

IM&F 시리즈 19

## 금융공학 IX

Fourier Analysis  
for Financial Engineering

최병선 지음

*SIRFE*

This page is empty.

[표지사진]

**John Gardner Courtyard and Hoover Tower@Stanford Univ**  
**본서 원고를 마지막으로 교정보던 자리에서 촬영**

2021. 6. 24.

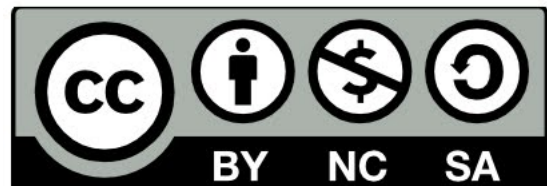
F8 and 1/100sec ISO-100

Canon EOS 5D Mark IV

이 저작물에는 크리에이티브 커먼즈 저작자표시-비영리  
4.0 국제 라이선스가 적용 되어 있습니다. 이 라이선스의  
설명을 보고 싶으시면 다음 웹사이트를 참조하세요.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

 **creative  
commons**



This page is empty.

# 머릿글

1976년이었던가? 본저자는 당시 인기가 있던 IBM주식의 주가를 피어리오드그램(periodogram)을 사용해서 분석한 적이 있었다. 그로부터 43년이 지난 2019년 서울대학교 수학과에서 포스트박터를 하던 김박사가 찾아와서 주가데이터에서 주기를 찾아내는 문제에 관해서 질문을 했다. 간단히 피어리오드그램(periodogram)을 설명해주고, 좀 더 자세한 것을 공부하고 싶으면 M.B. Priestley교수가 1982년에 쓴 *Spectral Analysis and Time Series*를 읽으라고 권유하였다 [51]. ‘퀀티터티브트레이딩을 하려면 Fourier해석과 FFT를 알아야 한다’는 말과 함께 ... 김박사를 보내고 나서, 언젠가는 금융을 공부하는 사람을 위한 간단한 Fourier해석 책을 한글로 써야겠다고 마음 먹었다. 그후 ‘금융을 공부하는 사람들 중에서 과연 몇 명이나 이 원고를 읽을 수 있을까?’라는 의문을 갖으면서도 꾸준히 본서의 원고를 작성해 왔다.

Fourier 해석을 사용해서 경제데이터를 분석한 것은 최소 1898년으로 거슬러 올라가서 Arthur Schuster가 밀가격데이터(wheat price index), 흑점데이터(sunspot data), 일본의 지진주기 등을 연구한 것으로부터 시작되었다고 할 수 있다. 그후 피어리오드그램은 스펙트럼(spectrum)으로 발전되었고, 1965년 Cooley and Tukey가 현대적 FFT를 제안함으로써 Fourier해석이 이론적으로 발전되고 또한 실용적으로 널리 사용되게 되었다.

금융공학에서 Fourier 해석은 두 분야에서 주로 사용된다. 첫째는 확률변동성모형이나 Lévy 확률과정을 바탕으로 하는 Lévy모형을 분석하는 데 사용된다. 둘째는 퀀티터티브트레이더들이 금융데이터를 분석하는 데 사용된다.

많은 문제점을 지닌 Black-Scholes-Merton모형의 대안으로 다음과 같은 네 종류 모형들이 자주 사용된다. 1994년 Dupire 등에 의해 제시된 국소변동성모형(local volatility model), 1993년에 제시된 Heston모형이나 2002년에 제시된 SABR모형과 같은 확률변동성모형(stochastic volatility model), 원자산과정에 점프를 추가한 점프확산모형(jump diffusion model), 그리고 알파안정확률분포( $\alpha$ -stable probability distribution)를 따르는 Lévy 확률과정을 바탕으로 한 Lévy모형 등이 사용된다. 이 중에서 국소변동성모형을 제외한 나머지 세 모형들을 제대로 이해하기 위해서는 Fourier 해석을 잘 이해하고 있어야 한다.

퀀티터티브트레이딩에서 Fourier 해석의 위치에 대해서는 <https://www.investopedia.com/articles/active-trading/111214/quants-what-they-do-and-how-theyve-evolved.asp>에서 인용한 다음 글이 잘 설명하고 있다.

Certain aspects of statistics are the backbone of quantitative trading, including

regression theory and time-series analysis. Electronic engineering techniques such as Fourier analysis and wavelet analysis are also utilized in quantitative analysis. Most of the statistics concepts you will need to understand to work in quant trading is so advanced that it is not taught at an undergraduate level. For this reason, it is important to pursue advanced study in statistics (namely Ph.D. coursework)

본서는 이 두 분야를 공부하거나 실무에 사용하고자 하는 사람들에게 필요한 Fourier 해석 입문서이다. 즉, 본서를 쓴 목적은 Fourier 해석을 사용하는 금융모형을 이해하거나 금융데이터를 분석하고자 하는 사람들에게 Fourier 해석의 기초를 제공하는 것이다.

어려운 환경에서도 본서의 출간을 허락해주신 서울대학교 금융경제연구원 김영식원장님께 감사드린다. 또한 출판과정에서 실무를 도와준 김은정선생과 고관표조교에게 고마움을 표한다. 본서는 서울대학교 금융경제연구원의 지원을 받아 만들어졌음을 밝혀둔다.<sup>1</sup>

Stanford 대학의 Hoover Tower를 바라보면서  
본서의 원고를 교정하던 COVID19시절에 ...

최병선

[datalyab.com](http://datalyab.com)

2021년 8월 15일

**DATAly**  
**Lab**  
Data Analytics for  
Thinking Analytically

---

<sup>1</sup>Financial support from the Institute for Research in Finance and Economics of Seoul National University is gratefully acknowledged.

# 차례

차례	i
<b>제 1 장 복소적분</b>	<b>1</b>
제1.1절 Euler식 . . . . .	1
제1.2절 영역과 경계 . . . . .	4
제1.3절 경로적분 . . . . .	6
제1.4절 Cauchy정리 . . . . .	13
제1.5절 Cauchy적분식 . . . . .	24
제1.6절 Laurent급수 . . . . .	36
제1.7절 유수정리 . . . . .	45
제1.8절 가지를 고려하는 복소적분 . . . . .	64
<b>제 2 장 Fourier급수</b>	<b>95</b>
제2.1절 삼각함수의 직교성 . . . . .	95
제2.2절 Fourier전개 . . . . .	99
제2.3절 Gibbs현상 . . . . .	104
제2.4절 이산형Fourier변환 . . . . .	105
<b>제 3 장 Fourier변환</b>	<b>111</b>
제3.1절 Fourier변환과 역Fourier변환 . . . . .	111
제3.2절 Fourier변환의 성질 . . . . .	115
제3.3절 Hermite행렬과 유니터리행렬 . . . . .	118
제3.4절 DFT . . . . .	123
제3.5절 FFT . . . . .	125
제3.6절 주기와 주파수 . . . . .	135

제3.7절	컴퓨터함수들	140
제3.8절	FFT와 Fourier 변환	153
제3.9절	Plancharel-Parseval 등식	155
<b>제 4 장</b>	<b>스펙트럴해석</b>	<b>163</b>
제4.1절	스펙트럼	163
제4.2절	테이퍼링	171
제4.3절	윈도우	172
제4.4절	2D Fourier 변환	182
제4.5절	ME스펙트럼과 KL스펙트럼	185
<b>제 5 장</b>	<b>특성함수</b>	<b>187</b>
제5.1절	특성함수의 정의	187
제5.2절	특성함수의 성질	195
제5.3절	특성함수의 역함수	200
<b>제 6 장</b>	<b>Laplace 변환</b>	<b>223</b>
제6.1절	이상적분	223
제6.2절	Laplace 변환의 정의	225
제6.3절	Laplace 변환의 성질	230
제6.4절	Laplace 변환과 미분방정식	236
제6.5절	상수계수의 선형미분방정식	240
제6.6절	단위스텝함수의 Laplace 변환	245
제6.7절	합성곱	250
제6.8절	역Laplace 변환	253
<b>제 7 장</b>	<b>금융파생상품과 Fourier 변환</b>	<b>265</b>
제7.1절	유럽형옵션가치	265
제7.2절	내가격확률과 Fourier 변환	273
제7.3절	Black-Scholes 환경 하에서 Fourier 변환	279
제7.4절	Carr-Madan 변환	286
제7.5절	Heston 모형	289
7.5.1	Heston 모형과 Fourier 변환	289



7.5.2	헤지포트폴리오와 Heston 편미분방정식 . . . . .	293
7.5.3	옵션가치의 편미분방정식 . . . . .	295
7.5.4	다변량Feynman-Kac정리 . . . . .	297
7.5.5	내가격확률의 편미분방정식 . . . . .	298
7.5.6	새로운 형태의 Heston 확률미분방정식들 . . . . .	300
7.5.7	특성함수의 편미분방정식 . . . . .	303
7.5.8	Riccati미분방정식 . . . . .	305
7.5.9	특성함수방정식의 Riccati해 . . . . .	307
7.5.10	유럽형옵션의 Heston가치평가식 . . . . .	309
7.5.11	배당이 있는 주식에 대한 Heston가치평가식 . . . . .	310
7.5.12	Black-Scholes식의 유도 . . . . .	312

## 참고 문헌

317



# 제 1 장

## 복소적분

Le plus court chemin entre deux verites dans le  
domaine reel passe par le domaine complexe.  
(The shortest path between two truths in the real  
domain passes through the complex domain.)

Jacques Hadamard

특성함수 (characteristic function)는 Fourier 적분이다. 따라서, 특성함수를 잘 다루기 위해서는 Fourier 해석 (Fourier analysis)에 관한 지식이 있어야 한다. 주어진 특성함수나 적률모함수로부터 확률밀도함수를 구하기 위해서는 복소적분 (complex integral)을 해야 할 경우가 있다. 이 장에서는 복소적분을 간단히 복습하고, 또한 가지 (branch)를 고려해야 하는 복소적분에 대해서 자세히 살펴보자.

Fourier 해석에 관한 좀 더 자세한 내용은 최병선 [1], Dym & McKean [29]과 Körner [40], [41]를 참조하라. 데이터사이언스 관점에서 Fourier 해석과 스펙트럴해석 (spectral analysis)을 공부하고자 하는 독자는 Kutz[42]를 참조하라.

### 제1.1절 Euler식

Fourier 해석을 공부하기 위해서는 먼저 복소지수함수 (complex exponential function)  $e^{it}$ 를 이해하는 것이 필수적이다. 여기서  $t$ 는 실수이고,  $i = \sqrt{-1}$ 이다. 이 절에서는 이 함수에 대해서 간단히 살펴보자.

**정의 1.1.1: Euler식**

임의의 실수  $t$ 에 대해서 복소지수함수  $e^{it}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$e^{it} \doteq \cos t + i \sin t$$

정의 1.1.1에서와 같이  $e^{it}$ 를 정의하는 이유는 무엇일까? 이렇게 정의하는 것이 실함수  $e^t$ 와 정합적일까? 이러한 질문들에 대해 답하기 위해서, 우선 다음과 같은 실함수들의 Taylor 급수들을 살펴보자.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} [-1]^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (1.1.1)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} [-1]^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad (1.1.2)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad (1.1.3)$$

여기서  $x$ 는 실수이다. 만약 이 급수들이 복소수집합에서도 성립한다면(사실 이 식들은 복소수집합에서도 성립한다), 다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [it]^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [-1]^k \frac{1}{(2k)!} t^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} [-1]^k \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1} \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

따라서, 정의 1.1.1의 Euler식은 타당성을 갖는다.

다음으로, 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$y'' - [\alpha + \beta]y' + \alpha\beta y = 0 \quad (1.1.5)$$

만약  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 서로 다른 실수들이라면, 미분방정식 (1.1.5)의 일반해는 다음과 같다.

$$y = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} \quad (1.1.6)$$

만약  $\alpha = i$ 이고  $\beta = -i$ 이면, 이에 해당하는 미분방정식은 다음과 같다.

$$y'' + y = 0 \quad (1.1.7)$$

식 (1.1.6)에서 알 수 있듯이, 미분방정식 (1.1.7)의 해를 다음과 같이 표기하는 것이 타당해 보인다.

$$y = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \quad (1.1.8)$$

코사인함수  $\cos t$ 나 사인함수  $\sin t$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$(\cos t)'' + \cos t = 0 \quad (1.1.9)$$

$$(\sin t)'' + \sin t = 0 \quad (1.1.10)$$

즉,  $\cos t$ 나  $\sin t$ 는 미분방정식 (1.1.7)을 만족한다. 따라서,  $e^{it}$ 를  $\sin t$ 와  $\cos t$ 의 선형결합으로 나타내는 것은 당연한 것처럼 보인다. 즉, 정의 1.1.1의 Euler식은 타당성을 갖는다.

다음 명제가 성립하는 것은 자명하다.

#### 명제 1.1.1

임의의 실수들  $t$ 와  $s$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

- a)  $e^{i[t+s]} = e^{is} e^{it}$
- b)  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
- c)  $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

#### 정의 1.1.2

임의의 실수들  $s$ 와  $t$ 에 대해서 복소지수함수를 다음과 같이 정의한다.

$$e^{s+it} \doteq e^s [\cos t + i \sin t]$$

**명제 1.1.2**

임의의 복소수들  $z_1, z_2$ 와  $z$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{i[z_1+z_2]} &= e^{iz_1}e^{iz_2} \\ \text{b) } \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \text{c) } \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

**제1.2절 영역과 경계**

실함수들  $u$ 와  $v$ 가 구간  $[a, b]$ 에서 적분가능이면, 복소함수  $z(t) = u(t) + iv(t)$ 의 구간  $[a, b]$ 에서 적분을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \quad (1.2.1)$$

복소평면에서  $\Gamma = \{z(t) = u(t) + iv(t) | a \leq t \leq b\}$ 는 곡선(curve)을 의미한다. 이후 본서에서는  $u(t)$ 와  $v(t)$ 가 구간  $[a, b]$ 에서 연속이라고 가정하자. 구간  $[a, b]$ 가 콤팩트(compact, closed and bounded)이고  $z(\cdot)$ 가 연속인 함수이므로 집합  $\Gamma$ 도 콤팩트이다. 점  $(a, z(a))$ 를 시점(initial point), 그리고 점  $(b, z(b))$ 를 종점(terminal point)이라 한다. 곡선  $\Gamma$ 의 시점과 종점이 일치하면,  $\Gamma$ 를 닫힌경로(closed curve)라 한다.

임의의 서로 다른  $t_1, t_2 \in [a, b]$ 에 대해서  $z(t_1) \neq z(t_2)$ 이면,  $\Gamma$ 를 단순경로(simple curve)라 부른다. 임의의 서로 다른  $t_1, t_2 \in [a, b]$ 에 대해서  $z(t_1) \neq z(t_2)$ 이고 또한  $z(a) = z(b)$ 이면,  $\Gamma$ 를 단순닫힌경로(simple closed curve) 또는 Jordan 경로라 부른다.

한 영역  $D$ 안에 들어있는 모든 단순닫힌경로의 안쪽에 있는 모든 점들이  $D$ 에 속하면,  $D$ 를 단순연결영역(simply connected domain)이라 부른다. 그림 1.2.1은 <https://mathworld.wolfram.com/SimplyConnected.html>에서 인용한 것이다.

단순연결영역이 아닌 영역  $D$ 에 속하면서  $D$ 에 속하지 않는 임의의 점을 자신의 안쪽으로 포함하는 단순닫힌경로가 존재하면, 영역  $D$ 를 다중연결영역(multiply connected domain)이라 부른다. 그림 1.2.2은 <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/simply-connected-region>에서 인용한 것이다.

영역  $D$ 의 경계를 따라 움직일 때, 영역  $D$  내부의 점들이 진행방향의 좌측에 있는 경우, 이

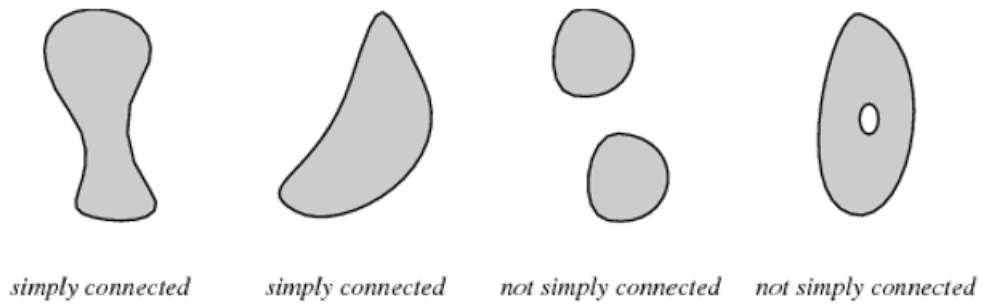


그림 1.2.1. 단순연결영역

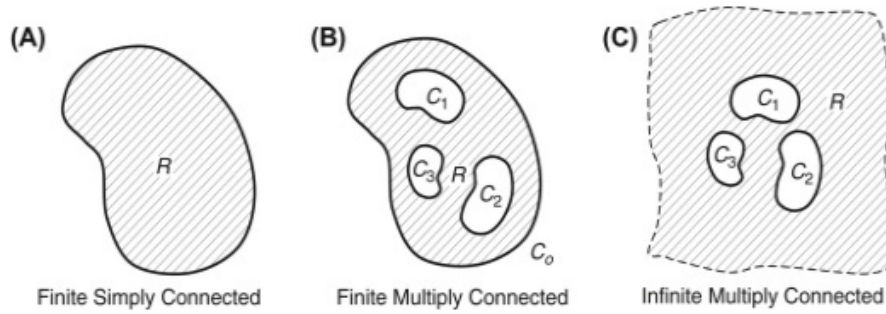


그림 1.2.2. 다중연결영역

경계는 양방향(positive orientation)을 취한다고 한다. 그림 1.2.3의  $C_1$ 과  $C_2$ 는 양방향을 취하는 경계들을 나타낸다. 단순닫힌경로인 경우에는 역시계방향(counterclockwise direction)이 양방향이다.

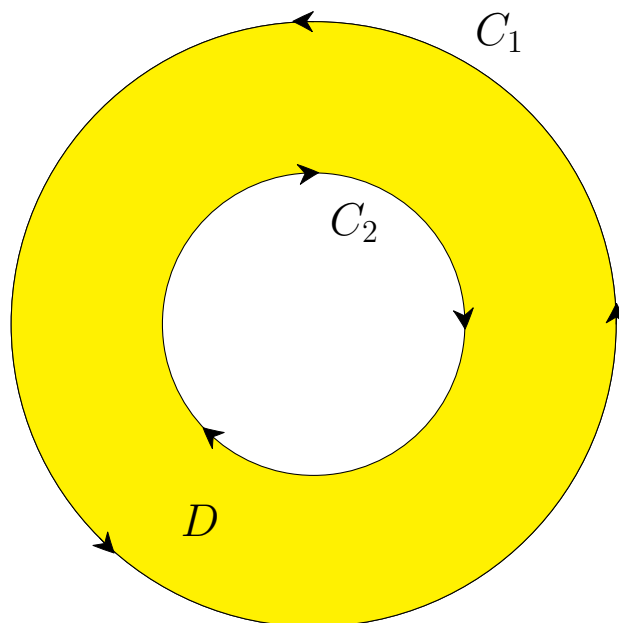


그림 1.2.3. 경계의 양방향

그림 1.2.3을 그리기 위해서는 다음 MultiConnected103.tikz파일을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: MultiConnected103.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \documentclass{article}
6
7 \usepackage{tikz}
8 \usetikzlibrary{arrows.meta}
9 \usetikzlibrary{bending}
10
11 \begin{document}
12
13 \begin{tikzpicture}[scale=2,font=\LARGE, cap=round, >=latex]
14   \def\Radius1{2.0cm}
15
16   \draw (0cm,0cm) circle[radius=\Radius1];
17
18   \filldraw[fill=yellow] (0,0) circle (2);
19   \draw[fill=white](0,0) circle (1);
20   \begin{scope}[
21     -{Stealth[round, length=8pt, width=8pt, bend]},
22     shorten >=4pt,
23     very thin,
24   ]
25     \draw (\Radius1,0) arc(-3:3:\Radius1);
26     \draw (0, \Radius1) arc(90-3:90+3:\Radius1);
27     \draw (-\Radius1/1.414,- \Radius1/1.414) arc(225-3:225+3:\Radius1);
28     \draw (1,0) arc(3:-3:1);
29     \draw (0, 1) arc(90+3:90-3:1);
30     \draw (-1/1.414,- 1/1.414) arc(225+3:225-3:1);
31   \end{scope}
32
33   % draw the two points
34   \fill[radius=.0pt]
35     (60:\Radius1) circle[] node[above right] {$C_{1}$} ;
36   \fill[radius=.0pt]
37     (60:1) circle[] node[below left] {$C_{2}$} ;
38   \fill[radius=.0pt]
39     (240:1.5) circle[] node[] {$D$} ;
40 \end{tikzpicture}
41
42
43 \end{document}
44
45 % -----

```

### 제1.3절 경로적분

그림 1.3.1에 그려진 길이가 유한한 곡선  $C$ 를 살펴보자. 이러한 곡선을 길이를 갖는(rectifiable) 곡선이라 부른다. 폐구간  $[a, b]$ 에 대해서, 곡선  $C$ 의 시점이  $z_0 \doteq z(a)$ 이고 종점이  $z_n \doteq z(b)$ 라 하자. 또한, 집합  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ 은 곡선  $C$ 를  $n$ 개 부분으로 나눈다고 하자. 현  $\widehat{z_{k-1}z_k}$



상에서 임의의 점  $\xi_k$ 를 선택하고, 다음과 같은 합  $S_n$ 을 정의하자.

$$S_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \doteq \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[z_k - z_{k-1}] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k \quad (1.3.1)$$

여기서  $\Delta z_k \doteq z_k - z_{k-1}$ 이다. 다음 극한값이 존재한다고 가정하자.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0}} S_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k \quad (1.3.2)$$

만약 이 극한값이 존재하면, 함수  $f(z)$ 는 경로  $C$ 에서 경로적분(path integral) 또는 복소선 적분(complex line integral)이 가능하다고 한다. 이 경로적분을 다음과 같이 표기하자.

$$\int_C f(z)dz \doteq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k \quad (1.3.3)$$

만약 적분경로  $C$ 가 단순닫힌경로이고 양방향을 취하면, 이 경로적분을 다음과 같이 표기하기도 한다.

$$\oint_C f(z)dz \doteq \int_C f(z)dz \quad (1.3.4)$$

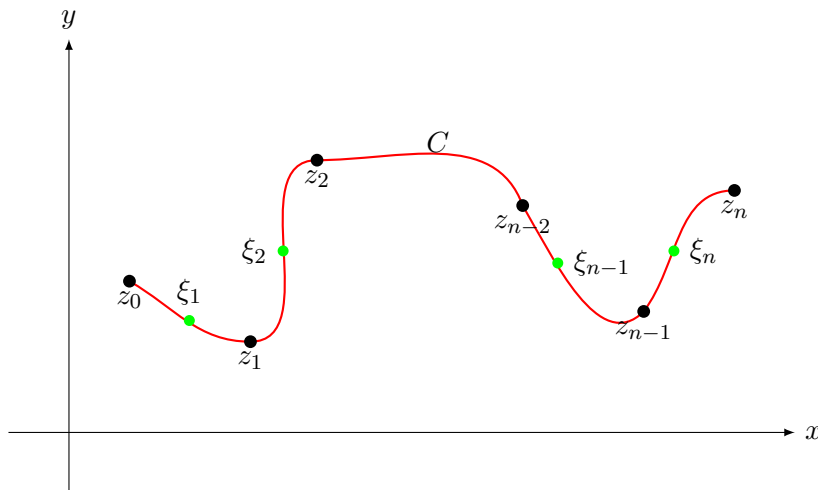


그림 1.3.1. 적분경로

그림 1.3.1을 그리기 위해서는 다음 IntegralPath101.tikz파일을 실행하라.

```
1 | % -----
```

```

2 % Filename: IntegralPath101.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=.8]
6 % Axes
7 \draw [-latex] (-1,0) -- (12,0) node (xaxis) [right] {$x$};
8 \draw [-latex] (0,-1) -- (0,6.5) node [above] {$y$};
9 % Points
10 \coordinate (0) at (1,2.5);
11 \coordinate (1) at (3,1.5);
12 \coordinate (2) at (4.1,4.5);
13 \coordinate (n-2) at (7.5,3.75);
14 \coordinate (n-1) at (9.5,2.0);
15 \coordinate (n) at (11,4.0);
16 % Plot
17 \draw [red,thick,-] (0) to[out=-30,in=180] (1) to[out=0,in=180]
18 (2) to[out=0,in=110] (n-2) to[out=300,in=225]
19 (n-1) to[out=53,in=180] (n);
20 % show the points
21 \foreach \k in {0,1,2,n-2,n-1,n}
22 \fill [black] (\k) circle (3pt) node [below] {$z_{\k}$};
23 \node at (6.1,4.8) {$C$};
24 \draw (1.99,1.85) node[fill=green,circle,scale=0.4,label=above:$\xi_1$]{};
25 \draw (3.54,3.0) node[fill=green,circle,scale=0.4,label=left:$\xi_2$]{};
26 \draw (8.08,2.8) node[fill=green,circle,scale=0.4,label=right:$\xi_{n-1}$]{};
27 \draw (10.0,3.0) node[fill=green,circle,scale=0.4,label=right:$\xi_n$]{};
28 \end{tikzpicture}
29 % -----

```

**예제 1.3.1** 그림 1.3.2의 적분경로  $C$ 를 따라 함수  $f(z) = z$ 를 적분하자. 즉, 복소선적분  $\int_C f(z)dz$ 를 구해보자.

각  $k$ 에 대해서 다음 값들을 정의하자.

$$z_k = \xi_k = e^{i\pi \frac{k}{2n}}, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

다음 식들이 성립한다.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\pi \frac{k}{2n}} \left[ e^{i\pi \frac{k+1}{2n}} - e^{i\pi \frac{k}{2n}} \right] = \left[ e^{i\pi \frac{1}{2n}} - 1 \right] \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\pi \frac{k}{2n}} = \left[ e^{i\pi \frac{1}{2n}} - 1 \right] \frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\pi \frac{1}{n}} - 1} \quad (2)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\pi \frac{1}{2n}} + 1} = -1 \quad (3)$$

■

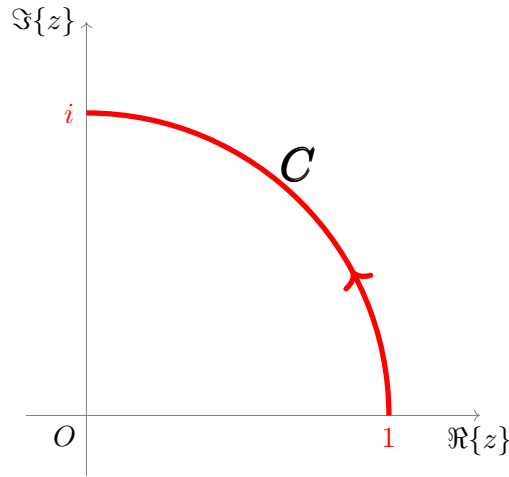


그림 1.3.2. 예제 1.3.1의 적분경로

그림 1.3.2를 그리기 위해서는 다음 IntegralPath102.tikz파일을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: IntegralPath102.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=4,
6 decoration={markings, mark=at position 2cm with {\arrow[line width=2pt]{>}} ]
7 % The axes
8 \draw[help lines,->] (-0.2,0) -- (1.3,0) coordinate (xaxis);
9 \draw[help lines,->] (0,-0.2) -- (0,1.3) coordinate (yaxis);
10 % The path
11 \path[draw,line width=2.0pt,color=red,postaction=decorate]
12 (1,0) node[below] {$1$}
13 arc (0:90:1)
14 (0,1) node[left] {$i$};
15 % The labels
16 \node[below] at (xaxis) {$\operatorname{Re}\{z\}$};
17 \node[left] at (yaxis) {$\operatorname{Im}\{z\}$};
18 \node[below left] {$0$};
19 \node at (0.7,0.83) {$\pmb{C}$};
20 \end{tikzpicture}
21 % -----

```

만약 함수들  $P(x, y)$ 와  $Q(x, y)$ 가 경로  $C$  상에서  $(x, y)$ 의 연속함수이면, 위에서 정의한 복소선적분과 같은 방법으로  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 의 실선적분(real line integral)을 정의할 수 있다. 이 실선적분을  $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  또는  $\int_C Pdx + Qdy$ 로 표기한다.

만약 함수  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ 가 경로  $C$  상에서 복소선적분이 가능하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = \int_C [P + iQ][dx + idy] = \left[ \int_C Pdx - Qdy \right] + i \left[ \int_C Qdx + Pdy \right] \quad (1.3.5)$$

**보조정리 1.3.1: 선적분의 성질**

- a)  $\int_C af(z)dz = a \int_C f(z)dz$ . 여기서  $a$ 는 상수이다.  
 b)  $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$   
 c)  $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$ . 여기서  $-C$ 는  $C$ 의 반대방향 경로이다.  
 d) 만약  $C = C_1 + C_2$ 이고  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

- e) 만약  $\max_{z \in C} |f(z)| \leq M$ 이고 곡선  $C$ 의 길이가  $L$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$$

곡선  $\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid a \leq t \leq b\}$ 가  $C^1$ 에 속하면,  $\Gamma$ 를 평활한 곡선(smooth curve)이라 부른다. 함수  $f(z)$ 가 평활한 곡선  $\Gamma$  상에서 연속이면, 함수  $f(z(t))z'(t)$ 도 구간  $[a, b]$ 에서 연속이다. 따라서 함수  $f(z(t))z'(t)$ 는 구간  $[a, b]$ 에서 적분가능하다. 이 경로적분은 다음과 같다.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \quad (1.3.6)$$

**예제 1.3.2** 예제 1.3.1을 다시 살펴보자. 즉, 그림 1.3.2의 경로  $C$ 를 따라 함수  $f(z) = z$ 를 적분하자.

다음 함수를 정의하자.

$$z(t) = e^{it}, \quad (0 \leq t \leq \pi/2) \quad (1)$$

식  $z'(t) = ie^{it}$ 에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{\pi/2} e^{it} ie^{it} dt = i \int_0^{\pi/2} e^{2it} dt = \frac{1}{2} e^{2it} \Big|_0^{\pi/2} = -1 \quad (2)$$

■

**예제 1.3.3** 반경이  $r$ 인 원의 주위를 양방향으로 움직이는 경로  $C_r$ 을 따라 함수  $f_m(z) = z^m$

를 적분하자. 여기서  $m$ 은 정수이다. 즉, 복소선적분  $I_m(r) \doteq \int_{C_r} z^m dz$ 를 구하자.

다음 함수를 정의하자.

$$z(t) = re^{it}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{1}$$

식  $z'(t) = ie^{it}$ 를 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{C_r} f_m(z) dz = \int_0^{2\pi} r^m e^{itm} i r e^{it} dt = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i[m+1]t} dt \tag{2}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$I_m(r) = \begin{cases} 0, & (m \neq -1) \\ 2\pi i, & (m = -1) \end{cases} \tag{3}$$

적분값  $I_m(r)$ 은 반경  $r$ 에 의존하지 않는다는 점에 유의하라. ■

**예제 1.3.4** 양방향으로 움직이는 경로  $C_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ 을 따라 함수  $f_m(z) = [z - z_0]^m$ 을 적분하자. 여기서  $m$ 은 정수이고,  $z_0$ 는 고정된 복소수이다.

예제 1.3.3에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{|z-z_0|=r} [z - z_0]^m = \begin{cases} 0, & (m \neq -1) \\ 2\pi i, & (m = -1) \end{cases} \tag{1}$$

■

실해석이나 복소해석에서 해석함수(analytic function)은 매우 중요한 것이다. 해석함수의 정의를 영어로 기술하고자 한다. 그 이유는 해석개론에 익숙하지 않은 독자에게 한글로 이 정의를 쓰면 혼란을 일으킬 수도 있기 때문이다.

**정의 1.3.1: 해석함수**

An analytic function is a function that is locally given by a convergent power series.

In other words, a function is analytic if and only if its Taylor series about  $x_0$  converges to the function in some neighborhood for every  $x_0$  in its domain.

다음 정리들은 미분가능성에 관한 중요한 성질들이다. 이 성질들에 대한 증명은 [https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Riemann\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Riemann_equations)를 참조하라.

### 정리 1.3.1: Cauchy-Riemann식 I

만약 함수  $f = u + iv$ 가 복소수  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ 에서 미분가능하면 (differentiable), 점  $(x_0, y_0)$ 에서 편도함수들  $u_x, v_x, u_y$  그리고  $v_y$ 가 존재하고 또한 점  $(x_0, y_0)$ 에서 다음과 같은 Cauchy-Riemann식들을 만족한다.

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

### 정리 1.3.2: Cauchy-Riemann식 II

점  $(x_0, y_0)$ 를 포함하는 정의역  $D$  상에서 함수  $f = u + iv$ 가 연속이며 편도함수들  $u_x, v_x, u_y$  그리고  $v_y$ 가 존재한다고 가정하자. 만약 점  $(x_0, y_0)$ 에서 Cauchy-Riemann식들  $u_x = v_y$  와  $u_y = -v_x$ 이 만족되면, 함수  $f$ 는 점  $(x_0, y_0)$ 에서 미분가능하며 또한 다음 식을 만족한다.

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

앞에서도 언급했듯이, 닫힌경로  $C$ 가 양방향(positive direction 또는 counterclockwise direction)을 취하면, 함수  $f(z)$ 의 경로  $C$ 에서 경로적분을  $\int_C f(z)dz$  또는  $\oint_C f(z)dz$ 로 표기한다. 이러한 적분을 경로적분(contour integral)이라 한다.

지금까지 선적분을 세 가지 방법으로 설명하였다. 첫째, 식 (1.3.3)에서 기술한 Riemann 합의 극한에 의한 선적분의 정의는 중요한 정리를 증명할 때 자주 사용된다. 둘째, 식 (1.3.5)에서 기술한 실선적분은 해석함수의 적분에 관한 성질을 설명할 때 유용하다. 셋째, 매개함수를 사용하는 식 (1.3.6)은 실제 적분을 계산하는데 편리하다.

### 제1.4절 Cauchy 정리

Cauchy 정리는 복소해석에서 가장 중요한 정리들 중에서 하나이다. 이 절에서는 Cauchy 정리에 대해서 살펴보고자 한다.

단순닫힌경로 (simple closed curve)  $C \subset \mathbb{R}^2$ 가 구분적으로 평활 (piecewisely smooth) 하며 양방향 (positively oriented) 을 취하고,  $D$ 는 곡선  $C$ 로 둘러싸인 영역이라고 하자. 또한, 함수들  $P(x, y)$ 와  $Q(x, y)$ 가 열린영역  $O \supset D$ 에서 연속인 편도함수들을 갖는다고 하자. 그림 1.4.1의 단순한 형태의 영역  $D$ 를 살펴보자. 그림 1.4.1을 그리기 위해서는 아래 수록한 MATLAB 프로그램 GreenTheorem101.m을 실행하라.

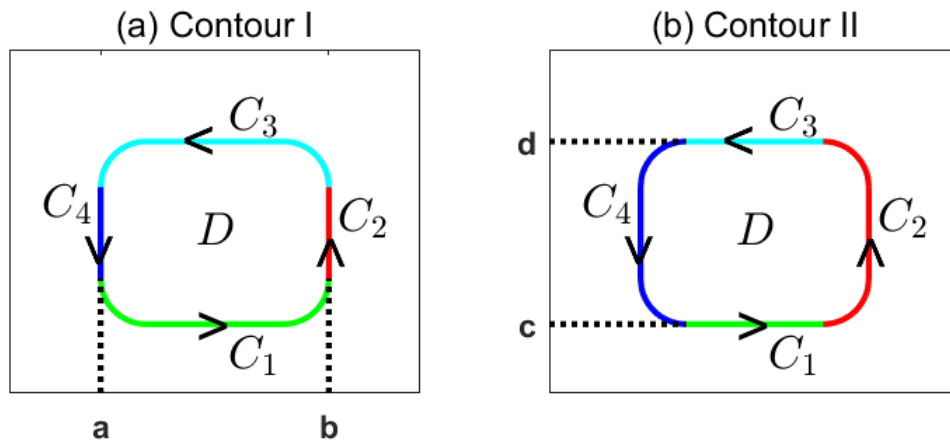


그림 1.4.1. Green 정리의 적분경로들

그림 1.4.1의 좌측 그래프에서 영역  $D$ 의 경계  $C$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \tag{1.4.1}$$

여기서 각 부분곡선은 다음과 같다.

$$C_1 \doteq \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\} \tag{1.4.2}$$

$$C_2 \doteq \{(b, y) \mid f(b) \leq y \leq g(b)\} \tag{1.4.3}$$

$$C_3 \doteq \{(x, g(x)) \mid a \leq x \leq b\} \tag{1.4.4}$$

$$C_4 \doteq \{(a, y) \mid f(a) \leq y \leq g(a)\} \tag{1.4.5}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left[ \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= - \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] dx = \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))] dx \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx \quad (1.4.7)$$

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 \quad (1.4.8)$$

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = \int_b^a P(x, g(x)) dx \quad (1.4.9)$$

$$\int_{C_4} P(x, y) dx = 0 \quad (1.4.10)$$

식 (1.4.7) ~ 식 (1.4.10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C P(x, y) dx = \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))] dx \quad (1.4.11)$$

식 (1.4.6)과 식 (1.4.11)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1.4.12)$$

그림 1.4.1의 우측 그래프에서 영역  $D$ 의 경계  $C$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (1.4.13)$$

여기서 각 부분곡선은 다음과 같다.

$$C_1 \doteq \{(x, c) \mid h(c) \leq x \leq k(c)\} \quad (1.4.14)$$

$$C_2 \doteq \{(k(y), y) \mid c \leq y \leq d\} \quad (1.4.15)$$

$$C_3 \doteq \{(x, d) \mid h(d) \leq x \leq k(d)\} \quad (1.4.16)$$

$$C_4 \doteq \{(h(y), y) \mid c \leq y \leq d\} \quad (1.4.17)$$



다음 식들이 성립한다.

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left[ \int_{h(y)}^{k(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d [Q(x, k(y)) - Q(x, h(y))] dy \quad (1.4.18)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} Q(x, y) dy = 0 \quad (1.4.19)$$

$$\int_{C_2} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(x, k(y)) dy \quad (1.4.20)$$

$$\int_{C_3} Q(x, y) dy = 0 \quad (1.4.21)$$

$$\int_{C_4} Q(x, y) dy = \int_d^c Q(x, h(y)) dy \quad (1.4.22)$$

식 (1.4.19) ~ 식 (1.4.22)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C Q(x, y) dy = \int_c^d [Q(x, k(y)) - Q(x, h(y))] dy \quad (1.4.23)$$

식 (1.4.18)과 식 (1.4.23)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (1.4.24)$$

식 (1.4.12)과 식 (1.4.24)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C [P dx + Q dy] = \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy \quad (1.4.25)$$

```

1 % -----
2 % Filename GreenTheorem101.m
3 % Contours for Green's Theorem
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all
7 % Plot Contour I
8 subplot(1,2,1)
9 x1 = 1:0.02:2; y1 = 2- sqrt(1-(x1-2).^2);
10 plot(x1,y1,'g-', 'linewidth',2)
11 set(gca, 'fontsize',11, 'fontweight', 'bold')
12 set(gca, 'ytick', [],), set(gca, 'yticklabel', [])
13 hold on
14 plot([2,5], [1,1], 'g-', 'linewidth',2)
15 x2 = 5:0.02:6; y2 = 2- sqrt(1-(x2-5).^2);
16 plot(x2,y2,'g-', 'linewidth',2)

```

```

17 plot([6,6],[2,4], 'r-', 'linewidth', 2)
18 x3 = 5:0.02:6; y3 = 4 + sqrt(1-(x3-5).^2);
19 plot(x3,y3, 'c-', 'linewidth', 2)
20 plot([2,5],[5,5], 'c-', 'linewidth', 2)
21 x4 = 1:0.02:2; y4 = 4 + sqrt(1-(x4-2).^2);
22 plot(x4,y4, 'c-', 'linewidth', 2)
23 plot([1,1],[2,4], 'b-', 'linewidth', 2)
24 plot([1,1],[-1,2], 'k:', 'linewidth', 2)
25 plot([6,6],[-1,2], 'k:', 'linewidth', 2)
26 text(3.1,1, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 0);
27 text(3.8,0.3, '$C_1$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
28 text(6,2.2, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 90);
29 text(6.2,3.3, '$C_2$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
30 text(3.5,5, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 180);
31 text(3.8,5.5, '$C_3$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
32 text(1,3.0, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 270);
33 text(-0.3,3.6, '$C_4$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
34 text(3.1,3, '$D$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
35 hold off
36 axis equal;
37 axis([ -1, 8, -0.5, 7 ])
38 xticks([1 6]), xticklabels({'a', 'b'})
39 title('(a) Contour I')
40 xlabel(' '), ylabel(' ')
41 % Plot Contour II
42 subplot(1,2,2)
43 x1 = 1:0.02:2; y1 = 2- sqrt(1-(x1-2).^2);
44 plot(x1,y1, 'b-', 'linewidth', 2)
45 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweight', 'bold')
46 set(gca, 'xtick', []), set(gca, 'xticklabel', [])
47 hold on
48 plot([2,5],[1,1], 'g-', 'linewidth', 2)
49 x2 = 5:0.02:6; y2 = 2- sqrt(1-(x2-5).^2);
50 plot(x2,y2, 'r-', 'linewidth', 2)
51 plot([6,6],[2,4], 'r-', 'linewidth', 2)
52 x3 = 5:0.02:6; y3 = 4 + sqrt(1-(x3-5).^2);
53 plot(x3,y3, 'r-', 'linewidth', 2)
54 plot([2,5],[5,5], 'c-', 'linewidth', 2)
55 x4 = 1:0.02:2; y4 = 4 + sqrt(1-(x4-2).^2);
56 plot(x4,y4, 'b-', 'linewidth', 2)
57 plot([1,1],[2,4], 'b-', 'linewidth', 2)
58 plot([-1,2],[1,1], 'k:', 'linewidth', 2)
59 plot([-1,2],[5,5], 'k:', 'linewidth', 2)
60 text(3.1,1, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 0);
61 text(3.8,0.3, '$C_1$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
62 text(6,2.2, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 90);
63 text(6.2,3.3, '$C_2$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
64 text(3.5,5, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 180);
65 text(3.8,5.5, '$C_3$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
66 text(1,3.0, '>', 'FontSize', 20, 'Rotation', 270);
67 text(-0.3,3.6, '$C_4$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
68 text(3.1,3, '$D$', 'fontsize', 16, 'interpreter', 'latex')
69 hold off
70 axis equal;
71 axis([ -1, 8, -0.5, 7 ])
72 yticks([1 5]), yticklabels({'c', 'd'})
73 title('(b) Contour II')
74 xlabel(' '), ylabel(' ')
75 saveas(gcf, 'GreenTheorem101.png')
76 % End of program
77 % -----

```

지금까지는 아주 간단한 단순영역 (simple region)에 대해서 식 (1.4.25)를 유도하였다. 좀 더 복잡한 영역에 대해서 식 (1.4.25)가 성립함을 증명할 수 있다. 예를 들어, [https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_theorem)에서는 길이가 유한한 Jordan 경로에 대해서 식 (1.4.25)가 성립함을 증명하였다. 식 (1.4.25)가 성립하는 것을 Green 정리 (Green's theorem)라고 부른다.

#### 정리 1.4.1: Green 정리

단순닫힌경로 (simple closed curve in a plane)  $C \subset \mathbb{R}^2$ 가 구분적으로 평활하고 (piecewisely smooth) 양방향 (positively oriented) 취한다고 하자. 또한  $D$ 는 곡선  $C$ 로 둘러싸인 영역이라고 하자. 만약 함수들  $P(x, y)$ 와  $Q(x, y)$ 가 영역  $D$ 를 포함하는 열린영역  $O$ 에서 연속인 편도함수들을 갖으면, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C [Pdx + Qdy] = \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

Green 정리를 이용해서 다음 Cauchy 정리를 유도할 수 있다.

#### 정리 1.4.2: Cauchy 정리

함수  $f$ 가 단순연결영역  $D$ 에서 미분가능하고 또한 도함수  $f'$ 가 연속이면, 단순닫힌경로  $C \subset D$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z) dz = 0$$

증명. 식 (1.3.5)에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\int_C f(z) dz = \int_C [P + iQ][dx + idy] = \left[ \int_C P dx - Q dy \right] + i \left[ \int_C Q dx + P dy \right] \quad (1)$$

편도함수들  $P_x, P_y, Q_x, Q_y$ 는 곡선  $C$ 와 그 내점들로 이루어진 영역  $E$ 에서 연속이다. 정리

1.4.1에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C [Pdx - Qdy] = \iint_E \left[ -\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy \quad (2)$$

$$\oint_C [Qdx + Pdy] = \iint_E \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right] dxdy \quad (3)$$

정리 1.3.1에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x \quad (4)$$

식 (4)를 식 (2)와 식 (3)에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\oint_C [Pdx - Qdy] = 0, \quad \oint_C [Qdx + Pdy] = 0 \quad (5)$$

식 (5)를 식 (1)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad (6)$$

■

#### 따름정리 1.4.1

단순연결영역  $D$ 에서 함수  $f$ 의 도함수  $f'$ 가 연속이고, 또한 경로들  $C_1 \subset D$ 과  $C_2 \subset D$ 가 동일한 시점들과 동일한 종점들을 가지면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

증명. 그림 1.4.2에서  $C = C_1 - C_2$ 라 놓으면,  $C$ 는 닫힌경로이다. 정리 1.4.2에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad (1)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$0 = \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz \quad (2)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (3)$$

■

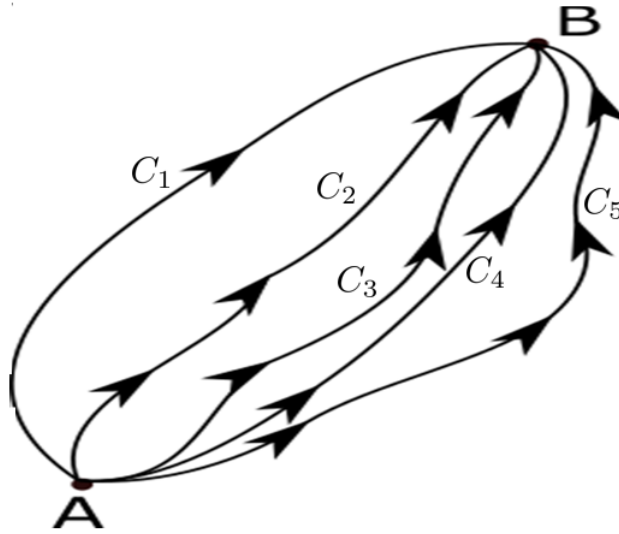


그림 1.4.2. 경로독립성

따름정리 1.4.1을 음미하기 위해서 그림 1.4.2를 살펴보자. 적분경로들  $C_1 \sim C_5$ 는 모두 시점이 A이고 종점이 B이며, 각 적분경로는 영역  $D$ 에 속한다. 이 경우에 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_3} f(z)dz = \int_{C_4} f(z)dz = \int_{C_5} f(z)dz \quad (1.4.26)$$

즉, 이 적분값들은 경로에 의존하지 않는다. 따라서, 고정점  $z_0 \in D$ 에 대해서 다음 함수를 정의할 수 있다.

$$F(z) \doteq \int_{z_0}^z f(w)dw, \quad (z \in D) \quad (1.4.27)$$

**정리 1.4.3**

함수  $f$ 가 영역  $D$ 에서 연속이고, 식  $F'(z) = f(z)$ 를 만족하는 함수  $F(z)$ 가 존재하면, 영역  $D$ 에 속하는 임의의 경로  $C = \{z(t) = x(t) + iy(t) | a \leq t \leq b\}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

증명. 미적분학의 기본정리 (the fundamental theorem of calculus)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C F'(z)dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{dF(z(t))}{dt}dt = F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned} \quad (1)$$

■

지금부터 설명하는 Jordan곡선정리는 직관적으로 볼때 아주 당연한 것이다. 그러나 이 정리의 증명은 그리 쉬운 것이 아니다. 다음 정리와 그림 1.4.3은 [https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan\\_curve\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem)에서 인용하였다.

**정리 1.4.4: Jordan곡선정리**

Let  $C$  be a Jordan curve in the plane  $\mathbb{R}^2$ . Then its complement  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  consists of exactly two connected components. One of these components is bounded (the interior) and the other is unbounded (the exterior), and the curve  $C$  is the boundary of each component.

그림 1.4.3에서 검은 선으로 그려진 Jordan곡선은 공간  $\mathbb{R}^2$ 를 밝은 청색으로 그려진 내점들 (interior points)의 집합과 분홍색으로 그려진 외점들 (exterior points)의 집합으로 나눈다.

다음 정리는 정리 1.4.2를 일반화한 것이다. 이에 대한 증명은 <http://www.kevinhouston.net/blog/2013/03/what-is-the-best-proof-of-cauchys-integral-theorem/>를 참조하라.

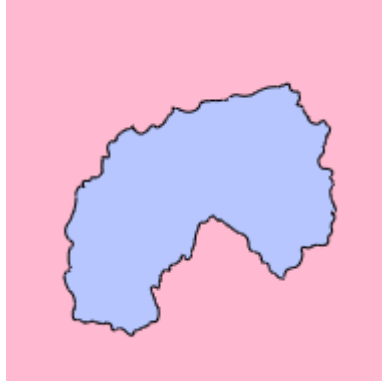


그림 1.4.3. Jordan곡선정리

**정리 1.4.5: Cauchy 정리**

영역  $D \subset \mathbb{C}$ 에서 미분가능한(differentiable) 복소함수(complex function)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 를 살펴보자. 닫힌경로  $C \subset D$ 의 내점들(interior points)이 모두  $D$ 에 속하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z) dz = 0$$

**따름정리 1.4.2**

정리 1.4.5의 조건 하에서 다음 식을 만족하는 함수  $F(z)$ 이 존재한다.

$$F'(z) = f(z)$$

어떤 영역의 여집합 중에서 유계인 집합을 그 영역의 구멍(hole)이라고 부른다. 앞에서 정의했듯이, 다중연결영역(multiply connected region)은 유한 개 구멍들을 갖는 영역이다.

