 카오스를 생성하는 현물이자율모형

Tice & Webber (1997)는 IS-LM모형을 바탕으로 다음과 같은 현물이자율모형을 제시하였다.

$$dR(t) = \alpha[x(t) - R(t)]dt + \sigma_R dW_R^Q(t) \quad (11.43)$$

$$dx(t) = \beta\{pR(t) + [1 - p]\mu - x(t)\}dt + \sigma_x dW_x^Q(t) \quad (11.44)$$

여기서 $\alpha(> 0)$ 와 $\beta(> 0)$ 는 상수들이고 $\{W_R^Q(t)\}$ 와 $\{W_x^Q(t)\}$ 는 위험중립확률측도 Q 하에서 서로 독립인 Brown운동들이다. 만일 $\sigma_R = 0$ 이고 $\sigma_x = 0$ 이면, 이 현물이자율모형은 결정적 모형이다. 동시에, 만일 $R(0) = x(0) = \mu$ 이면, 각 $t(\geq 0)$ 에 대해서 $R(t) = x(t) = \mu$ 이다. 따라서, μ 를 현물이자율 $R(t)$ 와 평균회귀수준 $x(t)$ 의 장기적 평균이라고 할 수 있다. 경제학적인 관점에서 보면, 식 (11.44)의 모수 p 는 음의 값을 취하는 상수이다. 그러나, 실제시장에서는 p 도 시간에 따라 움직인다. 따라서, Tice & Webber는 p 가 다음과 같은 확률미분방정식을 만족한다고 가정하였다.

$$dp(t) = \gamma\{\delta - \phi[x(t) - \mu][R(t) - \mu] - p(t)\}dt + \sigma_p dW_p^Q(t) \quad (11.45)$$

또한, 그들은 불필요한 불확실성을 배제하기 위해서 다음 식들이 성립한다고 가정하였다.

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_p = 0 \quad (11.46)$$

식 (11.43)-식 (11.46)에서 알 수 있듯이, Tice-Webber이자율모형은 다음과 같다.

$$dR(t) = \alpha[x(t) - R(t)]dt + \sigma_R dW_R^Q(t) \quad (11.47)$$

$$dx(t) = \beta\{pR(t) + [1 - p]\mu - x(t)\}dt \quad (11.48)$$

$$dp(t) = \gamma\{\delta - \phi[x(t) - \mu][R(t) - \mu] - p(t)\}dt \quad (11.49)$$

따라서, Tice-Webber이자율모형은 3요인모형이다. 이 Tice-Webber이자율모형에 대한 자세한 내용은 James & Webber (2000)의 제11.3절을 참조하라.

다음과 같이 상수와 변수들을 정의하자.

$$s \doteq \frac{1}{\sqrt{\gamma\phi}} \quad (11.50)$$

$$X(t) \doteq \frac{R(t) - \mu}{s}, \quad Y(t) \doteq \frac{x(t) - \mu}{s}, \quad Z(t) \doteq \delta - p(t) \quad (11.51)$$

다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$\sigma_R = 0 \quad (11.52)$$

식 (11.52)를 식 (11.47)-식 (11.49)에 대입하면, 다음과 같은 연립미분방정식을 얻는다.

$$dX(t) = \alpha[Y(t) - X(t)]dt \quad (11.53)$$

$$dY(t) = \beta[\delta X(t) - X(t)Z(t) - Y(t)]dt \quad (11.54)$$

$$dZ(t) = [X(t)Y(t) - \gamma Z(t)]dt \quad (11.55)$$

식 (11.53)-식 (11.55)로 이루어진 연립미분방정식을 Lorentz시스템이라 부른다. 이 연립미분방정식의 모수들 α, δ 그리고 γ 에 적당한 값들을 대입하면, 그 해는 카오스적(chaotic)인 변동을 보인다.

(예제 11.4) Tice-Webber이자율과정의 카오스적 변동을 그리기 위해서, 다음 MATLAB프로그램 CBSloreiz.m을 실행해보자.

```

% -----
function CBSloreiz(itr)
% Lorenz Burrefly of Tice-Webber Interest Model (1997)
% Programmed by CBS
% -----
clf
alpha = 5 ; delta = 23 ; gamma = 0.416667 ; phi = 22000;
ss = 1/sqrt(gamma*phi); mu = 0.1;
A = [ -alpha , alpha , 0 ;
      delta, -1, 0 ;
      0 , 0 , - gamma ];
dt = 0.003846;
n = 1;
u = [ 0 0 0 ]';
u(1) = (0.09 - 0.1)/ss;
u(2) = (0.085 - 0.1)/ss ;
u(3) = 23 - 10;
hold on
while n < itr
    A(2,3) = -u(1);
    A(3,1) = u(2);
    udot = A*u;
    u = u + udot*dt;
    rr = mu + ss*u(1);
    xx = mu + ss*u(2);
    pp = delta - u(3);
    plot(rr,pp,'k','MarkerSize',4)
    drawnow
    n = n+1;
end
xlabel('{\Wbf Spot Rate}','fontsize',13)
ylabel('{\Wbf p}','fontsize',13)
% end of program
% -----