**정리 1.4.6**

함수  $f$ 가 다중연결영역  $D$ 에서 해석적(analytic, holomorphic 또는 regular)이고, 양방향(counter-clockwise direction, positive orientation)을 취하는 적분경로  $C$ 가 영역  $D$ 의

경계라면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = 0$$

증명. 그림 1.4.4의 좌측 그래프와 같이 내부 경계를 하나 갖는 다중연결영역에 대해 이 정리를 증명하는 것으로 충분하다. 그림 1.4.4을 그리기 위해서는 아래 수록 MultiConnected101.tikz 을 실행하라.

그림 1.4.4의 좌측 그래프에서 경로는  $C \doteq C_1 + C_2$ 이다. 또한, 우측 그래프의 단순경로를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C^* \doteq C_1^* + C_4 + C_2^* + C_3 \tag{1}$$

정리 1.4.5에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1^*} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz + \int_{C_2^*} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz = \int_{C^*} f(z)dz = 0 \tag{2}$$

경로  $C_3$ 와 경로  $-C_4$ 를 일치시키면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_4} f(z)dz = - \int_{C_3} f(z)dz \tag{3}$$

식 (2)와 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0 \tag{4}$$

■

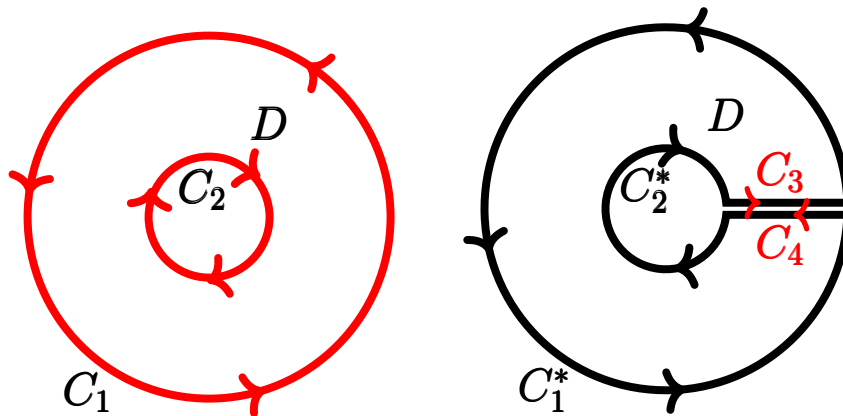


그림 1.4.4. 다중연결영역의 적분경로



```

1 % -----
2 % Filename: MultiConnected101.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=0.8]
6 % Configurable parameters
7 \def\bigradius{3}
8 \def\littleradius{1}
9 % Red path
10 \draw[line width=3pt, color=red, decoration={ markings,
11   mark=at position 0.16 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
12   mark=at position 0.48 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
13   mark=at position 0.80 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
14   postaction={decorate}]
15 (0:\bigradius) arc (0:360:\bigradius) -- cycle;
16 \draw[line width=3pt, color=red, decoration={ markings,
17   mark=at position 0.16 with {\arrow[line width=3pt]{<}},
18   mark=at position 0.48 with {\arrow[line width=3pt]{<}},
19   mark=at position 0.80 with {\arrow[line width=3pt]{<}},
20   postaction={decorate}]
21 (0:\littleradius) arc (0:360:\littleradius) -- cycle;
22 % The labels
23 \node at (-2,-2.9) {$\{\LARGE \pmb{C}_{1}\}$};
24 \node at (-0.1,0.45) {$\{\LARGE \pmb{C}_{2}\}$};
25 \node at (1,1.55) {$\{\LARGE \pmb{D}\}$};
26 \end{tikzpicture}
27 \quad % <----- SPACE BETWEEN PICTURES
28 \begin{tikzpicture}[scale=0.8]
29 % Configurable parameters
30 \def\gap{0.2}
31 \def\bigradius{3}
32 \def\littleradius{1}
33 % Red path
34 \draw[line width=3pt, decoration={ markings,
35   mark=at position 0.15 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
36   mark=at position 0.35 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
37   mark=at position 0.50 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
38   mark=at position 0.68 with {\arrow[color=red, line width=2.0pt]{>}},
39   mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
40   mark=at position 0.89 with {\arrow[line width=3pt]{>}},
41   mark=at position 0.95 with {\arrow[color=red, line width=2.0pt]{>}},
42   postaction={decorate}]
43 let
44   \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)},
45   \n2 = {asin(\gap/2/\littleradius)}
46   in (\n1:\bigradius) arc (\n1:360-\n1:\bigradius)
47   -- (-\n2:\littleradius) arc (-\n2:-360+\n2:\littleradius)
48   -- cycle;
49 % The labels
50 \node at (-2,-3.0) {$\{\LARGE \pmb{C}_{1}^*\}$};
51 \node at (-0.32,0.3) {$\{\LARGE \pmb{C}_{2}^*\}$};
52 \node at (1.9,0.6) [color=red] {$\{\LARGE \pmb{C}_{3}\}$};
53 \node at (1.9,-0.6) [color=red] {$\{\LARGE \pmb{C}_{4}\}$};
54 \node at (1,1.55) {$\{\LARGE \pmb{D}\}$};
55 \end{tikzpicture}
56 % -----

```

**정리 1.4.7**

단순연결영역  $D$ 에 속한 점  $z$ 에 대해서  $f(z) \neq 0$ 인 함수  $f$ 가 영역  $D$ 에서 해석적이면, 식  $f(z) = e^{h(z)}$ 을 만족하고 영역  $D$ 에서 해석적인 함수  $h(z)$ 이 존재한다.

증명. 영역  $D$  상에서  $f(z) \neq 0$ 이므로, 영역  $D$  상에서  $f'(z)/f(z)$ 도 해석적이다. 고정점  $z_0 \in D$ 에 대해서 다음과 같이 정의되는  $h(z)$ 는 잘 정의된 함수이다.

$$h(z) \doteq \int_{z_0}^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw + \text{Log}f(z_0), \quad z \in D \quad (1)$$

여기서  $\text{Log}z$ 는  $\ln z$ 의 주값(principal value)이다. 다음 함수를 정의하자.

$$g(z) \doteq f(z)e^{-h(z)} \quad (2)$$

다음 식들이 성립한다.

$$g'(z) = f'(z)e^{-h(z)} - f(z)h'(z)e^{-h(z)} = \left[ f'(z) - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)} \right] e^{-h(z)} = 0 \quad (3)$$

따라서  $g(z)$ 는 영역  $D$ 에서 상수이다. 다음 식들이 성립한다.

$$g(z_0) = f(z_0)e^{-h(z_0)} = f(z_0)e^{-\text{Log}f(z_0)} = 1 \quad (4)$$

즉, 식  $g(z) \equiv 1$ 이 성립한다. 따라서, 식  $f(z) \equiv e^{h(z)}$ 이 성립한다. ■

**제1.5절 Cauchy적분식**

제1.4절에서 알 수 있듯이, 단순연결영역  $D$ 에서 해석적인 함수  $f(z)$ 를 영역  $D$ 에 속하는 닫힌경로  $C$ 에 따라 적분하면, 적분값  $\int_C f(z)dz = 0$ 이다. 반면에 함수  $f(z)$ 가 영역  $D$ 에 속하는 유한 개 점들을 제외한 나머지 점들에서 해석적인 경우, 이 함수를 적분할 수 있는 경우가 있다. 이 절에서는 이러한 함수의 적분에 대해서 생각해보자. 이후 특별한 언급이 없는 한 각 적분경로는 양방향(counterclockwise direction, positive orientation)을 취한다고 가정하자.

**정리 1.5.1: Cauchy적분식 I**

만약 함수  $f$ 가 영역  $D$ 에서 해석적이고 닫힌경로  $C$ 가 영역  $D$ 에 속한다고 하면, 적분경로  $C$ 의 내점인  $z_0$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

그림 1.5.1에 정리 1.5.1에 기술한 영역  $D$ 와 적분경로  $C$ 가 그려져 있다.

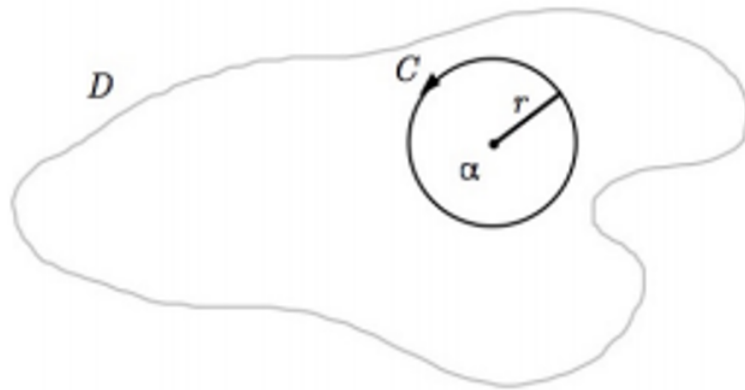


그림 1.5.1. Cauchy적분의 영역과 적분경로

증명. 중심이  $z_0$ 이고 반경이  $\rho$ 이며 양방향을 취하는 경로를  $\gamma$ 라고 하자. 즉,  $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}$ 이다. 여기서 반경  $\rho$ 는 경로  $\gamma$ 가 닫힌경로  $C$ 의 안쪽에 포함되도록 충분히 작은 양수이다. 이 경로  $\gamma$ 가 그림 1.5.2의 좌측 그래프에 그려져 있다. 그림 1.5.2의 우측 그래프처럼 닫힌경로  $C$ 로 부터 두개의 경로들  $C^+$ 와  $C^-$ 를 만들 수 있다. 닫힌경로들  $C$ ,  $C^+$ 와  $C^-$ 는 양방향을 취함을 상기하라.

가정에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z)/[z - z_0]$ 는 닫힌경로  $C^+$ 의 내점에서 해석적이다. 정리 1.4.6에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad (1)$$

같은 방법으로 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad (3)$$

정리 1.4.6의 증명에서 사용한 방법을 적용해서 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5)$$

예제 1.3.4에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 1 \quad (6)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \end{aligned} \quad (7)$$

함수  $f$ 가 점  $z_0$ 에서 연속이므로, 각  $\epsilon > 0$ 에 대해서 다음 명제를 만족하는 양수  $\delta$ 가 존재한다.

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (8)$$

부등식  $\rho < \delta$ 를 만족하는  $\rho$ 에 대한 적분경로  $\gamma$ 를 선택하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{\gamma} |f(z) - f(z_0)| dz \leq \frac{1}{2\pi\rho} [2\pi\rho\epsilon] = \epsilon \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 극한  $\epsilon \rightarrow 0$ 를 취하면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \tag{10}$$

식 (5), 식 (7)과 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \tag{11}$$

■

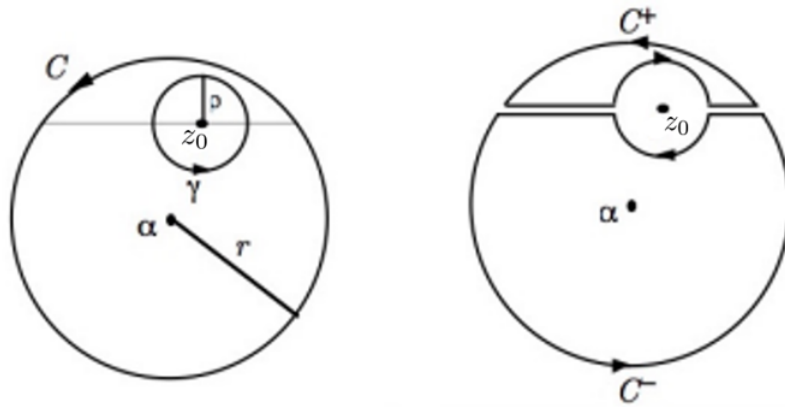


그림 1.5.2. Cauchy적분식을 유도하기 위한 경로들

**예제 1.5.1** 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_{|z+1|=2} \frac{z^2}{z^2 - 4} dz \tag{1}$$

다음 식이 성립한다.

$$I = \int_{|z+1|=2} \frac{f(z)}{z + 2} dz \tag{2}$$

여기서  $f(z) = z^2/[z - 2]$ 이다. Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$I = 2\pi i f(-2) = 2\pi i[-1] = -2\pi i \tag{3}$$

■

**예제 1.5.2** 주어진 상수  $a \in (0, 1)$ 에 대해서 다음과 같이 Poisson 핵 (Poisson kernel)을 정의하자.

$$P_a(\theta) \doteq \frac{1-a^2}{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (1)$$

다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_0^{2\pi} P_a(\theta) d\theta \quad (2)$$

변수변환  $z = e^{i\theta}$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left[ z + \frac{1}{z} \right], \quad d\theta = \frac{1}{iz} dz \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{1-a^2}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{1-a\left[z+\frac{1}{z}\right]+a^2} \frac{1}{iz} dz \quad (4)$$

다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{1-a^2}{-2\pi ai} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-a} \quad (5)$$

여기서  $f(z)$ 는 다음과 같다.

$$f(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{a}} \quad (6)$$

Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{1-a^2}{-2\pi ai} \cdot 2\pi i f(a) = 1 \quad (7)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} P_a(\theta) d\theta = 1 \quad (8)$$

■

**예제 1.5.3** 이 예제는 <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic4.pdf>에서 인용한 것이다. 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz \quad (1)$$

이 적분경로  $C$ 가 그림 1.5.3의 좌측 그래프에 그려져 있다.

그림 1.5.3의 우측 그래프처럼 적분경로  $C$ 를 두 경로들  $C_1$ 과  $C_2$ 로 나눌 수 있다. 여기서 주황색으로 그려진 안쪽 경로  $C_2$ 이고 청색으로 그려진 바깥쪽 경로가  $C_1$ 이다. 두 경로 모두 음방향, 즉 시계방향을 취함에 유의하라. 다음 식들이 성립한다.

$$I = \int_{C_1+C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz \tag{2}$$

여기서  $f(z) = \exp(z^2)$ 이다. Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz = - \int_{-C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz = -2\pi i f(2) \tag{3}$$

$$\int_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz = - \int_{-C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz = -2\pi i f(2) \tag{4}$$

식 (2)~식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$I = -4\pi i f(2) = -4\pi i e^4 \tag{5}$$

■

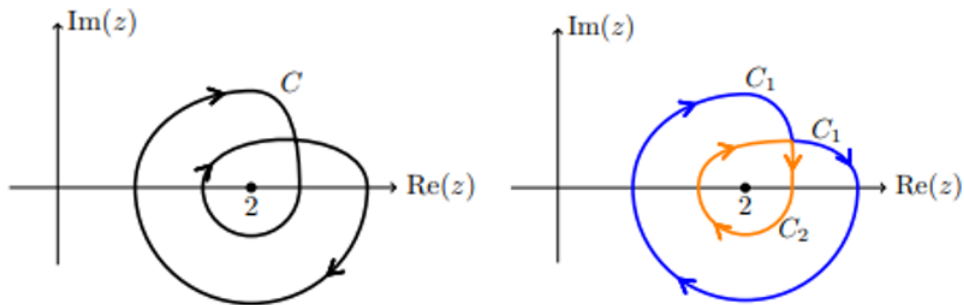


그림 1.5.3. 예제 1.5.3를 위한 적분경로

**예제 1.5.4** 이 예제는 <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic4.pdf>에서 인용한 것이다. 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_C \frac{z^2}{z^2+4} dz \tag{1}$$

여기서  $C \doteq \{z \mid |z| = 2.5\}$ 는 양방향인 닫힌경로이다. 이 적분경로가 그림 1.5.4의 좌측 그래프에 그려져 있다.

정리 1.4.6의 증명에서 사용한 방법을 적용해서 다음 식을 유도할 수 있다.

$$I = \int_{C_1+C_3-C_3+C_2} \frac{z^2}{z^2+4} dz \quad (2)$$

여기서 경로들  $C_1, C_2, C_3$  그리고  $-C_3$ 는 그림 1.5.4의 우측 그래프에서 정의되었다. 다음 식이 성립한다.

$$I = \int_{C_1+C_3-C_3+C_2} \frac{f_1(z)}{z-2i} dz + \int_{C_1+C_3-C_3+C_2} \frac{f_2(z)}{z+2i} dz \quad (3)$$

여기서  $f_1(z)$ 과  $f_2(z)$ 는 각각 다음과 같다.

$$f_1(z) = \frac{z}{z+2i}, \quad f_2(z) = \frac{z}{z-2i} \quad (4)$$

Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1+C_3-C_3+C_2} \frac{f_1(z)}{z-2i} dz = \int_{C_1+C_3} \frac{f_1(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f_1(2i) \quad (5)$$

$$\int_{C_1+C_3-C_3+C_2} \frac{f_2(z)}{z+2i} dz = \int_{C_2-C_3} \frac{f_2(z)}{z+2i} dz = 2\pi i f_2(-2i) \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)을 식 (3)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} + 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = 2\pi i \quad (7)$$

■

### 정리 1.5.2

함수  $f$ 가 영역  $D$ 에서 해석적이고 양방향을 취하는 적분경로  $C_R = \{w \mid |w - z_0| = R\}$ 이 영역  $D$ 에 속한다고 하면, 적분경로  $C_R$ 의 내점인  $z_0$ 에 대해서 다음 식을 만족하는 계수들  $\{a_k\}$ 가 존재한다.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [z - z_0]^k \quad \forall z \in C_R$$



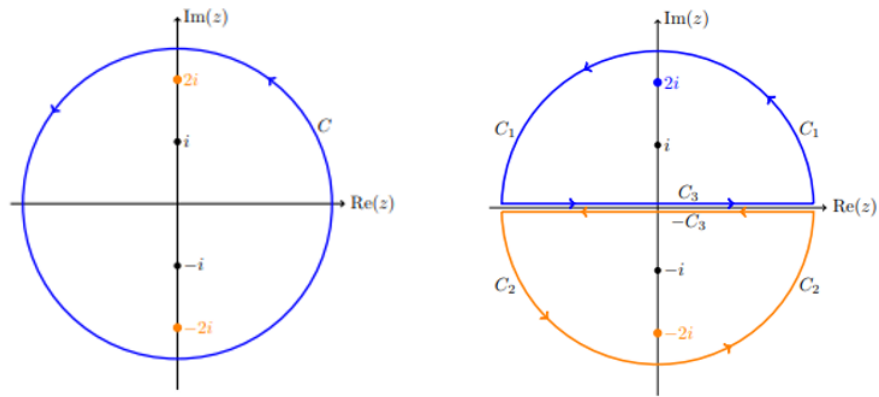


그림 1.5.4. 예제 1.5.4를 위한 적분경로

또한 계수  $a_k$ 는 다음과 같다.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(w)}{[w - z_0]^{k+1}} dw, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

단,  $C_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ 이고,  $0 < r < R$ 이다.

증명. Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 계수  $a_k$ 는 반경  $r \in (0, R)$ 에 의존하지 않는다. 식  $|z - z_0| < r < R$ 을 만족하는 주어진  $z$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{1}$$

다음 식이 성립함에 유의하라.

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1 \quad \forall w \in C_r \tag{2}$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{[w - z_0] - [z - z_0]} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{z - z_0}{w - z_0} \right]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[z - z_0]^k}{[w - z_0]^{k+1}} \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)의 우변은 영역  $\{w \mid |w - z_0| < r\}$ 에서 절대일양수렴한다 (converge absolutely and

uniformly). 식 (1)과 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(w) \frac{[z-z_0]^k}{[w-z_0]^{k+1}} \right] dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}} dw \right] [z-z_0]^k \end{aligned} \quad (4)$$

따라서  $a_k \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}} dw$ 라 놓으면, 다음 식이 성립한다.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [z-z_0]^k \quad (5)$$

■

정리 1.5.2에서 알 수 있듯이, 다음 따름정리들이 성립한다.

#### 따름정리 1.5.1

만약 영역  $D$ 에서 함수  $f$ 가 해석적이면, 각  $k(= 1, 2, \dots)$ 에 대해서  $k$ 차 도함수  $f^{(k)}$ 가 존재하고 또한  $f^{(k)}$ 는 해석적이다.

#### 따름정리 1.5.2: Cauchy적분식 II

만약 영역  $D$ 에서 함수  $f$ 가 해석적이고  $z_0 \in D$ 이면, 각  $k(= 0, 1, \dots)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}} dw$$

여기서  $\gamma \subset D$ 는 임의의 구분적으로 평활하며(piecewisely smooth) 양방향을 취하는 단순닫힌경로(simple closed path)로서 경로  $\gamma$ 의 내점들도 영역  $D$ 에 속하며,  $z_0$ 는 경로  $\gamma$ 의 내점이다.

#### 따름정리 1.5.3

만약 영역  $D$ 에서 함수  $f$ 가 해석적이고, 또한 만약 어떤 점  $z_0 \in D$ 에서 각  $k(=0, 1, \dots)$ 에 대해  $f^{(k)}(z_0) = 0$ 이면, 각 점  $z \in D$ 에서  $f(z) = 0$ 이다.

**예제 1.5.5** 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{[z+1]^4} dz \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$I = \int_{|z|=3} \frac{f(z)}{[z-z_0]^{k+1}} dz \quad (2)$$

여기서  $f(z) = e^{2z}$ 이고,  $z_0 = -1$  그리고  $k = 3$ 이다. 정리 1.5.2와 식  $f'''(z) = 8e^{2z}$ 에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{8e^{-2}}{3!} = \frac{1}{2\pi i} I \quad (3)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{8e^{-2}\pi i}{3} \quad (4)$$

■

**예제 1.5.6** 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_C \frac{1}{[z^2+1]^2} dz \quad (1)$$

여기서 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R$ 은 그림 1.5.5에 정의되었다. 단,  $R > 1$ 은 상수이다. 그림 1.5.5를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 Contour156.tikz를 실행하라.

다음 식이 성립한다.

$$I = \int_C \frac{f(z)}{[z-i]^{k+1}} dz \quad (2)$$

여기서  $f(z) = 1/[z+i]^2$ 이고,  $z_0 = i$  그리고  $k = 1$ 이다. 따름정리 1.5.2와 식  $f'(z) = -2/[z+i]^3$ 에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$I = 2\pi i \frac{f'(i)}{1!} = 2\pi i \frac{-2}{[2i]^3} = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

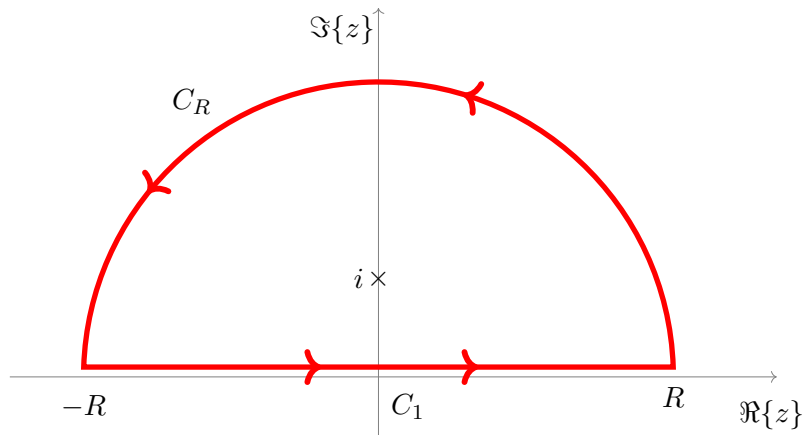


그림 1.5.5. 예제 1.5.6를 위한 적분경로

```

1  % -----
2  % Filename: Contour156.tikz
3  % Programmed by CBS
4  % -----
5  \begin{tikzpicture}
6  % Configurable parameters
7  \def\gap{0.2}
8  \def\bigradius{3}
9  \def\littleradius{0.5}
10
11 % Axes
12 \draw [help lines,->] (-1.25*\bigradius, 0) -- (1.35*\bigradius,0);
13 \draw [help lines,->] (0, -0.2*\bigradius) -- (0, 1.25*\bigradius);
14
15 % Red path
16 \draw[line width=2.5pt, color=red, decoration={ markings,
17   mark=at position 0.2455 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
18   mark=at position 0.48 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
19   mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
20   mark=at position 0.87 with {\arrow[line width=2.2pt]{>} } ,
21   postaction={decorate}]
22   let \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)}
23   in (\n1:\bigradius) arc (\n1:180-\n1:\bigradius)
24   -- cycle;
25
26 % The labels
27 \node at (4.0,-0.38){$\Re\{\left\{ z \right\}$};
28 \node at (-0.37,3.53){$\Im\{\left\{ z \right\}$};
29 \node at (-1.9,2.8) {$C_R$};
30 \node at (0.3, -0.3) {$C_1$};
31 \node at (3.0,-0.2) {$R$};
32 \node at (-3.0, -0.3) {$-R$};
33 \node at (0,1) {$\times$};
34 \node at (-0.2,1) {$i$};
35 \end{tikzpicture}
36 % -----

```

**예제 1.5.7** 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz \quad (1)$$

예제 1.5.6에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_C \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

적분경로  $C \doteq C_1 + C_R$ 은 그림 1.5.5에 그려져 있다. 식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_R} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz + \int_{-R}^R \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

적분경로  $C_R$ 에서 변수변환  $z = Re^{it}$ 를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\int_{C_R} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{[R^2 e^{2it} + 1]^2} iRe^{it} dt \quad (4)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{[R^2 e^{2it} + 1]^2} iRe^{it} \right| dt \quad (5)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| R^2 e^{2it} + 1 \right| \geq \left| R^2 e^{2it} \right| - 1 = R^2 - 1 \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{[R^2 e^{2it} + 1]^2} iRe^{it} \right| dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{[R^2 - 1]^2} dt = \frac{\pi R}{[R^2 - 1]^2} \quad (7)$$

식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz \right| = 0 \quad (8)$$

식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

식 (8)을 식 (9)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

고등학교에서 배운대로 변수변환  $z = \tan \theta$ 로 치환하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[z^2 + 1]^2} dz = \left\{ \frac{z}{2[z^2 + 1]^2} + \frac{1}{2} \arctan z \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

■

## 제 1.6 절 Laurent 급수

어떤 함수에서 해석적이지 못한 점을 특이점(singular point, singularity)이라 한다. 점  $z_0$ 가 함수  $f(z)$ 의 특이점이고 또한 함수  $f(z)$ 가 어떤  $r > 0$ 에 대해 점  $z_0$ 가 빠진 디스크(a punctured disc)  $D_r^0 \doteq \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ 에서 해석적이면, 점  $z_0$ 를 함수  $f(z)$ 의 고립특이점(isolated singularity)이라 한다. 고립특이점  $z_0$ 의 근방에서 함수  $f(z)$ 의 움직임을 다음과 같이 세 가지 형태로 구분할 수 있다.

- 만약 극한  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 가 존재하면, 고립특이점  $z_0$ 를 함수  $f(z)$ 의 제거가능한 특이점(removable singularity)이라 한다.
- 만약 극한  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ 이면, 고립특이점  $z_0$ 를 함수  $f(z)$ 의 극점(pole)이라 한다.
- 만약 극한  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 가 위에 기술한 두 가지 형태들 중 하나가 아니면, 고립특이점  $z_0$ 를 함수  $f(z)$ 의 본질적 특이점(essential singularity)이라 한다.

본서에서는 제거가능한 특이점과 극점만을 다루고, 본질적 특이점을 고려하지 않는다.

고립특이점  $z_0$ 가 함수  $f(z)$ 의 제거가능한 특이점이고, 다음 명제를 만족하는 상수  $M$ 과 상수  $r' \in (0, r)$ 가 존재한다고 가정하자.

$$0 < |z - z_0| < r' \Rightarrow |f(z)| < M \quad (1.6.1)$$

다음 함수를 정의하자.

$$g(z) \doteq \begin{cases} [z - z_0]^2 f(z), & (0 < |z - z_0| < r), \\ 0, & (z = z_0). \end{cases} \quad (1.6.2)$$

함수  $g(z)$ 은 디스크  $D_r \doteq \{z \mid |z - z_0| < r\}$ 에서 정의된다. 함수  $f(z)$ 는 특이점  $z_0$ 가 빠진 디스크(a punctured disc)  $D_r^0$ 에서 해석적이므로, 이  $D_r^0$ 에서 함수  $g(z)$ 가 해석적임은 명백하다. 다음 식들이 성립한다.

$$g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [z - z_0][f(z) - f(z_0)] = 0. \quad (1.6.3)$$

따라서, 함수  $g(z)$ 은 디스크  $D_r$ 에서 해석적이고, 또한 다음 식들을 만족한다.

$$g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) = 0 \quad (1.6.4)$$

만약 함수  $g(z)$ 가 특이점  $z_0$ 에서 영차수(order of zero)가  $m \geq 2$ 이면, 다음과 같이 정의되는 함수  $h(z)$ 는 디스크  $D_r$ 에서 해석적이고 또한  $h(z_0) \neq 0$ 이다.

$$h(z) \doteq \frac{g(z)}{[z - z_0]^m} \quad (1.6.5)$$

다음 함수를 정의하자.

$$\tilde{f}(z) \doteq [z - z_0]^{m-2} h(z), \quad z \in D \quad (1.6.6)$$

함수  $\tilde{f}$ 는 디스크  $D_r$ 에서 해석적이다. 또한, 다음 식들이 성립한다.

$$\tilde{f}(z) = [z - z_0]^{m-2} \frac{g(z)}{[z - z_0]^m} = \frac{g(z)}{[z - z_0]^2} = f(z) \quad (1.6.7)$$

따라서, 점  $z_0$ 가 빠진 디스크(a punctured disc)  $D_r^0 = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ 에서 해석적인 함수  $f$ 를 디스크  $D_r = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ 에서 해석적인 함수  $\tilde{f}$ 로 확장할 수 있다. 이러한 이유로 이러한 고립특이점  $z_0$ 를 함수  $f(z)$ 의 제거가능한 특이점(removable singularity)이라 한다.

고립특이점  $z_0$ 가 함수  $f(z)$ 의 극점(pole)이라고 하자. 일반성을 잃지 않고(without loss

of generality: WLOG) 다음 명제가 성립한다고 가정할 수 있다.

$$z \in D_r^0 \Rightarrow |f(z)| \geq 1 \quad (1.6.8)$$

이 경우에 함수  $g(z) \doteq 1/f(z)$ 은 점  $z_0$ 가 빠진 디스크(a punctured disc)  $D_r^0$ 에서 유계이고 (bounded) 해석적이다. 즉, 점  $z_0$ 는 함수  $g$ 의 제거가능한 특이점이다. 따라서 각  $z \in D_r^0$ 에서  $\tilde{g}(z) = g(z)$ 이고 디스크  $D_r$ 에서 해석적인 함수  $g$ 가 존재한다. 다음 식들이 성립함을 상기하라.

$$|\tilde{g}(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \quad (1.6.9)$$

따라서  $\tilde{g}(z_0) = 0$ 이다. 만약 점  $z_0$ 가  $\tilde{g}$ 의 영차수(order of zero)가  $m$ 인 근이면, 다음 함수를 정의하자.

$$h(z) \doteq \frac{\tilde{g}(z)}{[z - z_0]^m} \quad (1.6.10)$$

함수  $h$ 는 영역  $D$ 에서 해석적이고  $h(z_0) \neq 0$ 이다. 따라서, 각  $z \in D_r^0$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{[z - z_0]^m h(z)} = \frac{H(z)}{[z - z_0]^m} \quad (1.6.11)$$

함수  $H(z) \doteq 1/h(z)$ 는 디스크  $D_r$ 에서 해석적이고,  $H(z_0) \neq 0$ 이다. 이 경우에, 함수  $f$ 의 특이점  $z_0$ 에서 극차수(pole of order)가  $m$ 이라 한다. 특이점  $z_0$ 에서 함수  $f$ 의 극차수가  $m$ 이기 위한 필요충분조건은 점  $z_0$ 가 함수  $1/f$ 의 영차수(order of zero)가  $m$ 이다. Green 정리나 Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 함수  $f$ 가 점  $z_0$ 가 빠진 디스크(a punctured disc)  $D_r^0 = \{z | 0 < |z - z_0| < r\}$ 에서 해석적이라고 가정하면, 적분값  $\int_{|z-z_0|=s} f(z) dz$ 는 반경  $s \in (0, r)$ 에 의존하지 않는다. 따라서, 다음과 같이 유수(residue)를 정의할 수 있다.

#### 정의 1.6.1: 특이점에서 유수

점  $z_0$ 가 빠진 디스크  $D_r^0 = \{z | 0 < |z - z_0| < r\}$ 에서 해석적인 함수  $f$ 의 특이점  $z_0$ 에서



유수(residue)를 다음과 같이 정의하자.

$$\operatorname{Res}(f; z_0) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} f(z) dz$$

여기서  $s$ 는 구간  $(0, r)$ 에 속한다.

### 정리 1.6.1

함수  $f$ 의 특이점  $z_0$ 에서 극차수가 자연수  $m$ 이고, 또한 함수  $H(z) = [z - z_0]^m f(z)$ 가 디스크  $D_r = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ 에서 해석적이면, 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{H^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

증명. 함수  $H$ 가 디스크  $D_r$ 에서 해석적이라 가정했으므로, 영역  $D_r$ 에서 함수  $H$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k [z - z_0]^k \quad (1)$$

여기서  $h_k$ 는 다음과 같다.

$$h_k = \frac{1}{k!} H^{(k)}(z_0), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{[z - z_0]^{m-k}} + g(z) \quad (3)$$

여기서 함수  $g$ 는 영역  $D_r$ 에서 해석적이다. Cauchy 정리와 Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{[z - z_0]^{m-k}} dz = h_{m-1} = \frac{H^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \end{aligned} \quad (4)$$


**정리 1.6.2: Laurent 급수**

주어진 상수들  $R > r (\geq 0)$ 에 대해서 함수  $f$ 가 고리  $D \doteq \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$ 에서 해석적이면, 점  $z_0$ 에서 함수  $f$ 를 다음과 같은 Laurent 급수로 나타낼 수 있다.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k [z - z_0]^k$$

여기서  $a_k$ 는 다음과 같다.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{[z - z_0]^{k+1}} dz, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

단,  $s \in (r, R)$ 은 주어진 상수이다.

증명. 주어진 점  $z$ 에 대해서 다음 식들을 만족하는 상수들  $r_1$ 과  $R_1$ 을 선택하자.

$$r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R \quad (1)$$

경로  $\Gamma \doteq \{z \mid |z - z_0| = R_1\}$ 은 역시계방향(counterclockwise direction)을 취하고, 경로  $\gamma \doteq \{z \mid |z - z_0| = r_1\}$ 은 시계방향(clockwise direction)을 취한다고 하자. 그림 1.6.1의 좌측 그래프가 지금까지 기술한 내용을 그린 것이다. 경로  $\Gamma$ 의 어느 한 점에서 경로  $\gamma$ 로의 최단경로를  $C_1$  그리고 이  $C_1$ 과 충분히 가까우면서 평행하고 반대 방향을 취하는 경로를  $C_2$ 라 하자. 이 경로들이 그림 1.6.1의 우측 그래프에 그려져 있다.

Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + C_1 + \gamma_1 + C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (2)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \end{aligned} \quad (3)$$

경로  $\Gamma_1$ 에서 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[z-z_0]^k}{[w-z_0]^{k+1}} \quad (4)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}} [z-z_0]^k dw \quad (5)$$

경로  $\gamma_1$ 에서 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{[w-z_0]^l}{[z-z_0]^{l+1}} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{[z-z_0]^k}{[w-z_0]^{k+1}} \quad (6)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}} [z-z_0]^k dw \quad (7)$$

식 (5)와 식 (7)을 식 (3)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} \frac{f(w)}{[w-z_0]^{k+1}} dw \right] [z-z_0]^k \quad (8)$$

■

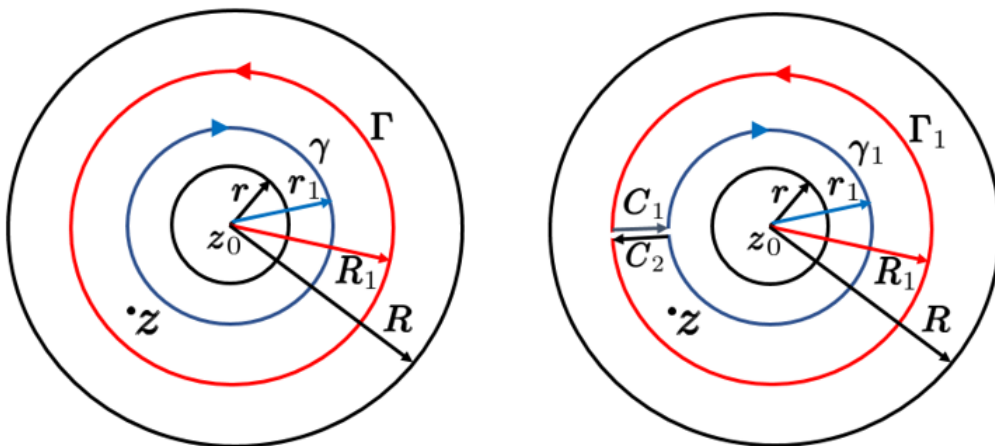


그림 1.6.1. Laurent 급수

**따름정리 1.6.1**

주어진 상수  $R > 0$ 에 대해서 함수  $f$ 가 점  $z_0$ 가 빠진 디스크  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ 에서 해석적이면, 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} f(z) dz$$

단,  $s \in (0, R)$ 는 주어진 상수이다.

**예제 1.6.1** 정리 1.6.2에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2 + 3z - 1}{z + 2}; -2\right) = [-2]^2 + 3[-2] - 1 = -3 \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{[z - 1]^3}; 1\right) = \frac{1}{2!} \frac{d^2 e^z}{dz^2} \Big|_{z=1} = \frac{e}{2} \quad (2)$$

**예제 1.6.2** 다음 함수를 살펴보자.

$$f(z) = \frac{z + 1}{[z^2 + 4][z - 1]^3} \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$f(z) = \frac{a(z)}{z - 2i} + \frac{b(z)}{z + 2i} + \frac{c(z)}{[z - 1]^3} \quad (2)$$

여기서  $a(z), b(z)$  그리고  $c(z)$ 는 각각 다음과 같다.

$$a(z) = \frac{z + 1}{[z + 2i][z - 1]^3}, \quad b(z) = \frac{z + 1}{[z - 2i][z - 1]^3}, \quad c(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 4} \quad (3)$$

정리 1.6.2에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f(z); 2i) = a(2i) = \frac{2i + 1}{[2i + 2i][2i - 1]^3} = \frac{24 - 7i}{500} \quad (4)$$

$$\operatorname{Res}(f(z); -2i) = b(-2i) = \frac{-2i + 1}{[-2i - 2i][-2i - 1]^3} = \frac{24 + 7i}{500} \quad (5)$$

$$\operatorname{Res}(f(z); 1) = -\frac{1}{2} c''(1) = -\frac{12}{125} \quad (6)$$

■

**예제 1.6.3** 다음 함수를 살펴보자.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z - \dots \quad (2)$$

정리 1.6.2에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\sin z}{z^4}; 0 \right) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6} \quad (3)$$

■

**예제 1.6.4** 함수들  $f$ 와  $g$ 가 디스크  $\{|z - z_0| < r\}$ 에서 해석적이고 식  $g(z_0) = 0$ 와 식  $g'(z_0) \neq 0$ 이 성립한다고 가정하자.

함수  $h(z) \doteq g(z)/[z - z_0]$ 는 디스크  $\{|z - z_0| < r\}$ 에서 해석적이고, 식  $h(z_0) = g'(z_0)$ 를 만족한다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{g(z)}; z_0 \right) = \operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{[z - z_0]h(z)}; z_0 \right) = \frac{f(z_0)}{h(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (1)$$

■

**예제 1.6.5** 예제 1.6.4에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\sin z}{z}; 0 \right) = \frac{\sin 0}{1} = 0 \quad (1)$$

■

**예제 1.6.6** 예제 1.6.4에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z - 1}; 0\right) = \frac{1}{e^0} = 1 \quad (1)$$

■

지금까지 내용을 정리하면, 다음 따름정리가 성립함을 알 수 있다.

**따름정리 1.6.2**

- a) 점  $z_0$ 가 함수  $f(z)$ 의 제거가능한(removable) 특이점이기 위한 필요충분조건은 다음 식들이 성립하는 것이다.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{[z-z_0]^{k+1}} dz = 0, \quad (k = -1, -2, \dots)$$

- b) 점  $z_0$ 가 함수  $f(z)$ 의 극점(pole)이기 위한 필요충분조건은 다음 식을 만족하는 자연수  $m$ 이 존재하는 것이다.

$$a_{-m} \neq 0, \quad a_k = 0, \quad (k \leq -m - 1)$$

- c) 점  $z_0$ 가 함수  $f(z)$ 의 본질적(essential) 특이점이기 위한 필요충분조건은 식  $a_{-k} \neq 0$ 를 만족하는 무수히 많은 자연수들  $k$ 가 존재하는 것이다.

**예제 1.6.7** 다음 함수를 살펴보자.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad (1)$$

함수  $f(z)$ 의 Laurent 급수는 다음과 같다.

$$f(z) = e^{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} \quad (2)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}; 0\right) = \frac{1}{1!} = 1 \quad (3)$$

이 Laurent 급수는 무수히 많은 음수 멱항(negative power)을 갖는다. 따라서, 점  $z_0 = 0$ 는 함수  $f(z)$ 의 본질적(essential) 특이점이다. ■

### 제1.7절 유수정리

다음에 기술하는 유수정리(the residue theorem)는 복소적분에서 아주 유용한 정리이다.

**정리 1.7.1: 유수정리(The residue theorem)**

함수  $f$ 가 영역  $D$ 에서 제거가능한 특이점들  $z_1, z_2, \dots, z_N$ 을 갖고, 이 특이점들을 제외한 나머지 점들에서 해석적이라고 하자. 단  $N$ 은 유한이다. 또한, 적분경로  $C$ 는 양방향(positively oriented) 취하는 구분적으로 평활한(piecewisely smooth) 단순닫힌경로(simple closed curve)이며, 특이점들  $z_1, z_2, \dots, z_N$  중 어느 하나도 통과하지 않는다고 하자. 특이점들  $z_1, z_2, \dots, z_n$ 이 경로  $C$ 의 내점들이고,  $z_{n+1}, z_{n+2}, \dots, z_N$ 이 경로  $C$ 의 외점들이라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k)$$

증명. 그림 1.7.1의 상단 그래프에 그려진 경로  $C$ 의 내점들 집합을  $\Gamma$ 라고 하자. 각  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 에 대해서 중심이  $z_k$ 인 작은 디스크  $\Gamma_k \subset \Gamma$ 가 다음 식들을 만족한다고 하자.

$$\Gamma_k \cap \Gamma_i = \emptyset, \quad (1 \leq i < k \leq n) \tag{1}$$

디스크  $\Gamma_k$ 의 양방향 경계(positively oriented boundary)를  $C_k$ 라 하고 음방향 경계(negatively oriented boundary)를  $-C_k$ 라 하자. 영역  $\Delta \doteq \Gamma \setminus \sum_{k=1}^n \Gamma_k$ 의 양방향 경계  $\partial\Delta$ 는 다음과 같다.

$$\partial\Delta = C + \sum_{k=1}^n [-C_k] \tag{2}$$

Cauchy정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \tag{3}$$

그림 1.7.1의 하단 그래프와 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz = \int_C f(z)dz + \sum_{k=1}^n \int_{-C_k} f(z)dz = 0 \quad (4)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) \quad (5)$$

■

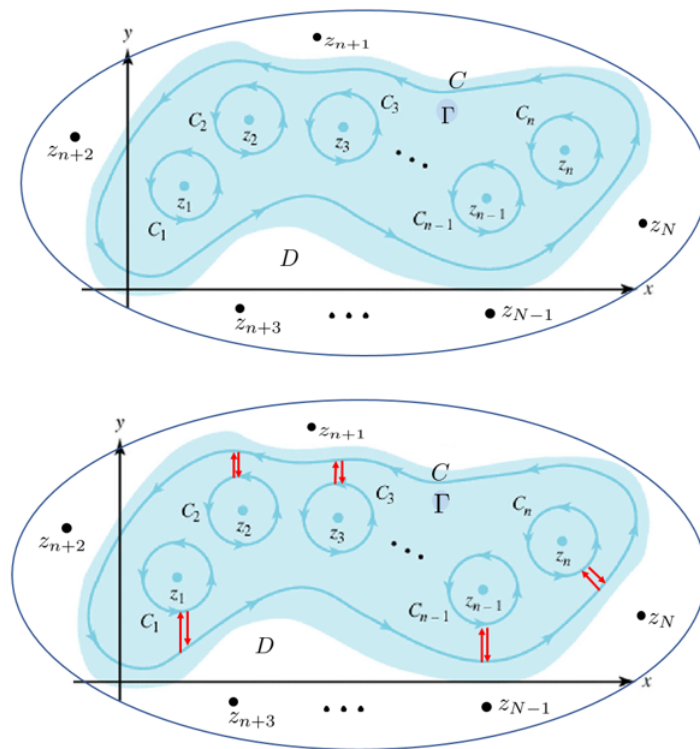


그림 1.7.1. 유수정리

앞에서 정의했듯이 함수  $f(\cdot)$ 의  $z = z_0$ 에서 유수(residue)는 다음과 같다.

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (1.7.1)$$

여기서  $C$ 는  $z_0$ 를 둘러싼 단순닫힌경로(simple closed path)이다. 함수  $f$ 의 특이점  $z_0$ 에서



극차수가 자연수  $k$ 이면, 정리 1.6.1에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [z - z_0]^k f(z) \quad (1.7.2)$$

무한대에서 유수는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Res}(f; \infty) \doteq -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (1.7.3)$$

여기서  $C$ 는 큰 양수  $R$ 에 의해서 정의되는 영역  $\{R < |z| < \infty\}$ 에 포함되는 단순닫힌경로이고 적분  $\oint_C$ 에서 폐곡선  $C$ 는 양방향, 즉 역시계방향을 취한다. 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Res}(f; \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w^2} = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) \quad (1.7.4)$$

여기서  $C'$ 는 영역  $\{0 < |z| < \frac{1}{R}\}$ 에 포함되는 단순닫힌경로로서 양방향을 취한다.

함수  $f(\cdot)$ 가 고립특이점들(isolated singularities)  $z_1, z_2, \dots, z_n$ 을 제외한 복소평면  $\mathbb{C}$ 에서 해석적(analytic, holomorphic 또는 regular)이라 하자. 다음 식들을 만족하는 양수  $R$ 을 선택하자.

$$|z_k| < R, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7.5)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; \infty) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R^{-1}} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz = -\sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

여기서 두 번째 항의  $\oint$ 의  $w$ 는 양방향, 즉 역시계방향으로 움직이므로, 변수변환  $z = w^{-1}$ 는 음방향, 즉 시계방향으로 움직인다. 따라서 세 번째 항에 마이너스 기호가 들어간다. 식 (1.7.6)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Res}(f; \infty) + \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) = 0 \quad (1.7.7)$$

만약  $f(\infty) = 0$ 이면, 식 (1.7.4)에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = -\lim_{z \rightarrow 0} [z-0] \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\lim_{w \rightarrow \infty} wf(w) \quad (1.7.8)$$

**예제 1.7.1** 다음 복소적분을 살펴보자.

$$I = \oint_{|z|=2} f(z) dz = \oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z[z-1]} dz \quad (1)$$

영역  $\{0 < |z| < 1\}$ 에서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} = \left[5 - \frac{2}{z}\right] [-1 - z - z^2 - z^3 - \dots] \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; 0) = 2 \quad (3)$$

영역  $\{0 < |z-1| < 1\}$ 에서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{5[z-1]+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+[z-1]} \\ &= \left[5 + \frac{3}{z-1}\right] \{1 - [z-1] + [z-1]^2 - [z-1]^3 + \dots\} \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; 1) = 3 \quad (5)$$

영역  $\{0 < |z| < 1\}$ 에서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{5-2z}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{5-2z}{z} [1 + z + z^2 + \dots] = \frac{5}{z} + 3 + 3z + 3z^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = -5 \tag{7}$$

식 (3), 식 (5) 그리고 식 (7)로부터, 식 (1.7.7)이 성립함을 확인할 수 있다.

다음 식들이 성립한다.

$$\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z[z-1]} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1) = 10\pi i \tag{8}$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z[z-1]} dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f; \infty) = 10\pi i \tag{9}$$

다음 식들이 성립한다.

$$f(\infty) = 0 \tag{10}$$

$$-\lim_{w \rightarrow \infty} w f(w) = -5 \tag{11}$$

식 (7), 식 (10)과 식 (11)로부터 식 (1.7.8)이 성립함을 확인할 수 있다. ■

**예제 1.7.2** 상수  $a (> 0)$ 에 대해서 다음 복소적분을 살펴보자.

$$I = \oint_{|z|=2a} f(z) dz = \oint_{|z|=2a} \frac{a^2 - z^2}{z[a^2 + z^2]} dz \tag{1}$$

다음 식들이 성립한다.

$$f(\infty) = 0 \tag{2}$$

$$-\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 1 \tag{3}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = 1 \tag{4}$$

식 (1.7.7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\operatorname{Res}(f; 0) + \operatorname{Res}(f; ai) + \operatorname{Res}(f; -ai) = -1 \quad (5)$$

정리 1.7.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2a} \frac{a^2 - z^2}{z[a^2 + z^2]} dz = -1 \quad (6)$$

■

**예제 1.7.3** 함수  $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2 - x^3}$ 의 복소적분을 살펴보자. 즉, 다음 적분을 계산하자.

$$I \doteq \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} dx \quad (1)$$

적분값  $I$ 를 구하기 위해서 그림 1.7.2의 상단 그래프에 그려진 적분경로를 사용하기로 하자. 그림 1.7.2를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 ResidueContour101.tikz를 실행하라.

식  $f(\infty) = 0$ 가 성립한다. 식 (1.7.4)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; \infty) &= -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = -\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= -\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z^2} \frac{z}{\sqrt[3]{z-1}} = -[-1]^{-1/3} \end{aligned} \quad (2)$$

즉, 함수  $f(z)$ 의 점  $z = \infty$ 에서 유수(residue)는  $-[-1]^{-1/3}$ 이다. 식 (1.7.3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_{|z|=R} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \cdot [-1]^{-1/3} \quad (3)$$

여기서 적분경로는 역시계방향이다.

구간  $[0, 1]$ 을 가지자름(branch cut)으로 갖도록 적분경로를 구축하자. 인자  $z^{\frac{2}{3}}$ 의 원가지자름(original branch cut)이  $(-\infty, 0]$ 이 되도록 다음과 같이  $z^{\frac{2}{3}}$ 를 정의하자.

$$z^{\frac{2}{3}} \doteq \exp\left(\frac{2}{3} \log z\right), \quad (-\pi \leq \arg(z) < \pi) \quad (4)$$

인자  $[1 - z]^{\frac{1}{3}}$ 의 원가지자름이  $(-\infty, 1]$ 이 되도록 다음과 같이  $[1 - z]^{\frac{1}{3}}$ 를 정의하자.

$$[1 - z]^{\frac{1}{3}} \doteq \exp\left(\frac{1}{3}\ln(1 - z)\right), \quad (0 \leq \arg(1 - z) < 2\pi) \quad (5)$$

만약  $z = -r$ 이라고 하면, 반직선  $(-\infty, 0)$  위에서는 다음 식들이 성립한다.

$$z^{\frac{2}{3}}[1 - z]^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}[1 + r]^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}2\pi i} = r^{\frac{2}{3}}[1 + r]^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4}{3}\pi i} \quad (6)$$

반직선  $(-\infty, 0)$  아래에서는 다음 식들이 성립한다.

$$z^{\frac{2}{3}}[1 - z]^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{2}{3}\pi i}[1 + r]^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}0\pi i} = r^{\frac{2}{3}}[1 + r]^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2}{3}\pi i} \quad (7)$$

식 (6), 식 (7) 그리고 식  $e^{\frac{4}{3}\pi i} = e^{-\frac{2}{3}\pi i}$ 에서 알 수 있듯이,  $z^{\frac{2}{3}}[1 - z]^{\frac{1}{3}}$ 는 구간  $(-\infty, 0)$ 에서 연속이다. 따라서,  $z^{\frac{2}{3}}[1 - z]^{\frac{1}{3}}$ 의 가지자름은  $[0, 1]$ 이다. 식 (6)과 식 (7)에 대해서는 그림 1.7.2의 하단 그래프를 참조하라.

식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz + \int_{C_2} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz + \int_{C_3} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz + \int_{C_4} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz \\ &= \int_{C_R} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz = 2\pi i \cdot [-1]^{-1/3} = 2\pi i e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{aligned} \quad (8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_3} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz \right| \leq \max_{\theta} \left| \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt[3]{\epsilon e^{2i\theta}[1 - \epsilon e^{i\theta}]}} \right| = 0 \quad (9)$$

$$\left| \int_{C_4} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz \right| \leq \max_{\theta} \left| \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt[3]{[1 + \epsilon e^{2i\theta}]\epsilon e^{i\theta}}} \right| = 0 \quad (10)$$

가지자름 위에서는 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_2} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 e^{2 \cdot 0 \cdot \pi i} [1 - x e^{0 \cdot \pi i}]}} dx = I \quad (11)$$

가지자름 아래에서는 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{1}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}} dz &= \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{[xe^{2 \cdot 0 \cdot \pi i}]^2 [1 - xe^{2\pi i}]}} dx \\ &= \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{[xe^{2 \cdot 0 \cdot \pi i}]^2 e^{2\pi i} [1 - x]}} dx = -\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{3}i}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x[1-x]}} dx = -e^{-\frac{2\pi}{3}i} I \end{aligned} \quad (12)$$

식 (9)~식 (12)를 식 (8)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\left[1 - e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right] I = 2\pi i e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad (13)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

■

```

1 % -----
2 % Filename: ResidueContour101.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[
6   scale=3,
7   line cap=round,
8   dec/.style args={#1#2}{
9     decoration={markings, mark=at position #1 with {#2}},
10    postaction={decorate}
11  } ]
12 \path [gray,thin] (-1.2,0) edge[->] (1.2,0) (0,-1.2) edge[->] (0,1.2);
13 \draw [line width=2.0pt, red, dec={0.29}{\arrow{>}}] (0,0) circle (1cm);
14 \draw [line width=2.0pt, red, xshift=.5cm, dec={0.29}{\arrow{>}}]
15   (-160:1mm)coordinate(21) arc (-160:160:1mm) coordinate(11);
16 \draw [line width=2.0pt, red, xshift=0cm, dec={0.29}{\arrow{>}}]
17   (20:1mm)coordinate(12) arc (20:340:1mm) coordinate(22);
18 \draw [line width=2.0pt, red, dec={0.3}{\arrow{>}}] (11)--(12);
19 \draw [line width=2.0pt, red, dec={0.6}{\arrow{<}}] (21)--(22);
20 \path (.29*360:1.15cm) node {$C$}
21   (0.35,1mm)[anchor=east] node {$C_1$}
22   (0.2,-1.1mm)[anchor=west] node {$C_2$}
23   (-3mm,0.24mm) node {$C_3$}
24   (5.8mm,0.24mm) node {$C_4$};
25
26 \node at (0,0) {$\times$};
27 \node at (0.5,0) {$\times$};
28 \node at (-1.13,0.05) {$-R$};
29 \node at (1.08,0.05) {$R$};
30 \end{tikzpicture}
31 % quad
32 \begin{tikzpicture}[

```

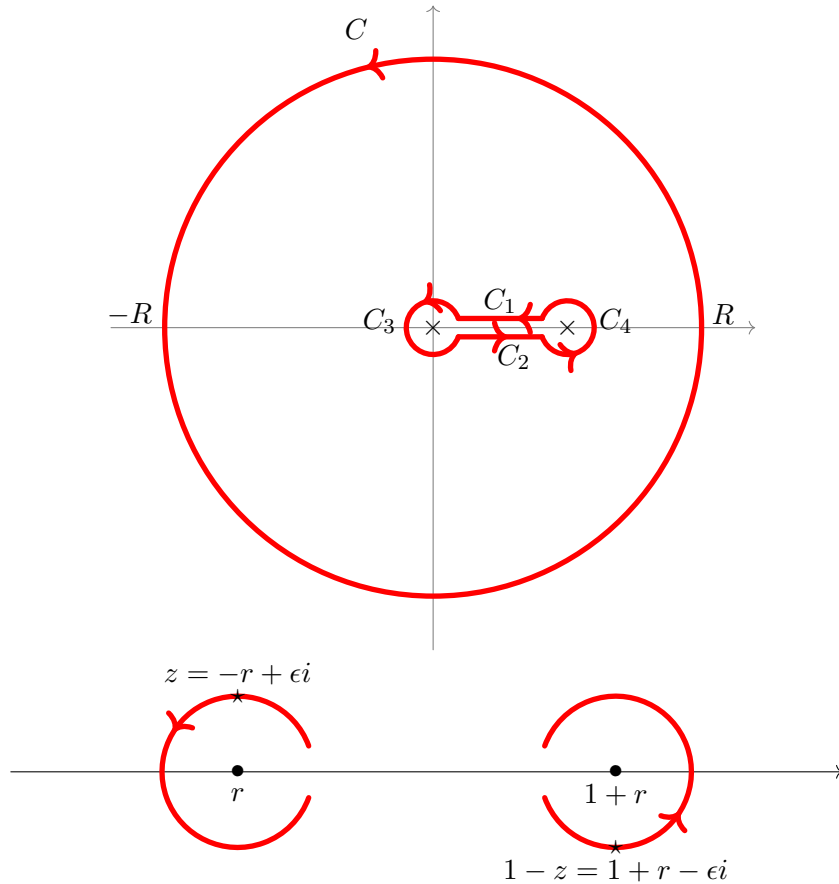


그림 1.7.2. 예제 1.7.3를 위한 적분경로

```

33 scale=1,
34 line cap=round,
35 dec/.style args={#1#2}{
36     decoration={markings, mark=at position #1 with {#2}},
37     postaction={decorate}
38 } ]
39 \path [black] (-3,0) edge[->] (8,0);
40 \draw [line width=2pt, red, xshift=5cm, dec={0.4}{\arrow{>}}]
41     (-160:1)coordinate(21) arc (-160:160:1) coordinate(11);
42 \draw [line width=2pt, red, xshift=0cm, dec={0.4}{\arrow{>}}]
43     (20:1)coordinate(12) arc (20:340:1) coordinate(22);
44 \node at (0,0) {\bullet};
45 \node at (0,-0.3) {\$r\$};
46 \node at (0,1) {\star};
47 \node at (0,1.3) {\$z = -r + \epsilon i\$};
48 \node at (5,0) {\bullet};
49 \node at (5,-0.3) {\$1+r\$};
50 \node at (5,-1) {\star};
51 \node at (5,-1.3) {\$1-z = 1+r - \epsilon i\$};
52 \end{tikzpicture}
53 % -----

```

**예제 1.7.4** 다음 함수  $f(x)$ 의 적분  $I \doteq \int_0^3 f(x) dx$ 를 계산하자.

$$f(z) \doteq \frac{z^{\frac{3}{4}}[3-z]^{\frac{1}{4}}}{5-z} \quad (1)$$

적분  $I$ 를 구하기 위해서 그림 1.7.3의 상단 그래프에 그려진 적분경로  $C \doteq \sum_{i=1}^4 C_i$ 를 사용하기로 하자. 그림 1.7.3를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 ResidueContour102.tikz를 실행하라.

식  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq 0$ 과 다음 식이 성립한다.

$$\text{Res}(f; \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) \quad (2)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{z^2} \frac{[3z-1]^{\frac{1}{4}}}{[5z-1]} = -[-1]^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{z^2} \frac{[1-3z]^{\frac{1}{4}}}{[1-5z]} \\ &= [-1]^{\frac{3}{4}} \frac{1}{z^2} [1+5z+5^2z^2+\dots] \left[1-\frac{1}{4}z-\frac{27}{32}z^2-\dots\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\right) \frac{1}{z^2} \left[1+\frac{17}{4}z+\frac{85}{4}z^2-\frac{425}{4}z^3+\dots\right] \end{aligned} \quad (3)$$

식 (2)와 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Res}(f; \infty) = \frac{17}{4} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) = \frac{17}{4} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Res}(f; 5) = \lim_{z \rightarrow 5} [z-5] \frac{z^{\frac{3}{4}}[3-z]^{\frac{1}{4}}}{5-z} = -5^{\frac{3}{4}} 2^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) = -5^{\frac{3}{4}} 2^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

점  $z = \infty$ 와 점  $z = 5$ 는 적분경로  $C$ 의 외점들이다. 따라서, Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f; \infty) - 2\pi i \text{Res}(f; 5) = -2\pi i \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[\frac{17}{4} - 5^{\frac{3}{4}} 2^{\frac{1}{4}}\right] \quad (6)$$

여기서 적분경로  $C$ 는 역시계방향임을 상기하라.

구간  $[0, 3]$ 를 가지자름(branch cut)으로 갖도록 함수  $f(z)$ 를 구축하자. 인자  $z^{\frac{3}{4}}$ 의 원가



지자름 (original branch cut) 이  $(-\infty, 0]$ 이 되도록 다음과 같이  $z^{\frac{3}{4}}$ 를 정의하자.

$$z^{\frac{3}{4}} = \exp\left(\frac{3}{4} \log z\right), \quad (-\pi \leq \arg(z) < \pi) \quad (7)$$

인자  $[3 - z]^{\frac{1}{4}}$ 의 원가지자름이  $(-\infty, 3]$ 이 되도록 다음과 같이  $[3 - z]^{\frac{1}{4}}$ 를 정의하자.

$$[3 - z]^{\frac{1}{4}} = \exp\left(\frac{1}{4} \ln(3 - z)\right), \quad (0 \leq \arg(3 - z) < 2\pi) \quad (8)$$

만약  $z = -r$ 이라고 하면, 반직선  $(-\infty, 0)$  위에서는 다음 식들이 성립한다.

$$z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{3}{4}}e^{\frac{3}{4}\pi i}[3 + r]^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}2\pi i} = r^{\frac{3}{4}}[3 + r]^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5}{4}\pi i} \quad (9)$$

또한 반직선  $(-\infty, 0)$  아래에서는 다음 식들이 성립한다.

$$z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{3}{4}\pi i}[3 + r]^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}0\pi i} = r^{\frac{3}{4}}[3 + r]^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{3}{4}\pi i} \quad (10)$$

식 (9), 식 (10) 그리고 식  $e^{\frac{5}{4}\pi i} = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ 에서 알 수 있듯이,  $z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}$ 는 구간  $(-\infty, 0)$ 에서 연속이다. 따라서,  $z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}$ 의 가지자름은  $[0, 3]$ 이다.

식 (6)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}}{5 - z} dz + \int_{C_2} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}}{5 - z} dz + \int_{C_3} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}}{5 - z} dz + \int_{C_4} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}}{5 - z} dz \\ &= -2\pi i \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left[ \frac{17}{4} - 5^{\frac{3}{4}}2^{\frac{1}{4}} \right] = \left[ \frac{17}{4} - 5^{\frac{3}{4}}2^{\frac{1}{4}} \right] \sqrt{2}[1 - i]\pi \end{aligned} \quad (11)$$

각  $\epsilon (\in (0, 0.0001))$ 에 대해서, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\left| \int_{C_3} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}}{5 - z} dz \right| \leq 2\pi\epsilon \frac{\epsilon^{\frac{3}{4}}3.0001^{\frac{1}{4}}}{4.9999} \rightarrow 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (12)$$

$$\left| \int_{C_4} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3 - z]^{\frac{1}{4}}}{5 - z} dz \right| \leq 2\pi\epsilon \frac{3.0001^{\frac{3}{4}}\epsilon^{\frac{1}{4}}}{1.9999} \rightarrow 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \quad (13)$$

가지자름 아래에서는 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_2} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3-z]^{\frac{1}{4}}}{5-z} dz = \int_0^3 \frac{x^{\frac{3}{4}}e^{\frac{3}{4} \cdot 0 \cdot \pi i} [3-xe^{0 \cdot \pi i}]^{\frac{1}{4}}}{5-xe^{0 \cdot \pi i}} dx = \int_0^3 \frac{x^{\frac{3}{4}}[3-x]^{\frac{1}{4}}}{5-x} dx = I \quad (14)$$

가지자름 위에서는 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{z^{\frac{3}{4}}[3-z]^{\frac{1}{4}}}{5-z} dz &= \int_3^0 \frac{x^{\frac{3}{4}}e^{\frac{3}{4} \cdot 0 \cdot \pi i} [3-xe^{2\pi i}]^{\frac{1}{4}}}{5-xe^{0 \cdot \pi i}} dx \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}i} \int_0^3 \frac{x^{\frac{3}{4}}[3-x]^{\frac{1}{4}}}{5-x} dx = -i \int_0^3 \frac{x^{\frac{3}{4}}[3-x]^{\frac{1}{4}}}{5-x} dx = -iI \end{aligned} \quad (15)$$

식 (12)~식 (15)를 식 (11)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$[1-i]I = \left[ \frac{17}{4} - 5^{\frac{3}{4}}2^{\frac{1}{4}} \right] \sqrt{2}[1-i]\pi \quad (16)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$I = \left[ \frac{17}{4} - 5^{\frac{3}{4}}2^{\frac{1}{4}} \right] \sqrt{2}\pi \quad (17)$$

■

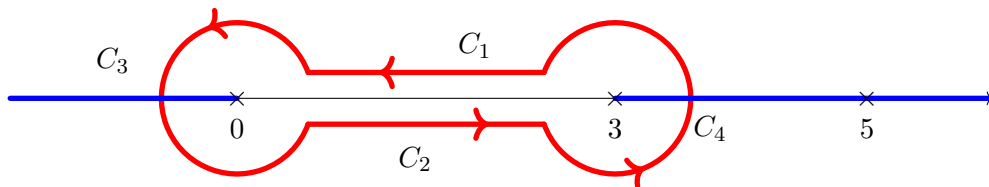


그림 1.7.3. 예제 1.7.4를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: ResidueContour102.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{figure}[ht!]
6 \begin{center}
7 \begin{tikzpicture}[
8   scale=1.0,
9   line cap=round,
10  dec/.style args={#1#2}{
11    decoration={markings, mark=at position #1 with {#2}},
12    postaction={decorate}
13  } ]

```

```

14 \path [black] (-3,0) edge[->] (10,0);
15 \draw [line width=2pt, red, xshift=5cm, dec={0.29}{\arrow{>}}]
16 (-160:1)coordinate(21) arc (-160:160:1) coordinate(11);
17 \draw [line width=2pt, red, xshift=0cm, dec={0.29}{\arrow{>}}]
18 (20:1)coordinate(12) arc (20:340:1) coordinate(22);
19 \draw [line width=2pt, red, dec={0.7}{\arrow{>}}] (11)--(12);
20 \draw [line width=2pt, red, dec={0.3}{\arrow{<}}] (21)--(22);
21 \draw [line width=2pt, blue] (5,0)--(10,0);
22 \draw [line width=2pt, blue] (-3,0)--(0,0);
23 \path (3.5,0.7)[anchor=east] node {$C_1$}
24 (2,-0.8)[anchor=west] node {$C_2$}
25 (-2,0.5) node {$C_3$}
26 (5.9,-0.4) node {$C_4$};
27 \node at (0,0) {$\times$};
28 \node at (0,-0.4) {$0$};
29 \node at (5,0) {$\times$};
30 \node at (5,-0.4) {$3$};
31 \node at (8.33,0) {$\times$};
32 \node at (8.33,-0.4) {$5$};
33 \end{tikzpicture}
34 % -----

```

유리함수의 유수정리(the residue theorem)에 대해서 살펴보자.

**따름정리 1.7.1**

떡함수들(polynomials)  $P$ 와  $Q$ 의 차수들이 식  $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ 를 만족하고 공통근을 갖지 않는다고 하자. 만약 각  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $Q(x) \neq 0$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{Q(z_k)=0, \Im(z_k)>0} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}; z_k \right)$$

증명. 함수들  $P$ 와  $Q$ 를 다음과 같이 표기하자.

$$P(z) \doteq p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n, \quad p_n \neq 0 \tag{1}$$

$$Q(z) \doteq q_0 + q_1z + \dots + q_mz^m, \quad q_m \neq 0 \tag{2}$$

여기서  $m \geq n + 2$ 이다. 방정식  $Q(z) = 0$ 의 근 중에서 허수부분이 양수인 근들을  $z_1, z_2, \dots, z_r$ 이라 하고, 다음 식을 만족하는 양수  $R$ 을 선택하자.

$$R > \max_{k=1, \dots, r} |z_k| \tag{3}$$

이  $R$ 에 대해서 다음과 같은 영역과 경로를 정의하자.

$$D_R \doteq \{z : \Im(z) > 0, |z| < R\} \quad (4)$$

$$C_R \doteq \{|z| = R, \Im(z) > 0\} \quad (5)$$

지금까지 기술한 내용이 그림 1.7.4에 실려있다. 그림 1.7.4를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 RationalFunction101.tikz를 실행하라.

다음 식이 성립한다.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{m-n} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_m}{q_n} \quad (6)$$

따라서 충분히 큰  $R$ 에 대해서 다음 명제를 만족하는 상수  $M > 0$ 이 존재한다.

$$|z| = R \Rightarrow \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq MR^{n-m} \quad (7)$$

식 (7)을 만족하는  $R$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq MR^{n-m} [\pi R] = \pi MR^{n-m+1} \quad (8)$$

가정  $m \geq n + 2$ 과 식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0 \quad (9)$$

정리 1.7.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_R + [-R, R]} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{Q(z_k)=0, \Im(z_k)>0} \operatorname{Res} \left( \frac{P(x)}{Q(x)}; z_k \right) \quad (10)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{-R}^R \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{Q(z_k)=0, \Im(z_k)>0} \operatorname{Res} \left( \frac{P(x)}{Q(x)}; z_k \right) \quad (11)$$

식 (9)와 식 (11)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{Q(z_k)=0, \Im(z_k)>0} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}; z_k \right) \quad (12)$$

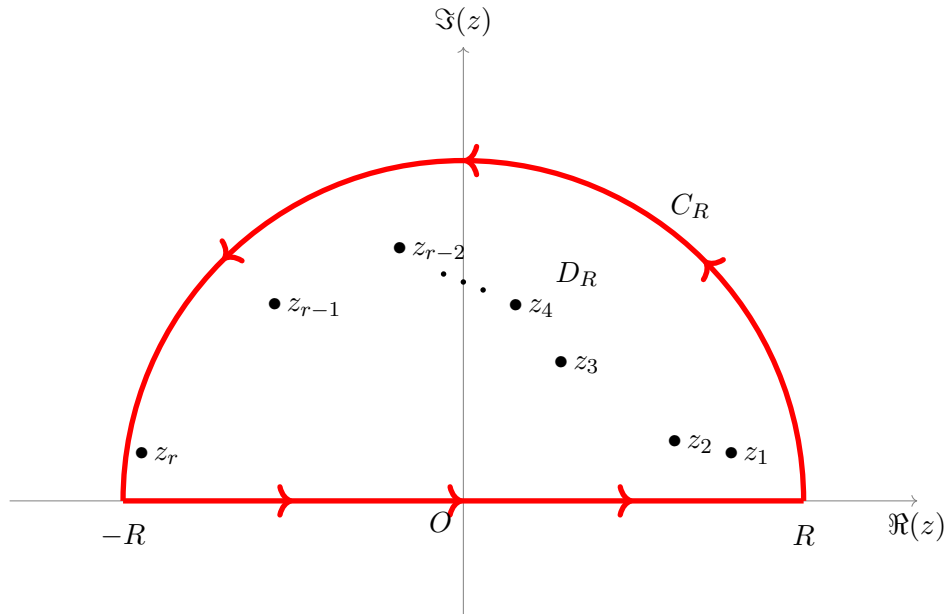


그림 1.7.4. 유리함수의 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: RationalFunction101.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6   [scale=1.5, line width=1.0pt,
7     decoration={%
8       markings,
9       mark=at position 0.25 with {\arrow[line width=2pt]{>}},
10      mark=at position 0.5 with {\arrow[line width=2pt]{>}},
11      mark=at position 0.75 with {\arrow[line width=2pt]{>}}
12    }
13  ]
14 \draw [help lines,->] (-4,0) -- (4,0) coordinate (xaxis);
15 \draw [help lines,->] (0,-1)coordinate(-yaxis) -- (0,4) coordinate (yaxis);
16 \draw [postaction=decorate, line width=2.0pt, color=red] (3,0) arc (0:180:3) ;
17 \draw [postaction=decorate, line width=2.0pt, color=red] (-3,0) -- (3,0) ;
18 \node [below] at (xaxis) {\mathrm{Re}(z)};
19 \node [above] at (yaxis) {\mathrm{Im}(z)};
20 \node [below left] {$0$};
21 \node at (2,2.6) {$C_R$};
22 \node at (3,-.3) {$R$};
23 \node at (-3,-.3) {$-R$};
24 \node at (1,2){\Huge $D_R$};
25 \node at (1,1.2){\bullet \ , \ z_3$};
26 \node at (2,0.5){\bullet \ , \ z_2$};
27 \node at (2.5,0.4){\bullet \ , \ z_1$};
28 \node at (0.6,1.7){\bullet \ , \ z_4 $};
29 \node at (-1.4,1.7){\bullet \ , \ z_{r-1} $};
30 \node at (-2.7,0.4){\bullet \ , \ z_r$};
31 \node at (-0.3,2.2){\bullet \ , \ z_{r-2} $};
32 \node at (-0.0,2){\Huge \ddots $};

```

33 \end{tikzpicture}

**예제 1.7.5** 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{[1+x^2][4+x^2]} dx \quad (1)$$

다음 함수들을 정의하자.

$$P(z) \doteq z^2, \quad Q(z) \doteq [1+z^2][4+z^2] \quad (2)$$

방정식  $Q(z) = 0$ 의 근들 중에서 제1사분면 또는 제2사분면에 속하는 근들은  $z_1 = i$ 와  $z_2 = 2i$ 이다. 다음 식이 성립함에 유의하라.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^2}{[z+i][z-i][z+2i][z-2i]} \quad (3)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}; i \right) = \frac{i^2}{[i+i][i^2+4]} = -\frac{1}{6i} = \frac{1}{6}i \quad (4)$$

$$\operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}; 2i \right) = \frac{4i^2}{[2i+2i][4i^2+1]} = \frac{1}{3i} = -\frac{1}{3}i \quad (5)$$

따름정리 1.7.1에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \left[ \frac{1}{6}i - \frac{1}{3}i \right] = \frac{\pi}{3} \quad (6)$$

■

**예제 1.7.6** 다음 적분을 계산하자.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1+x^2]^2} dx \quad (1)$$

다음 함수들을 정의하자.

$$P(z) \doteq 1, \quad Q(z) \doteq [1+z^2]^2 \quad (2)$$

방정식  $Q(z) = 0$ 의 근들 중에서 제1사분면 또는 제2사분면에 속하는 근은 중복근  $z_1 = i$ 이다. 다음 식이 성립한다.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{h(z)}{[z - i]^2} \tag{3}$$

여기서  $h(z) = [z + i]^{-2}$ 이다. 다음 식이 성립한다.

$$h'(z) = -\frac{2}{[z + i]^3} \tag{4}$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; i\right) = h'(i) = -\frac{2}{[i + i]^3} = \frac{1}{4i} \tag{5}$$

따름정리 1.7.1에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \left[ \frac{1}{4i} \right] = \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

■

**예제 1.7.7** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \tag{1}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \Re\left(\frac{1 - e^{2ix}}{2x^2}\right) \tag{2}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{1}{2} \Re\left(\int_0^{\infty} f(x) dx\right) \tag{3}$$

여기서  $f(z)$ 는 다음과 같다.

$$f(z) \doteq \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} \tag{4}$$

함수  $f(z)$ 를 그림 1.7.5의 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 에서 적분하기로 하자. 그림 1.7.5를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 RationalFunction102.tikz를 실행하라.

Cauchy정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_\epsilon} f(z) dz = 0 \quad (5)$$

변수변환  $z = e^{i\theta}$  를 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{1 + e^{-2R \sin \theta}}{R^2} dz \leq \int_{C_R} \frac{2}{R^2} dz = \frac{2}{R^2} \pi R \quad (6)$$

따라서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (7)$$

작은  $\epsilon > 0$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left\{ 1 - \left[ 1 + 2iz + \frac{[2iz]^2}{2!} + \dots \right] \right\} \doteq \frac{-2i}{z} + g(z) \quad (8)$$

여기서  $g(z)$ 은 해석적이다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon} f(z) dz &= - \int_0^\pi f(\epsilon e^{it}) i \epsilon e^{it} dt \\ &= - \int_0^\pi \frac{-2i}{\epsilon e^{it}} i \epsilon e^{it} dt - \int_0^\pi g(\epsilon e^{it}) i \epsilon e^{it} dt = -2\pi + o(\epsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(z) dz = -2\pi \quad (10)$$

식 (7)과 식 (10)을 식 (5)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 2\pi \quad (11)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$2\Re \left\{ \int_0^\infty f(x) dx \right\} = \Re \left\{ \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \right\} = 2\pi \quad (12)$$



즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = I = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_0^\infty f(x) dx \right\} = \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

■

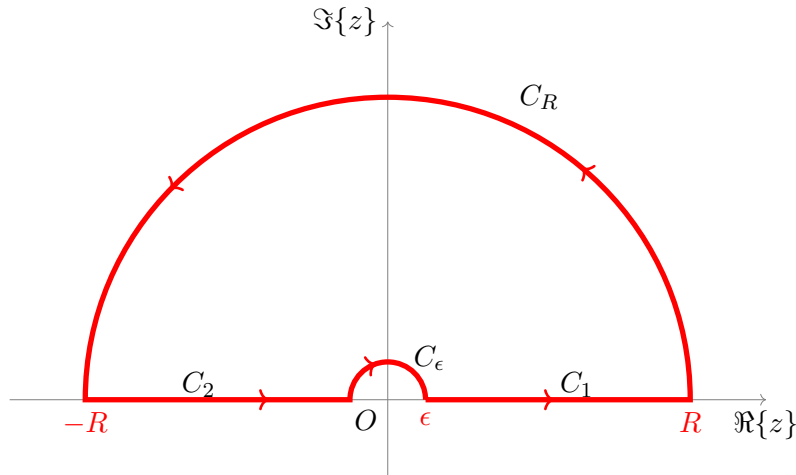


그림 1.7.5. 예제 1.7.7를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: FractionalFunction102.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[decoration={markings,
6 mark=at position 1.7cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
7 mark=at position 7cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
8 mark=at position 13cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
9 mark=at position 18.5cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
10 mark=at position 20.2cm with {\arrow[line width=1pt]{>}}
11 } ]
12
13 % The axes and the contour
14 \draw[help lines,->] (-5,0) -- (5,0) coordinate (xaxis);
15 \draw[help lines,->] (0,-1) -- (0,5) coordinate (yaxis);
16 \path[draw, line width=2.0pt, color=red, postaction=decorate] (0.5,0) node[below]
17     {\epsilon}
18     -- (4,0) node[below] {R} arc (0:180:4) node[below] {-R} -- (-0.5,0) arc
19     (180:0:0.5);
20
21 % The labels
22 \node[below] at (xaxis) {\Re \{z\}};
23 \node[left] at (yaxis) {\Im \{z\}};
24 \node[below left] {$0$};
25 \node at (0.55,0.55) {C_{\epsilon}};
26 \node at (2,4) {C_R};
27 \node at (2.5,0.2) {C_1};
28 \node at (-2.5,0.2) {C_2};

```

## 제1.8절 가지를 고려하는 복소적분

이 절에서는 가지(branch)를 고려해야 하는 복소적분을 살펴보자.

**예제 1.8.1** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \oint_{|z|=1} \sqrt{z} dz \quad (1)$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp\left(\frac{\arg(z)}{2}i\right) \doteq \sqrt{r} \exp\left(\frac{\theta}{2}i\right), \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (2)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $\mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty)$ 를 선택하자. 이 가지자름을 반영한 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 이 그림 1.8.1에 그려져 있다. 이러한 형태의 적분경로를 열쇠 구멍경로(keyhole contour)라 부른다. 그림 1.8.1를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour301.tikz를 실행하라.

곡선  $C$ 와 그 내부에서 함수  $f(\cdot)$ 는 해석적이다. Cauchy정리에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = \sqrt{z}$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \sqrt{z} dz = 0 \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \sqrt{z} dz + \int_{C_R} \sqrt{z} dz + \int_{C_2} \sqrt{z} dz + \int_{C_\epsilon} \sqrt{z} dz = 0 \quad (4)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \sqrt{z} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} |\sqrt{z}| dz \leq 2\pi\epsilon\sqrt{\epsilon} \quad (5)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \sqrt{z} dz = 0 \tag{6}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} \sqrt{z} dz = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^1 \sqrt{x + \delta i} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \tag{7}$$

$$\int_{C_2} \sqrt{z} dz = \int_1^0 \sqrt{x e^{2\pi i}} dx = - \int_0^1 \sqrt{x} e^{\pi i} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \tag{8}$$

식 (6)~식 (8)을 식 (4)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$I = \oint_{|z|=1} \sqrt{z} dz = \int_{C_R} \sqrt{z} dz = - \int_{C_1} \sqrt{z} dz - \int_{C_2} \sqrt{z} dz = -\frac{4}{3} \tag{9}$$

■

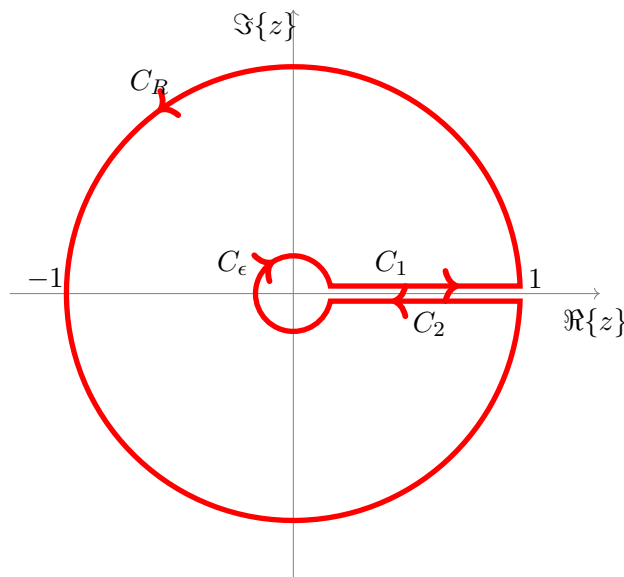


그림 1.8.1. 예제 1.8.1를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour301.tikz
3 % Programmed by CBS-
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6 % Configurable parameters
7 \def\gap{0.2}

```

```

8 \def\bigradius{3}
9 \def\littleradius{0.5}
10
11 % Axes
12 \draw [help lines,->] (-1.25*\bigradius, 0) -- (1.35*\bigradius,0);
13 \draw [help lines,->] (0, -1.25*\bigradius) -- (0, 1.25*\bigradius);
14
15 % Red path
16 \draw[line width=1pt, color=red, decoration={ markings,
17   mark=at position 0.2455 with {\arrow[line width=1.2pt]{>}},
18   mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=1.2pt]{>}},
19   mark=at position 0.87 with {\arrow[line width=1.2pt]{>}},
20   mark=at position 0.97 with {\arrow[line width=1.2pt]{>}},
21   postaction={decorate}]
22   let
23     \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)},
24     \n2 = {asin(\gap/2/\littleradius)}
25   in (\n1:\bigradius) arc (\n1:360-\n1:\bigradius)
26     -- (-\n2:\littleradius) arc (-\n2:-360+\n2:\littleradius)
27     -- cycle;
28
29 % The labels
30 \node at (4.0,-0.38){$\Re\{\left\{ z \right\}$};
31 \node at (-0.37,3.53){$\Im\{\left\{ z \right\}$};
32 \node at (-0.6,0.46) {$C_{\epsilon}$};
33 \node at (-1.8,2.8) {$C_R$};
34 \node at (1.9,0.31) {$C_1$};
35 \node at (1.555,-0.34) {$C_2$};
36 \node at (3.2,0.2) {$1$};
37 \node at (-3.28,0.2) {$-1$};
38 \end{tikzpicture}
39 % -----

```

**예제 1.8.2** 다음 예를 생각해 보라.

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1 \neq 1 = \sqrt{[-1][-1]} \quad (1)$$

식 (1)에서 알 수 있듯이, 복소수를 다룰 때 다음 등식이 성립하지 않을 수도 있음에 유의해야 한다.

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 z_2} \quad (1)$$

다음 적분을 계산해 보자.

$$I = \oint_{|z|=2} \sqrt{z^2 - 1} dz \quad (3)$$

다음 식이 성립한다.

$$\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2} \log(z^2 - 1)} \quad (4)$$

즉,  $\sqrt{z^2 - 1}$ 는 영역  $\{1 < |z| \leq 2\}$ 에서 다가치함수(multi-valued function)이다. 변수변환  $w = 1/z$ 을 적용하면, 다음 식들을 얻는다.

$$I = \oint_{|z|=2} \sqrt{z^2 - 1} dz = - \oint_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{1}{w} \sqrt{1 - w^2} \left[ \frac{-1}{w^2} \right] dw = \oint_{|w|=\frac{1}{2}} \sqrt{1 - w^2} \frac{1}{w^3} dw \quad (5)$$

여기서 두 번째 항의 첫 번째 마이너스사인은  $\oint$ 의 방향을 시계방향에서 역시계방향으로 바꾸기 위한 것이다. 영역  $\{0 < |w| \leq \frac{1}{2}\}$ 에서 함수  $\sqrt{1 - w^2}$ 에서 해석적이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{w^3} \sqrt{1 - w^2} = \frac{1}{w^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{w} - \frac{1}{8} w + \dots \quad (6)$$

식 (6)과 Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$I = \oint_{|w|=\frac{1}{2}} \sqrt{1 - w^2} \frac{1}{w^3} dw = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{\sqrt{1 - w^2}}{w^3}; 0 \right) = 2\pi i \left[ -\frac{1}{2} \right] = -\pi \quad (7)$$

■

**예제 1.8.3** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx, \quad (0 < p < 1) \quad (1)$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$z^{p-1} = |z|^{p-1} \exp(i \arg(z)[p-1]) \doteq r^{p-1} \exp(i\theta[p-1]), \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (2)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $\mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty)$ 를 선택하자. 이 가지자름을 반영한 열쇠구멍 경로(keyhole contour)  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 가 그림 1.8.2에 그려져 있다. 그림 1.8.2를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour303.tikz를 실행하라.

함수  $f(z) = z^{p-1}/[1+z]$ 는 폐곡선  $C$ 의 내점  $z = -1$ 에서 해석적이 아니다. Cauchy

적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); -1) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} [z+1] \frac{z^{p-1}}{1+z} = 2\pi i e^{i\pi[p-1]} \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{i\pi[p-1]} \quad (4)$$

변수변환  $z = re^{i\theta}$ , ( $0 \leq \theta < 2\pi$ )을 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = \int_0^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad (5)$$

$$\int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = \int_R^0 \frac{x^{p-1} e^{i2\pi[p-1]}}{1+x e^{i2\pi}} dx = -e^{i2\pi[p-1]} \int_0^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad (6)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right] = \{1 - e^{i2\pi[p-1]}\} I \quad (7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z} \right| dz \leq 2\pi\epsilon \frac{\epsilon^{p-1}}{1-\epsilon} \quad (8)$$

식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 0 \quad (9)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z} \right| dz \leq 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R-1} \quad (10)$$

조건  $p \in (0, 1)$ 과 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 0 \quad (11)$$

식 (7), 식 (9)와 식 (11)을 식 (4)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\{1 - e^{i2\pi[p-1]}\} I = 2\pi i e^{i\pi[p-1]} \tag{12}$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi p} \tag{13}$$

■

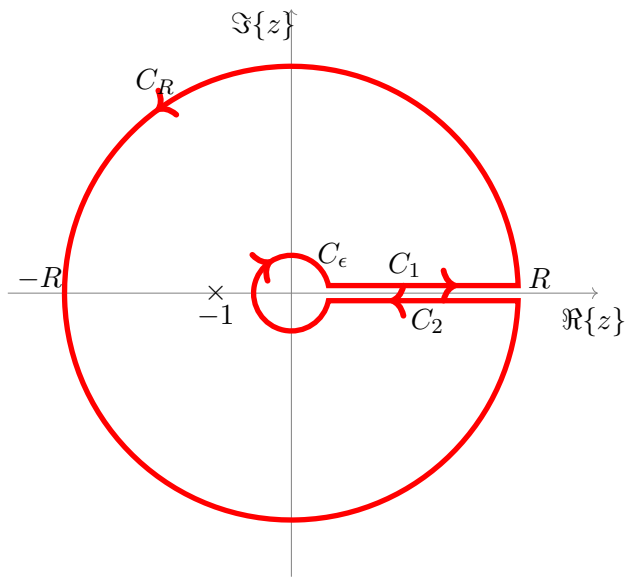


그림 1.8.2. 예제 1.8.3를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour303.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5
6 \begin{tikzpicture}
7 % Configurable parameters
8 \def\gap{0.2}
9 \def\bigradius{3}
10 \def\littleradius{0.5}
11
12 % Axes
13 \draw [help lines,->] (-1.25*\bigradius, 0) -- (1.35*\bigradius,0);
14 \draw [help lines,->] (0, -1.25*\bigradius) -- (0, 1.25*\bigradius);
15
16 % Red path
17 \draw[line width=2pt, color=red, decoration={ markings,

```

```

18 mark=at position 0.2455 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
19 mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
20 mark=at position 0.87 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
21 mark=at position 0.97 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}}},
22 postaction={decorate}]
23 let
24   \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)},
25   \n2 = {asin(\gap/2/\littleradius)}
26 in (\n1:\bigradius) arc (\n1:360-\n1:\bigradius)
27 -- (-\n2:\littleradius) arc (-\n2:-360+\n2:\littleradius)
28 -- cycle;
29
30 % The labels
31 \node at (4.0,-0.38){$\Re\{\left\{ z \right\}$};
32 \node at (-0.37,3.53){$\Im\{\left\{ z \right\}$};
33 \node at (0.55,0.5) {$C_{\epsilon}$};
34 \node at (-1.8,2.8) {$C_R$};
35 \node at (1.5,0.37) {$C_1$};
36 \node at (1.8,-0.37) {$C_2$};
37 \node at (3.28,0.2) {$R$};
38 \node at (-3.33,0.2) {$-R$};
39 \node at (-1,0) {$\times$};
40 \node at (-1,-0.3) {$-1$};
41 \end{tikzpicture}
42 % -----

```

**예제 1.8.4** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx, \quad (0 < p < 2) \quad (1)$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$z^{p-1} = |z|^{p-1} \exp(i \arg(z)[p-1]) \doteq r^{p-1} \exp(ir[p-1]), \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (2)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $\mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty)$ 를 선택하자. 이 가지자름을 반영한 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 가 그림 1.8.3에 그려져 있다. 그림 1.8.3를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour304.tikz를 실행하라.

Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = z^{p-1}/[1+z^2]$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); i) + 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); -i) \\
&= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} [z-i] \frac{z^{p-1}}{1+z^2} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} [z+i] \frac{z^{p-1}}{1+z^2} \\
&= 2\pi i \frac{-1}{2} \left[ e^{i\pi p/2} + e^{i3\pi p/2} \right] = -2\pi i e^{i\pi p} \cos \frac{\pi p}{2} \quad (3)
\end{aligned}$$



따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = 2\pi i e^{i\pi[p-1]} \cos \frac{\pi p}{2} \quad (4)$$

변수변환  $z = re^{i\theta}$ , ( $0 \leq \theta < 2\pi$ )를 적용하면, 다음 식들을 얻는다.

$$\int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = \int_0^R \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx = I \quad (5)$$

$$\int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = \int_R^0 \frac{x^{p-1} e^{i2\pi[p-1]}}{1+x^2 e^{i4\pi}} dx = -e^{i2\pi[p-1]} \int_0^R \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx = -e^{i2\pi[p-1]} I \quad (6)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz \right] = [1 - e^{i2\pi[p-1]}] I = 2ie^{i\pi[p-1]} \sin \pi p I \quad (7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z^2} \right| dz \leq 2\pi\epsilon \frac{\epsilon^{p-1}}{1-\epsilon^2} = 2\pi \frac{\epsilon^p}{1-\epsilon^2} \quad (8)$$

조건  $p > 0$ 과 식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = 0 \quad (9)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z^2} \right| dz \leq 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R^2-1} = 2\pi \frac{R^p}{R^2-1} \quad (10)$$

조건  $p < 2$ 와 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = 0 \quad (11)$$

식 (7), 식 (9)와 식 (11)을 식 (4)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$[2ie^{i\pi[p-1]} \sin \pi p] I = 2\pi i e^{i\pi[p-1]} \cos \frac{\pi p}{2} \quad (12)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{\pi \cos \frac{\pi p}{2}}{\sin \pi p} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi p}{2}} \quad (13)$$

■

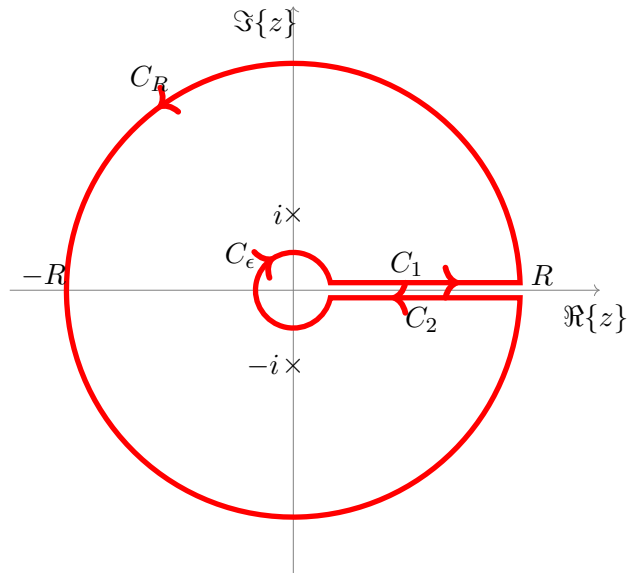


그림 1.8.3. 예제 1.8.4를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour304.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6 % Configurable parameters
7 \def\gap{0.2}
8 \def\bigradius{3}
9 \def\littleradius{0.5}
10
11 % Axes
12 \draw [help lines,->] (-1.25*\bigradius, 0) -- (1.35*\bigradius,0);
13 \draw [help lines,->] (0, -1.25*\bigradius) -- (0, 1.25*\bigradius);
14
15 % Red path
16 \draw[line width=2pt, color=red, decoration={ markings,
17   mark=at position 0.2455 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
18   mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
19   mark=at position 0.87 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
20   mark=at position 0.97 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}}},
21   postaction={decorate}]
22   let
23     \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)},
24     \n2 = {asin(\gap/2/\littleradius)}
25   in (\n1:\bigradius) arc (\n1:360-\n1:\bigradius)

```

```

26 -- (-\n2:\littleradius) arc (-\n2:-360+\n2:\littleradius)
27 -- cycle;
28
29 % The labels
30 \node at (4.0,-0.38){$\Re\{\left\{ z \right\}$};
31 \node at (-0.37,3.53){$\Im\{\left\{ z \right\}$};
32 \node at (-0.7,0.46) {$C_{\epsilon}$};
33 \node at (-1.9,2.8) {$C_R$};
34 \node at (1.5,0.35) {$C_1$};
35 \node at (1.7,-0.39) {$C_2$};
36 \node at (3.29,0.2) {$R$};
37 \node at (-3.30,0.2) {$-R$};
38 \node at (0,1) {$\times$};
39 \node at (-0.2,1) {$i$};
40 \node at (0,-1) {$\times$};
41 \node at (-0.4,-1) {$-i$};
42 \end{tikzpicture}
43 % -----

```

**예제 1.8.5** 예제 1.8.4를 다시 생각해보자. 즉, 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx, \quad (0 < p < 2) \tag{1}$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z) \doteq \ln r + i\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi \tag{2}$$

이 가지자름(branch cut)을 반영한 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 가 그림 1.8.4에 그려져 있다. 그림 1.8.4를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour305.tikz를 실행하라.

Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = z^{p-1}/[1+z^2]$ 에 대해 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} [z - i] \frac{z^{p-1}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{i^{p-1}}{2i} = \pi i^{p-1} \tag{3}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{i} \exp\left(i \frac{\pi p}{2}\right) \tag{4}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z^2} \right| dz \leq \pi \epsilon \frac{\epsilon^{p-1}}{1-\epsilon^2} = \pi \frac{\epsilon^p}{1-\epsilon^2} \tag{5}$$

조건  $p > 0$ 와 식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = 0 \quad (6)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z^2} \right| dz \leq \pi R \frac{R^{p-1}}{R^2-1} = \pi \frac{R^p}{R^2-1} \quad (7)$$

식  $p < 2$ 와 식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = 0 \quad (8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx = I \quad (9)$$

변수변환  $z = xe^{i\pi}$ 를 사용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{z^{p-1}}{1+z^2} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^\epsilon \frac{[e^{i\pi}x]^{p-1}}{1+[e^{i\pi}x]^2} d(e^{i\pi}x) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{i\pi p} \int_R^\epsilon \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx = - \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{i\pi p} \int_\epsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx = -e^{i\pi p} I \end{aligned} \quad (10)$$

식 (6), 식 (8), 식 (9)와 식 (10)를 식 (4)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$[1 - e^{i\pi p}] I = \frac{\pi}{i} \exp\left(i \frac{\pi p}{2}\right) \quad (11)$$

식 (11)을 정리하면, 다음 식을 얻는다.

$$I = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi p}{2}} \quad (12)$$

■

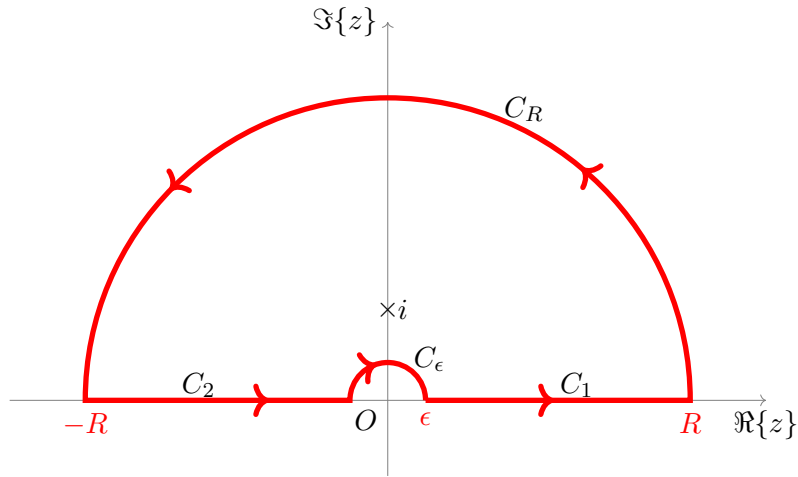


그림 1.8.4. 예제 1.8.5를 위한 적분경로적분경로

```

4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=1.0, decoration={markings,
6 mark=at position 1.7cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
7 mark=at position 7cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
8 mark=at position 13cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
9 mark=at position 18.5cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
10 mark=at position 20.2cm with {\arrow[line width=2pt]{>}}
11 } ]
12 % The axes
13 \draw[help lines,->] (-5,0) -- (5,0) coordinate (xaxis);
14 \draw[help lines,->] (0,-1) -- (0,5) coordinate (yaxis);
15 \node at (0,1.2) {\$\times\$};
16 \node at (0.2,1.2) {\$i\$};
17 % \node at (1,0) {\$\times\$};
18
19 \path[draw, line width=1.2pt, color=red, postaction=decorate] (0.5,0)
20     node[below] {\$\epsilon\$} -- (4,0) node[below] {\$R\$} arc (0:180:4)
21     node[below] {\$-R\$} -- (-0.5,0) arc (180:0:0.5);
22
23 % The labels
24 \node[below] at (xaxis) {\$\Re \{z\}\$};
25 \node[left] at (yaxis) {\$\Im \{z\}\$};
26 \node[below left] {\$0\$};
27 \node at (0.55,0.55) {\$C_{\epsilon}\$};
28 \node at (1.8,3.85) {\$C_R\$};
29 \node at (2.5,0.2) {\$C_1\$};
30 \node at (-2.5,0.2) {\$C_2\$};
31 \end{tikzpicture}
32 % -----

```

**예제 1.8.6** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx, \quad (0 < p < 2) \tag{1}$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\sqrt{z} = |z|^{1/2} \exp\left(i\frac{\arg(z)}{2}\right) \doteq r^{1/2} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right), \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (2)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $\mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty)$ 를 선택하자. 이 가지자름을 반영한 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 가 그림 1.8.5에 그려져 있다. 그림 1.8.5를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour306.tikz를 실행하라.