```

이 MATLAB프로그램을 실행하기 위해서, MATLAB커맨드행에 다음 명령을

내려보자.

```
>> CBSlorenz(100000)
```

이 명령문을 실행하면, 다음 Tice-Webber이자율모형에서 생성한 $\{[R(t), x(t), p(t)]^t \mid t \geq 0\}$ 의 표본경로를 발생시킨다.

$$dX(t) = 5[Y(t) - X(t)]dt \quad (1)$$

$$dY(t) = [23X(t) - X(t)Z(t) - Y(t)]dt \quad (2)$$

$$dZ(t) = [X(t)Y(t) - 0.416667Z(t)]dt \quad (3)$$

여기서 모수들과 초기값들은 다음과 같다.

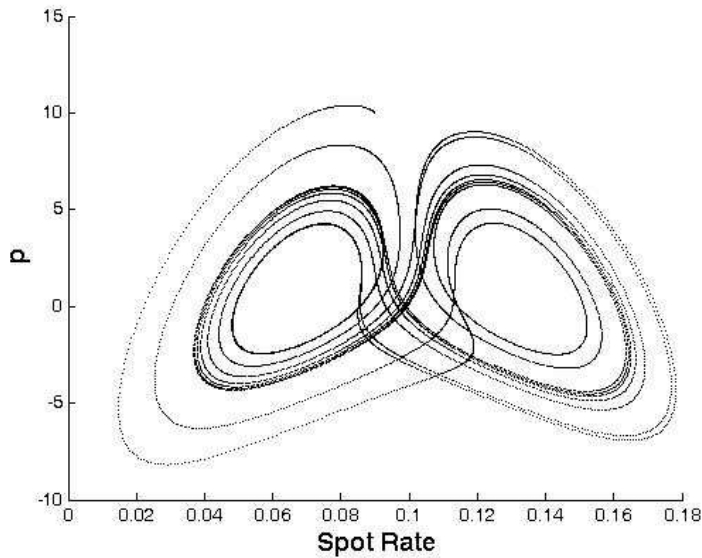
$$\alpha = 5, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0.416667 \quad (4)$$

$$\delta = 23, \quad \phi = 22000, \quad \mu = 0.1, \quad \Delta t = 0.003846 \quad (5)$$

$$R(0) = 0.09, \quad x(0) = 0.085, \quad p(0) = 10 \quad (6)$$

그림 11.3에는 이 표본경로에 해당하는 $\{(R(t), p(t)) \mid 0 \leq t \leq 10000\Delta t\}$ 를 그린 것이다. 이 그림에서 나비의 형상을 찾을 수 있다. 따라서, 이 그림을 Lorentznabi라고 부르기도 한다. 그림 11.3에서 알 수 있듯이, Tice-Webber이자율모형에 의한 현물이자율 $R(t)$ 는 다음 값들 주변을 오가고 있다.

$$\mu \pm \sqrt{\gamma[\delta - 1]} = 0.1 \pm 0.0316 \quad (7)$$



[그림 11.3] 현물이자율모형의 카오스적 변동

[참고문헌]

- 최병선 (1997) *회귀분석(상권, 하권)*, 세경사.
- 최병선 (2013) *금융공학 II: Black-Scholes Formula*, 서울대학교출판문화원.
- Ait-Sahalia, Y. (1996a). Nonparametric pricing of interest rate derivative securities, *Econometrica*, vol. 64, pp. 527-560.
- Ait-Sahalia, Y. (1996b). Testing continuous-time models of the spot interest rate, *Review of Financial Studies*, vol. 9, pp. 385-426.
- Andersen, L. and Andreasen, J. (2000) Volatility skews and extensions of the LIBOR market model, *Applied Mathematical Finance*, vol. 7, pp. 1-32.
- Black, F., Derman, E. and Toy, W. (1990) A one-factor model of interest rate and its application to treasury bond options, *Financial Analysis Journal*, pp. 33-39.
- Black, F. and Karasinski, P. (1991) Bond and option pricing when short rates are lognormal, *Financial Analysis Journal*, pp. 52-59.
- Brace, A., Gatarek, D. and Musiela, M. (1997). The market model of interest rate dynamics, *Mathematical Finance*, vol. 7, pp. 127-155.
- Brennan, M.J. and Schwarz, E.S. (1979) A continuous-time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, vol. 3, pp. 133-155.
- Brennan, M.J. and Schwarz, E.S. (1982) An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 17, pp. 301-329.
- Brigo, D. and Mercurio, F. (2006) *Interest Rate Models: Theory and Practice - with Smile, Inflation and Credit (Second Ed)*, Springer.
- Cairns, A.J.G. (2004) *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University Press.
- Carverhill, A. (1994) When is the short rate Markovian?, *Mathematical Finance*, vol. 4, pp. 305-312.
- Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A. and Sanders, A.B. (1992) An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, vol. 47, pp. 1209-1227.
- Chen, R.R. and Scott, L. (1992) Pricing interest rate options in a two-factor Cox-Ingersoll-Ross model of the term structure, *Rev. Financial Stud.*, vol. 5, pp. 613-636.