함수  $f(z) = \sqrt{z}/[z^2 + 6z + 8]$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); -2) + 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); -4) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2} [z+2] \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow -4} [z+4] \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} \\ &= 2\pi i \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} - i \right] = 2\pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz + \int_{C_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz \\ + \int_{C_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz = 2\pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

변수변환  $z = re^{i\theta}$ , ( $0 \leq \theta < 2\pi$ )을 적용하면, 다음 식들을 얻는다.

$$\int_{C_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz = \int_\epsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+6x+8} dx \quad (5)$$

$$\int_{C_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz = \int_R^\epsilon \frac{\sqrt{xe^{i2\pi}}}{[xe^{i2\pi}]^2+6[xe^{i2\pi}]+8} dx = -e^{i\pi} \int_\epsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+6x+8} dx \quad (6)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{C_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz + \int_{C_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz \right] = 2I \quad (7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{\sqrt{z}}{z^2+6z+8} \right| dz \leq 2\pi\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{[2-\epsilon][4-\epsilon]} \quad (8)$$

식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz = 0 \quad (9)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} \right| dz \leq 2\pi R \frac{\sqrt{R}}{[R-2][R-4]} \quad (10)$$

식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz = 0 \quad (11)$$

식 (7), 식 (9)와 식 (11)을 식 (4)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$I = \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (12)$$

이 해에 대한 다른 의견도 있다. 다음 웹사이트를 참조하라.

<http://math.stackexchange.com/questions/370150>

</use-the-residue-theorem-to-evaluate-the-integral/370838>

■

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour306.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6 % Configurable parameters
7 \def\gap{0.2}
8 \def\bigradius{3}
9 \def\littleradius{0.5}
10
11 % Axes
12 \draw [help lines,->] (-1.25*\bigradius, 0) -- (1.35*\bigradius,0);
13 \draw [help lines,->] (0, -1.25*\bigradius) -- (0, 1.25*\bigradius);
14
15 % Red path
16 \draw[line width=2pt, color=red, decoration={ markings,
17   mark=at position 0.2455 with {\arrow[line width=2pt]{>}},
18   mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=2pt]{>}},
19   mark=at position 0.87 with {\arrow[line width=2pt]{>}},
20   mark=at position 0.97 with {\arrow[line width=2pt]{>}}},
21   postaction={decorate}]

```

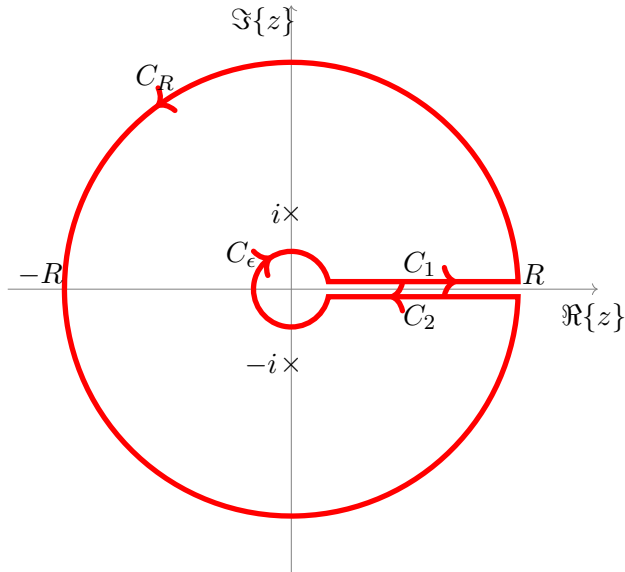


그림 1.8.5. 예제 1.8.6를 위한 적분경로

```

22 let
23   \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)},
24   \n2 = {asin(\gap/2/\littleradius)}
25 in (\n1:\bigradius) arc (\n1:360-\n1:\bigradius)
26 -- (-\n2:\littleradius) arc (-\n2:-360+\n2:\littleradius)
27 -- cycle;
28
29 % The labels
30 \node at (4.0,-0.38){$\Re\{\left\{ z \right\}\}$};
31 \node at (-0.37,3.53){$\Im\{\left\{ z \right\}\}$};
32 \node at (-0.66,0.46) {$C_{\epsilon}$};
33 \node at (-1.8,2.8) {$C_R$};
34 \node at (1.7,0.33) {$C_1$};
35 \node at (1.7,-0.37) {$C_2$};
36 \node at (3.2,0.2) {$R$};
37 \node at (-3.32,0.2) {$-R$};
38 \node at (0,1) {$i$};
39 \node at (-0.2,1) {$i$};
40 \node at (0,-1) {$-i$};
41 \node at (-0.4,-1) {$-i$};
42 \end{tikzpicture}
43 % -----

```

**예제 1.8.7** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{[\ln x]^2}{1+x^2} dx \quad (1)$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z) \doteq \ln r + i\theta, \quad (0 < \theta < 2\pi) \quad (2)$$



이 예제에서는 그림 1.8.5의 열쇠구멍경로를 사용하지 않는다. 만약 그 열쇠구멍경로를 사용하면, 식에서  $I$  자체가 삭제된다. 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 가 그림 1.8.6에 그려져 있다. 그림 1.8.6를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour307.tikz를 실행하라.

유수정리에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = [\ln z]^2/[1 + z^2]$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); i) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} [z - i] \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} = 2\pi i \frac{[\ln i]^2}{2i} = \pi \left[ \frac{\pi}{2}i \right]^2 = -\frac{\pi^3}{4} \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz + \int_{C_R} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz + \int_{C_2} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz = -\frac{\pi^3}{4} \quad (4)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} \right| dz \leq \pi \epsilon \frac{[\ln \epsilon]^2 + \pi^2}{1 - \epsilon^2} \quad (5)$$

여기서 마지막 부등호는 다음 식에 의해서 성립한다.

$$|[\ln z]^2| = |\ln \epsilon + i\theta|^2 \leq [\ln \epsilon]^2 + \pi^2, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (6)$$

식 (5)에 L'Hospital정리를 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz = 0 \quad (7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} \right| dz \leq \pi R \frac{[\ln R]^2 + \pi^2}{R^2 - 1} \quad (8)$$

식 (8)에 L'Hospital정리를 적용하면 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{[\ln z]^2}{1 + z^2} dz = 0 \quad (9)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{[\ln z]^2}{1+z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{[\ln x]^2}{1+x^2} dx = I \quad (10)$$

변수변환  $z = xe^{i\pi}$  를 사용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{[\ln z]^2}{1+z^2} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^{\epsilon} \frac{[\ln(e^{i\pi}x)]^2}{1+[e^{i\pi}x]^2} d[e^{i\pi}x] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{i\pi} \int_R^{\epsilon} \frac{[\ln x + i\pi]^2}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{[\ln x + i\pi]^2}{1+x^2} dx \end{aligned} \quad (11)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{[\ln z]^2}{1+z^2} dz = I + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx - \pi^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad (12)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

식 (12)와식 (13)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{[\ln z]^2}{1+z^2} dz = I + i2\pi \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx - \frac{\pi^3}{2} \quad (14)$$

식 (7), 식 (9), 식 (10)와 식 (14)를 식 (4)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$2I + i2\pi \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx - \frac{\pi^3}{2} = -\frac{\pi^3}{4} \quad (15)$$

식 (17)의 양변에서 실수부분과 허수부분을 비교하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$I = \frac{\pi^3}{8} \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0 \quad (17)$$

다음 식들을 이용해서 식 (17)이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int_0^\infty \frac{\ln u}{1+u^2} du \tag{18}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{v}{e^v + e^{-v}} dv = -\int_{-\infty}^\infty \frac{v}{e^v + e^{-v}} dv \tag{19}$$

변수변환  $u = 1/x$ 를 사용해서 식 (18)을, 그리고 변수변환  $v = \ln x$ 를 사용해서 식 (19)를 유도할 수 있다. ■

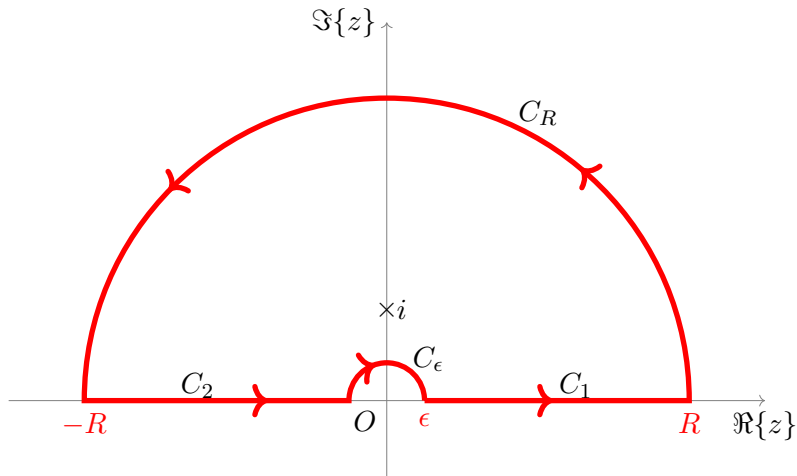


그림 1.8.6. 예제 1.8.7를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour307.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[decoration={markings,
6 mark=at position 1.7cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
7 mark=at position 7cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
8 mark=at position 13cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
9 mark=at position 18.5cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
10 mark=at position 20.2cm with {\arrow[line width=2pt]{>}}
11 } ]
12
13 % The axes
14 \draw[help lines,->] (-5,0) -- (5,0) coordinate (xaxis);
15 \draw[help lines,->] (0,-1) -- (0,5) coordinate (yaxis);
16 \node at (0,1.2) {\$ \times \$};
17 \node at (0.2,1.2) {\$ i \$};
18
19 % \node at (1,0) {\$ \times \$};
20 \path[draw, line width=2pt, color=red, postaction=decorate] (0.5,0)
21 node[below] {\$ \epsilon \$} -- (4,0) node[below] {\$ R \$}
22 arc (0:180:4) node[below] {\$ -R \$} -- (-0.5,0) arc (180:0:0.5);
23

```

```

24 % The labels
25 \node[below] at (xaxis) {\Re \{z\}};
26 \node[left] at (yaxis) {\Im \{z \}};
27 \node[below left] {\$0\$};
28 \node at (0.55,0.55) {\$C_{\epsilon}\$};
29 \node at (2,3.8) {\$C_R\$};
30 \node at (2.5,0.2) {\$C_1\$};
31 \node at (-2.5,0.2) {\$C_2\$};
32 \end{tikzpicture}
33 % -----

```

**예제 1.8.8** 다음 적분을 구해보자.

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

다음 적분을 생각해보자.

$$I = \int_C \frac{\ln(z + i)}{1 + z^2} dz \quad (2)$$

식 (2)의 적분경로  $C$ 가 그림 1.8.7에 빨간색으로 그려져 있다. 그림 1.8.7을 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour308.tikz를 실행하라.

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z) \doteq \ln r + i\theta, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right) \quad (3)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $(-i\infty, i \lim_{y \rightarrow -0} y)$ 를 선택하자. 이 가지자름이 그림 1.8.7에 파란색으로 그려져 있다. 유수정리에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = \ln(z + i)/(1 + z^2)$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} [z - i] \frac{\ln(z + i)}{1 + z^2} = 2\pi i \frac{\ln(2i)}{2i} = \pi \left[ \ln 2 + \frac{\pi}{2} i \right] \quad (4)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{\ln(z + i)}{1 + z^2} dz + \int_{C_R} \frac{\ln(z + i)}{1 + z^2} dz = \pi \left[ \ln 2 + \frac{\pi}{2} i \right] \quad (5)$$

다음 식들이 성립한다.

$$|\ln(z+i)| \leq |\ln(|z+i|)| + |\arg(z+i)| \leq \ln(R+1) + 2\pi \quad (6)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} \right| dz \leq \pi R \frac{\ln(R+1) + 2\pi}{R^2 - 1} \quad (7)$$

식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz = 0 \quad (8)$$

식 (5)와 식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz + \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz = \pi \left[ \ln 2 + \frac{\pi}{2} i \right] \quad (9)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz &= \int_0^\infty \frac{\ln(-z+i)}{1+z^2} dz = \int_0^\infty \frac{\ln(z-i) + \ln(-1)}{1+z^2} dz \\ &= \int_0^\infty \frac{\ln(z-i)}{1+z^2} dz + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^\infty \frac{\ln(z-i)}{1+z^2} dz + i\frac{\pi^2}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)와 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\pi \left[ \ln 2 + \frac{\pi}{2} i \right] = \int_0^\infty \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz + \int_0^\infty \frac{\ln(z-i)}{1+z^2} dz + i\frac{\pi^2}{2} \quad (11)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(z^2+1)}{1+z^2} dz = \pi \ln 2 \quad (12)$$

■

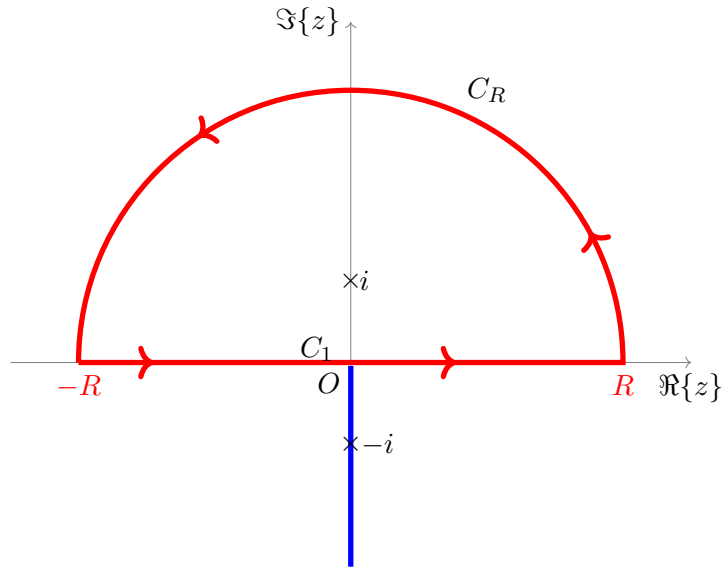


그림 1.8.7. 예제 1.8.8를 위한 적분경로

```

4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[decoration={markings,
6 mark=at position 1.7cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
7 mark=at position 7cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
8 mark=at position 13cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
9 mark=at position 18.5cm with {\arrow[line width=1pt]{>}},
10 mark=at position 20.2cm with {\arrow[line width=1pt]{>}}
11 } ]
12
13 % The axes
14 \draw[help lines,->] (-5,0) -- (5,0) coordinate (xaxis);
15 \draw[help lines,->] (0,-3) -- (0,5) coordinate (yaxis);
16 \draw[line width=2pt, color=blue] (0,-3) -- (0,-0.05);
17
18 % \node at (1,0) {\times};
19 \path[draw, line width=1.2pt, color=red, postaction=decorate] (-4,0) -- (4,0)
20   node[below] {$R$} arc (0:180:4) node[below] {$-R$};
21
22 % The labels
23 \node[below] at (xaxis) {$\Re \{z\}$};
24 \node[left] at (yaxis) {$\Im \{z\}$};
25 \node[below left] {$0$};
26 \node at (2,4) {$C_R$};
27 \node at (-0.5,0.2) {$C_1$};
28 \node at (0,1.2) {\times};
29 \node at (0.2,1.2) {$i$};
30 \node at (0,-1.2) {\times};
31 \node at (0.4,-1.2) {$-i$};
32 \end{tikzpicture}

```

**예제 1.8.9** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{[1+x^2]^2} dx \tag{1}$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z) \doteq \ln r + i\theta, \quad (-\pi < \theta \leq \pi) \quad (2)$$

이 주가지를 고려한 적분경로  $C \doteq C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 가 그림 1.8.8에 그려져 있다. 그림 1.8.8를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour309.tikz를 실행하라.

정적분  $I$ 를 구하기 위해서, 함수  $\ln z / [1 + z^2]^2$  대신 함수  $f(z) = [\ln z]^2 / [1 + z^2]^2$ 를 살펴보자. 유수정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = I_1 + I_2 \quad (3)$$

여기서  $I_1$ 과  $I_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I_1 &\doteq 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \{ [z - i]^2 f(z) \} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2[\ln z] \{ 1 + [z \ln z]i - zi \}}{z[-1 + zi]^3} = \frac{1}{16} [-4\pi + \pi^2 i] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\doteq 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \{ [z + i]^2 f(z) \} \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2[\ln z] \{ -1 + [z \ln z]i - zi \}}{z[1 + zi]^3} = \frac{1}{16} [-4\pi - \pi^2 i] \end{aligned} \quad (5)$$

식 (4)와 식 (5)를 식 (3)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left[ \frac{-\pi}{2} \right] = -i\pi^2 \quad (6)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{[\ln z]^2}{[1 + z^2]^2} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{[\ln z]^2}{[1 + z^2]^2} dz + \int_{C_2} \frac{[\ln z]^2}{[1 + z^2]^2} dz + \int_{C_R} \frac{[\ln z]^2}{[1 + z^2]^2} dz = -i\pi^2 \quad (7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{[\ln z]^2}{[1 + z^2]^2} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{[\ln z]^2}{[1 + z^2]^2} \right| dz \leq 2\pi\epsilon \frac{[\ln \epsilon]^2 + \pi^2}{[1 - \epsilon^2]^2} \quad (8)$$

여기서 마지막 부등호는 다음 식에 의해서 성립한다.

$$|\ln z|^2 = |\ln \epsilon + i\theta|^2 \leq [\ln \epsilon]^2 + \pi^2 \quad (9)$$

식 (8)과 L'Hospital정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} dz = 0 \quad (10)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} \right| dz \leq 2\pi R \frac{[\ln R]^2 + \pi^2}{R^2 - 1} \quad (11)$$

식 (11)과 L'Hospital정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} dz = 0 \quad (12)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^\epsilon \frac{[\ln(xe^{i\pi})]^2}{\{1+[xe^{i\pi}]^2\}^2} d[xe^{i\pi}] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^R \frac{[\ln x + i\pi]^2}{[1+x^2]^2} dx \end{aligned} \quad (13)$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^R \frac{[\ln(xe^{-i\pi})]^2}{\{1+[xe^{-i\pi}]^2\}^2} d[xe^{-i\pi}] \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^R \frac{[\ln x - i\pi]^2}{[1+x^2]^2} dx \end{aligned} \quad (14)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1+C_2} \frac{[\ln z]^2}{[1+z^2]^2} dz = 4\pi i \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^R \frac{\ln x}{[1+x^2]^2} dx = 4\pi i I \quad (15)$$



식 (10), 식 (12), 그리고 식 (15)를 식 (7)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$I = -\frac{\pi}{4} \tag{16}$$

■

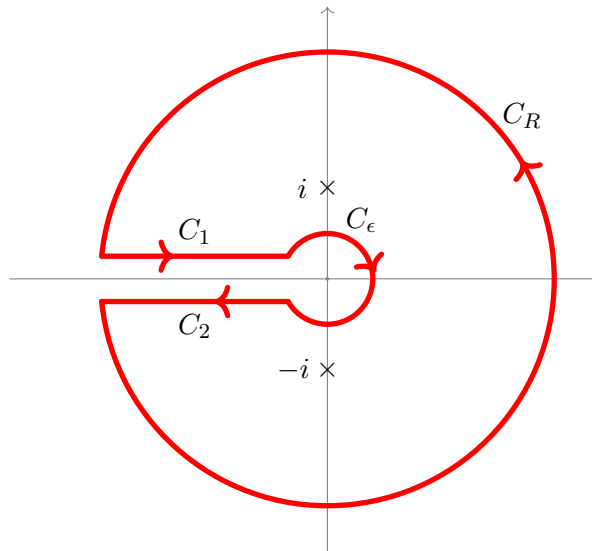


그림 1.8.8. 예제 1.8.9를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour309.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[
6   scale=3,
7   line cap=round,
8   dec/.style args={#1#2}{
9     decoration={markings, mark=at position #1 with {#2}},
10    postaction={decorate}
11  ]
12 \path[gray,thin,xshift=-1.2cm] (-.2,0) edge[->] (2.4,0) (1.2,-1.2)
13   edge[->] (1.2,1.2);
14 \draw[line width= 2pt, red,dec={0.59}{\arrow{>}}]
15   ({-180+asin(0.1)}:1cm)coordinate(1) arc ({-180+asin(0.1)}
16   :{180-asin(0.1)}:1cm)coordinate(3);
17 \draw[line width= 2pt, red][dec={0.59}{\arrow{<}}]
18   ({-180+asin(.5)}:2mm)coordinate(2) arc ({-180+asin(.5)}
19   :{180-asin(.5)}:2mm)coordinate(4);
20 \draw[line width= 2pt, red, dec={0.69}{\arrow{<}}] (1)--node[below,black]
21   {$ C_2$}(2);
22 \draw[line width= 2pt, red, dec={0.39}{\arrow{>}}] (3)--node[above,black]
23   {$ C_1 $}(4);
24 \node at (0,0.4) {$\times$};
25 \node at (-0.11,0.4) {$i$};
26 \node at (0,-0.4) {$\times$};

```

```

27 \node at (-0.15,-0.4) {\$-i\$};
28 \path (60:3mm) node{\$C_{\epsilon}\$}
29       (40:1.12cm) node{\$C_{R}\$}
30       (0,0)node[circle,fill=gray,inner sep=.5pt]{};
31 \end{tikzpicture}
32 % -----

```

**예제 1.8.10** 다음 적분을 구해보자.

$$I = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \quad (1)$$

다음 주가지(principal branch)를 생각해보자.

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{|z|}} \exp\left(-i\frac{\arg(z)}{2}\right) \doteq \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right), \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \quad (2)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $\mathbb{R}^- \doteq (-\infty, 0]$ 를 선택하자. 이 가지자름을 반영한 열쇠구멍경로  $C \doteq \sum_{i=0}^4 C_R + C_\epsilon$ 이 그림 1.8.9에 그려져 있다. 그림 1.8.9를 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 BranchContour310.tikz를 실행하라.

Cauchy정리에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = e^z/\sqrt{z}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_0} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_3} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_4} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = 0 \quad (4)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{e^z}{\sqrt{z}} \right| dz \leq 2\pi\epsilon \frac{e^{\epsilon \cos \theta}}{\sqrt{\epsilon}} \leq 2\pi\epsilon \frac{e^\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} \quad (5)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = 0 \quad (6)$$

다음 부등식이 성립한다.

$$\left| \int_{C_3+C_4} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right| \leq \left| \int_{\Re\{z\}<0} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right| + \left| \int_{0 \leq \Re\{z\} \leq 1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right| \quad (7)$$

식 (7)의 우변의 첫 번째 항에 변수변환  $z = Re^{i\theta}$ 를 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\left| \int_{\Re\{z\}<0} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right| \leq \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{e^{R \cos \theta}}{\sqrt{R}} R d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{R \cos \theta}}{\sqrt{R}} R d\theta = J_1 + J_2 \quad (8)$$

여기서  $J_1$ 과  $J_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$J_1 \doteq \int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{R \cos \theta} \sqrt{R} d\theta, \quad J_2 \doteq \int_{\pi/2}^{-\pi} e^{R \cos \theta} \sqrt{R} d\theta \quad (9)$$

각  $\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ 에 대해서 다음 부등식이 성립한다.

$$\cos \theta \leq 1 + \frac{2}{\pi} \theta \quad (10)$$

식 (10)을 적분  $J_1$ 에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$J_1 \leq \sqrt{R} \int_{-\pi}^{-\pi/2} \exp\left(R \left[1 + \frac{2}{\pi} \theta\right]\right) d\theta = \sqrt{R} e^R \int_{-\pi}^{-\pi/2} \exp\left(\frac{2R}{\pi} \theta\right) d\theta \quad (11)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$0 \leq J_1 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{R}} e^R \exp\left(\frac{2R}{\pi} \theta\right) \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{R}} [1 - e^{-R}] \quad (12)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_1 = 0 \quad (13)$$

각  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 에 대해서 다음 부등식이 성립한다.

$$\cos \theta \leq 1 - \frac{2}{\pi} \theta \quad (14)$$

식 (14)를 적분  $J_2$ 에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$J_2 \leq \sqrt{R} \int_{\pi/2}^{\pi} \exp\left(R\left[1 - \frac{2}{\pi}\theta\right]\right) d\theta = \sqrt{R}e^R \int_{\pi/2}^{\pi} \exp\left(-\frac{2R}{\pi}\theta\right) d\theta \quad (15)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$0 \leq J_2 \leq -\frac{\pi}{2\sqrt{R}}e^R \exp\left(-\frac{2R}{\pi}\theta\right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{R}}[1 - e^{-R}] \quad (16)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_2 = 0 \quad (17)$$

식 (13)과 식 (17)을 식 (8)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Re\{z\} < 0} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = 0 \quad (18)$$

식 (7)의 우변 두 번째 항에 변수변환  $z = Re^{i\theta}$ 를 적용하면, 다음 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\left| \int_{0 \leq \Re\{z\} \leq 1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right| \leq 2 \frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\cos^{-1}(1/R)}^{\pi/2} e^{R \cos \theta} d\theta \quad (19)$$

다음과 같이 상수  $J_3$ 를 정의하자.

$$J_3 \doteq 2 \frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\cos^{-1}(1/R)}^{\pi/2} e^{R \cos \theta} d\theta \quad (20)$$

각  $\theta \in [\cos^{-1}(1/R), \frac{\pi}{2}]$ 에 대해서 다음 부등식이 성립한다.

$$\cos \theta \leq \frac{1}{R} + \beta \left[ \theta - \cos^{-1} \frac{1}{R} \right] \quad (21)$$

여기서  $\beta$ 는 다음과 같다.

$$\beta \doteq \frac{1 - R}{R \cos^{-1} \frac{1}{R}} < 0 \quad (22)$$

식 (21)을 적분  $J_3$ 에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} J_3 &\leq 2\sqrt{R} \int_{\cos^{-1}(1/R)}^{\pi/2} \exp\left(R\left\{\frac{1}{R} + \beta\left[\theta - \cos^{-1}\frac{1}{R}\right]\right\}\right) d\theta \\ &= 2e\sqrt{R} \exp\left(-R\beta \cos^{-1}\frac{1}{R}\right) \int_{\cos^{-1}(1/R)}^{\pi/2} e^{R\beta\theta} d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} J_3 &\leq 2e\sqrt{R} \exp\left(-R\beta \cos^{-1}\frac{1}{R}\right) \frac{1}{R\beta} e^{R\beta\theta} \Big|_{\cos^{-1}(1/R)}^{\pi/2} \\ &= \frac{2e}{\beta\sqrt{R}} \left\{1 - \exp\left(R\beta\left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{R}\right]\right)\right\} \end{aligned} \quad (24)$$

또한  $J_3 \geq 0$ 이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_3 = 0 \quad (25)$$

식 (19)와 식 (25)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{0 \leq \Re\{z\} \leq 1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = 0 \quad (26)$$

식 (18)과 식 (26)을 식 (7)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_4} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3+C_4} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = 0 \quad (27)$$

변수변환  $z = xe^{i\pi}$ 을 적용하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz &= \int_{-R}^{-\epsilon} \exp(xe^{i\pi}) \frac{1}{\sqrt{xe^{i\pi}}} d(xe^{i\pi}) = \int_R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}e^{i\pi/2}} e^{i\pi} dx \\ &= - \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}i} [-1] dx = \frac{1}{i} \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = -i \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned} \quad (28)$$

변수변환  $z = xe^{-i\pi}$ 을 적용하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz &= \int_{-\epsilon}^{-R} \exp(xe^{-i\pi}) \frac{1}{\sqrt{xe^{-i\pi}}} d(xe^{-i\pi}) = \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}e^{-i\pi/2}} e^{-i\pi} dx \\ &= \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{i} dx = -i \int_{\epsilon}^R e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned} \quad (29)$$

식 (28)과 식 (29)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{C_1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right] \\ &= -2i \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} du = -2i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2i \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (30)$$

식 (6), 식 (27)과 식 (30)을 식 (4)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_0} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{C_1} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{\sqrt{z}} dz \right] = 2i \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (31)$$

■

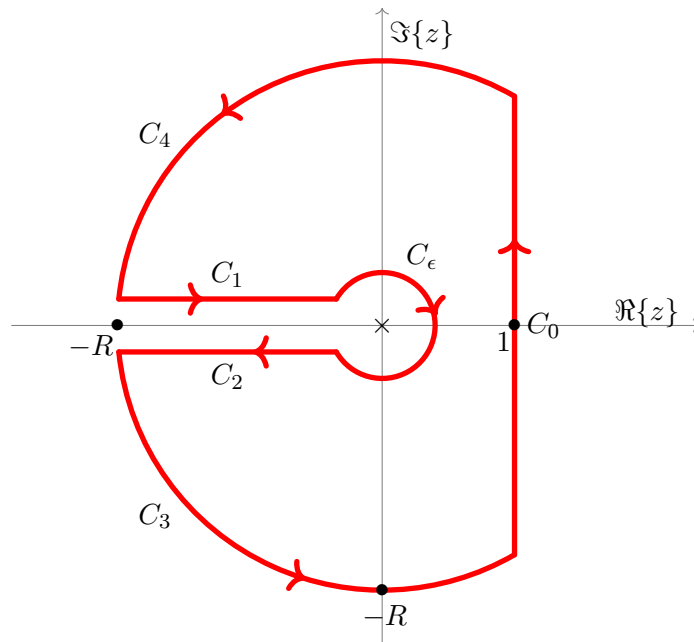


그림 1.8.9. 예제 1.8.10를 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour310.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[
6   scale=3.5,
7   line cap=round,
8   dec/.style args={#1#2}{
9     decoration={markings, mark=at position #1 with {#2}},
10    postaction={decorate}

```

```

11 } ]
12 \path[gray,thin,xshift=-1.2cm] (-.2,0) edge[->] (2.4,0) (1.2,-1.2)
13     edge[->] (1.2,1.2);
14 \draw[line width=2pt, color=red, dec={0.59}{\arrow{>}}]
15     ( {-180+asin(0.1)}:1cm)coordinate(1) arc ( {-180+asin(0.1)}
16     :{-60}:1cm)coordinate(2);
17 \draw[line width=2pt, color=red, dec={0.59}{\arrow{>}}]
18     ( {60}:1cm)coordinate(3) arc ( {60}::{180-asin(0.1)}:1cm)coordinate(4);
19 \draw[line width=2pt, color=red, dec={0.69}{\arrow{>}}] (2)
20     --node[right,black]{$C_0$}(3);
21 \draw[line width=2pt, color=red, ][dec={0.59}{\arrow{<}}]
22     ( {-180+asin(.5)}:2mm)coordinate(5) arc ( {-180+asin(.5)}:
23     {180-asin(.5)}:2mm)coordinate(6);
24 \draw[line width=2pt, color=red, dec={0.69}{\arrow{<}}] (1)--
25     node[below,black]{$C_2$}(5);
26 \draw[line width=2pt, color=red, dec={0.39}{\arrow{>}}] (4)--
27     node[above,black]{$C_1$}(6);
28 \path (60:3mm) node{$C_{\epsilon}$}
29     (-140:1.12cm) node{$C_3$}
30     (140:1.12cm) node{$C_4$}
31     (0,0)node[circle,fill=gray,inner sep=.5pt]{};
32 \node at (1.0,0.05){$\operatorname{Re}\{\left\{ z \right\}$};
33 \node at (0.15,1.1){$\operatorname{Im}\{\left\{ z \right\}$};
34 \node at (0,0) {$\times$};
35 \node at (0.0,-1.0) {$\bullet$};
36 \node at (0.01,-1.10) {$-R$};
37 \node at (-1.0,0.0) {$\bullet$};
38 \node at (-1.1,-0.08) {$-R$};
39 \node at (0.5,0) {$\bullet$};
40 \node at (0.46,-0.06) {$1$};
41 \end{tikzpicture}
42 % -----

```





## 제 2 장

# Fourier 급수

Pure mathematics is much more than an armoury of tools and techniques for the applied mathematician. On the other hand, the pure mathematician has ever been grateful to applied mathematics for stimulus and inspiration. From the vibrations of the violin string they have drawn enchanting harmonies of Fourier Series, and to study the triode valve they have invented a whole theory of non-linear oscillations.

George Frederick James Temple (1901-1992)

### 제 2.1 절 삼각함수의 직교성

여러 학문 분야에서 사용되는 직교근사법 (orthogonal approximation) 의 하나가 Fourier 근사 (Fourier approximation) 이다. Fourier 근사란 어떤 함수를 사인함수들과 코사인함수들의 선형결합으로 근사시키는 것이다. 만약 함수  $g$  의 주기가  $L (> 0)$  이면, 다음 식들에서 알 수 있듯이 함수  $f(x) \doteq g(Lx/2\pi)$  는 주기가  $2\pi$  이다.

$$f(x + 2\pi) = g\left(\frac{Lx}{2\pi} + L\right) = g\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) = f(x) \quad (2.1.1)$$

따라서, 이 절에서는 주기가  $2\pi$  인 함수만을 고려하기로 하자.

#### 정의 2.1.1

구간  $[a, b]$  의 분할  $\Pi \doteq \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_M = b\}$  을 살펴보자. 함수  $f(x)$  가 각 구간  $(t_{i-1}, t_i)$  에서 연속이고, 각 점  $t_i$ ,  $(i = 1, 2, \dots, M - 1)$  에서 좌극한(left-hand limit) 과

우극한(right-hand limit)을 갖으며, 점  $a$ 에서 우극한을 갖고, 또한 점  $b$ 에서 좌극한을 갖는다고 하자. 이 함수  $f(x)$ 는 구간  $[a, b]$ 에서 구분적으로 연속(piecewisely continuous)이라 한다.

다음 명제는 Fourier 급수(Fourier series) 이론의 기초가 된다.

**명제 2.1.1**

모든 정수들의 집합  $\mathbb{Z}$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

- a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0, (n \in \mathbb{Z})$
- b)  $\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi$
- c)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = 0, (n \in \mathbb{Z} - \{0\})$
- d)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = 0, (m, n \in \mathbb{Z})$
- e)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = 0, (m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n)$
- f)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = 0, (m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n)$
- g)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \pi, (n \in \mathbb{Z} - \{0\})$
- h)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi, (n \in \mathbb{Z} - \{0\})$

증명. 초등미적분을 적용해서 이 명제를 쉽게 증명할 수 있다. 여기서는 경로적분(contour integral)을 사용해서 성질 (g)를 증명하고자 한다.

원점을 내점(interior point)으로 포함하는 닫힌경로  $C$ 에서 함수  $f(z)$ 를 Laurent 급수  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ 로 전개할 수 있다고 하자. 이 함수의 적분경로  $C$ 에서 경로적분은 다음과 같다.

$$I = \oint_C f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_C z^k dz \tag{1}$$

만약 적분경로  $C$ 가 원점을 중심으로 하는 반경이  $r(> 0)$ 인 원이며 또한 양방향을 취하면, 변수변환  $z = re^{i\theta}$ 에 의해서 적분  $I$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_C [re^{i\theta}]^k i r e^{i\theta} d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k i r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i[k+1]\theta} d\theta \tag{2}$$

성질 (a)~성질 (c)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} e^{i[k+1]\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} [\cos([k+1]\theta) + i\sin([k+1]\theta)] d\theta = \begin{cases} 2\pi, & (k = -1) \\ 0, & (k \neq -1) \end{cases} \quad (3)$$

식 (2)와 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I = 2\pi ia_{-1} \quad (4)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \quad (5)$$

여기서  $z = e^{i\theta}$ 이다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\sin^2 n\theta = \left[ \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \right]^2 = \frac{z^{2n} - 2 + z^{-2n}}{-4} \quad (6)$$

또한 다음 식이 성립한다.

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (7)$$

만약  $n \neq 0$ 이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \frac{1}{-4i} \oint_C \frac{z^{2n} - 2 + z^{-2n}}{z} dz = \frac{-2}{-4i} 2\pi i = \pi \quad (8)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (6)과 식 (7)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (4)에 의해서 성립한다. ■

명제 2.1.1에서 알 수 있듯이,  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \pm \cos x, \pm \sin x, \pm \cos 2x, \pm \sin 2x, \dots \right\}$ 는 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 직교함수계(system of orthogonal functions)을 이룬다. 다음 예제는 이 성질을 이용하는 것이다.

**예제 2.1.1** 함수  $f(x)$ 를 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 다음과 같이 표현할 수 있다고 하자.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx] \quad (1)$$

이  $\alpha_n$  과  $\beta_n$  을 구해보자.

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \beta_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n - \beta_n i}{2} e^{inx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n i}{2} e^{-inx} \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n - \beta_n i}{2} e^{inx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n i}{2} e^{-inx} \right] e^{ikx} dx \quad (3)$$

명제 2.1.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 2\pi I_{\{0\}}(k) \quad (4)$$

식 (3) 과 식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi\alpha_0, & (k=0), \\ \pi[\alpha_k + \beta_k i], & (k=1, 2, \dots) \\ \pi[\alpha_{-k} - \beta_{-k} i], & (k=-1, -2, \dots) \end{cases} \quad (5)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\alpha_0 \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (n=0) \quad (6)$$

$$\alpha_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7)$$

$$\beta_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (n=0, 1, \dots) \quad (8)$$

■

## 제2.2절 Fourier 전개

예제 2.1.1의 결과를 바탕으로, 다음과 같이 Fourier 급수를 정의하자.

### 정의 2.2.1: Fourier 급수

함수  $f(x)$ 가 주기가  $2\pi$ 인 주기함수이고 또한 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 구분적으로 연속(piecewisely continuous)이라 하자. 함수  $f(x)$ 의 Fourier 급수  $S(x)$ 는 다음과 같다.

$$S(x) \doteq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

여기서 Fourier 계수들은 다음과 같다.

$$a_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$b_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Fourier 급수는 함수  $f(x)$ 를 서로 직교하는 주기함수들  $\{e^{inx}\}$ 의 합으로 나타내는 것으로, 주기성을 갖는 데이터분석에서 중요한 역할을 맡는다. Fourier 급수를 다룰 때는 두 가지 점들을 유의해야 한다. 첫째는 Fourier 급수가 수렴하는지 여부이고, 둘째는 수렴하는 경우  $f(x)$ 로 수렴하는지 여부이다. 다음 명제는 이 문제들에 관한 것이다. 이 명제의 증명은 최병선 [1, 제3장]을 참조하라.

### 명제 2.2.1: Fourier 급수의 수렴

구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 Fourier 급수를  $S(x)$ 라 하자. 만약 도함수  $f'(x)$ 가 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 구분적으로 연속(piecewisely continuous)이면, 이 Fourier 급수  $S(x)$ 는 구간  $[-\pi, \pi]$ 의 각 점에서 수렴하며 또한 각 점  $x = a (\in [-\pi, \pi])$ 에서 다음 식이 성립한다.

$$S(a) = \frac{f(a-) + f(a+)}{2}$$

여기서  $f(a-)$ 는 점  $a$ 에서 좌극한이고,  $f(a+)$ 는 점  $a$ 에서 우극한이다. 특히,  $x = a$ 에서

함수  $f(x)$ 가 연속이면, 다음 식이 성립한다.

$$S(a) = f(a)$$

명제 2.2.1의 조건을 만족하는 함수  $f(x)$ 를 다음과 같이 Fourier전개(Fourier expansion)를 할 수 있다.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \quad (2.2.1)$$

여기서  $S_n(x)$ 는 다음과 같다.

$$S_n(x) \doteq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (2.2.2)$$

이  $S_n(x)$ 를 제 $n$ 차 삼각다항식(trigonometric polynomial)이라 부른다. 만약 함수  $f(x)$ 가 우함수(even function)이면, 각  $n$ 에 대해서  $b_n = 0$ 이다. 따라서, 함수  $f(x)$ 의 Fourier전개는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad (2.2.3)$$

식 (2.2.3)을 Fourier코사인전개(Fourier cosine expansion)라 한다. 만약 함수  $f(x)$ 가 기함수(odd function)이면, 각  $n$ 에 대해서  $a_n = 0$ 이다. 따라서 함수  $f(x)$ 의 Fourier전개는 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (2.2.4)$$

식 (2.2.4)를 Fourier사인전개(Fourier sine expansion)라 한다.

**예제 2.2.1** 함수  $f(x) = x/2$ 를 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 Fourier전개해보자. 다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos nx dx = \left[ \frac{x \sin nx}{2\pi n} + \frac{x \cos nx}{2\pi n^2} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx dx = \left[ \frac{-x \cos nx}{2\pi n} + \frac{x \sin nx}{2\pi n^2} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{[-1]^{n+1}}{n}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

따라서, 함수  $f(x) = x/2$ 의 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 Fourier전개는 다음과 같다.

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \quad (4)$$

식 (4)의 Fourier전개를 그리기 위해서 다음 MATLAB프로그램 FourierExpansion101.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename FourierExpansion101.m
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 clear all, close all
6 x = -pi:0.01:pi;
7 fx = x/2;
8 S1 = sin(x);
9 S2 = S1 - 1/2*sin(2*x);
10 S3 = S2 + 1/3*sin(3*x);
11 S4 = S3 - 1/4*sin(4*x);
12 plot(x,fx,'k-',x, S1,'r:',x,S2,'g-.',x,S3,'b--', ...
13      x,S4,'m-', 'LineWidth',2)
14 set(gca, 'fontsize',11, 'fontweigh', 'bold')
15 axis( [ -pi pi -1.6 1.6 ])
16 legend('\bf f(x)', '\bf S_1 (x)', '\bf S_2 (x)', '\bf S_3 (x)', ...
17        '\bf S_4 (x)', 'location', 'SE')
18 xlabel('\bf x', 'fontsize',12)
19 ylabel('\bf y', 'fontsize',12, 'rotation',0)
20 saveas(gcf, 'FourierExpansion101', 'png')
21 save('FourierExpansion101.txt', 'S1', 'S2', 'S3', 'S4', '-ascii')
22 % End of program
23 % -----

```

이 MATLAB프로그램 FourierExpansion101.m을 실행하면, 그림 2.2.1이 그려진다. 그림 2.2.1에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\pm 1) = \frac{f(+1) + f(-1)}{2} = 0 \quad (5)$$

불연속점들  $x = -1$ 과  $x = 1$ 에서 멀리 떨어진 점  $x = 0$  주변에서는  $\{S_n(x)\}$ 가  $f(x)$ 에 수렴함을 알 수 있다. ■

MATLAB의 Symbolic Math Toolbox의 함수들 int.m과 subs.m을 사용해서, Fourier전개를 할 수 있다.

**예제 2.2.2** Fourier전개를 하기 위해서, 다음 MATLAB프로그램 FourierExpansion102.m을 실행하라.

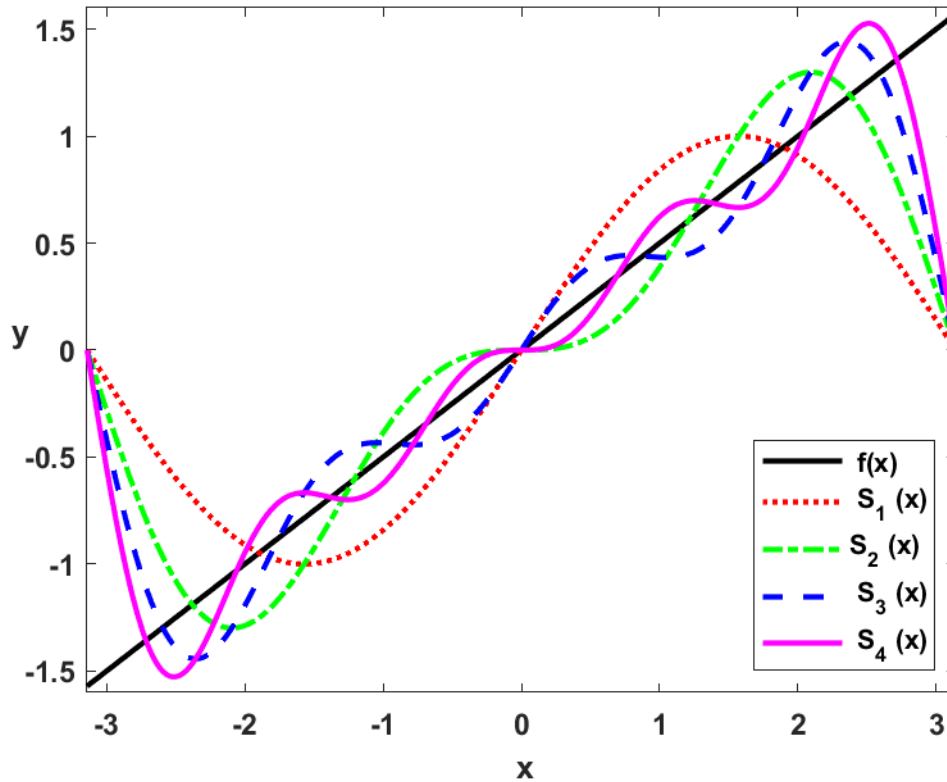


그림 2.2.1. Fourier 전개

```

1 % -----
2 % Filename FourierExpansion102.m
3 % Fourier Expansion using Symbolic Math Toolbox
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all
7 syms xx kk
8 ff = pi^2/12 - xx^2/4
9 a0 = 1/pi*int(ff,-pi,pi)
10 ak = 1/pi*int(ff*cos(kk*xx),xx,-pi,pi)
11 bk = 1/pi*int(ff*sin(kk*xx),xx,-pi,pi)
12 % Plotting
13 M = 101;
14 N = 12; DN = N/4;
15 x = linspace(-pi,pi,M);
16 f = pi^2/12 - x.^2./4;
17 S = zeros(N,M);
18 S(1,:) = 1/1*cos(1*x);
19 signn = 1;
20 for n=2:1:N
21     signn = -signn;
22     S(n,:) = S(n-1,:) + signn./n/n*cos(n*x);
23     err(n,:) = f - S(n,:);
24 end
25 subplot(1,2,1)
26 plot(x,f,'k.',x,S(DN,:), 'r:',x,S(2*DN,:), 'g-', ...
27      x,S(3*DN,:), 'b--',x,S(4*DN,:), 'm-', 'LineWidth',2)
28 set(gca, 'fontsize',11, 'fontweigh', 'bold')

```



```

29 axis( [ -pi pi -1.8 1.1 ])
30 legend('\bf f(x)', '\bf S_{3}(x)', '\bf S_{6}(x)', ...
31         '\bf S_{9}(x)', '\bf S_{12}(x)', 'location', 'NW')
32 xlabel('\bf x', 'fontsize', 12)
33 ylabel('\bf y', 'fontsize', 12)
34 subplot(1,2,2)
35 plot(x, err(DN,:), 'r:', x, err(2*DN,:), 'g-', ...
36       x, err(3*DN,:), 'b--', x, err(4*DN,:), 'm-', 'LineWidth', 2)
37 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold')
38 axis( [ -pi pi -0.3 0.3 ])
39 legend('\bf error_{3}(x)', '\bf error_{6}(x)', ...
40         '\bf error_{9}(x)', '\bf error_{12}(x)', 'location', 'NW')
41 xlabel('\bf x', 'fontsize', 12)
42 ylabel('\bf error', 'fontsize', 12)
43 saveas(gcf, 'FourierExpansion102', 'png')
44 save('FourierExpansion102.txt', 'S', 'err', '-ascii')
45 % End of program
46 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 FourierExpansion102.m은 다음 함수를 Fourier 전개하기 위한 것이다.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \quad (1)$$

이 MATLAB 프로그램을 수행하면, 다음 결과를 출력한다.

$$a_0 = 2.2 \cdot 10^{-16} \quad (2)$$

$$a_k = \frac{[-1]^{k-1}}{k^2}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$b_k = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

따라서 함수  $f$ 의 Fourier 전개는 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n-1}}{n^2} \cos nx, \quad (|x| \leq \pi) \quad (5)$$

이 MATLAB 프로그램을 수행하면, 그림 2.2.2가 그려진다. 그림 2.2.2의 상단 그래프에는 함수  $f(x)$ 와 삼각다항식들  $S_3(x)$ ,  $S_6(x)$ ,  $S_9(x)$  그리고  $S_{12}(x)$ 가 그려져 있다. 차수가 9이거나 12인 삼각다항식이 함수  $f(x)$ 와 아주 가깝다는 것을 알 수 있다. 그림 2.2.2의 하단 그래프는 함수  $f(x)$ 에서 각 삼각다항식을 뺀 오차가 그려져 있다. 이 그래프에서 알 수 있듯이, 독립변수  $x$ 의 값이 중앙에 위치하면 오차가 작은 반면에 독립변수  $x$ 의 값이 중앙에서 떨어지면 오차가 커진다. ■

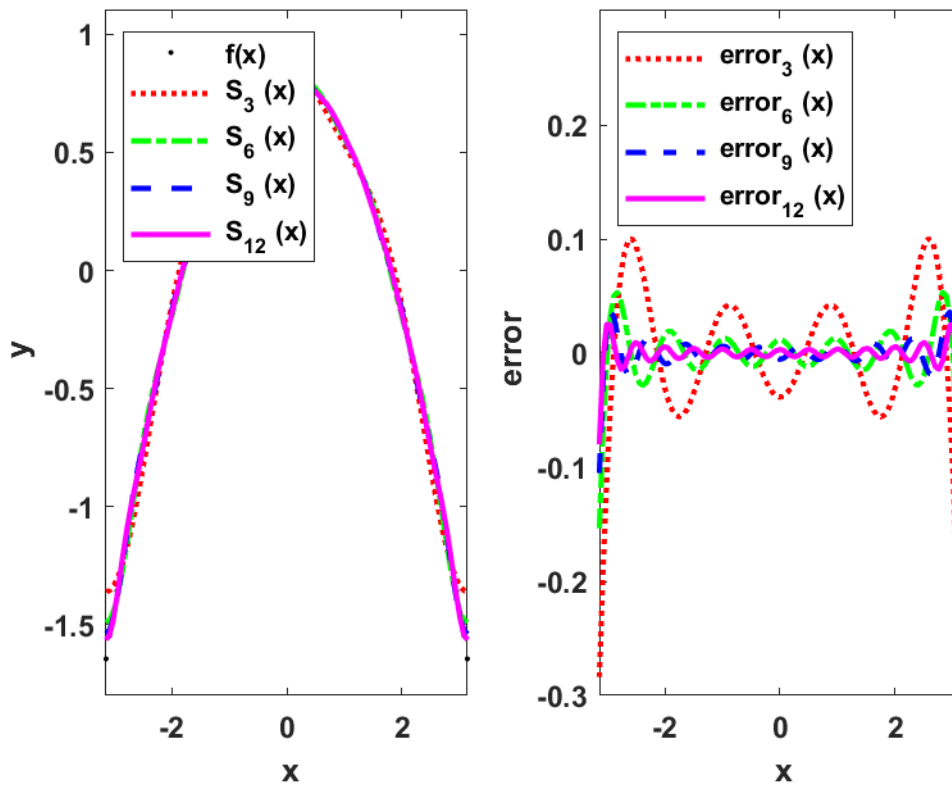


그림 2.2.2. 삼각다항식의 수렴

### 제2.3절 Gibbs현상

만약 함수  $f(x)$ 가 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 연속이면, Fourier 전개에서 수렴은 일양수렴 (uniform convergence)이다. 함수  $S_n(x)$ 는 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 연속이다. 함수  $f(x)$ 가 점  $x = a (\in [-\pi, \pi])$ 에서 불연속이거나 또는  $f(\pi) \neq f(-\pi)$ 이면, 이러한 일양성이 깨짐은 명백하다. 따라서 불연속점에서 Fourier 급수의 수렴속도는 매우 느려진다. 이를 Gibbs 현상 (Gibbs' phenomenon)이라 부른다.

**예제 2.3.1** Gibbs 현상을 설명하기 위해서, 다음 계단함수를 살펴보자.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & (-\pi < x < 0) \\ 1, & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad (1)$$

최병선 [1, p. 95]에서 알 수 있듯이, 함수  $f(x)$ 의 Fourier 전개는 다음과 같다.

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[2n-1]x \quad (2)$$

Gibbs현상을 그리기 위해서, 다음 MATLAB프로그램 GibbsPhenomenon101.m을 실행하라.

```

1  % -----
2  % Filename GibbsPhenomenon101.m
3  % Gibbs Phenomenon of Fourier Expansion
4  % Programmed by CBS
5  % -----
6  clear all, close all
7  M = 101;
8  N = 400000; DN = N/4;
9  x = linspace(-10/N,10/N,M);
10 f = (x>0) - (x<0);
11 S = zeros(N,M);
12 S(1,:) = 4/pi*1/(2-1)*sin((2-1)*x);
13 for n=2:1:N
14     S(n,:) = S(n-1,:) + 4/pi*1/(2*n-1)*sin((2*n-1)*x);
15 end
16 plot(x,f,'k-',x,S(DN,:), 'r:',x,S(2*DN,:), 'g-.', ...
17     x,S(3*DN,:), 'b--',x,S(4*DN,:), 'm-', 'LineWidth',2)
18 set(gca, 'fontsize',11, 'fontweigh', 'bold')
19 axis( [ -10/N 10/N -1.6 1.6 ])
20 legend('\bf f(x)', '\bf S_{100000}(x)', '\bf S_{200000}(x)', ...
21     '\bf S_{300000}(x)', '\bf S_{400000}(x)', 'location', 'SE')
22 xlabel('\bf x', 'fontsize',12)
23 ylabel('\bf y', 'fontsize',12, 'rotation',0)
24 saveas(gcf, 'GibbsPhenomenon101', 'png')
25 save('GibbsPhenomenon101.txt', 'S', '-ascii')
26 % end of program
27 % -----

```

이 MATLAB프로그램을 수행하면, 그림 2.3.1이 그려진다. 그림 2.3.1에서 알 수 있듯이, 식 (2)의 Fourier급수의 수렴속도는 매우 느리다. 그림 2.3.1에서 (자홍색) 점선은  $N = 100000$ 인 경우이고, (녹색) 반점선은  $N = 200000$ 인 경우이고, (청색) 긴점선은  $N = 300000$ 인 경우이고, (적색) 실선은  $N = 400000$ 인 경우이다. 그림 2.3.1에서 알 수 있듯이, 함수의 특이점에서는 Fourier급수의 수렴속도가 아주 늦으며, 또한 Fourier급수는 일양으로 수렴하지 않는다. ■

## 제2.4절 이산형Fourier변환

삼각다항식  $S_n(x)$ 를 함수  $f(x)$ 의 Fourier근사라고 한다. 주어진 데이터에서 이 Fourier근사를 구하기 위해서 다음과 같이 이산형Fourier변환(discrete Fourier transform: DFT)을 사용한다. DFT에 대한 좀 더 자세한 내용은 본서의 제3.4절을 참조하라.

회귀분석이론을 적용해서 다음 명제를 쉽게 증명할 수 있다.

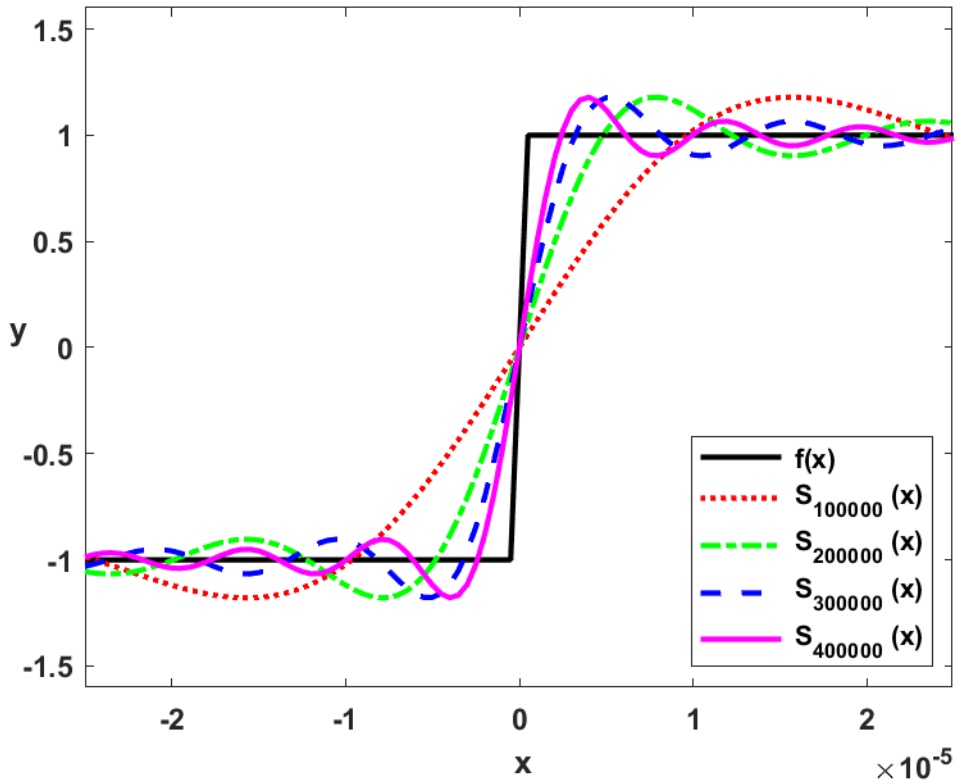


그림 2.3.1. Gibbs 현상

**명제 2.4.1: 이산형 Fourier 변환**

다음 값들을 정의하자.

$$x_n \doteq -\pi + \frac{2\pi n}{N}, \quad y_n \doteq f(x_n), \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

만약 함수  $f(x)$ 는 주기가  $2\pi$ 인 주기함수이고, 또한 만약  $2M < N$ 이면, 다음 제곱합  $Q$ 를 최소화하는 삼각다항식  $S_M(x) \doteq \sum_{k=0}^M [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ 가 존재한다.

$$Q \doteq \sum_{n=1}^N [f(x_n) - S_M(x_n)]^2$$

이 삼각다항식  $S_M(x)$ 의 계수들은 다음과 같다.

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \cos(kx_n), \quad (k = 0, 1, \dots, M)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \sin(kx_n), \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

**예제 2.4.1** 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 함수  $f(x) = x/2$ 로부터 다음 관찰점들을 추출하자.

$$x_n = -\pi + \frac{2\pi}{12}n, \quad y_n = f(x_n), \quad (n = 0, 1, \dots, 12) \quad (1)$$

즉,  $N = 12$ 이다. 이 관찰점들에 5차 삼각다항식을 적합시키기 위해서 다음 MATLAB프로그램 FourierApprox101.m을 실행하자.

```

1  % -----
2  % Filename FourierApprox101.m
3  % Fourier approximation 1
4  % Programmed by CBS
5  % -----
6  function [a,b] = FourierApprox101(x,y,M)
7  % x : column vector of equally spaced abscissas in [-pi,pi]
8  % y : column vector of ordinates
9  % M : degree of trigonometric polynomial
10 % find Fourier coefficients
11 N = length(x)-1; dum1 = fix((N-1)/2);
12 if M > dum1
13     M = dum1;
14 end
15 a = zeros(M+1,1); b = zeros(M+1,1);
16 yy = y;
17 yy(1) = ( y(1) + y(N+1) )/2;
18 yy(N+1) = yy(1);
19 a(1) = sum(yy); % a_0
20 for k = 1:M
21     a(k+1) = cos(k*x')*yy; % a_k
22     b(k+1) = sin(k*x')*yy; % b_k
23 end
24 a = 2*a/N;
25 b = 2*b/N;
26 a(1) = a(1)/2; % a_0
27 % Fourier approximation
28 S = a(1);
29 for k=1:M
30     S = S + a(k+1)*cos(k*x) + b(k+1)*sin(k*x);
31 end
32 % Plotting
33 plot(x,y,'r-',x,y,'bo',x,S,'k--','LineWidth',2)
34 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
35 legend('function','data point','Fourier','location','SE')
36 xlabel('\bf x','fontsize',12), ylabel('\bf y','fontsize',12)
37 axis( [-3.3 3.2 -1.6 1.6 ])

```

```

38 saveas(gcf, 'FourierApprox101', 'png')
39 save('FourierApprox101.txt', 'S', '-ascii')
40 end
41 % End of program
42 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 FourierApprox101.m을 실행하기 위해서, 다음 MATLAB 명령문들을 MATLAB 커맨드행에 입력하라.

```

» x = -pi:0.5:pi; x = x'; y = x/2;
» [a,b] = FourierApprox101(x,y,5)

```

이 MATLAB 명령문들을 실행하면, 다음과 같은 Fourier 계수들이 출력된다.

$$a_0 = -0.0767, \quad a_1 = 0.1437, \quad a_2 = -0.1154 \quad (1)$$

$$a_3 = 0.0710, \quad a_4 = -0.0141, \quad a_5 = -0.0500 \quad (2)$$

$$b_1 = 0.9715, \quad b_2 = -0.3777 \quad (3)$$

$$b_3 = 0.1435, \quad b_4 = -0.0113, \quad b_5 = -0.0683 \quad (4)$$

이 MATLAB 프로그램 FourierApprox101.m을 수행하면, 그림 2.4.1이 그려진다. 그림 2.4.1은 이 13개 관찰점들을 사용해서 추정된 5차 삼각다항식을 그린 것이다. 그림 2.4.1에서 알 수 있듯이, 독립변수  $x$ 의 값이 중앙에 위치하면 오차가 작고, 독립변수  $x$ 의 값이 중앙에서 멀어지면 오차가 거친다. ■

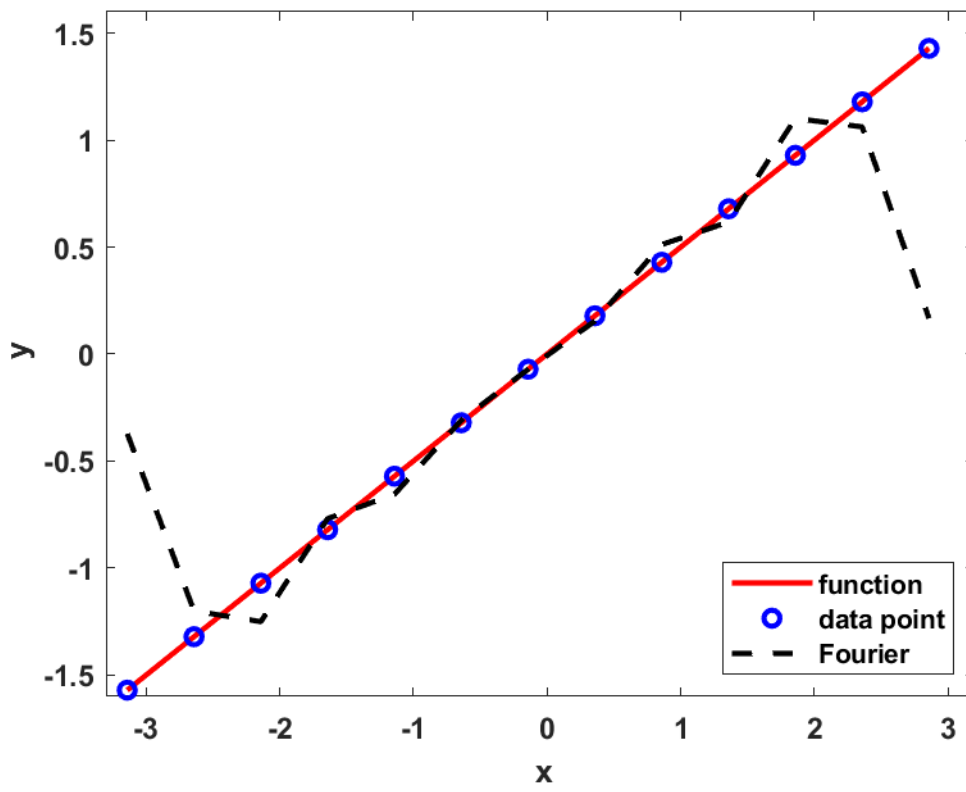


그림 2.4.1. Fourier근사식





## 제 3 장

# Fourier 변환



The Fourier transform is a recipe—it tells you exactly how much of each note you need to mix together to reconstruct the original wave.

Aatish Bhatia from *The math trick behind MP3s, JPEGs, and Homer Simpson's Face* (2013)

### 제3.1절 Fourier 변환과 역Fourier 변환

Fourier 변환 (Fourier transform)의 정의는 다음과 같다.

#### 정의 3.1.1: Fourier 변환

정의역이  $\mathbb{R}$ 인 함수  $f(t)$ 의 Fourier 변환 또는 Fourier 적분 (Fourier integral)을 다음과

같이 정의한다.

$$\mathcal{F}[f] \doteq \mathcal{F}[f](\theta) \doteq \hat{f}(\theta) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\theta t} dt$$

함수  $f(t)$ 와 Fourier변환  $\hat{f}(\theta)$ 의 관계를 다음과 같이 표기한다.

$$f(t) \subset \hat{f}(\theta)$$

### 정의 3.1.2: 역Fourier변환

Fourier변환  $\hat{f}(\theta)$ 의 역Fourier변환(inverse Fourier transform)을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{F}^{-1}[f](t) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)e^{i\theta t} d\theta$$

이  $f(t)$ 와  $\hat{f}(\theta)$ 를 Fourier변환쌍(Fourier transform pair)이라 하고, 이들의 관계를 다음과 같이 표기한다.

$$f(t) \leftrightarrow \hat{f}(\theta) \quad (3.1.1)$$

다음과 같은 함수와 표기법을 정의하자.

$$\tilde{f}(t) \doteq \begin{cases} f(t), & (\text{점 } x \text{에서 연속}) \\ \frac{f(t+) + f(t-)}{2}, & (\text{점 } x \text{에서 불연속}) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$\tilde{f}(t) \sim f(t) \quad (3.1.3)$$

다음 명제에 대한 증명은 본서의 제5장 또는 최병선 [1]의 제5장을 참조하라.

### 명제 3.1.1: Fourier적분정리

함수  $f(t)$ 가 다음 조건들을 만족한다고 가정하자.

- a) 임의의 양수  $A$ 에 대해서 함수  $f(t)$ 와 도함수  $f'(t)$ 가 구간  $(-A/2, A/2)$ 에서 구분적으로 연속(piecewisely continuous)이다.
- b)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

이러한 조건 하에서, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta) e^{i\theta t} d\theta$$

### 따름정리 3.1.1

함수  $f(t)$ 의 1차 도함수  $f'(t)$ 가 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 구분적으로 연속(piecewisely continuous)이고 또한 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

이러한 조건 하에서, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta) e^{i\theta t} d\theta$$

**예제 3.1.1** 다음 함수의 Fourier 변환을 구해보자.

$$f(t) = 1_{[-m, m]}(t) \quad (1)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\hat{f}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\theta t} dt = \int_{-m}^m e^{-i\theta t} dt = 2 \frac{\sin m\theta}{\theta} \quad (2)$$

■

**예제 3.1.2** 역Fourier 변환을 사용해서, 다음 적분값을 구해보자.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt \cos zt}{t} dt \quad (1)$$

예제 3.1.1에서 알 수 있듯이, 함수  $f(t) = 1_{[-m, m]}(t)$ 의 Fourier 적분은 다음과 같다.

$$\hat{f}(\theta) = 2 \frac{\sin m\theta}{\theta} \quad (2)$$

다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin m\theta}{\theta} e^{i\theta z} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\theta \cos \theta z}{\theta} d\theta \quad (3)$$

따름정리 3.1.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin m\theta}{\theta} e^{i\theta z} d\theta = \begin{cases} 1, & (|z| < m) \\ 1/2, & (|z| = m) \\ 0, & (|z| > m) \end{cases} \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\theta \cos \theta z}{\theta} d\theta = \begin{cases} \pi, & (|z| < m) \\ \pi/2, & (|z| = m) \\ 0, & (|z| > m) \end{cases} \quad (5)$$

■

**예제 3.1.3** 다음 Gauss 함수의 Fourier 변환을 구해보자.

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \quad (1)$$

임의의 실수  $\mu$ 에 대해서 다음 식이 성립함을 기억하라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}[t - \mu]^2\right) dt = 1 \quad (2)$$

Cauchy 적분식을 사용해서 식 (2)가 임의의 복소수  $\mu$ 에 대해서 성립함을 증명할 수 있다. 식 (2)에 대한 자세한 스토리는 Körner [40, pp. 247-248]를 참조하라.

식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) e^{-i\theta t} dt \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[t + i\theta]^2\right\} dt = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right) \end{aligned} \quad (3)$$

즉, Gauss함수의 Fourier 변환은 Gauss함수이다.

식 (3)에서 알 수 있듯이, 임의의 양수  $a$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\exp(-at^2) \supset \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{1}{4a}\theta^2\right) \quad (4)$$

MATLAB의 Symbolic Math Toolbox의 MATLAB함수 `fourier.m`을 사용해서 Fourier 변환을 할 수 있다. 또한, MATLAB함수 `ifourier.m`을 사용해서 역Fourier 변환을 할 수 있다. 이를 살펴보기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 `FourierTransform101.m`을 실행해보자.

```

1 % -----
2 % Filename FourierTransform101.m
3 % Fourier Transform & Inverse Fourier Transform
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 syms xx
7 a = 1;
8 ff = exp(-a*xx^2)
9 FF = fourier(ff,xx);
10 FF = simplify(FF)
11 iFF = ifourier(FF,xx);
12 iFF = simplify(iFF)
13 % End of program
14 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 `FourierTransform101.m`을 실행하면, 식 (4)가  $a = 1$ 에 대해서 성립함을 확인할 수 있다. 즉, 다음 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)e^{-i\theta t} dt = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2\right) \quad (5)$$

또한, 다음 식이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2\right) e^{i\theta t} d\theta = \exp(-t^2) \quad (6)$$

■

### 제3.2절 Fourier 변환의 성질

Fourier 변환에 대해서 다음 명제가 성립한다. 이 명제에 대한 증명은 최병선 [1]의 제5.3절을 참조하라.

**명제 3.2.1**

- a) Fourier 변환이 가능한 함수들  $f_1$  과  $f_2$  와 상수들  $\alpha_1$  와  $\alpha_2$  에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2](\theta) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1](\theta) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2](\theta)$$

- b) 임의의 상수  $\alpha (\neq 0)$  와 Fourier 변환이 가능한 함수  $f$  에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)](\theta) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)$$

- c) 상수  $t_0$  에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](\theta) = \mathcal{F}[f](\theta) e^{-i\theta t_0}$$

- d) 상수  $\theta_0$  에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[f(t)e^{i\theta_0 t}](\theta) = \mathcal{F}[f](\theta - \theta_0)$$

- e) 상수  $\theta_0$  에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \theta_0 t](\theta) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}[f](\theta - \theta_0) + \mathcal{F}[f](\theta + \theta_0) \}$$

$$\mathcal{F}[f(t) \sin \theta_0 t](\theta) = \frac{1}{2i} \{ \mathcal{F}[f](\theta - \theta_0) - \mathcal{F}[f](\theta + \theta_0) \}$$

- f) 함수  $f(-\theta)$  가 연속인 점  $\theta$  에서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[\hat{f}(t)](\theta) = 2\pi f(-\theta)$$

- g) 구분적으로 연속 (piecewisely continuous) 인 함수  $f(t)$  가 식  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$  를 만족하면, 이 함수를 테스트함수라 부른다. 만약 테스트함수  $f(t)$  의 Fourier 변환이 존재하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[f'(t)](\theta) = i\theta \mathcal{F}[f](\theta)$$

- h) 함수  $f(t)$  가 다음 식들을 만족한다고 가정하자.

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f^{(m)}(t) = 0, \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

만약  $f^{(M)}(t)$ 의 Fourier 변환이 존재하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[f^{(M)}](\theta) = [i\theta]^M \mathcal{F}[f](\theta)$$

i) 만약 테스트함수  $tf(t)$ 의 Fourier 변환이 존재하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}[-it f(t)](\theta) = \frac{d\mathcal{F}[f](\theta)}{d\theta}$$

j) 만약 함수  $f(t)$ 의 Fourier 변환이 존재하고 또한 식  $\hat{f}(0) = 0$ 가 성립하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x)dx\right](\theta) = \frac{1}{i\theta} \mathcal{F}[f](\theta)$$

Dirac 델타함수의 Fourier 변환에 대해서 다음 명제가 성립한다. Dirac 델타함수와 이 명제에 대한 증명에 대해서는 최병선 [1]을 참조하라.

### 명제 3.2.2

a) Dirac 델타함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[\delta(t)](\theta) = 1$$

b) Dirac 델타함수의 Fourier 변환은 다음 식을 만족한다.

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)](\theta) = \exp(-i\theta t_0)$$

c) 상수함수 1의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[1](\theta) = 2\pi\delta(\theta)$$

d) 복소지수함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[\exp(i\theta_0 t)](\theta) = 2\pi\delta(\theta - \theta_0)$$

e) 삼각함수들의 Fourier 변환들은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[\cos \theta_0 t](\theta) = \pi [\delta(\theta - \theta_0) + \delta(\theta + \theta_0)]$$

$$\mathcal{F}[\sin \theta_0 t](\theta) = i\pi [\delta(\theta + \theta_0) - \delta(\theta - \theta_0)]$$

f) 단위스텝함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[1_{(0,\infty)}(t)](\theta) = \pi\delta(\theta) + \frac{1}{i\theta}$$

g) 부호함수 (sign function) 또는 시그넘함수 (signum function)의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)](\theta) = \frac{2}{i\theta}$$

h) 만약 함수  $f(t)$ 의 Fourier 변환이 존재하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x)dx\right](\theta) = \frac{1}{i\theta}\mathcal{F}[f](\theta) + \pi\mathcal{F}[f](0)\delta(\theta), \quad (\theta \neq 0)$$

### 제3.3절 Hermite 행렬과 유니터리행렬

기초적인 선형대수학을 아는 독자에게는 Fourier 급수나 Fourier 적분보다 이산형 Fourier 변환 (discrete Fourier transform: DFT)가 직관적으로 이해하기가 쉬울 것이다. 더구나, 컴퓨터를 사용해서 Fourier 해석을 할 때는 DFT를 사용할 수 밖에 없다. 따라서 Fourier 해석 이론을 실제 문제에 적용하기 위해서는 DFT를 숙지할 필요가 있다. 실행렬 (real matrix)이란 각 원소가 실수인 행렬이며, 복소행렬 (complex matrix)이란 각 원소가 복소수인 행렬이다. 복소행렬인 Hermite 행렬과 유니터리행렬 (unitary matrix)을 사용하면, DFT를 설명하기가 쉽다. 이 절에서는 Hermite 행렬과 유니터리행렬에 대해 간단히 설명하고, 다음 절에서는 이를 바탕으로 DFT를 설명하고자 한다.

#### 정의 3.3.1



복소공간  $\mathbb{C}^n$ 에 속하는 복소벡터들  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 내적을 다음과 같이 정의한다.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \doteq \mathbf{a}^H \mathbf{b} \doteq \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{b}$$

여기서  $\bar{\mathbf{a}}$ 는  $\mathbf{a}$ 의 각 원소 대신에 공액복소수 (complex conjugate)를 원소로 하는 벡터이다. 또한, 두 벡터들  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 가 이루는 각  $\theta$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\cos \theta \doteq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

...

### 정의 3.3.2: Hermite 행렬

행렬  $\bar{A}$ 는 복소행렬  $A$ 의 각 원소 대신에 공액복소수 (complex conjugate)를 원소로 하는 행렬이다. 이 행렬의 전치행렬 (transpose matrix)  $\bar{A}^T$ 를 행렬  $A$ 의 Hermite 전치행렬이라 부르고  $A^H$ 로 표기한다. 또한, 만약  $A^H = A$ 이면,  $A$ 를 Hermite 행렬이라 부른다.

### 명제 3.3.1

Hermite 행렬  $A$ 는 다음 명제들을 만족한다.

- a) 행렬  $A$ 의 고유값 (eigenvalue)은 실수이다.
- b) 행렬  $A$ 가 고유벡터 (eigenvector)  $\mathbf{x}$ 를 가지면,  $\bar{\mathbf{x}}$ 는  $A^T$ 의 고유벡터이다.

증명. a) 다음 명제가 성립한다.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^H A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^H \mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 \quad (1)$$

또한, 다음 식들이 성립한다.

$$(\mathbf{x}^H A\mathbf{x})^H = \mathbf{x}^H A^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} \quad (2)$$

즉,  $\mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ 는 실수이다. 따라서,  $\lambda$ 도 실수이다.

b) 다음 명제들이 성립한다.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x^H A^H = \lambda^H x^H \Rightarrow x^H A = \lambda x^H \Rightarrow A^T \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (3)$$

■

### 정의 3.3.3

만약 정방행렬 (square matrix)  $Q$ 가  $Q^H Q = I$ 를 만족하면, 행렬  $Q$ 를 유니터리행렬 (unitary matrix)이라 한다. 유니터리행렬  $Q$ 가 실행렬이면 직교행렬 (orthogonal matrix)이라 한다.

독자들은 선형대수학 시간에 다음과 같은 정리를 배웠을 것이다. 실대칭행렬  $A$ 가 서로 다른 고유값들  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 을 가지면, 다음 식을 만족하는 직교행렬  $S$ 가 존재한다.

$$S^T A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

여기서 각 고유값은 실수이다. 이 결과를 다음과 같이 확장할 수 있다. Hermite행렬  $A$ 가 서로 다른 고유값들  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 을 가지면, 다음 식을 만족하는 유니터리행렬  $U$ 가 존재한다.

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

이 경우에도 고유값들은 실수이다. 지금부터는 고유값들이 서로 다르다는 조건 없이 식 (3.3.2)를 증명하기로 하자. 다음 명제는 선형대수학에서 가장 중요한 정리들 중의 하나이다. 이에 대한 증명은 최병선·이성백 [6]을 참조하라.

### 명제 3.3.2: Schur 정리

정방행렬  $A$ 에 대해서 다음 식을 만족하는 유니터리행렬  $U$ 와 상삼각행렬 (upper trian-

gular matrix)  $T$ 가 존재한다.

$$U^H A U = T$$

### 따름정리 3.3.1

임의의 Hermite 행렬  $A$ 에 대해서 다음 식을 만족하는 유니터리행렬  $U$ 와 대각행렬  $\Lambda$ 가 존재한다.

$$U^H A U = \Lambda$$

만약  $A$ 가 실행렬이면, 유니터리행렬  $U$ 는 직교행렬이다.

다음 명제는 고등학교에서 배우는 코사인법칙에 불과하다. 그럼에도 불구하고, 이 명제는 매우 유용한 것이다.

### 명제 3.3.3: 코사인법칙

벡터공간에 속하는 임의의 원소들  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} [\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2]$$

### 명제 3.3.4

유니터리행렬  $Q$ 는 다음 식들을 만족한다.

- a) 임의의  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 에 대해서,  $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ 이다.
- b) 임의의  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ 에 대해서,  $(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 이다.

증명. 다음 식들이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\|Q\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^H Q^H Q \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{x} \quad (1)$$

따라서, (a)가 증명되었다. 명제 3.3.3과 성질 (a)를 사용해서, 성질 (b)를 유도할 수 있다. ■

명제 3.3.4의 성질 (a)에 의해서, 벡터  $\mathbf{x}$ 의 앞에 유니터리행렬  $Q$ 를 곱해도 노름이 변하지 않음을 알 수 있다. 또한, 두 벡터들  $\mathbf{x}$ 와  $\mathbf{y}$ 가 이루는 각은 이 벡터들 앞에 유니터리행렬  $Q$ 를 곱한 벡터들  $Q\mathbf{x}$ 와  $Q\mathbf{y}$ 가 이루는 각(angle)은 같다. 따라서, 벡터  $Q\mathbf{x}$ 는 벡터  $\mathbf{x}$ 를 회전한 것에 불과하다. 즉, 벡터공간  $V(\subset \mathbb{C}^n)$ 의 각 벡터에 유니터리행렬  $Q$ 를 곱한 벡터들로 이루어진 벡터공간  $W$ 는 원래의 벡터공간  $V$ 를 회전한 공간임을 알 수 있다.

### 명제 3.3.5

유니터리행렬  $Q$ 는 다음 성질들을 만족한다.

- 행렬  $Q$ 의 행렬식의 절댓값은 1이다.
- 행렬  $Q$ 의 고유값의 절댓값은 1이다.
- 임의의 정방행렬  $A$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\text{Tr}(Q^H A Q) = \text{Tr}(A)$$

여기서  $\text{Tr}$ 은 트레이스(trace)를 의미한다.

증명. a) 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} |\det(Q)|^2 &= \det(Q) \overline{\det(Q)} = \det(Q) \det(Q^H) \\ &= \det(QQ^H) = \det(I) = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

b) 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \|\mathbf{x}\|^2 &= \|\lambda\mathbf{x}\|^2 = [\lambda\mathbf{x}]^H [\lambda\mathbf{x}] \\ &= [Q\mathbf{x}]^H [Q\mathbf{x}] = \mathbf{x}^H [Q^H Q] \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

c) 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Tr}(Q^H A Q) = \text{Tr}(A Q Q^H) = \text{Tr}(A) \quad (3)$$

■

### 제3.4절 DFT

이 절에서는 유니타리행렬을 사용해서 이산형Fourier 변환(discrete Fourier transform: DFT)를 살펴보고자 한다. 주어진 데이터세트  $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 의 DFT를 다음과 같이 정의한다.

#### 정의 3.4.1: DFT

벡터  $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}]^T (\in \mathbb{C}^N)$ 의 DFT  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}]^T$ 의 각 원소를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{v}_n \doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i \frac{2\pi n k}{N}\right), \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

정의 3.4.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\hat{\mathbf{v}} = F\mathbf{v} \tag{3.4.1}$$

여기서 DFT행렬  $F$ 는 다음과 같다.

$$F \doteq F_N \doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{N-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{N-1} & \omega_{N-1}^2 & \cdots & \omega_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

단,  $\omega_n \doteq \exp(-i2\pi n/N)$ , ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )이다. 이  $\omega_n$ 이 관찰점들의 개수  $N$ 에 의존한다는 뜻에서, 본서에서는 다음과 같은 표기를 사용하기도 할 것이다.

$$\omega_n = \omega_N^n, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \tag{3.4.3}$$

여기서  $\omega_N \doteq \exp(-i2\pi/N)$ 이다. 이후, 차원  $N$ 을 강조하고자 하는 경우에는  $F_N$ 을 사용하고, 그렇지 않은 경우에는  $F$ 를 사용할 것이다. 행렬  $F$ 는 Vandermonde행렬이다. 따라서, 다음 명제가 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

**명제 3.4.1: Vandermonde 행렬식**

다음 식이 성립한다.

$$\det(F) = N^{-N/2} \prod_{0 \leq n < m < N} [\omega_m - \omega_n]$$

또한 행렬  $F$ 는 정칙행렬이다.

**명제 3.4.2**

행렬  $F$ 는 대칭행렬이며 유니타리행렬이다.

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\omega_n^m = \omega_m^n, \quad (n, m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1)$$

$$\overline{\omega_n} = \omega_n^{-1}, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2)$$

따라서,  $F$ 는 대칭행렬이다. 행렬  $FF^H$ 의  $(i, k)$  원소는 다음 식들을 만족한다.

$$\frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \omega_i^a \overline{\omega_k^a} = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \omega_i^a \omega_k^{-a} = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \omega_1^{i-a} = \delta_{i,k} \quad (3)$$

여기서  $\delta_{i,k}$ 는 Kronecker 함수이다. 따라서, 다음 식이 성립한다.

$$FF^H = I \quad (4)$$

■

벡터  $\mathbf{v}$ 의 DFT  $\hat{\mathbf{v}} = F\mathbf{v}$ 는 직교공간에서 벡터  $\mathbf{v}$ 를 회전시킨 것에 불과하다. 따라서, DFT  $\hat{\mathbf{v}}$ 를 역회전시키면, 원래 벡터  $\mathbf{v} = F^H \hat{\mathbf{v}}$ 를 얻을 수 있다. 즉, 역회전을 위한 행렬이  $F^H$ 이다. 따라서, 이  $F^H$ 가 역이산형 Fourier 변환(inverse discrete Fourier transform: inverse DFT: IDFT)이다.

**명제 3.4.3: IDFT**

다음 식을 사용해서, DFT  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}]^T$ 로부터  $\mathbf{v} = F^H \hat{\mathbf{v}}$ 를 구할 수 있다.

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_n \exp\left(i \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

DFT와 마찬가지로 Fourier 급수나 Fourier 변환도 벡터의 회전으로 설명할 수 있다. 이들이 DFT와 다른 점은 단지 회전시키는 벡터공간의 차원이 무한대라는 것이다.

**제 3.5절 FFT**

... I am convinced that life as we know it would be considerably different if, from the 1965 Cooley–Tukey paper onwards, the FFT community had made systematic and heavy use of matrix-vector notation! Indeed, by couching results and algorithms in matrix/vector notation, the FFT literature can be unified and made more understandable to the outsider. The central theme in this book is the idea that different FFT algorithms correspond to different factorizations of the discrete Fourier transform (DFT) matrix. The matrix factorization point of view, so successful in other areas of numerical linear algebra, goes a long way toward unifying and simplifying the FFT literature. It closes the gap between the computer implementation of an FFT and the underlying mathematics, because it forces us to think well above the scalar level.

Charles van Loan in the preface of *Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*[61]

컴퓨터에서 필요한 연산의 개수를 flop(floating point operation)으로 나타내기로 하자. Golub & Van Loan [35, pp. 18-19]에 의하면, 1 flop은 곱하기 한번 또는 더하기 한번을 의미한다. 과거에는 한 번의 곱하기와 한번의 더하기를 flop이라 정의하기도 했다. 만약  $N$ 개 시점들에서 추출된 디지털신호를 DFT하고자 하면,  $O(N^2)$ 개 flop을 필요로 한다. 따라서, 표본점들의 개수  $N$ 이 증가함에 따라 계산량이 급격히 증가한다. 만약 표본점들 사이의 간격이 균일하다면, Fourier 변환을  $O(N \log_2 N)$ 개 flop으로 할 수 있는 FFT(fast Fourier transform)

가 존재한다. 다음 비를 생각해보자.

$$\frac{N \log_2 N}{N^2} = \frac{\log_2 N}{N} \quad (3.5.1)$$

예를 들어  $N = 2^{10} = 1024$ 이면, 이 비는 0.0098이다. 따라서, 계산시간이 100분의 1로 단축될 것이다. DFT 행렬  $F$ 의  $(i, k)$  원소를  $f_{ik}$ 라 표현하면,  $|f_{ik}| = N^{-1/2}$ 이다. 행렬  $F$ 는 성긴(sparse) 것과는 거리가 멀다. 그러나, 복소지수함수의 성질을 사용해서, 행렬  $F$ 를 성긴행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다. 또한, 이러한 분해를 사용해서 FFT를 유도할 수 있다.

**예제 3.5.1** 우선 고등학교 때 공부한 실력으로,  $z = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$ 에 대해서 다음 식의 값을 계산해보자.

$$S_8 = 1 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 \quad (1)$$

등비수열의 합에 관한 공식을 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$S_8 = \frac{1 - z^8}{1 - z} = \frac{1 - \exp\left(8\frac{2\pi i}{8}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)} = 0 \quad (2)$$

식 (1)의  $S_8$ 을 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + z^1 + z^2 + z^3}_{\text{Group 1}} + \underbrace{z^4 + z^5 + z^6 + z^7}_{\text{Group 2}} \\ &= \underbrace{1 + z^1 + z^2 + z^3}_{\text{Group 1}} + z^4 \underbrace{[1 + z^1 + z^2 + z^3]}_{\text{Group 1}} \\ &= \underbrace{[1 + z^1 + z^2 + z^3]}_{\text{Group 1}} [1 + z^4] \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)의 우변의 첫 번째 항을 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + z^1 + z^2 + z^3}_{\text{Group 1}} \\ &= \underbrace{1 + z^1 + z^2}_{\text{Group 1}} \underbrace{[1 + z^1]}_{\text{Group 1}} \\ &= \underbrace{[1 + z^1]}_{\text{Group 1}} [1 + z^2] \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$S_8 = [1 + z^1][1 + z^2][1 + z^4] \quad (5)$$



다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 [1 - z^1]S_8 &= [1 - z^1][1 + z^1][1 + z^2][1 + z^4] \\
 &= [1 - z^2][1 + z^2][1 + z^4] \\
 &= [1 - z^4][1 + z^4] \\
 &= 1 - z^8
 \end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)에  $z = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$ 를 대입하면, 식  $S_8 = 0$ 임을 알 수 있다.

앞에 사용한 방법을 약간 변형해서 식 (1)의  $S_8$ 을 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{1 + z^2 + z^4 + z^6}_{\text{even terms}} + \underbrace{z^1 + z^3 + z^5 + z^7}_{\text{odd terms}} \\
 &= \underbrace{1 + z^2 + z^4 + z^6} + z \underbrace{[1 + z^2 + z^4 + z^6]} \\
 &= \underbrace{[1 + z^2 + z^4 + z^6]} [1 + z^1]
 \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)의 우변의 첫 번째 항을 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{1 + z^4} + \underbrace{z^2 + z^6} \\
 &= \underbrace{1 + z^4} + z^2 \underbrace{[1 + z^4]} \\
 &= \underbrace{[1 + z^4]} [1 + z^2]
 \end{aligned} \tag{8}$$

식 (7)과 식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$S_8 = [1 + z^4][1 + z^2][1 + z^1] \tag{9}$$

앞에서와 같은 방법을 적용하면, 식 (6)이 성립함을 알 수 있다. 식 (6)에  $z = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$ 를 대입하면, 식  $S_8 = 0$ 임을 알 수 있다.

식 (9)를 구하는 과정을 이해하면, FFT를 쉽게 이해할 수 있을 것이다. ■

다음 식을 살펴보자.

$$\tilde{v}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \omega_N^{nk}, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3.5.2)$$

여기서  $\omega_N = \exp(-i\frac{2\pi}{N})$  이다. 다음 식을 만족하는 자연수  $L$  이 존재한다고 가정하자.

$$N = 2^L \quad (3.5.3)$$

만약  $N = 2M$  이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{2M-1} v_k \omega_{2M}^{kn} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k} \omega_{2M}^{2kn} + \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k+1} \omega_{2M}^{[2k+1]n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k} \omega_{2M}^{2kn} + \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k+1} \omega_{2M}^{2kn} \omega_{2M}^n \right\} \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

식 (3.5.4) 에 식  $\omega_{2M}^{2l} = \omega_M^l$  을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\tilde{v}_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k} \omega_M^{kn} + \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k+1} \omega_M^{kn} \omega_{2M}^n \right\} \quad (3.5.5)$$

다음 값들을 정의하자.

$$\tilde{v}_{e;n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k} \omega_M^{kn}, \quad (n = 0, 1, \dots, M-1) \quad (3.5.6)$$

$$\tilde{v}_{o;n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} v_{2k+1} \omega_M^{kn}, \quad (n = 0, 1, \dots, M-1) \quad (3.5.7)$$

다음 식이 성립한다.

$$\tilde{v}_n = \frac{1}{2} [\tilde{v}_{e;n} + \tilde{v}_{o;n} \omega_{2M}^n] \quad (3.5.8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\omega_M^{l+M} = \omega_M^l, \quad \omega_{2M}^{l+M} = -\omega_{2M}^l \quad (3.5.9)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\tilde{v}_{n+M} = \frac{1}{2} [\tilde{v}_{e;n} - \tilde{v}_{o;n} \omega_{2M}^n] \tag{3.5.10}$$

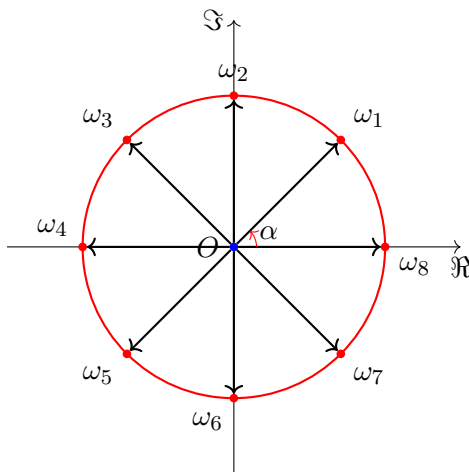
즉,  $\{\tilde{v}_n \mid n = 0, 1, \dots, N-1\}$ 을 계산하기 위해서는  $\{\tilde{v}_{e;n} \mid n = 0, 1, \dots, N-1\}$ 과  $\{\tilde{v}_{o;n} \mid n = 0, 1, \dots, M-1\}$ 을 나누어 계산하면 된다. 여기서 유의할 점은  $\tilde{v}_n$ 을 계산하는데는  $N$ 개 관찰점들을 사용한다. 즉,  $\tilde{v}_n$ 을 계산하는데는  $N$ 개 곱셈과  $N$ 개 덧셈을 필요로 한다. 따라서,  $2N$  flop을 필요로 한다. 즉,  $\{\tilde{v}_n \mid n = 0, 1, \dots, N-1\}$ 을 계산하는데는  $2N^2$  flop을 필요로 한다. 반면에,  $\tilde{v}_{e;n}$ 과  $\tilde{v}_{o;n}$  각각을 계산하는데는  $M = N/2$ 개 관찰점들을 사용한다. 즉,  $\tilde{v}_{e;n}$ 과  $\tilde{v}_{o;n}$  각각을 계산하는데는  $N/2$ 개 곱셈과  $N/2$ 개 덧셈을 필요로 한다. 따라서,  $N$  flop을 필요로 한다. 즉,  $\{\tilde{v}_{e;n} \mid n = 0, 1, \dots, M-1\}$ 과  $\{\tilde{v}_{o;n} \mid n = 0, 1, \dots, M-1\}$ 을 계산하는데  $2NM = N^2$  flop을 필요로 한다. 이러한 과정을 반복 적용하는 것이 FFT이다.

**예제 3.5.2** 복소수  $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$ 에 대해서 다음과 같은 복소수들을 정의하자.

$$\omega_0 = \omega^0 = \omega^8, \quad \omega_1 = \omega^1, \quad \omega_2 = \omega^2, \quad \omega_3 = \omega^3 \tag{1}$$

$$\omega_4 = \omega^4, \quad \omega_5 = \omega^5, \quad \omega_6 = \omega^6, \quad \omega_7 = \omega^7 \tag{2}$$

이 복소수들이 다음 복소평면 위에 표시되어 있다.



다음 함수를 정의하자.

$$P(x) = 1 + 3x^1 + 5x^2 + 7x^3 + 8x^4 + 6x^5 + 4x^6 + 2x^7 \tag{3}$$

FFT를 사용해서 다음 복소수들 계산하기로 하자.

$$P(\omega_0), P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3), P(\omega_4), P(\omega_5), P(\omega_6), P(\omega_7) \quad (4)$$

다음과 같은 우함수와 기함수를 정의하자.

$$P_e(x) = 1 + 5x^1 + 8x^2 + 4x^3 \quad (4)$$

$$P_o(x) = 3 + 7x^1 + 6x^2 + 2x^3 \quad (5)$$

다음 식이 성립한다.

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2) \quad (6)$$

다음 값들을 계산하기로 하자.

$$P_e(\omega_0), P_e(\omega_2), P_e(\omega_4), P_e(\omega_6), P_o(\omega_0), P_o(\omega_2), P_o(\omega_4), P_o(\omega_6) \quad (7)$$

식 (6)에서 알 수 있듯이, 식 (4)의 7차 멱함수값들 8개를 계산하는 것을 식 (7)의 3차 멱함수값들 8개를 계산하는 것으로 대치할 수 있다. 식 (4)와 식 (7)의 복소수값들을 계산하기 위해서 다음 MATLAB 프로그램 FFTconstruction101.m을 실행하자.

```

1  % -----
2  %  Filename: FFTconstruction101.m
3  %  Programmed by CBS
4  % -----
5  close all, clear all
6  N = 8
7  Pe = @(x) 1+5*x+8*x.^2+4*x.^3
8  Po = @(x) 3+7*x+6*x.^2+2*x.^3
9  Ptotal = @(x) Pe(x.^2)+x.*Po(x.^2)
10 omega1 = exp(2*pi*i/N)
11 kk = 1:1:N
12 omega = omega1.^kk
13 omegaE = omega(2:2:N)
14 omega0 = omega(1:2:N-1)
15 Pval = Ptotal(omega)
16 PvalE = Pe(omegaE)
17 Pval0 = Po(omega0)
18 % Doublecheck
19 PvalED = repmat(PvalE,1,2)
20 Pval0D = repmat(Pval0,1,2)
21 DC = (PvalED + omega.*Pval0D) - Pval
22 % End of program
23 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 FFTconstruction101.m을 실행하면, 다음 값들이 얻어진다.

$$P(\omega_0) = 36, \quad P(\omega_1) = -12.6569 + 2.4142i \quad (8)$$

$$P(\omega_2) = 0, \quad P(\omega_3) = -1.3431 + 0.4142i \quad (9)$$

$$P(\omega_4) = 0, \quad P(\omega_5) = -1.3431 - 0.4142i \quad (10)$$

$$P(\omega_6) = 0, \quad P(\omega_7) = -12.6569 - 2.4142i \quad (11)$$

우함수값들은 다음과 같다.

$$P_e(\omega_0) = -7 + i, \quad P_e(\omega_2) = 0, \quad P_e(\omega_4) = -7 - i, \quad P_e(\omega_6) = 18 \quad (12)$$

기함수값들은 다음과 같다.

$$P_o(\omega_0) = -3 + 5i, \quad P_o(\omega_2) = 0, \quad P_o(\omega_4) = -3 - 5i, \quad P_o(\omega_6) = 18 \quad (13)$$

또한, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\max_{0 \leq k \leq 7} |P_e(\omega_k) + \omega_k P_o(\omega_k) - P(\omega_k)| < 10^{-13} \quad (14)$$

즉, 각  $\omega_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 7$ )에 대해서 식 (6)이 성립함을 확인할 수 있다. ■

**예제 3.5.3** 예제 3.5.2에서처럼  $\{\omega_k = \exp(\frac{2\pi i}{8}k) \mid k = 0, 1, \dots, 7\}$ 을 정의하자. 또한 다음 함수를 정의하자.

$$Q(x) = P_e(x) = 1 + 5x^1 + 8x^2 + 4x^3 \quad (1)$$

FFT를 사용해서 다음 복소수들 계산하기로 하자.

$$Q(\omega_0), Q(\omega_2), Q(\omega_4), Q(\omega_6) \quad (2)$$

다음과 같은 우함수와 기함수를 정의하자.

$$Q_e(x) = 1 + 8x^1 \quad (3)$$

$$Q_o(x) = 5 + 3x^1 \quad (4)$$

다음 식이 성립한다.

$$Q(x) = Q_e(x^2) + xQ_o(x^2) \quad (5)$$

따라서 다음 값들을 계산하기로 하자.

$$Q_e(\omega_0), Q_e(\omega_4), Q_o(\omega_0), Q_o(\omega_4) \quad (6)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, 식 (2)의 3차 멱함수값들 4개를 계산하는 것을 식 (6)의 1차 멱함수값들 4개를 계산하는 것으로 대치할 수 있다. 식 (2)와 식 (6)의 복소수값들을 계산하기 위해서 다음 MATLAB 프로그램 FFTconstruction102.m을 실행하자.