- Constantinides, G. and Ingersoll, J. (1984) Optimal bond trading with personal taxes, *Journal of Financial Economics*, vol. 13, pp. 299–335,
- Cox, J.C. and Ross, S.A. (1976) The valuation of options for alternative stochastic process, *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 145–166.
- Dothan, M.U. (1978) on the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, vol. 6, pp. 59–69.
- Elworthy, K.D., Li, X.M. and Yor, M. (1997) On the tail of the supremum and the quadratic variation of strictly local martingales in *Lecture Notes in Mathematics 1655*, Springer, pp. 113–125.
- Fabozzi, F.J. (2012) *The Handbook of Fixed Income Securities (Eighth Ed)*, McGrawHill.
- Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates, *Econometrica*, vol. 60, pp. 77–106.
- Ho, T.S.Y. and Lee, S.B. (1986). Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims, *The Journal of Finance*, vol. 41, pp. 1011–1029.
- Hull, J. and White, A. (1990) Pricing interest rate derivative securities, *The Review of Financial Studies*, vol. 25, pp. 87–100.
- Hull, J. and White, A. (1993) One-factor interest rate model and the valuation of interest derivative securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, pp. 235–254.
- James, J. and Webber, N. (2000). *Interest Rate Modelling*, Wiley.
- Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus (Second Ed.)*, Springer.
- Karlin, S. and Taylor, H.M. (1981) *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
- Lamberton, D. and Lapeyre, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman and Hall.
- Longstaff, F.A. and Schwarz, E.S. (1992) Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model, *Journal of Finance*, vol. 47, pp. 1259–1282.
- Merton, R.C. (1971) Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, vol. 3, pp. 373–413.

- Nelson, D.B. and Ranaswamy, K. (1990) Simple binomial processes as diffusion approximation in financial models, *Review of Financial Studies*, vol. 3, pp. 393–430.
- Rebonato, R. (1998) *Interest-Rate Option Models (Second Ed.)*, Wiley.
- Revuz, D. and Yor, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer.
- Rogers, L.C.G. and Shi, Z. (1995) The value of Asian option, *Mathematical Finance*, vol. 32, pp. 1077–1088.
- Sandmann, K. and Sondermann, D. (1977). A note on the stability of lognormal interest rate models and the pricing of Eurodollar futures, *Mathematical Finance*, vol. 7, pp. 119–128.
- Shiryaev, A.N. (1999) *Essentials of Stochastic Finance*, World Scientific.
- Shreve, S.E. (2004) *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer.
- Tice, J. and Webber, N. (1997) A nonlinear model of the term structure of interest rates, *Mathematical Finance*, vol. 7, pp. 177–209.
- Uhlenbeck, G. E. and Ornstein, L.S. (1930) On the theory of the Brownian motion. *Physical Review*, vol. 36, pp. 823–841.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, vol. 5, pp. 177–188.

서울대학교 금융경제연구원은 학제 간 연구 및 국제 교류를 통해 금융시장과 금융기관, 금융정책 등에 관한 세계적 수준의 연구 수행 및 정책 제언을 목표로 한다. 특히 최첨단의 연구 결과를 바탕으로 한국의 금융제도 발전과 금융산업 활성화, 금융위기 예방을 위한 정책 수립, 그리고 고급 금융인력 양성에 기여하고자 한다.

SIRFE Technical Report Series No.1

2021년 9월 1일 인쇄

2021년 9월 1일 발행

발행인 **김영식**

발행처 **서울대학교 금융경제연구원**

서울특별시 관악구 관악로 1

전화 : 02-880-5424, 5425 FAX : 02-888-4231

<http://sirfe.snu.ac.kr/>