```

1 % -----
2 % Filename: FFFconstruction102.m
3 % Construction of FFT
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 close all, clear all
7 N = 4
8 Qe = @(x) 1+8*x
9 Qo = @(x) 5+4*x
10 Qtotal = @(x) Qe(x.^2)+x.*Qo(x.^2)
11 omega1 = exp(2*pi*i/N)
12 kk = 1:1:N
13 omega = omega1.^kk
14 omegaE = omega(2:2:N)
15 omegaO = omega(1:2:N-1)
16 Qval = Qtotal(omega)
17 QvalE = Qe(omegaE)
18 QvalO = Qo(omegaE)
19 % Doublecheck
20 QvalED = repmat(QvalE,1,2)
21 QvalOD = repmat(QvalO,1,2)
22 DC = (QvalED + omega.*QvalOD) - Qval
23 % End of program
24 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 FFTconstruction102.m을 실행하면, 다음 값들이 얻어진다.

$$Q(\omega_0) = 18, \quad Q(\omega_2) = -7 + i, \quad Q(\omega_4) = 0, \quad Q(\omega_6) = -7 - i \quad (7)$$

우함수값들은 다음과 같다.

$$Q_e(\omega_0) = 9, \quad Q_e(\omega_4) = -7 \quad (8)$$

기함수값들은 다음과 같다.

$$Q_o(\omega_0) = 5, \quad Q_o(\omega_4) = 2 \quad (9)$$

또한, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\max_k |Q_e(\omega_k) + \omega_k Q_o(\omega_k) - Q(\omega_k)| < 10^{-14} \quad (10)$$

즉, 각  $\omega_k$  ( $k = 0, 2, 4, 6$ )에 대해서 식 (5)가 성립함을 확인할 수 있다. ■

**예제 3.5.4** 예제 3.5.2에서처럼  $\{\omega_k = \exp(\frac{2\pi i}{8}k) \mid k = 0, 1, \dots, 7\}$ 를 정의하자. 또한 다음 함수를 정의하자.

$$R(x) = Q_e(x) = 1 + 8x^1 \quad (1)$$

예제 3.5.3의 식 (8)에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$R(\omega_0) = 9, \quad R(\omega_4) = -7 \quad (2)$$

다음과 같은 우함수와 기함수를 정의하자.

$$R_e(x) = 1 \quad (3)$$

$$R_o(x) = 8 \quad (4)$$

다음 식이 성립한다.

$$R(x) = R_e(x^2) + xR_o(x^2) \quad (5)$$

다음 식들이 성립한다.

$$R(\omega_0) = R_e(\omega_0) + \omega_0 R_o(\omega_0) = 9 \quad (6)$$

$$R(\omega_4) = R_e(\omega_8) + \omega_4 R_o(\omega_8) = -7 \quad (7)$$

따라서 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$R_e(\omega_k) + \omega_k R_o(\omega_k) = R(\omega_k), \quad (k = 0, 4) \quad (8)$$

■

관찰점들의 개수가  $2^l$ 인 경우, DFT를 계산하는데 필요한 곱셈의 개수를  $m(l)$ 이라 하고 덧셈의 개수를  $a(l)$ 이라 하자. 우선  $l = 1$ 인 경우를 살펴보자. 우리는  $\tilde{v}_0$ 와  $\tilde{v}_1$ 을 계산해야 한다. 즉, 2점변환을 2번 해야한다. 이는  $\tilde{v}_{e;0}$ 와  $\tilde{v}_{o;0}$ 를 계산하는 것과 동일하다. 이 경우  $M = 1$ 이다. 즉,  $\tilde{v}_{e;0}$ 와  $\tilde{v}_{o;0}$ 는 어떠한 곱셈과 덧셈도 필요로 하지 않는 1점변환들이다. 그러나,  $\tilde{v}_{o;0}$ 와  $\omega_2^0$ 를 곱한  $\tilde{v}_{o;0}\omega_2^0$ 를 구하는데 곱셈이 한 번 필요하고, 이를 이용해서,  $\tilde{v}_0$ 와  $\tilde{v}_1$ 을 구하는데 덧셈이 두 번 필요하다. 따라서, 전체 연산개수들은 각각  $m(1) = 1$ 이고  $a(1) = 2$ 이다. 여기서 유의할 점은  $\tilde{v}_0$ 와  $\tilde{v}_1$ 을 구하는 최후 단계에서 2로 나누는 연산은 감안하지 않았다는 것이다. 만약  $l = 2$ 이면,  $\{\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ 을 계산해야 한다. 즉, 4점변환을 네 번 해야한다. 이는  $\{\tilde{v}_{e;0}, \tilde{v}_{e;1}, \tilde{v}_{o;0}, \tilde{v}_{o;1}\}$ 을 계산하는 것과 동일하다. 이 경우에는  $M = 2$ 이다. 즉,  $\{\tilde{v}_{e;0}, \tilde{v}_{e;1}, \tilde{v}_{o;0}, \tilde{v}_{o;1}\}$ 의 각 원소는 2점변환들이다. 앞에서 보았듯이, 2점변환을 2번 하는데 필요한 연산의 개수들은 각각  $m(1) = 1$ 이고  $a(1) = 2$ 이다. 따라서,  $\{\tilde{v}_{e;0}, \tilde{v}_{e;1}, \tilde{v}_{o;0}, \tilde{v}_{o;1}\}$ 을 계산하는데 필요한 연산의 개수들은  $2m(1)$ 과  $2a(1)$ 이다. 이들을 사용해서  $\tilde{v}_{o;0}\omega_4^0$ 와  $\tilde{v}_{o;1}\omega_4^1$ 를 계산하는데 곱셈이 2번 필요하다. 또한,  $\{\tilde{v}_{e;0}, \tilde{v}_{e;1}, \tilde{v}_{o;0}, \tilde{v}_{o;1}\}$ 으로부터  $\{\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ 를 계산하는데 덧셈이 네 번 더 필요하다. 따라서, 전체 연산개수들은 각각  $m(2) = 2m(1) + 2$



와  $a(2) = 2a(1) + 4$ 이다. 같은 방법으로, 다음과 같은 차분방정식들을 유도할 수 있다.

$$m(l) = 2m(l-1) + 2^{l-1}, \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (3.5.11)$$

$$a(l) = 2a(l-1) + 2^l, \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (3.5.12)$$

여기서 초기값들은  $m(0) = 0$ 이고  $a(0) = 0$ 이다. 첫 번째 차분방정식 (3.5.11)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{m(l)}{2^{l-1}} = \frac{m(l-1)}{2^{l-2}} + 1 \quad (3.5.13)$$

식 (3.5.13)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{m(l)}{2^{l-1}} = \frac{m(0)}{2^{-1}} + l = l \quad (3.5.14)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$m(l) = l2^{l-1} = \frac{1}{2}l2^l, \quad (l = 0, 1, \dots, L) \quad (3.5.15)$$

식 (3.5.15)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$m(L) = \frac{1}{2}2^L L = \frac{1}{2}N \log_2 N \quad (3.5.16)$$

같은 방법으로, 다음 식들을 유도할 수 있다.

$$a(L) = 2^L L = N \log_2 N \quad (3.5.17)$$

따라서, FFT를 사용해서 DFT  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}]^T$ 를 계산할 때 필요한 flop수는  $\frac{3}{2}N \log_2 N$ 이다.

### 제3.6절 주기와 주파수

관찰값들  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ 의 관찰시점들이  $0, T, 2T, \dots, [N-1]T$ 라고 가정하자. 즉, 관찰점들의 시간간격(time step)은  $T$ 이다. DFT의 정의에서 알 수 있듯이, 제0번째 DFT값  $\hat{v}_0$ 는

다음과 같다.

$$\hat{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot 0}{N} k\right) \quad (3.6.1)$$

즉,  $\hat{v}_0$ 는 관찰값들  $\{v_k\}$ 에 포함된 주파수(frequency)가 0인 성분이다. 첫 번째 DFT값  $\hat{v}_1$ 은 다음과 같다.

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot 1}{N} k\right) \quad (3.6.2)$$

즉,  $\hat{v}_1$ 은 관찰값들  $\{v_k\}$ 에 포함된 주기(period)가  $N$  관찰점들( $N$  samples) 또는  $NT$  초( $NT$  seconds)인 시누소이드(sinusoid)  $\exp(-i \frac{2\pi \cdot 1}{N} k)$ 와 제 $k$ 번째 관찰값의 곱을 합한 것이다.

다시 말하면,  $\hat{v}_1$ 은 관찰값들  $\{v_k\}$ 에 포함된 주파수가  $1/N$  관찰점(one cycle over  $N$  samples) 또는  $1/[NT]$  초(one cycle over  $NT$  seconds)인 성분이다. 이를 주파수가  $1/N$  Hz-s 또는  $1/[NT]$  Hz라고 한다. 제 $n$ 번째 DFT값  $\hat{v}_n$ 은 다음과 같다.

$$\hat{v}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot n}{N} k\right), \quad (n = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3.6.3)$$

즉,  $\hat{v}_n$ 은 관찰값들  $\{v_k\}$ 에 포함된 주기가  $N/n$  관찰점들( $N/n$  samples) 또는  $NT/n$  초( $NT/n$  seconds)인 시누소이드  $\exp(-i \frac{2\pi \cdot n}{N} k)$ 와 제 $k$ 번째 관찰값의 곱을 합한 것이다. 다시 말하면,  $\hat{v}_n$ 은 관찰값들  $\{v_k\}$ 에 포함된 주파수가  $n/N$  관찰점( $n$  cycle over  $N$  samples) 또는  $n/[NT]$  초( $n$  cycle over  $NT$  seconds; Hz)인 성분이다. 따라서 주파수가  $n/N$  Hz-s 또는  $n/[NT]$  Hz이다. 즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Frequency of } \hat{v}_n = \frac{n}{N} \text{ samples} = \frac{n}{NT} \text{ seconds} \quad (3.6.4)$$

$$\text{Period of } \hat{v}_n = \frac{N}{n} \text{ samples} = \frac{NT}{n} \text{ seconds} \quad (3.6.5)$$

주기와 주파수에 관한 단위를 표 3.6.1에 요약하였다.

	Hz-s	rad	Hz	rad/s
Frequency of $X_1$	$1/N$	$2\pi/N$	$1/[NT]$	$2\pi/[NT]$
Frequency of $X_k$	$k/N$	$2\pi k/N$	$n/[NT]$	$2\pi k/[NT]$
Frequency of $X_{N/2}$	$1/2$	$\pi$	$1/[2T]$	$\pi/T$
Sampling Frequency	1	$2\pi$	$1/T$	$2\pi/T$
Period of $X_1$	$N$	$N/[2\pi]$	$NT$	$NT/[2\pi]$
Period of $X_k$	$N/k$	$N/[2\pi k]$	$NT/n$	$NT/[2\pi k]$
Period of $X_{N/2}$	2	$1/\pi$	$2T$	$T/\pi$
Sampling Period	1	$1/[2\pi]$	$T$	$T/[2\pi]$

표 3.6.1. 주파수와 주기의 단위

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{v}_{n+N} &\doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i\frac{2\pi[n+N]k}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i\frac{2\pi n k}{N}\right) = \hat{v}_n, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

즉,  $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}$ 의 주기는  $N$ 이다. 만약 관찰값들  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ 이 실수들이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{v}_{N-n} &\doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(-i\frac{2\pi[N-n]k}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(i\frac{2\pi n k}{N}\right) \\ &= \exp\left(-i\frac{2\pi N k}{N}\right) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \exp\left(i\frac{2\pi n k}{N}\right) = \overline{\hat{v}_n} \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

따라서, 관찰값들  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ 이 실수들이인 경우에는 DFT  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}]^T$ 가 가지고 있는 정보량은  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T$ 가 가지고 있는 정보량은 같다. 식 (3.6.6)에서 알 수 있듯이,  $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots$ 의 주기는  $N$ 이다. 따라서,  $\{\hat{v}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 이 가진 정보와  $\{\hat{v}_n \mid n = 0, 1, \dots, N-1\}$ 이 가진 정보와 같다. 후자를 폴딩(folding)이라 한다. 즉, 주파수가 0부터 샘플링주파수(sampling frequency)  $1/T$ 까지를 폴딩이라 한다. 식 (3.6.7)에서 알 수 있듯이,  $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots$ 의 주기는  $N$ 이다. 따라서,  $\{\hat{v}_{N-n} \mid n = 0, 1, \dots, N/2\}$ 이 가진 정보와  $\{\hat{v}_n \mid n = 0, 1, \dots, N/2\}$ 이 가진 정보는 같다. 다음 식들이 성립한다.

$$|\hat{v}_{N-n}|^2 = |\hat{v}_n|^2, \quad (n = 0, 1, \dots, N/2) \tag{3.6.8}$$

따라서, 스펙트럼을 계산하거나 그릴 때는  $\{|\hat{v}_n|^2 \mid n = 0, 1, \dots, N/2\}$ 만을 사용하면 된다. 이

$\hat{v}_{N/2}$ 에 해당하는 주파수를 Nyquist 주파수라 부른다. 그림 3.6.1에 Nyquist 주파수가 그려져 있다. 그림 3.6.1을 그리기 위해서는 MATLAB파일 NyquistFrequency101.m을 실행하라.

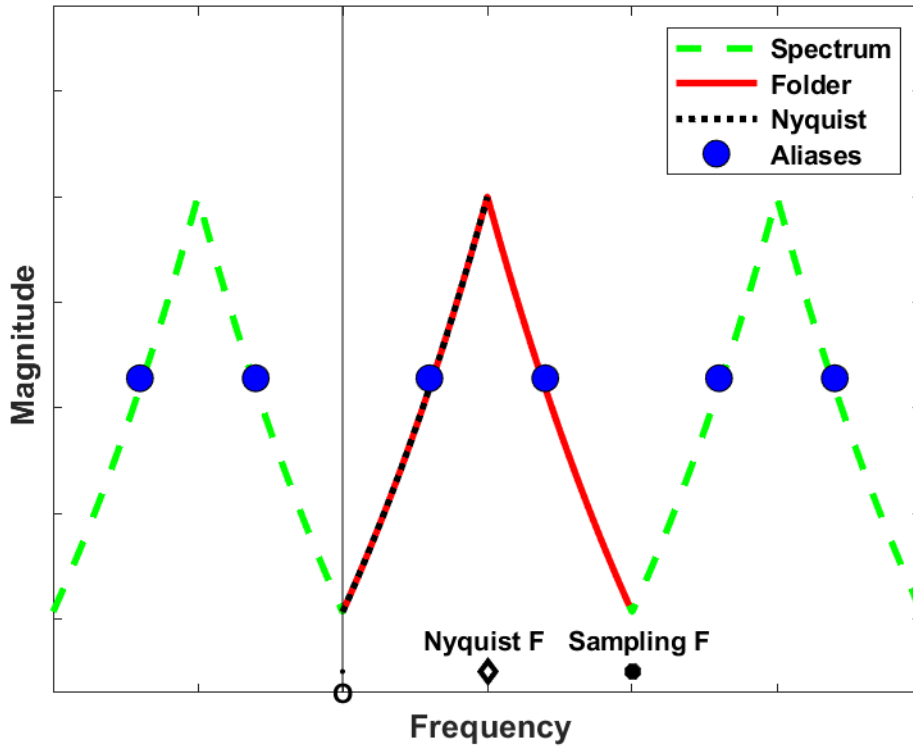


그림 3.6.1. Nyquist 주파수

```

1 % -----
2 % Filename: NyquistFrequency101.m
3 % Nyquist frequency and Alias
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all, clf
7 Nyquist = 0.5
8 Nf = 0:0.01:(2*Nyquist-0.01);
9 Magni = exp(-abs(Nf-0.5))-0.5;
10 eNf = -2*Nyquist:0.01:(4*Nyquist-0.01);
11 eMagni = [ Magni, Magni, Magni];
12 plot(eNf,eMagni,'g--','LineWidth',2.5)
13 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
14 hold on
15 plot(Nf,Magni,'r-','LineWidth',2.5)
16 plot(Nf(1:51),Magni(1:51),'k-','LineWidth',2.5)
17 set(gca,'xticklabel',[]), set(gca,'yticklabel',[])
18 aliasX = [ -0.7 -0.3 0.3 0.7 1.3 1.7 ];
19 aD = 0.328, aliasY = [aD, aD, aD, aD, aD, aD]
20 plot(aliasX,aliasY,'ko','markersize',10,'MarkerFaceColor','blue')
21 legend('\bf Spectrum','\bf Folder','\bf Nyquist','\bf Aliases',...
22         'location','NE')
23 plot([0 0],[0 1],'k-', 'HandleVisibility', 'off')
24 xlabel('\bf Frequency'), ylabel('\bf Magnitude')

```

```

25 axis([-1.0 2.0 0.03 0.68 ])
26 plot(0.5,0.05,'kd','LineWidth',2,'HandleVisibility','off')
27 text(0.25,0.05+0.03,'\bf Nyquist F')
28 plot(1.0,0.05,'k*','LineWidth',3,'HandleVisibility','off')
29 text(0.75,0.05+0.03,'\bf Sampling F')
30 plot(0.0,0.05,'k.','LineWidth',5,'HandleVisibility','off')
31 text(0.0-0.06,0.03,'\bf 0')
32 hold off
33 saveas(gcf,'NyquistFrequency101','png')
34 % End of Program
35 % -----

```

DFT를 적분형태로 근사시킬 수 있다. 벡터  $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}]^T (\in \mathbb{C}^N)$  과  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}]^T$  의 원소들은 각각 다음과 같다.

$$\hat{v}_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N v_{k-1} \exp\left(-i \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6.9)$$

$$v_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \hat{v}_{n-1} \exp\left(i \frac{2\pi n}{N} k\right), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6.10)$$

만약  $N$ 이 충분히 크다면, 다음 근사식들이 성립한다.

$$\hat{v}_{n-1} \approx \sqrt{N} \int_0^{2\pi} v(x) \exp(-nxi) dx, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6.11)$$

$$v_{k-1} \approx \sqrt{N} \int_0^{2\pi} \hat{v}(x) \exp(kxi), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6.12)$$

여기서  $v(x)$ 와  $\hat{v}(x)$ 는 다음 식들을 만족하는 평활한 함수들이다.

$$v_{k-1} = v\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6.13)$$

$$\hat{v}_{n-1} = \hat{v}\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.6.14)$$

### 제3.7절 컴퓨터함수들

MATLAB 함수들 `fft.m`과 `ifft.m`을 이용하면, DFT와 IDFT를 구할 수 있다. 정의 3.4.1이나 명제 3.4.3과는 달리, 이 `fft.m`과 `ifft.m`에서 사용되는 식들이 다음과 같음에 유의하라.

$$X_n \doteq \sum_{k=1}^N x_k \exp\left(-i\frac{2\pi[k-1][n-1]}{N}\right), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.1)$$

$$x_k \doteq \sum_{n=1}^N X_n \exp\left(i\frac{2\pi[n-1][k-1]}{N}\right), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.2)$$

이에 해당하는 MATLAB 명령문들은 다음과 같다.

$$\text{fft}(x) \leftrightarrow \text{ifft}(X) \quad (3.7.3)$$

여기서  $x$ 와  $X$ 는 어레이즈(arrays)이다.

Python에서는 함수들 `numpy.fft`와 `numpy.ifft`를 사용해서 DFT와 IDFT를 구할 수 있다. 다음과 같이  $A_n$ 과  $a_k$ 를 정의하자.

$$A_n \doteq \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(-2\pi i \frac{kn}{N}\right), \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3.7.4)$$

$$a_k \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \exp\left(2\pi i \frac{kn}{N}\right), \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3.7.5)$$

이에 해당하는 Python 명령문들은 다음과 같다.

$$\text{numpy.fft}(a) \leftrightarrow \text{numpy.ifft}(A) \quad (3.7.6)$$

여기서  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 과  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ 은 수열들이다. 만약  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 이 실수들이면, Python 함수 `numpy.rfft`를 사용한다. 만약  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ 이 실수들이면, Python 함수 `numpy.rifft`를 사용한다.

R에서는 `Stats`모듈에서 제공하는 함수 `fft`를 사용해서 DFT와 IDFT를 구할 수 있다.

다음과 같이  $y_s$   $z_r$  을 정의하자.

$$y_s \doteq \sum_{r=1}^N z_r \exp\left(i \frac{2\pi[r-1]}{N} [s-1]\right), \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.7)$$

$$z_r \doteq \sum_{s=1}^N y_s \exp\left(-i \frac{2\pi[s-1]}{N} [r-1]\right), \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.8)$$

이에 해당하는 R명령문들은 다음과 같다.

$$\text{fft}(y, \text{inverse} = \text{FALSE}) \leftrightarrow \frac{1}{N} \text{fft}(z, \text{inverse} = \text{TRUE}) \quad (3.7.9)$$

여기서  $y$ 와  $z$ 는 벡터들이다. R의 Stats모듈의 함수 `fft`를 사용해서 IDFT를 계산할 때는 정규화가 되지 않는다. 따라서, 식 (3.7.9)에서처럼 출력된 역Fourier 변환값들을  $N$ 으로 나누어야 한다.

Mathematica에서는 함수들 `Fourier`와 `InverseFourier`를 사용해서 DFT와 IDFT를 구할 수 있다. 다음과 같이  $b_s$ 와  $a_r$ 을 정의하자.

$$b_s \doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N a_r \exp\left(i \frac{2\pi[r-1]}{N} [s-1]\right), \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.10)$$

$$a_r \doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^N b_s \exp\left(-i \frac{2\pi[s-1]}{N} [r-1]\right), \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.11)$$

이에 해당하는 Mathematica명령문들은 다음과 같다.

$$\text{Fourier} [\{a_1, a_2, \dots, a_N\}] \leftrightarrow \text{InverseFourier} [\{b_1, b_2, \dots, b_N\}] \quad (3.7.12)$$

여기서  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 과  $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ 은 수열들이다.

Maple에서는 함수들 `FFT`과 `IFFT`을 사용해서, DFT와 IDFT를 구할 수 있다. 다음과 같이  $X_n$ 과  $x_k$ 를 정의하자.

$$X_n \doteq \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.13)$$

$$x_k \doteq \sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{N} k\right), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7.14)$$

이에 해당하는 Maple 명령문들은 다음과 같다.

$$\text{FFT}(N, x_{\text{Real}}, x_{\text{imaginary}}) \leftrightarrow \text{IFFT}(N, X_{\text{Real}}, X_{\text{imaginary}}) \quad (3.7.15)$$

여기서  $x$ 와  $X$ 는 어레이즈(arrays)이다.

**예제 3.7.1** MATLAB 함수 `fft.m`을 사용해서 DFT를 구하기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 `USEfftEx001.m`을 실행해보자.

```

1 % -----
2 % Filename: USEfftEx001.m
3 % Use MATLAB function FFT
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 function USEfftEx20
7 close all, clear all
8 N1 = 5; nn1 = [0:59]; % period = 5
9 x1 = cos(2*pi*nn1/N1);
10 N2 = 10; nn2 = [0:59]; % period = 10
11 x2 = cos(2*pi*nn2/N2);
12 N3 = 20; nn3 = [0:59]; % period = 20
13 x3 = cos(2*pi*nn3/N3);
14 N = 2^6
15 X1 = fft(x1,N); Spectrum1 = abs(X1);
16 X2 = fft(x2,N); Spectrum2 = abs(X2);
17 X3 = fft(x3,N); Spectrum3 = abs(X3);
18 % Plotting
19 freq = [0:N-1]/N;
20 subplot(3,1,1)
21 plot(freq,Spectrum1,'r-','LineWidth',1.5)
22 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
23 axis([0 1 0 50])
24 xlabel('\bf Frequency (Hz)'); ylabel('\bf Spectrum')
25 subplot(3,1,2)
26 plot(freq,Spectrum2,'b-','LineWidth',1.5)
27 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
28 axis([0 1 0 50])
29 xlabel('\bf Frequency (Hz)'); ylabel('\bf Spectrum')
30 subplot(3,1,3)
31 plot(freq,Spectrum3,'k-','LineWidth',1.5)
32 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
33 axis([0 1 0 50])
34 xlabel('\bf Frequency (Hz)'); ylabel('\bf Spectrum')
35 saveas(gcf,'USEfftEx001','jpg')
36 % End of Program
37 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 `USEfftEx001.m`에서는 주기가  $N = 5$ 인 코사인함수로부터 길이가 60인 관찰벡터  $x_1$ , 주기가  $N = 10$ 인 코사인함수로부터 길이가 60인 관찰벡터  $x_2$ , 그리고 주기가  $N = 20$ 인 코사인함수로부터 길이가 60인 관찰벡터  $x_3$ 를 생성한다. 관찰벡터들에 MATLAB 함수 `fft.m`을 적용해서 얻은 DFT들이  $X_1$ ,  $X_2$  그리고  $X_3$ 에 저장되고, 이들의 스펙



트럼이 Spectrum1, Spectrum2 그리고 Spectrum3에 저장된다. 이 스펙트럼들이 그림 3.7.1에 그려져 있다. ■

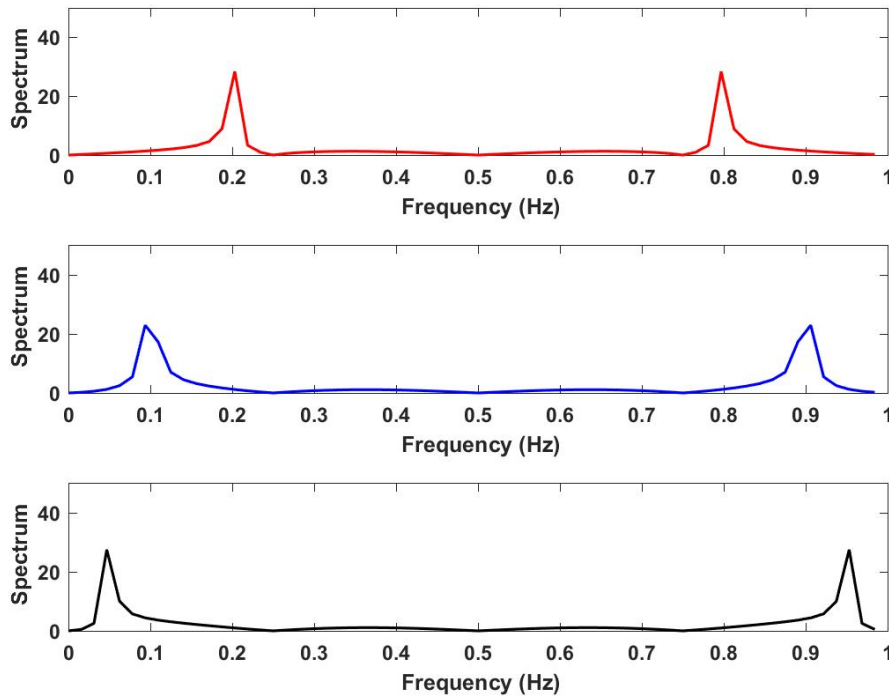


그림 3.7.1. DFT

**예제 3.7.2** MATLAB함수 fft.m을 사용해서 DFT를 구하기 위해서, 다음 MATLAB프로그램 USEfftEx002.m을 실행해보자.

```

1  % -----
2  % Filename: USEfftEx002.m
3  % Use MATLAB function FFT
4  % Programmed by CBS
5  % -----
6  function USEfftEx002
7  close all, clear all
8  periodd = 5;           % Period
9  nn = [0:29];
10 x1 = cos(2*pi*nn/periodd); % 6 periods
11 x2 = [x1 x1];          % 12 periods
12 x3 = [x1 x1 x1];      % 18 periods
13 N = 2^11
14 X1 = fft(x1,N); Power1 = abs(X1);
15 X2 = fft(x2,N); Power2 = abs(X2);
16 X3 = fft(x3,N); Power3 = abs(X3);
17 % Plotting
18 freq = [0:N-1]/N;
19 subplot(3,1,1)
    
```

```

20 plot(freq,Power1,'r-','LineWidth',1.5)
21 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
22 axis([0 1 0 50])
23 xlabel('\bf Frequency (Hz)'); ylabel('\bf Power')
24 subplot(3,1,2)
25 plot(freq,Power2,'b-','LineWidth',1.5)
26 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
27 axis([0 1 0 50])
28 xlabel('\bf Frequency (Hz)'); ylabel('\bf Power')
29 subplot(3,1,3)
30 plot(freq,Power3,'k-','LineWidth',1.5)
31 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
32 axis([0 1 0 50])
33 xlabel('\bf Frequency (Hz)'); ylabel('\bf Power')
34 saveas(gcf,'USEfftEx002','jpg')
35 % End of Program
36 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 USEfftEx002.m에서는 주기가  $N = 5$ 인 코사인함수로부터 길이가 30인 관찰벡터  $x_1$ , 주기가  $N = 5$ 인 코사인함수로부터 길이가 60인 관찰벡터  $x_2$ , 그리고 주기가  $N = 5$ 인 코사인함수로부터 길이가 90인 관찰벡터  $x_3$ 를 생성한다. 관찰벡터들에 MATLAB 함수 fft.m을 적용해서 얻은 DFT들이  $X_1$ ,  $X_2$  그리고  $X_3$ 에 저장되고, 이들의 스펙트럼이 Spectrum1, Spectrum2 그리고 Spectrum3에 저장된다. 이 스펙트럼들이 그림 3.7.2에 그려져 있다. 그림 3.7.2에서 알 수 있듯이, 관찰점들의 개수가 커질수록 스펙트럼이 커짐을 알 수 있다. ■

**예제 3.7.3** MATLAB 함수 fft.m을 사용해서 DFT를 구하기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 USEfftEx101.m을 실행해보자.

```

1 % -----
2 % Filename: USEfftEx101.m
3 % Use MATLAB function FFT
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 clear all, close all
7 % Input Data x
8 x = linspace(-3,3,2^7);
9 f = exp(-x.*x).*cos(x);
10 N = length(x)
11 Tspace = x(2) - x(1) % Sampling period
12 Fspace = 1/Tspace % Sampling frequency, Hz
13 F = fft(f); % DFT
14 centerF = fftshift(F)*Tspace; % Move DFT to Center
15 freq = Fspace*( -N/2:(N/2 -1) )/N;
16 Spectrum = abs(centerF);
17 % Plotting
18 clf
19 subplot(2,1,1)
20 plot(x,f,'r-','LineWidth',2.5)
21 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')

```

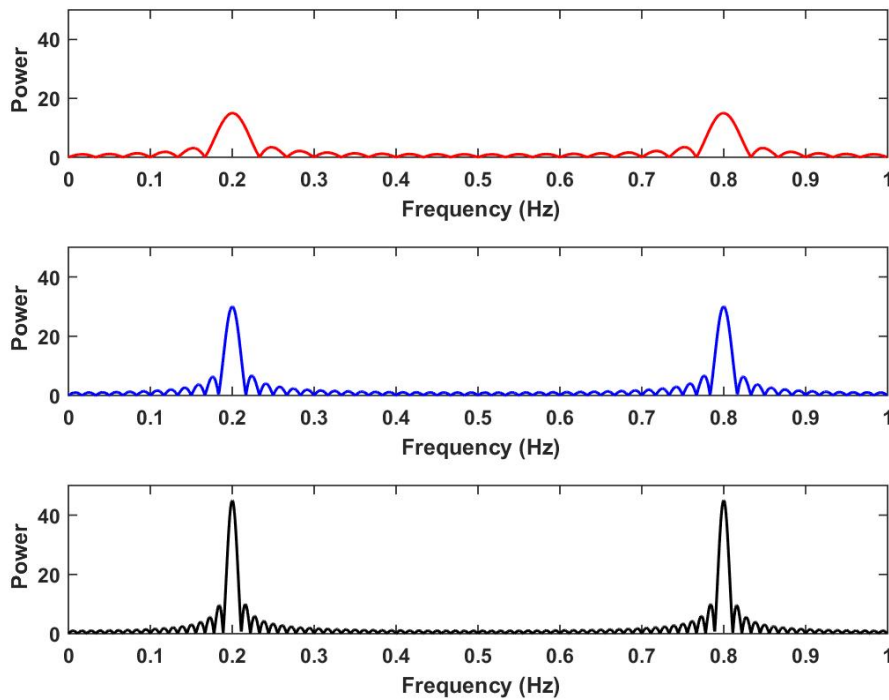


그림 3.7.2. DFT

```

22 axis([-3 3 -0.2 1.1])
23 xlabel('\bf x','FontSize',12');
24 ylabel('\$ \bf \exp(-x^2) \cos(x) \$','Interpreter','Latex')
25 subplot(2,1,2)
26 plot(freq,Spectrum,'g',freq,Spectrum,'k.','LineWidth',2.5)
27 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
28 ylabel('FFT','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
29 xlabel('frequency','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
30 axis([freq(1) freq(end) -0.05 1.50 ])
31 saveas(gcf,'USEfftEx101','png')
32 reF = real(F); imF = imag(F);
33 save('USEfftEx101.txt','reF','imF','freq','-ascii')
34 % End of Program
35 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 USEfftEx103.m에서는 다음 함수에서  $2^{16}$  개 관찰값의 DFT가 출력된다.

$$\text{fun} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cos x \tag{1}$$

이 관찰벡터에 MATLAB 함수 fft.m을 적용해서 DFT를 계산한 그림이 3.7.3에 출력된다. 이 MATLAB 프로그램에서는 MATLAB 함수 fftshift.m을 사용하였다. 이 함수를 이용하면, MATLAB 함수 fft.m에 의해서 계산된 결과를 음의 주파수(negative frequency)에 대해서도

출력한다. 즉, 원점을 중심으로 결과물을 출력한다. ■

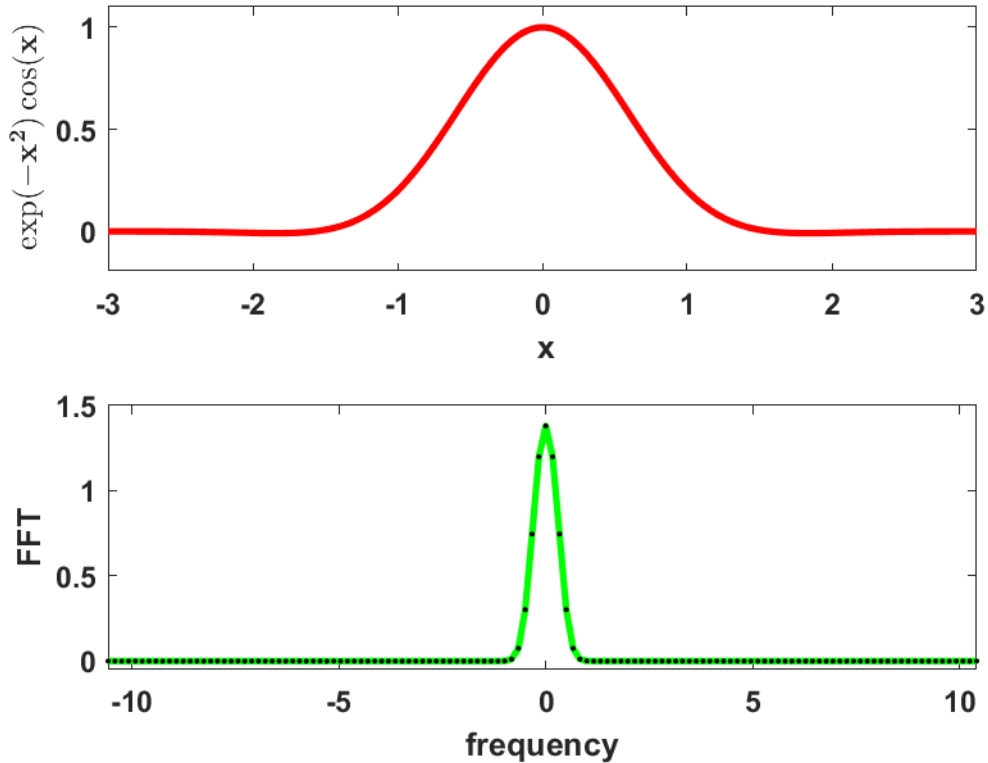


그림 3.7.3. DFT

**예제 3.7.4** DFT와 IDFT가 서로 역작용소(inverse operator)임을 보이기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 USEfftEx102.m을 실행해보자.

```

1 % -----
2 % Filename: USEfftEx102.m
3 % Plot of FFT of the normal pdf
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all
7 % Making Data
8 N = 128;
9 x = linspace(-3,3,N);
10 fGauss = 1/( sqrt(2*pi) ) * exp(-x.*x/2);
11 % FFT
12 Tspace = x(2) - x(1) % Sampling period
13 Fspace = 2*pi/Tspace % Frequency step; radian
14 hatfGauss = fft(fGauss);
15 centerHG = fftshift(hatfGauss)*Tspace;
16 freq = Fspace*( -N/2:(N/2 -1) )/N;
17 fFT = exp(-freq.*freq/2); % True Fourier Transform
18 % Inverse FFT
19 fGaussRe = ifft(hatfGauss);

```

```

20 % Error
21 ErrorFFT = fGauss - fGaussRe;
22
23 % Plotting
24 subplot(2,2,1)
25 plot(x,fGauss,'k.','LineWidth',2.5)
26 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
27 ylabel('PDF','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
28 axis([ -3, 3, -0.05, 0.5 ])
29 subplot(2,2,2)
30 plot(freq,abs(fFT),'r',freq,abs(centerHG),'kd','LineWidth',2.5)
31 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
32 % legend('\bf Fourier Transform','\bf FFT','location','NE')
33 ylabel('FFT','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
34 axis([ -10,10,-0.05,1.3 ])
35 subplot(2,2,3)
36 plot(x,fGaussRe,'r-','LineWidth',2.5)
37 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
38 ylabel('PDF','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
39 axis([ -3, 3, -0.05, 0.5 ])
40 subplot(2,2,4)
41 plot(x>ErrorFFT,'b-','LineWidth',1.5)
42 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[-3 3])
43 ylabel('\bf Error','FontSize',12);
44 saveas(gcf,'USEfftEx102','png')
45
46 % Save Data
47 RhatfGauss = real(hatfGauss);
48 IhatfGauss = imag(hatfGauss);
49 save('USEfftEx102.txt','RhatfGauss','IhatfGauss','fft','-ascii')
50 % End of Program
51 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 USEfftEx102.m에서는 다음 표준정규확률밀도함수에서 128개 관찰값들이 출력된다.

$$\text{fun} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (1)$$

이 관찰값들이 벡터 fGauss에 저장된다. 이 관찰값들을 그린 그래프가 그림 3.7.4의 좌측상단에 수록되어 있다. 이 관찰값들에 MATLAB 함수 fft.m을 적용해서 DFT를 계산한 그래프가 그림 3.7.4의 우측상단에 수록되어 있다. DFT에 MATLAB 함수 ifft.m을 적용해서 계산한 그래프가 그림 3.7.4의 좌측하단에 수록되어 있다. 이론적으로 이 좌측상단 그래프와 좌측하단 그래프는 동일해야 한다. 이 두 그래프들의 차이가 그림 3.7.4의 우측하단에 수록되어 있다. 이 그래프에서 좌측상단 그래프와 좌측하단 그래프가 동일함을 확인할 수 있다. ■

**예제 3.7.5** DFT와 IDFT가 서로 역작용소임을 보이기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 USEfftEx103.m을 실행해보자.

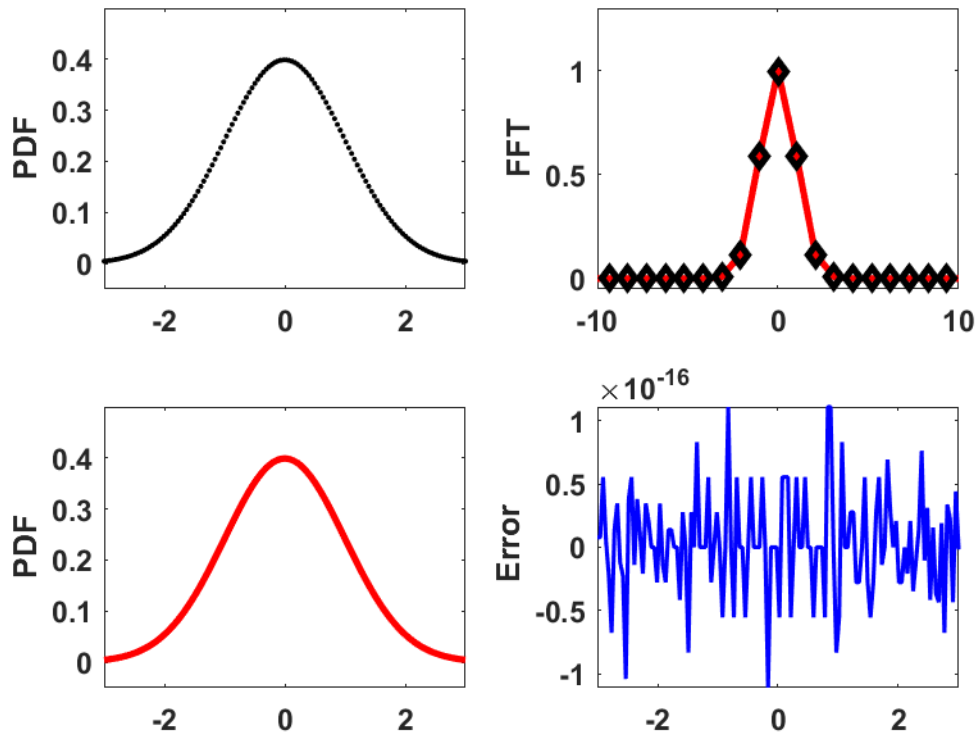


그림 3.7.4. DFT와 Fourier 변환

```

1 % -----
2 % Filename: USEfftEx103.m
3 % Inverse property of FFT and IFFT
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all
7 N = 2^16; % Number of observations
8 xx = linspace(-5,5,N); % xx: domain of function f
9 fun = 1/sqrt(2*pi)*exp(-xx.^2/2);
10 Ts = xx(2)-xx(1); % sampling period
11 DFTfun = fft(fun);
12 DFTcor = fftshift(real(DFTfun));
13 Ws = 2*pi/Ts; % sampling frequency in radian
14 W = Ws*(-N/2:N/2-1)/N;
15 IDFTfun = abs(iff(DFTcor));
16 err = fun - IDFTfun;
17 % Plotting
18 subplot(2,2,1)
19 plot(xx,fun,'k-', 'LineWidth', 2.0)
20 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold')
21 xlabel('\bf x', 'fontsize', 12)
22 ylabel('\bf f(x)', 'fontsize', 12)
23 axis([-5 5 0 0.45])
24 subplot(2,2,2)
25 plot(W,DFTcor, 'r-', 'LineWidth', 2.0)
26 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold', 'xlim', [-5,5])
27 xlabel('\bf \omega', 'fontsize', 12)
28 ylabel('\bf DDFT', 'fontsize', 12)

```

```

29 subplot(2,2,3)
30 plot(xx,IDFTfun,'k--','LineWidth',2.0)
31 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
32 xlabel('\bf x','fontsize',12)
33 ylabel('\bf IDFFT','fontsize',12)
34 axis([-5 5 0 0.45])
35 subplot(2,2,4)
36 plot(xx,err,'b-','LineWidth',2.0)
37 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[-5,5])
38 xlabel('\bf x','fontsize',12)
39 ylabel('\bf Error','fontsize',12)
40 saveas(gcf,'USEfftEx103','png')
41 % End of Program
42 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 USEfftEx103.m을 실행하면, 다음 표준정규확률밀도함수에서  $N = 2^{16}$ 개 관찰값들의 DFT가 출력된다.

$$\text{fun} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (1)$$

그림 3.7.5의 좌측상단에 이 그래프가 그려져 있다. 그림 3.7.5의 우측상단에 MATLAB 함수 fft.m에 의해서 계산한 DFT의 실수부분이 주파수(라디안)에 대해 그린 그래프가 그려져 있다. 그림 3.7.5의 좌측하단에 이 실수부분 DFT에 MATLAB 함수 ifft.m을 적용해서 계산한 변형된 IDFT를 그린 그래프가 그려져 있다. 그림 3.7.5의 우측하단에 원래 주어진 표준확률 밀도함수에서 이 변형된 IDFT를 뺀 오차를 그린 그래프가 그려져 있다. 이 오차그래프에서 알 수 있듯이, 오차의 절대값은  $2 \cdot 10^{-5}$ 보다 작다. 즉, 이 오차그래프에서도 DFT와 IDFT가 서로 역작용소임을 확인할 수 있다. ■

Fourier 변환, Laplace 변환, 적률생성함수,  $z$  변환 등은 합성곱(convolution)을 계산하는데 아주 유용하다. 예를 들어, 서로 독립인 두 정규확률변수들의 합이 정규확률변수라는 것을 증명하기 위해서는 적분을 해야한다. 그러나, 적률생성함수와 합성곱을 이용하면, 적분을 계산하지 않고도 이 성질을 증명할 수 있다. 다음 예제는 MATLAB 함수들 fft.m와 ifft.m을 사용해서 이산형 합성곱을 계산할 수 있음을 보여준다.

**예제 3.7.6** 두 벡터들  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ 와  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ 의 합성곱  $\mathbf{c}$ 는  $[m + n - 1]$ 차원 벡터로서 이 합성곱벡터의 제  $k$ 번째 원소  $c_k$ 는 다음과 같다.

$$c_k = \sum_{j=\max(1,k+1-n)}^{\min(k,m)} a_j b_{k-j} \quad (1)$$

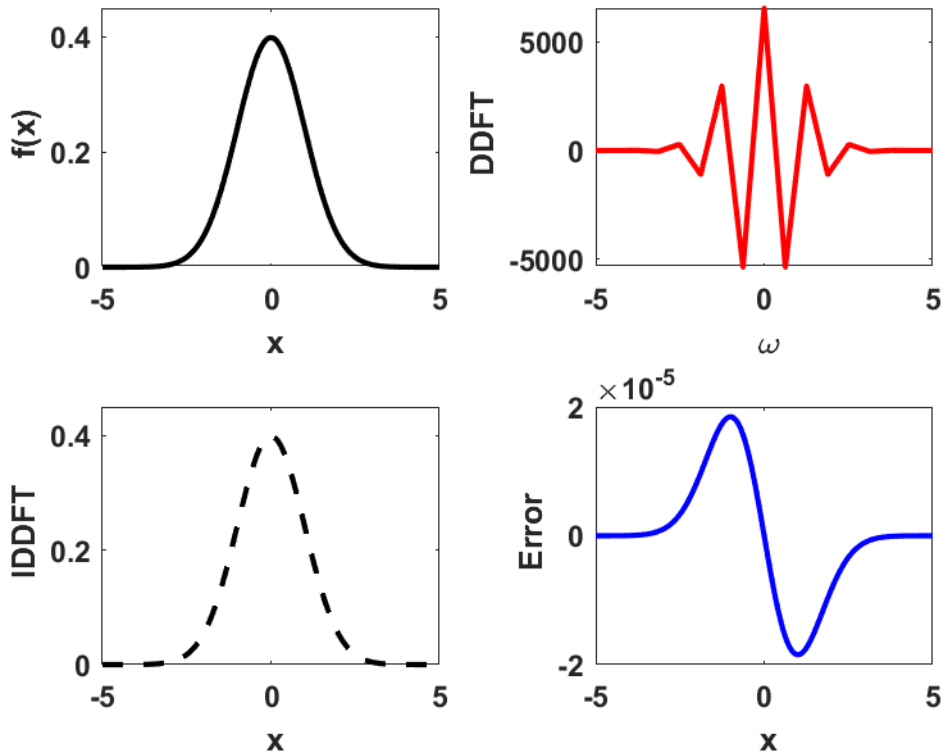


그림 3.7.5. DFT와 Fourier 변환

다음과 같이 MATLAB 함수 conv.m을 사용해서, 합성곱벡터  $c$ 를 구할 수 있다.

```
>> c = conv(a,b)
```

벡터  $a$ 의 DFT와 벡터  $b$ 의 DFT의 곱은 합성곱  $c$ 의 DFT이므로, MATLAB 함수들 fft.m와 ifft.m를 사용해서 합성곱벡터  $c$ 를 구할 수 있다. 이 경우에는 두 DFT들을 곱하기 위해서 두 DFT의 길이를 일치시켜야 한다. 즉, 각 DFT가  $[m + n - 1]$ 차원이 되도록, 다음과 같이 각 DFT에 0들을 추가한다.

```
>> A = fft([a zeros(1,length(b)-1)])
>> B = fft([b zeros(1,length(a)-1)])
```

다음 단계로 다음과 같이 MATLAB 함수 ifft.m을 실행한다.

```
>> C = ifft(A.*B)
```

만약 확률변수  $x$ 가 이항확률분포  $B(m, p)$ 를 따르고, 확률변수  $y$ 는 이항확률분포  $B(n, p)$ 를 따르며 또한 이들이 서로 독립이면, 확률변수  $x + y$ 가 이항확률분포  $B(m + n, p)$ 를 따른다.



합성곱을 사용해서 이 성질을 증명하기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 USEconvEx101.m 을 실행해보자.

```

1  % -----
2  %  Filename: USEconvEx101.m
3  %  Convolution using conv.m, fft.m and ifft.m
4  %  Programmed by CBS
5  % -----
6  function USEconvEx101
7  clf, clear all, close all, format rat
8  p = 2/3;
9  x = MakeBinomialProb(5,p)
10 y = MakeBinomialProb(7,p)
11 z = MakeBinomialProb(12,p)
12 CONVxy = conv(x,y)
13 X = fft([x zeros(1,length(y)-1)])
14 Y = fft([y zeros(1,length(x)-1)])
15 CONVxy2 = ifft(X.*Y)
16 format long
17 err1 = max(abs(z - CONVxy))
18 err2 = max(abs(z - CONVxy2))
19 reX = real(X); imX = imag(X);
20 reY = real(Y); imY = imag(Y);
21 save('USEconvEx101.txt','reX','imX','reY','imY', ...
22     'CONVxy','CONVxy2','-ascii')
23 end
24 % End of Program
25 % -----
26 %  Filename: MakeBinomialProb.m
27 %  Make Binomial Probability
28 % -----
29 function x = MakeBinomialProb(n,p)
30 x(1) = (1-p)^n;
31 for k = 1:1:n
32     x(k+1) = x(k)*(n+1-k)/k*p/(1-p);
33 end
34 end
35 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 USEconvEx101.m을 실행하면, 이항확률분포  $B(5, \frac{2}{3})$ 를 따르는 확률변수  $x$ , 이항확률분포  $B(7, \frac{2}{3})$ 를 따르는 확률변수  $y$ , 그리고 이항확률분포  $B(12, \frac{2}{3})$ 를 따르는 확률변수  $z$ 의 확률밀도함수들이 다음과 같음을 확인할 수 있다.

$$x = \left[ \frac{1}{243} \quad \frac{10}{243} \quad \frac{40}{243} \quad \frac{80}{243} \quad \frac{80}{243} \quad \frac{32}{243} \right] \quad (3)$$

$$y = \left[ \frac{1}{2187} \quad \frac{14}{2187} \quad \frac{28}{729} \quad \frac{280}{2187} \quad \frac{560}{2187} \quad \frac{224}{2187} \quad \frac{448}{2187} \quad \frac{128}{2187} \right] \quad (4)$$

$$z = \left[ \frac{1}{53161} \quad \frac{8}{177147} \quad \frac{29}{58378} \quad \frac{89}{26874} \quad \frac{89}{5972} \quad \frac{356}{7465} \quad \dots \right. \\ \left. \frac{151}{1357} \quad \frac{615}{3224} \quad \frac{356}{1493} \quad \frac{266}{1255} \quad \frac{205}{1612} \quad \frac{205}{4433} \quad \frac{67}{8693} \right] \quad (5)$$

MATLAB 함수 conv.m을 사용해서 구한 합성곱 CONV<sub>xy</sub>와 MATLAB 함수들 fft.m와 ifft.m를 사용해서 구한 합성곱 CONV<sub>xy2</sub>는 이항확률분포  $B(12, \frac{2}{3})$ 를 따르는 확률변수  $z$ 와 일치함을 확인할 수 있다. ■

주어진 시계열데이터를 시간공간(time space)이 아닌 주파수공간(frequency space)에서 분석하는 것은 이공학 뿐 아니라 경영학과 경제학에서도 매우 중요하다. 이에 대해서는 스펙트럴해석(spectral analysis)이라는 주제로 제4장에서 다시 다루게 될 것이다. 여기서는 시계열데이터의 진폭(amplitude)와 위상(phase)을 구하는 간단한 예제를 살펴보자.

**예제 3.7.7** 시계열데이터의 진폭과 위상을 구하는 예로서, 다음 MATLAB 프로그램 USEfftEx104.m을 실행해보자.

```

1 % -----
2 %   Filename: USEfftEx104.m
3 %   Amplitude and Phase of a signal
4 %   Programmed by CBS
5 %-----
6 function USEfftEx104
7 clf, clear all, close all
8 N = 2^8;           % number of observations
9 tt = linspace(0,1,N); % time vector
10 fun = sin(2*pi*10*tt) + sin(2*pi*35*tt); % signal vector
11 DFTfun = fft(fun); % DFT
12 ampl = abs(DFTfun); % amplitude
13 phas = unwrap(angle(DFTfun)); % phase
14 kk = (0:1:length(DFTfun)-1) *(N-1)/length(DFTfun);
15 % Plotting
16 subplot(2,1,1)
17 plot(kk, ampl, 'k-', 'LineWidth', 2.5)
18 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold', 'xlim', [0,N])
19 xlabel('\bf k', 'fontsize', 12)
20 ylabel('\bf Amplitude', 'fontsize', 12)
21 subplot(2,1,2)
22 plot(kk, phas, 'k-', 'LineWidth', 2.5)
23 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold', 'xlim', [0,N])
24 xlabel('\bf k', 'fontsize', 12)
25 ylabel('\bf Phase', 'fontsize', 12)
26 saveas(gcf, 'USEfftEx104', 'png')
27 % End of Program
28 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 USEfftEx104.m을 실행하면, 시간공간의 정보가 주파수공간의 정보인 DFT로 변환된다. 또한, DFT의 크기인 진폭과 위상을 그린 그래프들이 출력된다. 각  $k$ 에 대해서 진폭을 그린 그래프가 그림 3.7.6의 상단에 수록되어 있다. 진폭이 크다는 것은 그 주파수에 해당하는 곳에 정보가 몰려있음을 뜻한다. 또한, 각  $k$ 에 대해서 위상을 그린 그래프가 그림 3.7.6의 하단에 수록되어 있다. ■

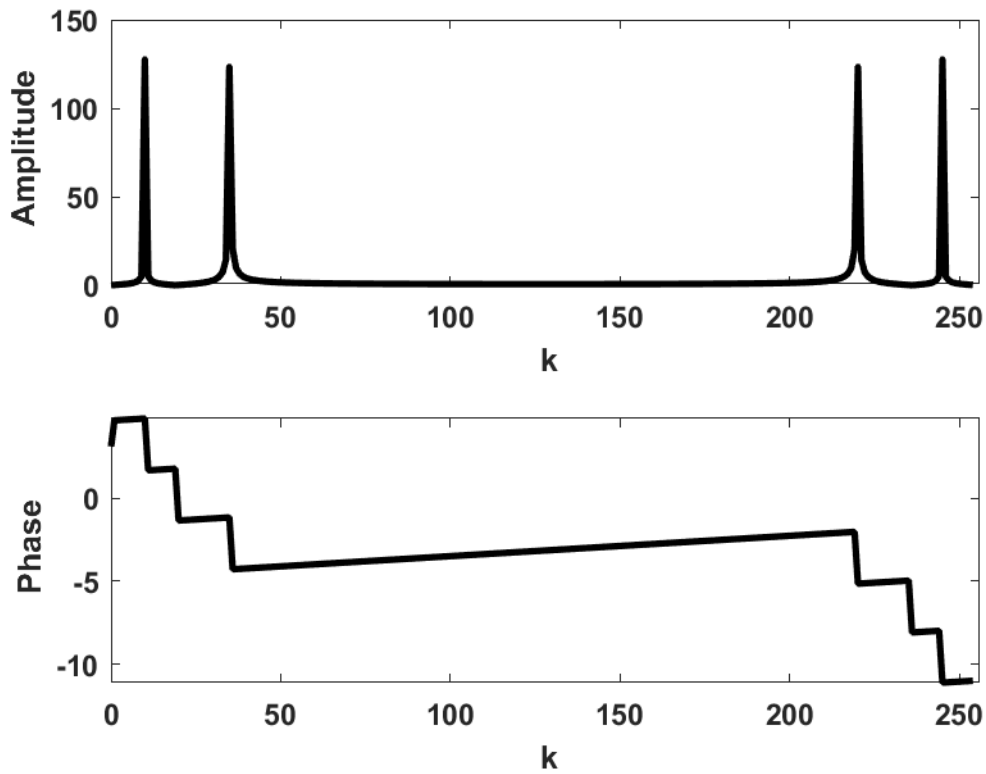


그림 3.7.6. DFT와 IDFT

### 제3.8절 FFT와 Fourier 변환

변수변환  $\theta = 2\pi\omega$ 을 적용하면, Fourier 변환을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{f}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt \quad (3.8.1)$$

또한, 역Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i2\pi\omega t} d\omega \quad (3.8.2)$$

Fourier 변환  $\hat{f}(\theta)$ 가 추정되면, 수치적분법으로 식 (3.8.2)의 정적분을 계산해서 확률밀도함수를 추정할 수 있다. 최근 금융공학에서는 이 방법을 자주 쓰고 있다. 특히 꼬리가 무거운 확률분포를 다루는 경우에는 이 방법이 아주 중요하다.

식 (3.8.2)의 역Fourier 변환  $\tilde{f}(t)$ 를 다음과 같은 형태로 근사시키기로 하자.

$$\tilde{f}(t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \hat{f}(u_n) e^{iu_n t} \Delta_u \quad (3.8.3)$$

여기서  $\Delta_u$ 는 작은 양수이고,  $u_n$ 은 다음과 같다.

$$u_n \doteq [n-1]\Delta_u, \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3.8.4)$$

변수  $t$ 의 지지대  $[t_L, t_U]$ 에 대해서 다음과 같은 증분과 상수들을 정의하자.

$$\Delta_t \doteq \frac{t_U - t_L}{N-1} \quad (3.8.5)$$

$$t_k \doteq t_L + [k-1]\Delta_t, \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (3.8.6)$$

식 (3.8.3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{f}(t_k) \approx \Re \left( \frac{1}{\pi} \exp(i[n-1]\Delta_u t_L) \sum_{n=1}^N \exp(i[n-1][k-1]\Delta_u \Delta_t t_L) \hat{f}(u_n) \Delta_u \right) \quad (3.8.7)$$

식 (3.8.7)에 FFT를 적용하기 위해서, 다음 식을 만족하는  $\Delta_u$ 를 사용하기로 하자.

$$\Delta_u \Delta_t = \frac{2\pi}{N} \quad (3.8.8)$$

큰 자연수  $N$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\Delta_u = \frac{2\pi}{N} \frac{N}{t_U - t_L} = \frac{2\pi}{t_U - t_L} \quad (3.8.9)$$

식 (3.8.8)에서 알 수 있듯이, FFT를 적용하기 위해서  $\Delta_u$ 에 강한 조건을 부여해야 한다. 만약  $t$ 의 지지대  $[t_L, t_U]$ 가 넓다면(작다면),  $\Delta_u$ 가 작어야(커야) 한다. 때때로 FFT를 사용해서 추정된 역Fourier 함수가 원래의 확률밀도 함수와 형태는 같으나, 수직으로 약간 이동한 형태일 수가 있다. 이러한 현상을 이산화편의(discretization bias)라고 부른다. 주어진 점  $t$ 와 점  $u$ 의 좀 더 넓은 범위(range)에 대해서 좀 더 세밀한 격자(grid)를 적용하면, 이산화편의를 교정할 수 있다.

### 제3.9절 Plancharel-Parseval 등식

Fourier 변환은 직교 변환(orthogonal transform)이므로, 상대적 길이(relative length)와 각(angle)이 보존된다. 이러한 성질을 정형화한 것이 다음 명제이다.

**명제 3.9.1: Plancharel 등식**

함수들  $f(t)$ 와  $g(t)$ 의 Fourier 변환을 각각  $\hat{f}(\theta)$ 와  $\hat{g}(\theta)$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)\overline{\hat{g}(\theta)}d\theta$$

여기서  $\bar{A}$ 는  $A$ 의 공액복소수이다.

증명. 다음 역Fourier 변환식들이 성립한다.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)e^{i\theta t} d\theta, \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\eta)e^{i\eta t} d\eta \tag{1}$$

식 (1)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)e^{i\theta t} d\theta \right] \overline{\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\eta)e^{i\eta t} d\eta \right]} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)\overline{\hat{g}(\eta)} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\theta-\eta]t} dt \right] d\theta d\eta \end{aligned} \tag{2}$$

명제 3.2.2에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\delta(\theta - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\theta-\eta]t} dt \tag{3}$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\eta)}\delta(\theta - \eta)d\eta \right] d\theta \tag{4}$$

Dirac 델타함수의 성질에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\eta)}\delta(\theta - \eta)d\eta = \overline{\hat{g}(\theta)} \tag{5}$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하면, 이 명제의 증명이 끝난다. ■

### 따름정리 3.9.1

함수들  $f(t)$ 와  $g(t)$ 의 Fourier 변환을 각각  $\hat{f}(\theta)$ 와  $\hat{g}(\theta)$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)\hat{g}(-\theta)d\theta$$

증명. 명제 3.9.1에서 알 수 있듯이, 함수  $h(t)$ 와 Fourier 변환  $\hat{h}(\theta)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{h(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta)\overline{\hat{h}(\theta)}d\theta \quad (1)$$

함수  $g(t) \doteq \overline{h(t)}$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\hat{h}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}\overline{g(t)}dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}g(t)dt} = \overline{\hat{g}(-\theta)} \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)에서 알 수 있듯이, 이 따름정리가 성립한다. ■

명제 3.9.1에 식  $g = f$ 를 대입하면, 다음 따름정리를 얻는다.

### 따름정리 3.9.2: Parseval 등식

함수  $f(t)$ 의 Fourier 변환을  $\hat{f}(\theta)$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\theta)|^2 d\theta$$

**예제 3.9.1** 따름정리 3.9.2로부터 명제 3.9.1을 유도할 수 있다.

다음 식들이 성립한다.

$$f(t)\overline{g(t)} = \frac{|f(t) + g(t)|^2 - |f(t) - g(t)|^2}{4} \quad (1)$$

$$\hat{f}(\theta)\overline{\hat{g}(\theta)} = \frac{|\hat{f}(\theta) + \hat{g}(\theta)|^2 - |\hat{f}(\theta) - \hat{g}(\theta)|^2}{4} \quad (2)$$

식 (1) 과 식 (2) 를 따름정리 3.9.2 에 대입하면, 명제 3.9.1 이 성립함을 알 수 있다. ■

**예제 3.9.2** 함수들  $f(t)$  와  $g(t)$  의 Fourier 변환을 각각  $\hat{f}(\theta)$  와  $\hat{g}(\theta)$  라 하자. 이 함수들의 합성곱(convolution)  $f \circ g(\cdot)$  를 다음과 같이 정의하자.

$$f \circ g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \tag{1}$$

이 합성곱의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ g)(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta[z+u]} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(z)du \right] dz \end{aligned} \tag{2}$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{F}(f \circ g)(\theta) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta u} f(u)du \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta z} g(z)dz \right] = \mathcal{F}(f)(\theta)\mathcal{F}(g)(\theta) \tag{3}$$

■

**예제 3.9.3** Parseval 등식을 사용해서 각 양수  $m$  에 대해서 다음 적분을 하기로 하자.

$$I = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sin mt}{t} \right]^2 dt \tag{1}$$

다음 식이 성립한다.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin mt}{t} \right]^2 dt \tag{2}$$

예제 3.1.2 의 식 (4) 에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\sin mt}{t} \right] (\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{t} e^{-i\theta t} dt = \begin{cases} \pi, & (|\theta| < m) \\ \pi/2, & (|\theta| = m) \\ 0, & (|\theta| > m) \end{cases} \tag{3}$$

따름정리 3.9.2의 Parseval 등식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$I = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{F} \left[ \frac{\sin mt}{t} \right] (\theta) \right\}^2 d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_{-m}^m \pi^2 d\theta = \frac{\pi m}{2} \quad (4)$$

■

**명제 3.9.2: 일반화 Plancharel 등식**

함수들  $f(t)$ 와  $g(t)$ 의 Fourier 변환을 각각  $\hat{f}(\theta)$ 와  $\hat{g}(\theta)$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}(\theta)\overline{\hat{g}(\theta)}d\theta$$

여기서  $\alpha$ 는 함수  $\hat{f}(\theta)\overline{\hat{g}(\theta)}$ 가 2차원 영역  $(-\infty, \infty) \times [0, i\alpha]$ 에서 특이점(singularity 또는 pole)을 포함하지 않도록 하는 실수이다.

증명. 그림 3.9.1의 적분경로를  $C$ 로 표기하자. Cauchy 정리에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C \hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}dz = 0 \quad (1)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad (2)$$

여기서  $I_k$ 는 다음과 같다.

$$I_k \doteq \int_{C_k} \hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}dz, \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_3 = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{M+i\alpha}^{-M+i\alpha} \hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}dz = - \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}dz \quad (4)$$



다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} I_1 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \hat{f}(z) \overline{\hat{g}(z)} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z) \overline{\hat{g}(z)} dz = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 세 번째 등호는 명제 3.9.1에 의해서 성립한다. 또한 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} |I_2| &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left| \int_0^a \hat{f}(M + yi) \overline{\hat{g}(M + yi)} i dy \right| \\ &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} |a| \max_{0 \leq y \leq a} \left| \hat{f}(M + yi) \overline{\hat{g}(M + yi)} \right| \\ &= |a| \max_{0 \leq y \leq a} \lim_{M \rightarrow \infty} \left| \hat{f}(M + yi) \overline{\hat{g}(M + yi)} \right| \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6) 과 명제 5.2.3에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |I_2| = 0 \quad (7)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_2 = 0 \quad (8)$$

같은 방법으로 다음 식이 성립함을 증명할 수 있다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_4 = 0 \quad (9)$$

식 (4), 식 (5), 식 (8) 과 식 (9) 를 식 (2) 에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}(\theta) \overline{\hat{g}(\theta)} d\theta \quad (10)$$

■

```

1 % -----
2 % Filename: BranchContour1301.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6 % Configurable parameters

```

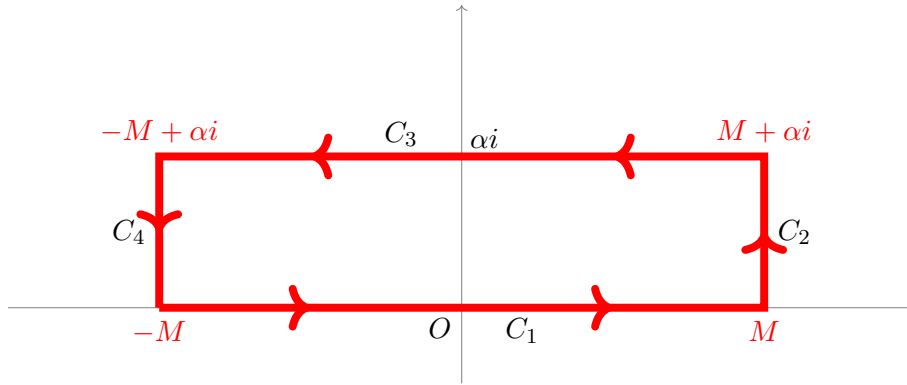


그림 3.9.1. 명제 3.9.2를 위한 적분경로

```

7 \def\gap{0.2}
8 \def\bigradius{3}
9 \def\littleradius{0.5}
10
11 % Axes
12 \draw [help lines,->] (-1.25*\bigradius, 0) -- (1.35*\bigradius,0);
13 \draw [help lines,->] (0, -1.25*\bigradius) -- (0, 1.25*\bigradius);
14
15 % Red path
16 \draw[line width=2pt, color=red, decoration={ markings,
17   mark=at position 0.2455 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
18   mark=at position 0.765 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
19   mark=at position 0.87 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
20   mark=at position 0.97 with {\arrow[line width=2.2pt]{>}},
21   postaction={decorate}}]
22   let
23     \n1 = {asin(\gap/2/\bigradius)},
24     \n2 = {asin(\gap/2/\littleradius)}
25   in (\n1:\bigradius) arc (\n1:360-\n1:\bigradius)
26     -- (-\n2:\littleradius) arc (-\n2:-360+\n2:\littleradius)
27     -- cycle;
28
29 % The labels
30 \node at (4.0,-0.38){$\text{Re}\{\text{left}\{ z \text{right}\}\}$};
31 \node at (-0.37,3.53){$\text{Im}\{\text{left}\{ z \text{right}\}\}$};
32 \node at (-0.8,0.4) {$C_{\epsilon}$};
33 \node at (-1.9,2.8) {$C_R$};
34 \node at (1.3,0.4) {$C_1$};
35 \node at (1.8,-0.4) {$C_2$};
36 \node at (3.2,0.2) {$1$};
37 \node at (-3.28,0.2) {$-1$};
38 \end{tikzpicture}
39 % -----

```

만약  $f$ 를 확률밀도함수라 하고 함수  $g$ 를 옵션의 지불금액함수라고 하면,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$ 를 옵션가치로 해석할 수 있다. 확률밀도함수  $f$ 의 닫힌해가 주어지지 않거나 또는 이 확률밀도함수에 연관되어 많은 계산을 필요로 할 때, 이러한 접근법이 유용하다. 특히 Lévy 확률과정에 연관된 확률밀도함수를 다룰 때, 이 접근법이 유용하다.

**따름정리 3.9.3**

함수들  $f(t)$ 와  $g(t)$ 의 Fourier 변환을 각각  $\hat{f}(\theta)$ 와  $\hat{g}(\theta)$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}(\theta)\hat{g}(-\bar{\theta})d\theta$$

증명. 명제 3.9.2에서 알 수 있듯이, 함수  $h(t)$ 와 Fourier 변환  $\hat{h}(\theta)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{h(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}(\theta)\overline{\hat{h}(\theta)}d\theta \quad (1)$$

함수  $g(t) \doteq \overline{h(t)}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

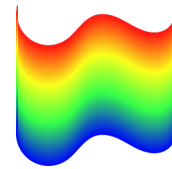
$$\hat{h}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}\overline{g(t)}dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\theta}t}g(t)dt} = \overline{\hat{g}(-\bar{\theta})} \quad (2)$$

여기서  $\theta$ 는 실수가 아닌 복소수임에 유의하라. 식 (1)과 식 (2)에서 알 수 있듯이, 이 따름정리가 성립한다. ■



## 제 4 장

# 스펙트럴해석



Science is spectral analysis. Art is light synthesis.  
Karl Kraus (1874-1936)

이 장에서는 스펙트럴해석 (spectral analysis)에 관해서 다루고자 한다. 스펙트럴해석의 입문에 관해서는 Chatfield & Xing [13]을 참조하라. 최신 출간된 Percival & Walden [56]에서는 단변량시계열의 스펙트럼에 대해서 다루고 있고, 스펙트럴해석에 관한 클래식으로는 Priestley [51]가 있다.

### 제4.1절 스펙트럼

시간간격 (time step)이  $T$ 인 관찰점들  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ 에 대한 제  $n$  번째 DFT 값  $\hat{v}_n$ 은 관찰값들  $\{v_k | k = 0, 1, \dots, N-1\}$ 에 포함된 주기가  $N/n$  관찰점들 ( $N/n$  samples) 또는  $NT/n$  초 ( $NT/n$  seconds)인 시누소이드  $\exp(-i\frac{2\pi n}{N}k)$ 와 제  $k$  번째 관찰값의 곱을 합한 것이다. 즉,  $\hat{v}_n$ 은 관찰값들  $\{v_k\}$ 에 포함된 주파수가  $n/N$  Hz-s 또는  $n/[NT]$  Hz인 성분이다. 따라서, DFT 값의 절대값  $|\hat{v}_n|$ 이 크면, 주파수  $n/[NT]$  Hz에 포함된 정보가 아주 크다. 이 절대값의 제곱을 주파수  $n/[NT]$  Hz에서 스펙트럼 (spectrum 또는 power spectrum)이라 부른다. 마찬가지로

함수  $f(t)$ 의 Fourier transform  $\hat{f}(\omega)$ 의 절대값의 제곱을 스펙트럼이라 부른다. 스펙트럼을 분석하는 스펙트럴해석에서 Schuster [53], [54], [55]가 선구자적 역할을 하였다.

**예제 4.1.1** Schuster [55]는 태양흑점(sunspot) 주기를 측정하기 위해서 스펙트럴해석을 하였다. 이 흑점 주기를 측정하기 위해서, 다음 MATLAB 프로그램 SunspotAnalysis101.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: SunspotAnalysis101.m
3 % Spectral Analysis of Wolfer's Sunspot Data from 1700 to 1987
4 % Schuster, A. (1906) On the Periodicities of Sunspots,
5 % Philosophical Transactions of the Royal Society, 206, 69?100
6 % Programmed by CBS
7 % -----
8 clear all, close all
9 % Data and Time series plot
10 load sunspot.dat
11 whos
12 yr = sunspot(:,1)
13 sunspott = sunspot(:,2)
14 % Time Series Plot
15 subplot(2,1,1)
16 plot(yr, sunspott, 'g-', 'LineWidth', 1.5)
17 hold on
18 plot(yr, sunspott, 'r.', 'LineWidth', 2.5)
19 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold', 'xlim', [yr(1) yr(end)])
20 ylabel('Sunspot', 'FontSize', 12, 'Fontweigh', 'bold');
21 hold off
22 % axis( [ -10,10,-0.05,1.3 ])
23 save('Sunspot101.txt', 'yr', 'sunspot', '-ascii')
24 % Periodogram
25 SShat = fft(sunspott);
26 N = length(SShat)
27 SShat(1) = [];
28 Spectrum = abs(SShat(1:N/2)).^2;
29 Nyquist = 0.5;
30 freq = (1:N/2)/(N/2)*Nyquist;
31 period = 1./freq;
32 % Periodogram Plot
33 subplot(2,1,2)
34 plot(period, Spectrum, 'k-', 'LineWidth', 1.5)
35 axis([ 0 40 0 2e+7 ])
36 set(gca, 'fontsize', 11, 'fontweigh', 'bold')
37 ylabel('Spectrum', 'FontSize', 12, 'Fontweigh', 'bold');
38 xlabel('Period(Years/Cycle)', 'FontSize', 12, 'Fontweigh', 'bold');
39 [maxpower index] = max(Spectrum)
40 maxPeriod = period(index)
41 saveas(gcf, 'SunspotAnalysis101', 'png')
42 % End of Program
43 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SunspotAnalysis101.m에서는 MATLAB에 내장된 1700년부터 1987년까지 기록된 태양흑점 데이터세트 sunspot.dat를 읽어 들인다. 이 데이터세트에는

288 × 2행렬 sunspot의 첫 번째 열에 연도 그리고 두 번째 열에 흑점수가 기록되어 있다. 이 첫 번째 열을 벡터 yr이라 개명하고 두 번째 열을 벡터 sunspott로 개명하자.

이 MATLAB프로그램 SunspotAnalysis101.m을 실행하면, 벡터 sunspott의 시계열산점도가 그려진다. 이 그래프가 그림 4.1.1의 상단에 수록되어 있다. 이 시계열산점도에서 알 수 있듯이, 태양흑점 수에는 주기가 있는 것 같다. 이 주기를 알아보기 위해서, MATLAB 함수 fft.m을 사용해서 벡터 sunspott의 DFT를 구한 것이 벡터 SShat이다. 벡터 SShat의 각 원소의 제곱으로 이루어진 벡터가 이 태양흑점 데이터의 스펙트럼이다. 주파수에 대한 스펙트럼의 그래프가 그림 4.1.1의 하단에 수록되어 있다. 이 그래프에서 알 수 있듯이, 이 태양흑점 데이터에서 가장 영향력이 있는 주기는 11 근처인 것 같다. 이를 확인하기 위해서 MATLAB함수 max.m을 사용한 결과, 가장 영향력이 있는 주기는 11.0769이다. ■

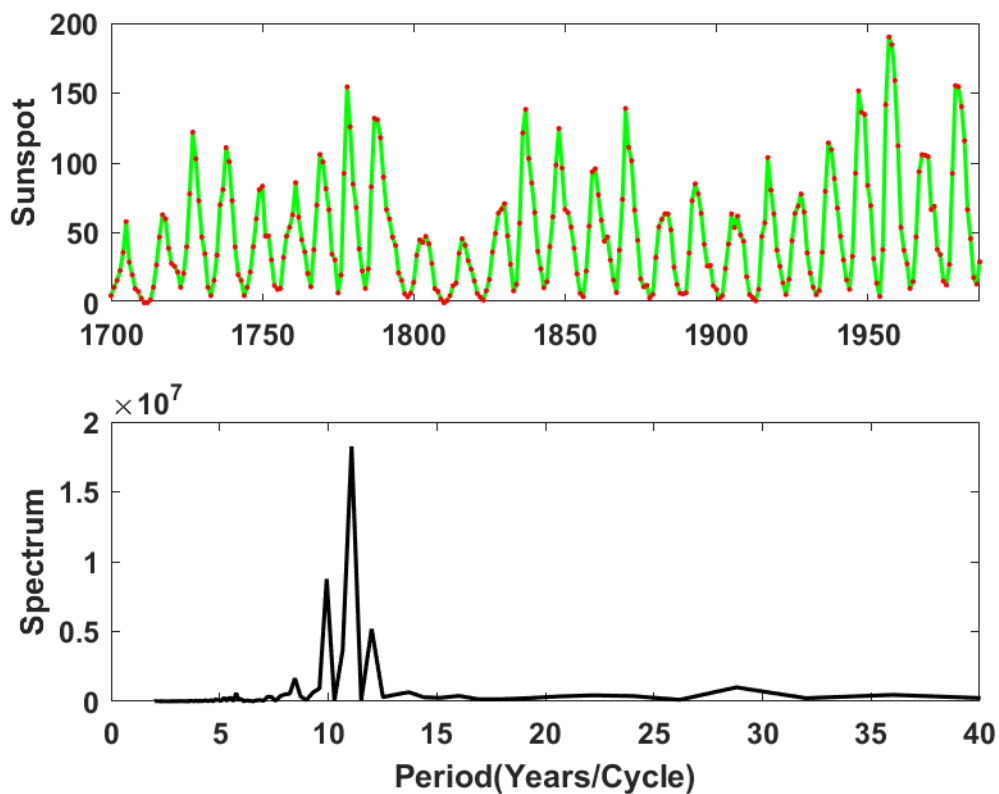


그림 4.1.1. 태양흑점 데이터

**예제 4.1.2** DFT와 IDFT의 관계를 살펴보기 위해서 다음 MATLAB프로그램 Spectrum-Sinusoid101.m을 실행하라.

```
1 | % -----
```

```

2 % Filename: SpectrumSinusoid101.m
3 % FFT of Simple Sinusoid
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 clear all, close all
7 % Signal Data
8 N = 2^6;           % Number of observations (2^m)
9 f = 1/4;          % Sinusoidal frequency
10 Amp = 1;         % Amplitude
11 phas = 0;        % Phase
12 nn = [0:N-1];
13 xSinu = cos(2*pi*nn*f); % Signal
14 % Time Series Plot
15 subplot(3,1,1);
16 plot(nn,xSinu,'r-','nn',xSinu,'k-','LineWidth',1.5)
17 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[nn(1) nn(end)])
18 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
19 ylabel('Signal','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
20 % FFT
21 XSinu = fft(xSinu);           % FFT
22 magnitudeX = abs(XSinu);      % root of Spectrum
23 fn = [0:1:N-1]/N;           % Normalized frequency
24 [maxMagni index] = max(magnitudeX)
25 maxPeriod = fn(index)
26 subplot(3,1,2);
27 stem(fn,magnitudeX,'red')
28 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
29 xlabel('Normalized Frequency (Cycles per Sample)', ...
30        'FontSize',12,'Fontweigh','bold');
31 ylabel('Magnitude','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
32 % Decibel (dB) scale
33 dBmagniX = 20*log10(magnitudeX);
34 subplot(3,1,3);
35 plot(fn,dBmagniX,'blue')
36 set(gca,'fontSize',11,'fontweigh','bold')
37 axis([ fn(1) fn(end) -350 50 ])
38 xlabel('Normalized Frequency (Cycles per Sample)', ...
39        'FontSize',12,'Fontweigh','bold');
40 ylabel('Magnitude (dB)','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
41 saveas(gcf,'SpectrumSinusoid101a','png')
42
43 % Time Series Plot
44 figure
45 subplot(2,2,1);
46 plot(nn,xSinu,'k-','LineWidth',1.5)
47 set(gca,'fontSize',11,'fontweigh','bold','xlim',[nn(1) nn(end)])
48 title('\bf Signal')
49 xlabel('\bf Time (t)'), ylabel('\bf Signal');
50 % Half of the FFT: Throw away the second half.
51 ff = fn(1:N/2);
52 subplot(2,2,2)
53 stem(ff,magnitudeX(1:N/2),'r')
54 set(gca,'fontSize',11,'fontweigh','bold','xlim',[ff(1) ff(end)])
55 title('\bf DFT Magnitude')
56 xlabel('\bf Frequency'), ylabel('\bf Magnitude')
57 % Take inverse FFT
58 xSinuRe = ifft(XSinu);           % xSinuR = real(xSinuRe);
59 subplot(2,2,3)
60 plot(nn,xSinuRe,'r-','linewidth',1.5)
61 set(gca,'fontSize',11,'fontweigh','bold','xlim',[0 nn(end)])
62 title('\bf Fitted Signal')

```



```

63 xlabel('\bf Time (t)')
64 ylabel('\$\tilde{x}(t)\$', 'Interpreter', 'latex')
65 % Error = X(t) - \iFFT(FFT(X(t)))
66 errorSinu = xSinu - xSinuRe;
67 subplot(2,2,4)
68 plot(nn,errorSinu,'b','linewidth',0.7)
69 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[0 nn(end)])
70 title('\bf Error')
71 xlabel('\bf Time (t)'), ylabel('\bf Error')
72 saveas(gcf,'SpectrumSinusoid101b','png')
73 % End of Program
74 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SpectrumSinusoid101.m을 실행하면, 다음과 같은 시계열데이터가 생성된다.

$$x_n = \cos \frac{2\pi n}{4}, \quad (n = 0, 1, \dots, 2^6 - 1) \quad (1)$$

이 시계열데이터를 그린 그래프가 그림 4.1.2의 상단에 그려져 있다. 이 그래프에서 알 수 있듯이, 발생된 시계열데이터는 주기가 4인 주기함수를 이룬다. MATLAB 함수 fft.m을 사용해서 구한 이 시계열데이터의 DFT가 변수 XSinu에 저장되고, 그 절대값이 변수 magnitudeX에 저장된다. 이 절대값을 그린 그래프가 그림 4.1.2의 중단에 그려져 있다. 이 절대값을 로그단위, 즉 데시벨로 바꾸어 그린 그래프가 그림 4.1.2의 하단에 그려져 있다.

식 (1)의 시계열데이터가 그림 4.1.3의 좌측상단에 그려져 있다. 관찰값들  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  이 실수들인 경우에는 DFT  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1}]^T$  가 가지고 있는 정보량은  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N/2}]^T$  가 가지고 있는 정보량은 같다. 따라서, 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 DFT의 절대값을 그리는 것으로 충분하다. 이 그래프가 그림 4.1.3의 우측상단에 그려져 있다. DFT  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1}]^T$ 에 MATLAB 함수 ifft.m을 적용해서 구한 IDFT  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{N-1}]^T$ 를 그린 그래프가 그림 4.1.3의 좌측하단에 그려져 있다. 원래의 시계열데이터  $\{x_n\}$ 과 이 시계열데이터에 fft.m과 ifft.m을 적용한  $\{\tilde{x}_n\}$ 의 차이인 오차들  $\{x_n - \tilde{x}_n\}$ 을 그린 그래프가 그림 4.1.3의 우측하단에 그려져 있다. 각 오차는  $2 \times 10^{-30}$ 보다 작다. 따라서, fft.m과 ifft.m은 작용소들임을 확인할 수 있다. ■

**예제 4.1.3** 위상이 0이 아닌 시계열데이터에 DFT와 IDFT를 적용하는 예를 살펴보기 위해서 다음 MATLAB 프로그램 SpectrumSinusoid102.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: SpectrumSinusoid102.m

```

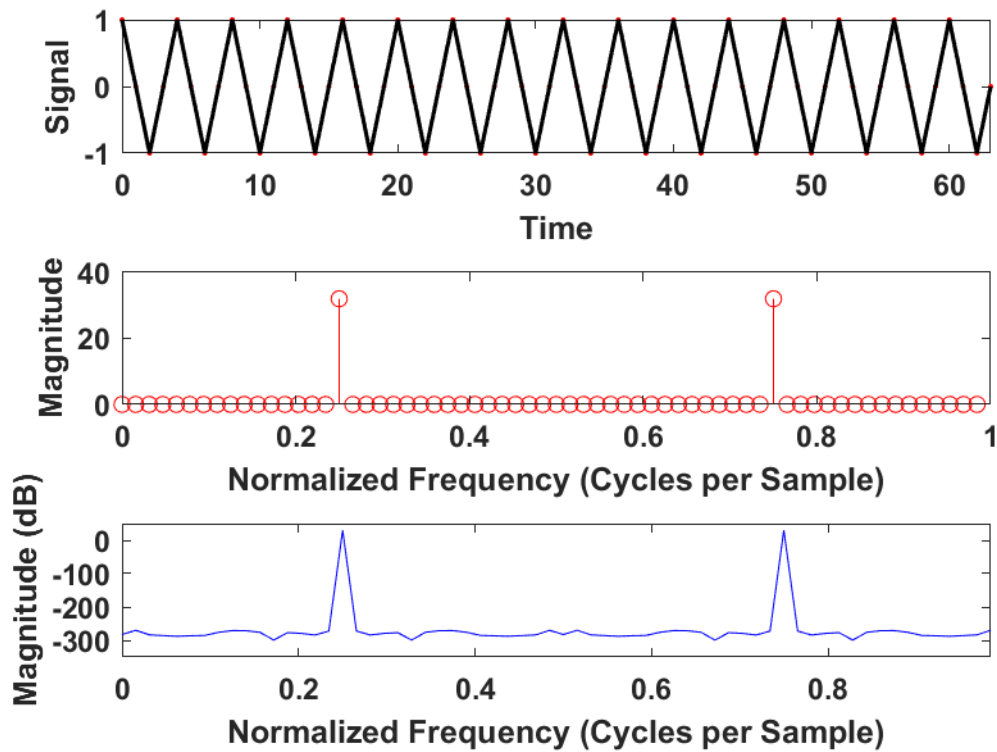


그림 4.1.2. 코사인함수와 FFT

```

3 % FFT of Simple Sinusoid
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 clear all, close all
7 % Signal Data
8 N = 2^6;           % Number of observations (2^m)
9 f = 1/4+0.5/N;    % Sinusoidal frequency
10 Amp = 1;         % Amplitude
11 phas = 0;        % Phase
12 nn = [0:N-1];
13 xSinu = cos(2*pi*nn*f); % Signal
14
15 % Time Series Plot
16 subplot(2,2,1);
17 plot(nn,xSinu,'k-',nn,xSinu,'r.','LineWidth',1.5)
18 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[nn(1) nn(end)])
19 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
20 ylabel('Signal','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
21
22 % FFT
23 XSinu = fft(xSinu); % FFT
24 magnitudeX = abs(XSinu); % Spectrum
25 fn = [0:1:N-1]/N; % Normalized frequency
26 [maxmagnitude index] = max(magnitudeX)
27 maxPeriod = fn(index)
28 subplot(2,2,2);
29 stem(fn(1:N/2+1),magnitudeX(1:N/2+1),'blue')
30 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
31 axis([ fn(1) fn(N/2+1) 0 25 ])

```

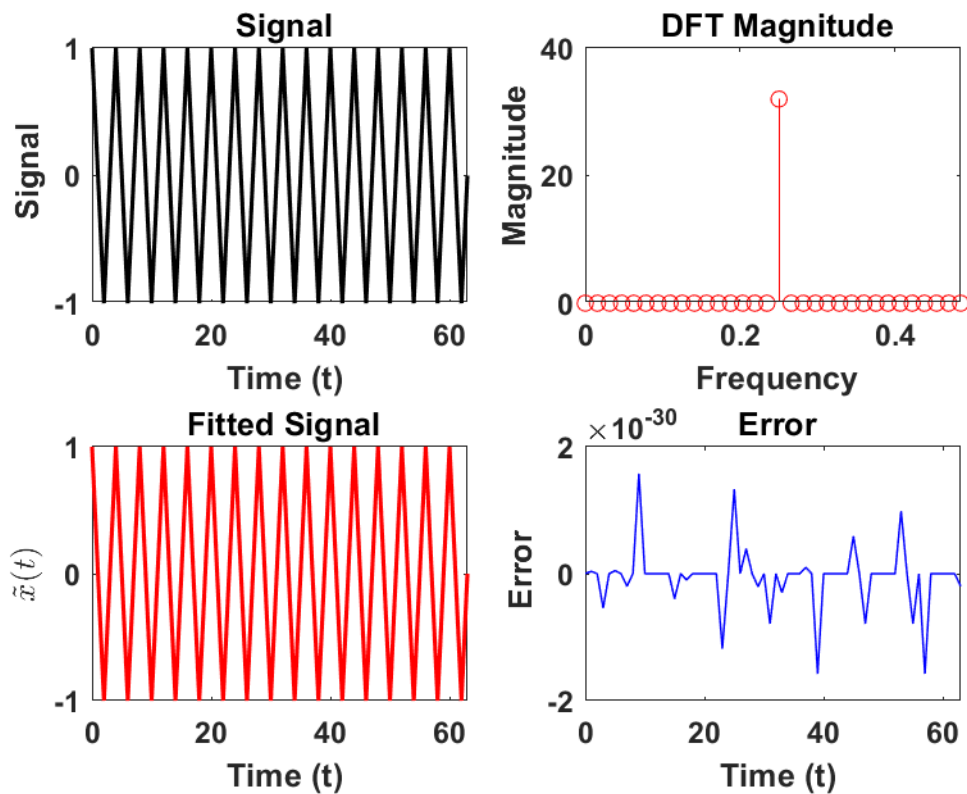


그림 4.1.3. fft.m과 ifft.m

```

32 xlabel('\bf Cycles per Sample','FontSize',12');
33 ylabel('magnitude','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
34
35 % Take inverse FFT
36 xSinuRe = ifft(XSinu);           % xSinuR = real(xSinuRe);
37 subplot(2,2,3)
38 plot(nn,xSinuRe,'r-',nn,xSinuRe,'k.','linewidth',1.5)
39 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[0 nn(end)])
40 xlabel('\bf Time (t)')
41 ylabel('\bf Fitted  $\tilde{x}(t)$ ','Interpreter','latex')
42
43 % Error
44 xError = xSinu - xSinuRe;
45 subplot(2,2,4);
46 plot(nn,xError,'m-','LineWidth',1.5)
47 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[nn(1) nn(end)])
48 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
49 ylabel('Error','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
50
51 saveas(gcf,'SpectrumSinusoid102','png')
52 % End of Program
53 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SpectrumSinusoid102.m을 실행하면, 다음과 같은 시계열데이터가

생성된다.

$$x_n = \cos\left(2\pi n \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2N}\right]\right), \quad (n = 0, 1, \dots, 2^6 - 1) \quad (1)$$

이 시계열데이터가 예제 4.1.2의 시계열데이터와 다른 점은 위상이 0이 아니라는 것이다. 식 (1)의 시계열데이터가 그림 4.1.4의 좌측상단에 그려져 있다. 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.1.4의 우측상단에 그려져 있다. DFT  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1}]^T$ 에 MATLAB함수 `ifft.m`을 적용해서 구한 IDFT  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{N-1}]^T$ 를 그린 그래프가 그림 4.1.4의 좌측하단에 그려져 있다. 원래의 시계열데이터  $\{x_n\}$ 과 이 시계열데이터에 `fft.m`과 `ifft.m`을 적용한  $\{\tilde{x}_n\}$ 의 차이인 오차들  $\{x_n - \tilde{x}_n\}$ 을 그린 그래프가 그림 4.1.4의 우측하단에 그려져 있다. 각 오차는  $4 \times 10^{-16}$ 보다 작다. 따라서, `fft.m`과 `ifft.m`은 역작용소들임을 확인할 수 있다. ■

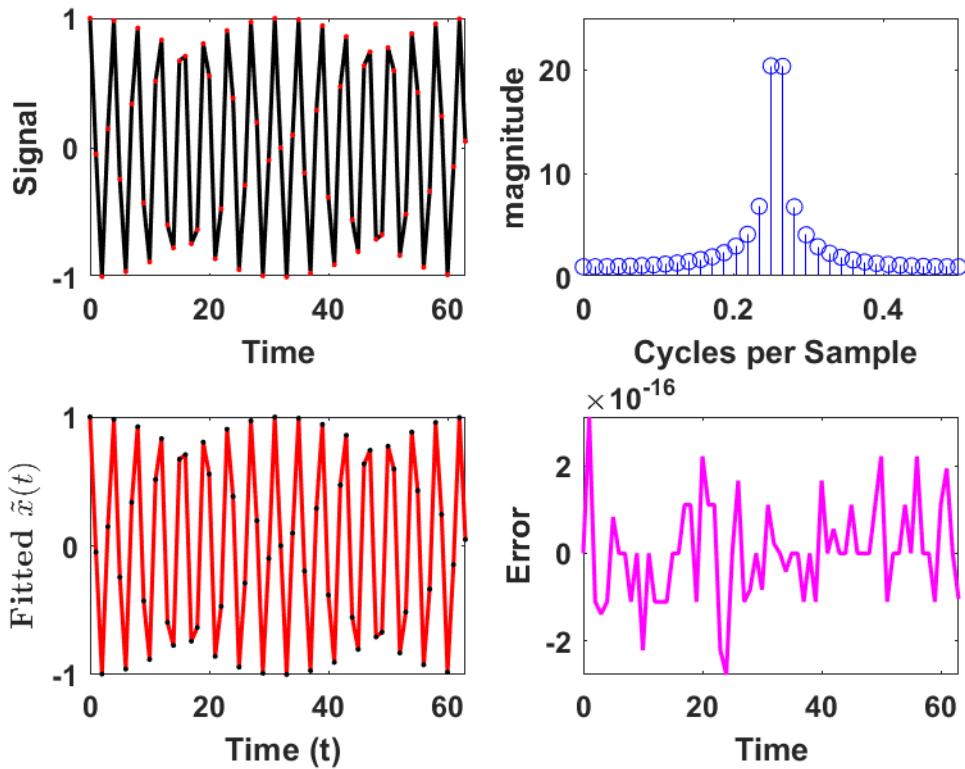


그림 4.1.4. 위상이 0이 아닌 코사인함수

## 제4.2절 테이퍼링

FFT를 적용하기 위해서는 관찰값들  $x_0, x_1, \dots, x_{N_0-1}$ 의 개수  $N_0$ 가  $2^m$  형태이어야 한다. 만약  $N_0$ 가 이 형태가 아니면, 식  $N_0 < 2^m$ 을 만족하는 최소 자연수  $N = 2^m$ 을 선택한 다음 관찰값들 뒤에  $x_{N_0} = 0, x_{N_0+1} = 0, \dots, x_{N-1} = 0$ 를 추가한다. 이러한 과정을 테이퍼링 (tapering) 또는 제로패딩 (zero-padding)이라 부른다.

**예제 4.2.1** 테이퍼링과정을 거친 데이터세트에 DFT와 IDFT를 적용하는 예를 살펴보기 위해서 다음 MATLAB 프로그램 SpectrumSinusoid103.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: SpectrumSinusoid103.m
3 % FFT of Simple Sinusoid w/ Zero-Padding
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 clear all, close all
7 % Signal Data
8 NO = 37 % Original Observation Numbers
9 N = 2^nextpow2(NO) % Number of observations (2^m)
10 T = 1; % Sampling ratio
11 f = 1/4; % Sinusoidal frequency
12 Amp = 1; % Amplitude
13 phas = 0; % Phase
14 nn0 = [0:NO-1];
15 xSinu0 = cos(2*pi*nn0*f*T); % Signal
16 nn = [0:N-1];
17 xSinu = [ xSinu0, zeros(1,N-NO) ]; % Padding zeros
18
19 % Time Series Plot
20 subplot(2,2,1);
21 plot(nn,xSinu,'r-',nn,xSinu,'k-', 'LineWidth',1.5)
22 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[nn(1) nn(end)])
23 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
24 ylabel('Signal','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
25
26 % FFT
27 XSinu = fft(xSinu); % FFT
28 magnitudeX = abs(XSinu); % Spectrum
29 fn = [0:1:N-1]/N; % Normalized frequency
30 [maxMagni index] = max(magnitudeX)
31 maxPeriod = fn(index)
32 subplot(2,2,2);
33 stem(fn(1:N/2+1),magnitudeX(1:N/2+1),'blue')
34 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
35 axis([ fn(1) fn(N/2+1) 0 25 ])
36 xlabel('\bf Cycles per Sample','FontSize',12');
37 ylabel('\bf Magnitude','FontSize',12);
38
39 % Take inverse FFT
40 xSinuRe = ifft(XSinu); % xSinuR = real(xSinuRe);
41 subplot(2,2,3)
42 plot(nn,xSinuRe,'r-', 'linewidth',1.5)
43 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[0 nn(end)])
44 xlabel('\bf Time (t)')
45 ylabel('\bf Fitted $$$\tilde{x}(t)$$$','Interpreter','latex')

```

```

46 |
47 | % Error
48 | xError = xSinu - xSinuRe;
49 | subplot(2,2,4);
50 | plot(nn,xError,'m-','LineWidth',1.5)
51 | set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[nn(1) nn(end)])
52 | xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
53 | ylabel('Error','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
54 |
55 | saveas(gcf,'SpectrumSinusoid103','png')
56 | % End of Program
57 | % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SpectrumSinusoid103.m을 실행하면, 다음과 같은 시계열데이터가 생성된다.

$$x_n = \cos\left(2\pi n \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2N}\right]\right), \quad (n = 0, 1, \dots, 36) \quad (1)$$

관찰점들의 개수 37은 2의 지수형태가 아니다. 따라서, MATLAB 함수 nextpow2.m을 적용해서 37보다 크면서 가장 가까운 2의 지수  $2^6 = 64$ 를 찾는다. 테이퍼링은 다음 관찰값들을 기존의 시계열데이터에 추가하는 것이다.

$$x_{37} = 0, x_{38} = 0, \dots, x_{63} = 0 \quad (2)$$

이렇게 테이퍼링과정을 거친 시계열데이터가 그림 4.2.1의 좌측상단에 그려져 있다. 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.2.1의 우측상단에 그려져 있다. DFT  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1}]^T$ 에 MATLAB 함수 ifft.m을 적용해서 구한 IDFT  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{N-1}]^T$ 를 그린 그래프가 그림 4.2.1의 좌측하단에 그려져 있다. 원래의 시계열데이터  $\{x_n\}$ 과 이 시계열데이터에 fft.m과 ifft.m을 적용한  $\{\tilde{x}_n\}$ 의 차이인 오차들  $\{x_n - \tilde{x}_n\}$ 을 그린 그래프가 그림 4.2.1의 우측하단에 그려져 있다. 각 오차의 절대값은  $2 \times 10^{-16}$ 보다 작다. 따라서, 테이퍼링된 데이터세트에 적용된 fft.m과 ifft.m도 역작용소들임을 확인할 수 있다. ■

### 제 4.3절 윈도우

테이퍼링된 데이터를 평활하게 만들기 위해서 윈도우(window)를 통과시키기도 한다. 대표적인 윈도우로는 Hamming 윈도우, Hanning 윈도우, Bartlett 윈도우, Daniel 윈도우, Parzen

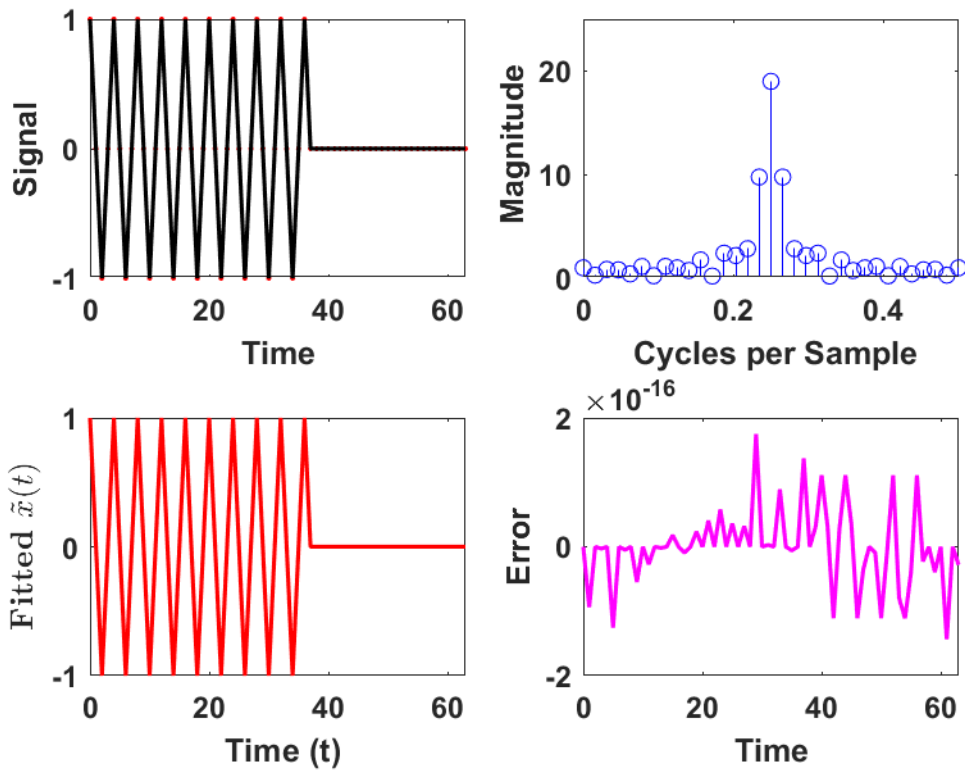


그림 4.2.1. 오차를 포함한 신호

윈도우 등이 있다.

**예제 4.3.1** 오차가 추가된 주기함수의 DFT와 IDFT를 구하는 예로서 다음 MATLAB 프로그램 SpectrumHamming104.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: SpectrumHamming104.m
3 % FFT of Colored Sinusoid w/ Zero-Padding and Hamming Window
4 % Programmed by CBS
5 %-----
6 clear all, close all
7 % Signal Data
8 Deltaa = 0.1 % Data collecting space
9 fs = 1/Deltaa % sampling frequency
10 NO = 37 % Original Observation Numbers
11 nn0 = [0:NO-1];
12 x0 = 10*cos(2*pi*Deltaa*nn0) + normrnd(0,1,[1,NO]); % Signal
13 N = 2^nextpow2(NO) % Number of observations (2^m)
14 nn = [0:N-1];
15 x = [ x0, zeros(1,N-NO) ]; % Padding zeros
16 tt = nn/fs;
17
18 % Time Series Plot
19 subplot(2,2,1);
20 plot(tt,x,'k-',tt,x,'k-', 'LineWidth',1.5)
21 set(gca, 'fontsize',11, 'fontweigh', 'bold')

```

```

22 axis([tt(1) tt(end) -12 12])
23 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
24 ylabel('Signal x','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
25
26 % FFT
27 X = fft(x); % FFT
28 MagnitudeX = abs(X); % Spectrum
29 fn = [0:1:N-1]/N; % Normalized frequency
30 [maxMagni index] = max(MagnitudeX)
31 maxPeriod = fn(index)
32 % Shifted Magnitude Spectrum
33 ws = 2*pi/N
34 wnorm = -pi:ws:pi;
35 wnorm = wnorm(1:N);
36 w = wnorm*fs;
37 subplot(2,2,2);
38 plot(w,abs(fftshift(X)),'b-','LineWidth',1.0)
39 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
40 axis([w(1) w(end) 0 200])
41 xlabel('\bf Frequency','FontSize',12');
42 ylabel('\bf Magnitude','FontSize',12');
43 % [freq,ampl] = ginput % You should strike the return-key.
44 % Near ampl = 170 @freq = 6.0
45
46 % Hamming Window
47 windoww = hamming(N);
48 xw = windoww(:).*x(:);
49 subplot(2,2,3);
50 plot(tt>windoww,'r-.',tt,xw,'k:','LineWidth',1.5)
51 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
52 axis([tt(1) tt(end) -12 12])
53 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
54 ylabel('Windowed x','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
55
56 % Hamming Windowed FFT
57 XW = fft(xw); % FFT
58 MagnitudeXW = abs(XW); % Magnitude
59 [maxpowerW indexW] = max(MagnitudeXW)
60 maxPeriodW = fn(indexW)
61 subplot(2,2,4);
62 plot(w,abs(fftshift(XW)),'r-','LineWidth',1.0)
63 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
64 axis([w(1) w(end) 0 200])
65 xlabel('\bf Frequency','FontSize',12');
66 ylabel('\bf Magnitude','FontSize',12');
67 % [freqw,amplw] = ginput
68 % You should strike the return-key Near amplw = 108 @freqw = 6.0
69
70 saveas(gcf,'SpectrumHamming104','png')
71 % End of Program
72 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SpectrumHamming104.m을 실행하면, 다음과 같은 시계열데이터가 생성된다.

$$x_n = 10 \cos \left( 2\pi n \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2N} \right] \right) + \epsilon_n, \quad (n = 0, 1, \dots, 36) \quad (1)$$



여기서  $\epsilon_n$ 은  $N(0, 1)$ 에서 생성된 정규난수들이다. 관찰점들의 개수 37은 2의 지수형태가 아니다. 따라서, MATLAB함수 `nextpow2.m`을 적용해서 37보다 크면서 가장 가까운 2의 지수  $2^6 = 64$ 를 찾는다. 다음 관찰값들을 기존의 시계열데이터에 추가한다. 즉, 테이퍼링을 한다.

$$x_{37} = 0, x_{38} = 0, \dots, x_{63} = 0 \quad (2)$$

이렇게 테이퍼링과정을 거친 시계열데이터가 그림 4.3.1의 좌측상단에 그려져 있다. 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.3.1의 우측상단에 그려져 있다. 이 MATLAB프로그램에서는 DFT의 절대값의 최대값을 구하기 위해서 MATLAB함수 `ginput.m`을 사용하였다. 이 `ginput.m`은 커서로 지정하는 점의 좌표를 출력한다. 독자들이 유의할 것은 점을 커서로 지정한 다음 반드시 리턴키를 쳐야한다는 것이다. 이 `ginput.m`을 사용하면 이 DFT의 절대값은 주파수 6.0에서 최대값 170을 갖는다는 것을 알 수 있다.

대표적인 윈도우의 하나는 다음과 같이 정의되는 Hamming윈도우이다.

$$w_H(n) \doteq 0.54 - 0.46 \cos \frac{2n}{N}, \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (3)$$

다음과 같이 Hamming윈도우를 통과한 시계열데이터를 정의하자.

$$X_H(n) \doteq w_H(n)x(n), \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (4)$$

이 Hamming윈도우를 통과한 시계열데이터가 그림 4.3.1의 좌측하단에 그려져 있다. 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 이 Hamming윈도우를 통과한 시계열데이터의 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.3.1의 우측하단에 그려져 있다. 원래 DFT의 절대값보다 윈도우를 통과한 시계열데이터의 DFT의 절대값이 훨씬 평활함을 알 수 있다. 또한, `ginput.m`을 사용하면 Hamming윈도우를 사용한 DFT의 절대값은 주파수 6.0에서 최대값 108을 갖는다는 것을 알 수 있다. ■

**예제 4.3.2** 오차가 추가된 주기함수의 DFT와 IDFT를 구하는 예로서 다음 MATLAB 프로그램 `SpectrumHanning105.m`을 실행하라.

```
1 % -----
2 % Filename: SpectrumHanning105.m
```

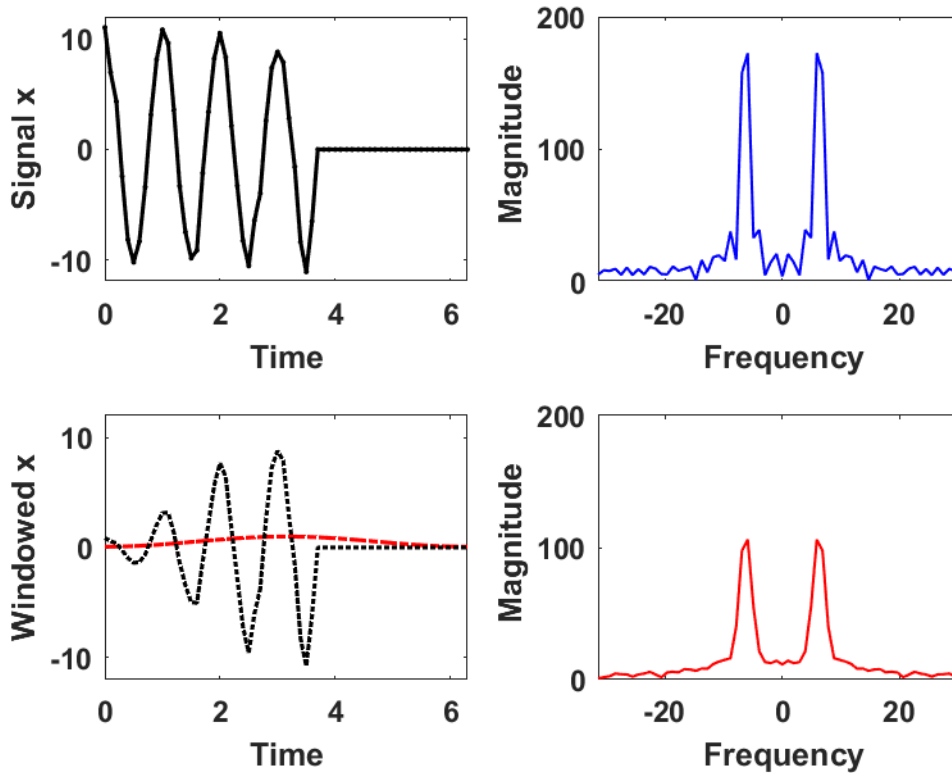


그림 4.3.1. Hamming 윈도우

```

3 % Spectral Analysis with Hanning Window
4 % http://dsp.stackexchange.com/questions/9465/
5 %     how-to-apply-hamming-window
6 %-----
7 clear all, close all
8 % Make Time Series
9 Ts = 50e-4 % Sampling Time(s)
10 Fs = 1/Ts % Sampling rate, Sampling Freq (Hz)
11 f0 = 50 % Frequency of interest (Hz)
12 duraT = 1
13 dt = 1/Fs
14 tt = dt:dt:(duraT-dt);
15 x = cos(2*pi*f0*tt)+2*sin(2*pi*10*tt);
16 x = x';
17 L = length(x); % Window Length of FFT
18 nfft = 2^nextpow2(L); % Transform length
19 subplot(2,2,1);
20 plot(tt,x,'k-', 'LineWidth',1)
21 set(gca, 'fontsize',11, 'fontweigh', 'bold')
22 axis([tt(1) tt(end) -4 4])
23 xlabel('Time', 'FontSize',12, 'Fontweigh', 'bold');
24 ylabel('Signal x', 'FontSize',12, 'Fontweigh', 'bold');
25
26 % FFT
27 xdft = fft(x,nfft)/L;
28 % at all frequencies except zero and the Nyquist
29 magXdft = abs(xdft);
30 magXdft = magXdft(1:nfft/2+1);
31 magXdft(2:end-1) = 2*magXdft(2:end-1);

```

```

32 freq = Fs/2*linspace(0,1,nfft/2+1);
33 subplot(2,2,2)
34 plot(freq,2*magXdft,'r-','LineWidth',1.5)
35 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
36 axis([0 freq(end) -0.1 4.5])
37 xlabel('\bf Frequency (Hz)','FontSize',12');
38 ylabel('\bf |X(f)|','FontSize',12');
39
40 % Hanning Windowed Data
41 x_HannWnd = x.*hanning(L);
42 xdft_HannWnd = fft(x_HannWnd,nfft)/L;
43 subplot(2,2,3);
44 plot(tt,x_HannWnd,'k-','LineWidth',1)
45 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
46 axis([tt(1) tt(end) -4 4])
47 xlabel('Time','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
48 ylabel('Windowed Signal','FontSize',12,'Fontweigh','bold');
49
50 % DFT of Hanning Windowed Data
51 magXWdft = abs(xdft_HannWnd);
52 magXWdft = magXWdft(1:nfft/2+1);
53 magXWdft(2:end-1) = 2*magXWdft(2:end-1);
54 subplot(2,2,4)
55 plot(freq,2*magXWdft,'r-','LineWidth',1.5)
56 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
57 axis([0 freq(end) -0.1 4.5])
58 xlabel('\bf Frequency (Hz)','FontSize',12');
59 ylabel('\bf |XW(f)|','FontSize',12');
60
61 saveas(gcf,'SpectrumHanning105','png')
62 % End of Program
63 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SpectrumHanning105.m을 실행하면, 다음과 같은 시계열데이터가 생성된다.

$$x_n = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t) \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t), \quad \left(t = \frac{1}{200}, \frac{2}{200}, \dots, \frac{199}{200}\right) \quad (1)$$

이 시계열데이터의 샘플링주파수(sampling frequency)는 200이다. 따라서, Nyquist 주파수는 100이다. 이 시계열데이터가 그림 4.3.2의 좌측상단에 그려져 있다. 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.3.2의 우측상단에 그려져 있다.

대표적인 윈도우의 다른 하나는 다음과 같이 정의되는 Hanning 윈도우이다.

$$w_h(n) \doteq 0.5 \left[ 1 - \cos \frac{2n}{N} \right], \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3)$$

다음과 같이 Hanning 윈도우를 통과한 시계열데이터를 정의하자.

$$X_h(n) \doteq w(n)x(n), \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (4)$$

이 Hanning 윈도우를 통과한 시계열데이터가 그림 4.3.2의 좌측하단에 그려져 있다. 주파수 구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 이 Hanning 윈도우를 통과한 시계열데이터의 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.3.2의 우측하단에 그려져 있다. 원래 DFT의 절대값보다 Hanning 윈도우를 통과한 시계열데이터의 DFT의 절대값이 훨씬 평활함을 알 수 있다. ■

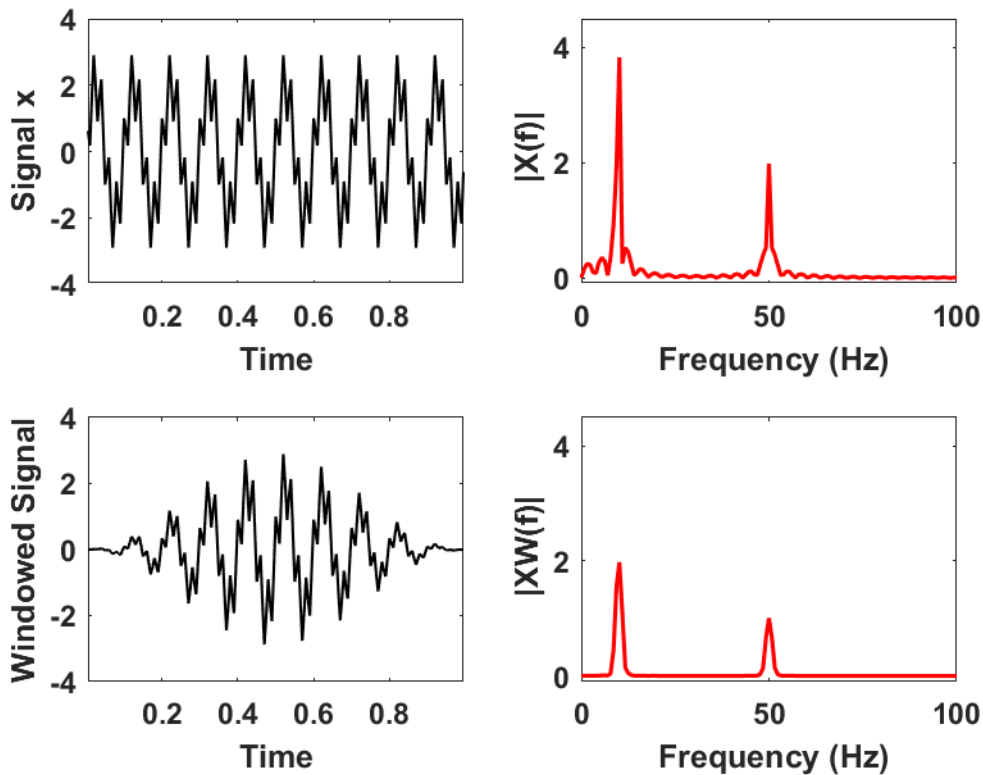


그림 4.3.2. Hanning 윈도우

**예제 4.3.3** 지수확률밀도함수의 DFT를 구하기 위해서 다음 MATLAB 프로그램 SpectrumExponential106.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename SpectrumExponential106.m
3 % Exponential Distribution
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all
    
```

```

7 ftnExp = @(t) 0.2*exp(-0.2*t)
8
9 % (Step 1) Generating data
10 Fs = 2^8 % Sampling frequency (= 256)
11 tt = 0:1/Fs:(20-1/Fs); % Time vector
12 NO = length(tt)
13 nfft = 2^nextpow2(Fs) % Length of FFT (= N = 256)
14 Nyquist = nfft/2 % Nyquist frequency (= 128)
15 xExp = ftnExp(tt);
16 % Plotting: Exponential PDF
17 subplot(2,2,1)
18 plot(tt,xExp,'k-','linewidth',1.5)
19 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
20 title('\bf Exponential PDF')
21 xlabel('\bf Time'), ylabel('\bf x(t)')
22
23 % (Step 2) FFT
24 FxExp = fft(xExp);
25 % FFT is symmetric, and throw away the second half.
26 normFxExp = 10*log10(abs(FxExp(1:nfft/2)));
27 angleFxExp = angle(FxExp(1:nfft/2));
28 % Plotting: Exponential Fourier Transforms
29 subplot(2,2,2)
30 ff =(0:nfft/2-1)*Fs/nfft;
31 plot(ff,normFxExp,'r-','linewidth',1.5)
32 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
33 axis([ ff(1) ff(end) 0 25])
34 title('\bf DFT Magnitude')
35 xlabel('\bf Frequency'), ylabel('\bf 10*log10(Magni)')
36
37 % (Step 3) Take inverse FFT
38 xExpRe = ifft(FxExp); % xExpR = real(xExpRe);
39 subplot(2,2,3)
40 plot(tt,xExpRe,'k-.','linewidth',1.5)
41 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[0 tt(end)])
42 title('\bf Fitted Curves')
43 xlabel('\bf Time')
44 ylabel('\$\$\tilde{x}(t)\$\$', 'Interpreter', 'latex')
45
46 % (Step 4) Error = X(t) - \iFFT(FFT(X(t)))
47 errorExp = xExp - xExpRe;
48 subplot(2,2,4)
49 plot(tt,errorExp,'b-','linewidth',0.4)
50 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold','xlim',[0 tt(end)])
51 title('\bf Error')
52 xlabel('\bf Time'), ylabel('\bf Error')
53
54 saveas(gcf,'SpectrumExponential106.png')
55 % End of program
56 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 SpectrumExponential106.m을 실행하면, 다음과 같은 시계열데이터가 생성된다.

$$x_t = 0.2e^{-0.2t}, \quad \left( t = 0, \frac{1}{256}, \frac{2}{256}, \dots, \frac{20 \times 256 - 1}{256} \right) \quad (1)$$

식 (1)의 시계열데이터가 그림 4.3.3의 좌측상단에 그려져 있다. 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 이 시계열데이터의 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.3.3의 우측상단에 그려져 있다. 이 DFT에 MATLAB함수 `ifft.m`을 적용해서 구한 IDFT를 그린 그래프가 그림 4.3.3의 좌측하단에 그려져 있다. 원래의 시계열데이터와 이 시계열데이터에 `fft.m`과 `ifft.m`을 적용해서 얻은 추정 데이터의 차이인 오차들을 그린 그래프가 그림 4.3.3의 우측하단에 그려져 있다. 각 오차는  $10^{-16}$ 보다 작다. 따라서, `fft.m`과 `ifft.m`은 역작용소들임을 확인할 수 있다. ■

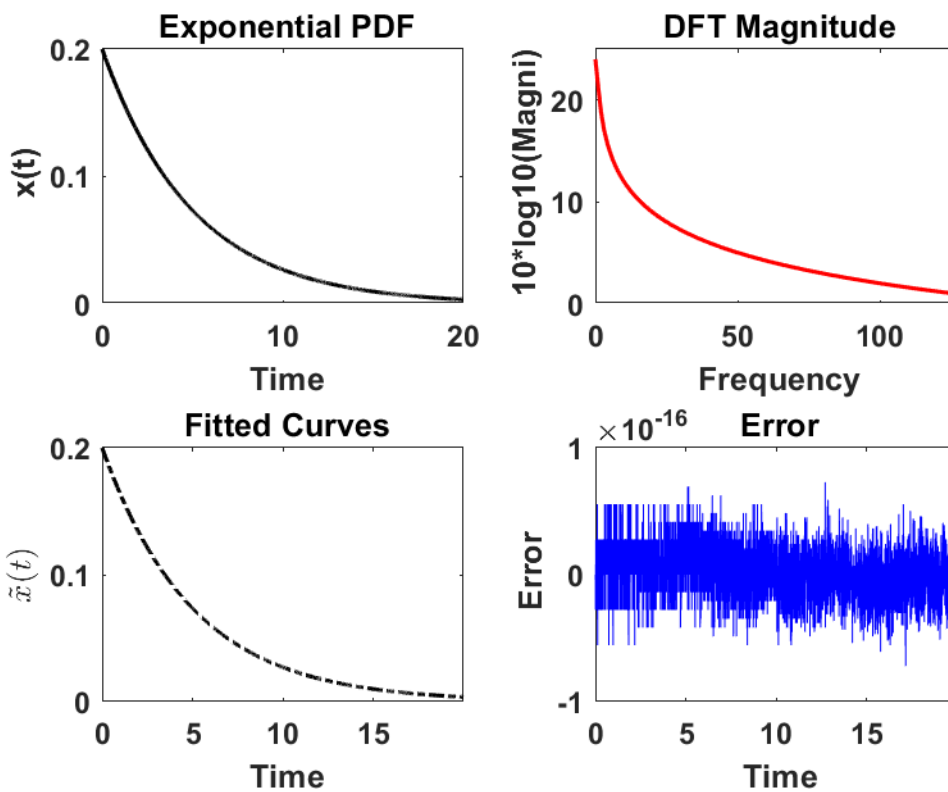


그림 4.3.3. 지수확률밀도함수와 DFT

**예제 4.3.4** 주어진 DFT에 IDFT작용소를 적용해서 시계열데이터를 구하는 예제를 살펴 보기 다음 MATLAB프로그램 `DFT2TimeSeries101.m`을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: DFT2TimeSeries101.m
3 % Exponential PDF
4 % DFT -> Function
5 % Programmed by CBS
6 % -----
7 clear all, close all
    
```

```

8 % Making DFT from the half to the whole
9 ExpDFT = @(w) 2./(2 + i*w) % Fourier Transform Of Exp(2)
10 % (Step 1) Generating data from Fourier Transform
11 Fs = 2^8; % Sampling frequency
12 Tfront = 1 % Front Observations
13 ff1 = (1/Fs:1/Fs:Tfront+1/Fs); % Front Frequency vector
14 FirstDFT = ExpDFT(ff1);
15 FirstDFT(1) = abs(FirstDFT(1)); % Make real
16 FirstDFT(end) = abs(FirstDFT(end)); % Make Real
17 SecondDFT = flipdim(FirstDFT(2:end-1),2);
18 % Flip to make symmetric Fourier transform.
19 SecondDFT = conj(SecondDFT); % Conjugate
20 TotalDFT = [ FirstDFT SecondDFT ]; % Symmetric FT
21 % Plotting Magnitude of DFT
22 nfft = length(TotalDFT); % Length of FFT
23 ff = 0:1/Fs:(2*Tfront-1/Fs); % Frequency vector
24 Magnitud = abs(TotalDFT); % Magnitud
25 MagnitudFirst = Magnitud(1:end/2); % Magnitud; First Half
26 MagnitudSecond = Magnitud(end/2+1:end); % Magnitud; Second Half
27 subplot(2,2,1)
28 plot(ff(1:end/2),MagnitudFirst,'r-',ff(end/2+1:end), ...
29 MagnitudSecond,'k--','linewidth',1.5) % Symmetric
30 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
31 % legend01 = legend('First Half','Second Half','location','NE')
32 % set(legend01,'FontSize',14);
33 title('\bf DFT')
34 xlabel('\bf Frequency'), ylabel('\bf Magnitude')
35
36 % (Step 2) Time Series
37 Xx = ifft(TotalDFT); % Time Domain Rate
38 IfReal25 = isreal(Xx) % If 0, then real!
39 Xx = real(Xx); % Get rid of the half
40 subplot(2,2,2)
41 Nobs = length(Xx)
42 tt = 0:1/Fs:(2*Tfront-1/Fs);
43 plot(tt,Xx,'k-','linewidth',1.5)
44 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
45 axis([tt(1)-0.05 tt(end)+0.05 -0.1 0.5])
46 title('\bf Time Series')
47 xlabel('\bf Time'), ylabel('\bf Series')
48
49 % (Step 3) Estimation in Frequency Domain
50 XxX = fft(Xx);
51 Magnitudd = abs(XxX); % Magnitude
52 subplot(2,2,3)
53 plot(ff,Magnitudd,'b-','linewidth',1.5)
54 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
55 title('\bf Estimated DFT')
56 xlabel('\bf Frequency'), ylabel('\bf Magnitude')
57
58 % (Step 4) Estimation Error
59 erroXxX = Magnitud - Magnitudd; % error
60 subplot(2,2,4)
61 plot(ff,erroXxX,'k-','linewidth',1) % Symmetric
62 set(gca,'fontsize',11,'fontweigh','bold')
63 title('\bf Error')
64 xlabel('\bf Frequency'), ylabel('\bf DFT Error')
65
66 saveas(gcf,'DFT2TimeSeries101.png')
67 % End of program
68 % -----

```

평균이 0.5인 지수확률밀도함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$X(f) = \frac{2}{2 + if} \quad (1)$$

이 MATLAB 프로그램 DFT2TimeSeries101.m을 실행하면, 다음과 같은 DFT가 생성된다.

$$X(f) = \frac{2}{2 + if}, \quad \left( f = \frac{1}{256}, \frac{2}{256}, \dots, \frac{257}{256} \right) \quad (2)$$

이 DFT값들은 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 계산된 값들이다. IDFT를 구하기 위해서 이 DFT값들을 주파수구간  $[0, \text{Sampling Frequency}]$ 까지 확장해야 한다. 이렇게 확장된 DFT의 절대값의 그래프가 그림 4.3.4의 좌측상단에 그려져 있다. 이 그래프에서 적색 실선은 원래 DFT값들, 즉 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 값들이다. 또한, 흑색 긴점선은 주파수구간  $(\text{Nyquist Frequency}, \text{Sampling Frequency})$ 에서 DFT값들이다. 전체 주파수구간  $[0, \text{Sampling Frequency}]$ 의 DFT값들을 MATLAB함수 `ifft.m`을 적용해서 구한 시계열데이터가 그림 4.3.4의 우측상단에 그려져 있다. 이 시계열데이터에 MATLAB함수 `fft.m`을 적용해서 구한 DFT의 절대값을 그린 그래프가 그림 4.3.4의 좌측하단에 그려져 있다. 원래의 DFT와 이 DFT에 IDFT를 적용해서 얻은 추정 데이터의 차이인 오차들을 그린 그래프가 그림 4.3.4의 우측하단에 그려져 있다. 각 오차의 절대값은  $5 \times 10^{-16}$ 보다 작다. 즉, 주파수구간  $[0, \text{Nyquist Frequency}]$ 에서 주어진 DFT를 주파수구간  $[0, \text{Sampling Frequency}]$ 로 확대하는 과정이 올바름을 알 수 있다. ■

## 제 4.4절 2D Fourier 변환

2D Fourier 변환(2D Fourier transform)의 정의는 다음과 같다.

### 정의 4.4.1: 2D Fourier 변환

정의역이  $\mathbb{R}^2$ 인 함수  $f(t, s)$ 의 2D Fourier 변환 또는 2D Fourier 적분(2D Fourier integral)을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{F}[f] \doteq \mathcal{F}[f](\theta, \eta) \doteq \hat{f}(\theta, \eta) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) e^{-i[\theta t + \eta s]} dt ds$$



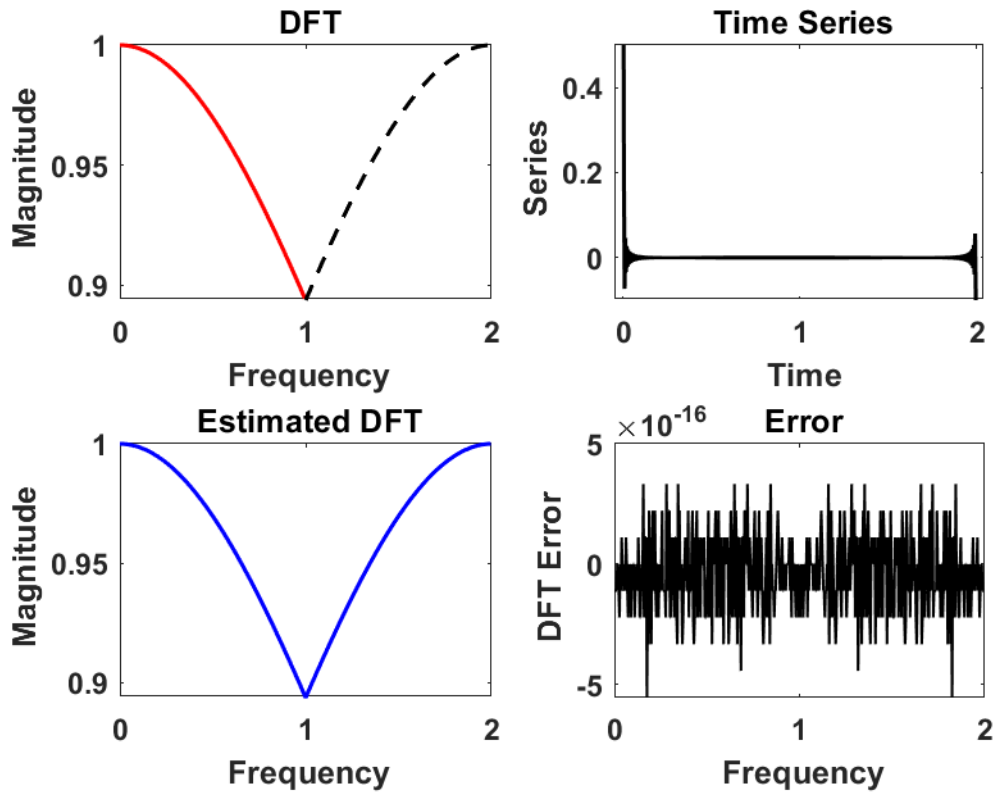


그림 4.3.4. 주파수구간의 확장

함수  $f(t)$ 와 2D Fourier 변환  $\hat{f}(\theta)$ 의 관계를 다음과 같이 표기한다.

$$f(t, s) \subset \hat{f}(\theta, \eta)$$

**정의 4.4.2: 2D 역Fourier 변환**

2D Fourier 변환  $\hat{f}(\theta, \eta)$ 의 2D 역Fourier 변환(2D inverse Fourier transform)을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{F}^{-1}[f](t, s) \doteq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\theta) e^{i[\theta t + \eta s]} d\theta d\eta$$

이  $f(t, s)$ 와  $\hat{f}(\theta, \eta)$ 를 2D Fourier 변환쌍(2D Fourier transform pair)이라 하고, 이들의 관계를 다음과 같이 표기한다.

$$f(t, s) \leftrightarrow \hat{f}(\theta, \eta) \tag{4.4.1}$$

2차원 데이터세트의 Fourier 변환을 구하기 위해서 FFT를 적용할 수 있다.

**예제 4.4.1** FFT를 적용해서 2차원 데이터세트의 Fourier 변환을 구하기 위해서 다음 MATLAB 프로그램 FFT2D101.m을 실행하라.

```

1 % -----
2 % Filename: FFT2D101.m
3 % 2d FFT example
4 % Programmed by CBS
5 % -----
6 clear all, close all
7 % Gate function
8 [X,Y] = meshgrid(1:40);
9 Z = zeros(40,40);
10 Z(10:30,15:25) = 1;
11 subplot(2,2,1)
12 mesh(X,Y,Z)
13 set(gca,'xlim',[0 40],'ylim',[0 40],'zlim',[0 1.1]);
14 title('\bf Kyobo Tower')
15 % Top view of gate function
16 [X, Y] = meshgrid(1:40);
17 subplot(2,2,2)
18 imshow(Z,'InitialMagnification','fit')
19 title('\bf XY-Projection')
20 % FFT of Z
21 FZ = fft2(Z);
22 spectrumF = log(abs(FZ));
23 subplot(2,2,3)
24 imshow(spectrumF,[-1 5],'InitialMagnification','fit')
25 colormap(summer)
26 title('\bf Spectrum')
27 % Inverse FFT of FZ
28 Zrecover = ifft2(FZ);
29 subplot(2,2,4)
30 mesh(X,Y,Zrecover)
31 set(gca,'xlim',[0 40],'ylim',[0 40],'zlim',[0 1.1]);
32 title('\bf Inverse FFT')
33 saveas(gcf,'FFT2D101','png')
34 % End of Program
35 % -----

```

이 MATLAB 프로그램 FFT2D101.m을 실행하면, 그림 4.4.1이 출력된다. 이 그림의 좌측상단에는 2D Fourier 변환을 하기 위한 3차원 데이터세트가 그려져 있다. 이 그래프를 위에서 본 그래프가 그림 4.4.1의 우측상단에 그려져 있다. 이 2차원 데이터세트의 2D FFT를 적용해서 얻은 2D DFT의 절대값이 그림 4.4.1의 좌측하단에 그려져 있다. 이 2D DFT에 2D IFFT를 적용해서 구한 추정된 3차원 데이터의 그래프가 그림 4.4.1의 우측하단에 그려져 있다. 원래 3D 데이터세트와 추정된 3D 데이터세트가 아주 비슷함을 알 수 있다. ■

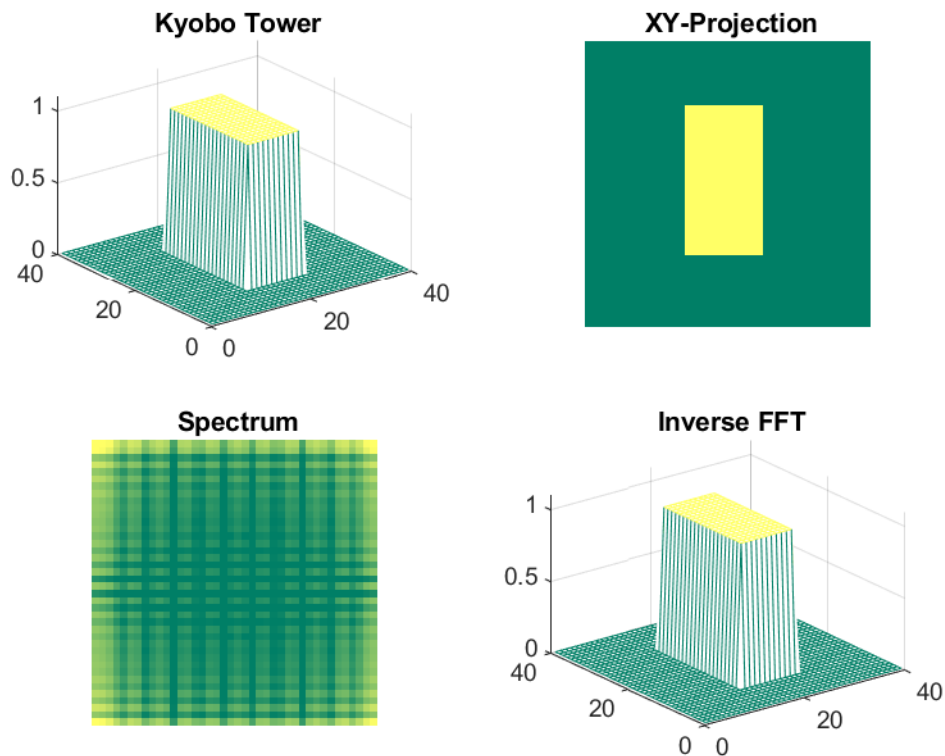


그림 4.4.1. 2D Fourier 변환

## 제4.5절 ME스펙트럼과 KL스펙트럼

스펙트럼의 원초적 추정량인 피어리오도그램(periodogram)은 통계학적 관점에서 결코 좋은 추정량이 아니다. 첫째, 각 주파수에서 피어리오도그램의 분산이 크다. 둘째, 이웃하는 주파수들에 해당하는 피어리오도그램들은 서로 점근적으로 독립이다. 따라서, 피어리오도그램은 평활하지 않으며 매우 급격하게(erratic) 변화하는 형태를 보인다. 따라서, 1970년대 후반부터 매개변수모형(parametric model)을 이용해서 스펙트럼을 추정하는 방법들이 사용되고 있다. 대표적인 모수적 방법으로는 주어진 조건 하에서 엔트로피(entropy)를 최대화하는 최대엔트로피스펙트럼(maximum entropy spectrum: ME스펙트럼)과 주어진 조건 하에서 Kullback-Leibler 정보수(Kullback-Leibler information number)를 최소화하는 최소Kullback-Leibler 정보수스펙트럼(Kullback-Leibler information number spectrum: KL스펙트럼) 등이 있다. 이 모수적 방법들을 이해하기 위해서는 시계열분석을 잘 알고 있어야 한다. 그러나 모수적 방법들을 이해할 수준의 시계열분석을 다루는 것은 본서의 수준을 넘는다. 따라서, 여기서는 참고문헌만을 제공하고자 한다.

Burg [11]는 변분법(calculus of variations)을 사용해서 다음과 같은 최대엔트로피 성질

을 증명했다. 주어진 시계열이 서로 독립이고 동일한 확률분포를 따른다고 가정하자. 즉 주어진 데이터들이 iid(independent and identically distributed)라고 가정하자. 그들의 첫  $p$  개 표본자기상관계수(sample autocorrelation)들이  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  라는 조건 하에서 엔트로피(entropy)를 최대화하는 모형은 차수(order)가  $p$ 인 자기회귀모형(autoressive model: AR model)이다. 따라서 ME스펙트럼은 자기회귀모형의 스펙트럼이다. Choi & Cover [19], [20]는 선형대수학을 이용해서 이 성질을 간단하게 증명했다. ME스펙트럼에 대한 참고문헌으로는 Choi [14], [17], [18], Cover & Thomas [23] 등이 있다.

Choi [15], [16]는 변분법을 사용해서 다음과 같은 Kullback-Leibler 정보수를 최소화하는 성질을 증명했다. 주어진 시계열이 이동평균모형(moving-average model: MA model)을 따른다고 가정하자. 그들의 첫  $p$  개 표본자기상관계수들이  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  라는 조건 하에서 Kullback-Leibler 정보수를 최소화하는 스펙트럼은 자기회귀이동평균모형(autoressive moving-average model: ARMA model)의 스펙트럼이다. 이를 KL스펙트럼이라 부른다.

## 제 5 장

# 특성함수

We may conclude that characteristic function methods are the most useful techniques that the empirically interested finance researcher should know.

Jondeau, Poon, and Rockinger [39, p. 486]

꼬리가 무거운 수익률을 나타내거나, 옵션가치를 평가하거나, 또는 변동성스마일 (volatility smile) 을 추정하는 데 특성함수가 많이 사용되고 있다. 이 장에서는 특성함수 (characteristic function) 에 대해서 살펴보자.

### 제 5.1 절 특성함수의 정의

특성함수를 다음과 같이 정의한다.

#### 정의 5.1.1: 특성함수

확률변수  $X$  의 확률분포함수가  $F_X(\cdot)$  라고 하면, 확률분포함수  $F_X(\cdot)$  의 특성함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\psi_X(t) \doteq E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)$$

만약 확률변수  $X$  의 확률밀도함수  $f_X(\cdot)$  가 존재하면, 특성함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \mathcal{F}[f_X](-t) = \hat{f}_X(-t) \quad (5.1.1)$$

여기서  $\mathcal{F}[f](t)$ 와  $\hat{f}(t)$ 는 함수  $f(x)$ 의 Fourier 변환이다.

Epps [30]는 특성함수를 다음과 같이 기하학적으로 설명했다. Euler식에서 알 수 있듯이, 확률변수  $\exp(itX)$ 는 복소평면의 단위원 위에 존재한다. 따라서,  $t$ 에서 계산되는 특성함수값  $\psi_X(t) = E(e^{itX})$ 는 단위원을 둘러싸은(wrapped around) 확률변수  $e^{itX}$ 의 질량중심(center of mass)으로 해석할 수 있다. 따라서, 특성함수는 무한히 긴 실린더 내부와 위에서 움직이는 곡선이라고 할 수 있다.

**예제 5.1.1** 표준정규확률분포  $\mathcal{N}(0, 1)$ 을 따르는 확률변수  $X$ 의 특성함수  $\psi_X(t)$ 를 구해보자.

첫 번째 방법으로 미분방정식을 사용하기로 하자. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_{-\infty}^0 e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_0^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx\end{aligned}\quad (1)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\psi_X(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(tx) dx \quad (2)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}\psi'_X(t) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x \sin(tx) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sin(tx) d\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sin(tx) e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} t \cos(tx) dx\end{aligned}\quad (3)$$

식 (2)와 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\psi'_X(t) = -t\psi_X(t) \quad (4)$$

정규확률밀도함수의 성질에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\psi_X(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(0 \cdot x) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 \quad (5)$$

초기조건 (5)를 만족하는 미분방정식 (4)를 풀면, 표준정규확률분포의 특성함수가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\psi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (6)$$

두 번째 방법으로 복소적분을 사용해서 특성함수  $\psi_X(t)$ 를 구하기로 하자. 다음 식들이 성립한다.

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[x-it]^2} dx \quad (7)$$

우리의 목적은 다음 식을 증명하는 것으로 귀착된다.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[x-it]^2} dx = 1 \quad (8)$$

다음 함수를 정의하자.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (9)$$

그림 5.1.1의 적분경로를  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ 로 표기하자. 그림 5.1.1을 그리기 위해서는 아래 수록한 Characteristic101.tikz파일을 실행하라. Cauchy 정리에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0 \quad (10)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad (11)$$

여기서  $I_k$ 는 다음과 같다.

$$I_k \doteq \int_{C_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} I_3 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{M-ti}^{-M-ti} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^{-M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[u-ti]^2} du = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[x-it]^2} dx \end{aligned} \quad (13)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 \quad (14)$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} |I_2| &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left| \int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[M+yi]^2} dy \right| \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-t}^0 \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[M+yi]^2} \right| dy \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}M^2} \int_{-t}^0 \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}y^2} e^{-Myi} \right| dy = \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}M^2} \int_{-t}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned} \quad (15)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_2 = 0 \quad (16)$$

같은 방법으로 다음 식이 성립함을 증명할 수 있다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_4 = 0 \quad (17)$$

식 (13)~식 (17)을 식 (11)에 대입하면, 식 (8)이 성립함을 알 수 있다. ■

```

1 % -----
2 % Filename: Characterstic101.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=2,decoration={markings,
6 mark=at position 2cm with {\arrow[line width=3pt]{>}},
7 mark=at position 6cm with {\arrow[line width=3pt]{>}},

```



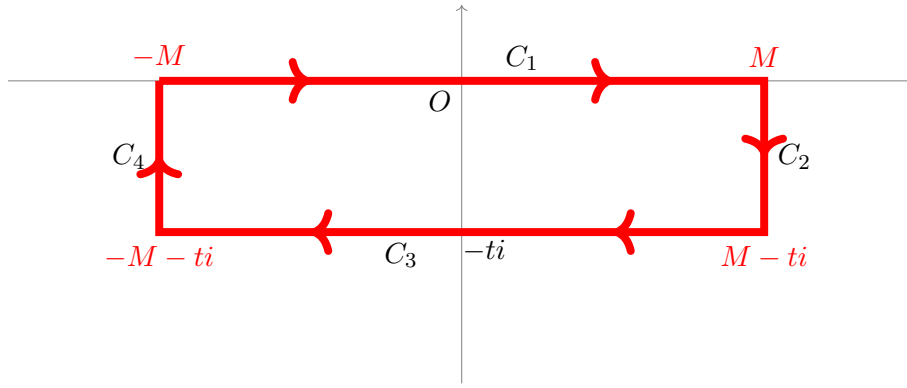


그림 5.1.1. 특성함수의 적분경로

```

8 mark=at position 9cm with {\arrow[line width=3pt]{>}},
9 mark=at position 12cm with {\arrow[line width=3pt]{>}},
10 mark=at position 16cm with {\arrow[line width=3pt]{>}},
11 mark=at position 19cm with {\arrow[line width=3pt]{>}}
12 }]]
13 % The axes
14 \draw[help lines,->] (0,-2) -- (0,0.5) coordinate (yaxis);
15 \draw[help lines,->] (-3,0) -- (3,0) coordinate (xaxis);
16
17 % The path
18 \path[draw,line width=3pt,color=red,postaction=decorate] (-2,0) node[above] {$-M$
19   } -- (2,0) node[above] {$M$} -- (2,-1) node[below] {$M - t i $} -- (-2,-1)
20   node[below] {$-M - t i $} -- (-2,0);
21
22 % The labels
23 %\node[below] at (xaxis) {$x$};
24 % \node[left] at (yaxis) {$y$};
25 \node[below left] {$0$};
26 \node at (0.4,0.15) {$C_{1}$};
27 \node at (2.2,-0.5) {$C_{2}$};
28 \node at (-0.4,-1.15) {$C_{3}$};
29 \node at (-2.2,-0.5) {$C_{4}$};
30 \node at (0.15,-1.12) {$-t i$};
31 \end{tikzpicture}
32 % -----

```

**예제 5.1.2** 정규확률분포  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  를 따르는 확률변수  $X$  의 특성함수를 구해보자.  
 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 \psi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2i\sigma^2 tx]\right) dx \\
 &= \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x-\mu-i\sigma^2 t}{\sigma}\right]^2\right) dx \tag{1}
 \end{aligned}$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu-i\sigma^2t}{\sigma}\right]^2\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}[u-i\sigma t]^2\right) du = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 첫 번째 등호는 변수변환  $u = [x - u]/\sigma$ 에 의해서 성립하고, 두 번째 등호는 예제 5.1.1의 식 (8)에 의해서 성립한다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\psi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad (3)$$

■

**예제 5.1.3** 다음과 같은 Cauchy 확률밀도함수의 특성함수  $\psi_X(t)$ 를 구하기로 하자.

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi[1+x^2]} \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi[1+x^2]} dx \quad (2)$$

그림 5.1.2의 적분경로들을  $C = C_1 + C_R$ 로 표기하자. 그림 5.1.2를 그리기 위해서는 아래 수록한 Characteristic103.tikz파일을 실행하라.

만약  $t > 0$ 이면, 그림 5.1.2의 좌측 적분경로를  $C$ 로 표기하고 다음 적분을 생각해보자.

$$I = \int_C \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz \quad (3)$$

Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = e^{itz}/[1+z^2]$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} [z - i] \frac{e^{itz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t} \quad (4)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-t} \quad (5)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right| dz \leq \pi R \frac{\exp(-tR \sin(\arg(z)))}{R^2 - 1} \quad (6)$$

적분구간  $C_R$ 에서 부등식  $\sin(\arg(z)) > 0$ 이 성립하므로, 식 (6)에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = 0 \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-t}, \quad (t > 0) \quad (8)$$

만약  $t < 0$ 이면, 그림 5.1.2의 우측 적분경로를  $C$ 로 표기하고 다음 적분을 생각해보자.

$$I = \int_C \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz \quad (9)$$

Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = e^{itz}/[1+z^2]$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; -i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} [z+i] \frac{e^{itz}}{1+z^2} = -2\pi i \frac{e^t}{2i} = -\pi e^t \quad (10)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = -\pi e^t \quad (11)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right| dz \leq \pi R \frac{\exp(-tR \sin(\arg(z)))}{R^2 - 1} \quad (12)$$

적분구간  $C_R$ 에서 부등식  $\sin(\arg(z)) < 0$ 이 성립하고 가정에 의해서 식  $t < 0$ 이 성립하므로,

식 (12)에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = 0 \tag{13}$$

식 (11)과 식 (13)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = \pi e^t, \quad (t < 0) \tag{14}$$

식 (2), 식 (8)과 식 (14)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\psi_X(t) = e^{-|t|} \tag{15}$$

■

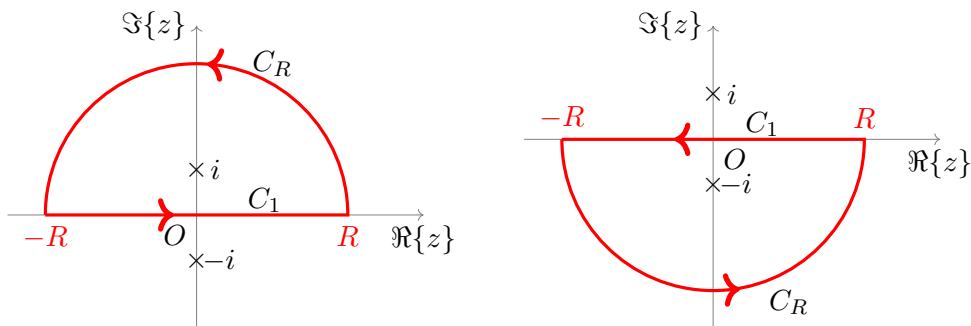


그림 5.1.2. 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: Characterstic103.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=0.5, decoration={markings,
6 mark=at position 1.7cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
7 mark=at position 7cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
8 mark=at position 13cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
9 mark=at position 18.5cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
10 mark=at position 20.2cm with {\arrow[line width=2pt]{>}}
11 } ]
12
13 % The axes
14 \draw[help lines,->] (-5,0) -- (6,0) coordinate (xaxis);
15 \draw[help lines,->] (0,-3) -- (0,5) coordinate (yaxis);
16
17 \path[draw, line width=1.2pt, color=red, postaction=decorate]
18 (-4,0) -- (4,0)

```

```

19     node[below] {$R$} arc (0:180:4) node[below] {$-R$};
20
21 % The labels
22 \node[below] at (xaxis) {$\Re \{z\}$};
23 \node[left] at (yaxis) {$\Im \{z\}$};
24 \node[below left] {$0$};
25 \node at (2,4) {$C_{R}$};
26 \node at (1.8,0.4) {$C_{1}$};
27 \node at (0,1.2) {$\times$};
28 \node at (0.5,1.2) {$i$};
29 \node at (0,-1.2) {$\times$};
30 \node at (0.6,-1.2) {$-i$};
31 \end{tikzpicture}% pic 1
32 \quad % <----- SPACE BETWEEN PICTURES
33     % 주의(: 이 문장의 위 아래 공간이 없어야 함)
34 \begin{tikzpicture}[scale=0.5, decoration={markings,
35 mark=at position 1.7cm with {\arrow[line width=2pt]{<}},
36 mark=at position 7cm with {\arrow[line width=2pt]{<}},
37 mark=at position 13cm with {\arrow[line width=2pt]{<}},
38 mark=at position 18.5cm with {\arrow[line width=2pt]{<}},
39 mark=at position 20.2cm with {\arrow[line width=2pt]{<}}
40 } ]
41 % The axes
42 \draw[help lines,->] (-5,0) -- (6,0) coordinate (xaxis);
43 \draw[help lines,->] (0,-5) -- (0,3) coordinate (yaxis);
44
45 \path[draw, line width=1.2pt, color=red, postaction=decorate]
46     (-4,0) -- (4,0)
47     node[above] {$R$} arc (0:-180:4) node[above] {$-R$};
48
49 % The labels
50 \node[below] at (xaxis) {$\Re \{z\}$};
51 \node[left] at (yaxis) {$\Im \{z\}$};
52 \node[below right] {$0$};
53 \node at (2,-4.3) {$C_{R}$};
54 \node at (1.3,0.4) {$C_{1}$};
55 \node at (0,1.2) {$\times$};
56 \node at (0.5,1.2) {$i$};
57 \node at (0,-1.2) {$\times$};
58 \node at (0.6,-1.2) {$-i$};
59 \end{tikzpicture} % pic 2
60 % -----

```

### 제5.2절 특성함수의 성질

특성함수는 다음과 같은 성질들을 갖는다.

#### 명제 5.2.1

확률변수  $X$ 의 특성함수  $\psi_X(t)$ 는 다음 성질들을 갖는다.

a)  $\psi_X(0) = 1$

- b)  $|\psi_X(t)| \leq 1, (t \in \mathbb{R})$   
 c)  $\overline{\psi_X(t)} = \psi_X(-t)$   
 d) 각  $t \in \mathbb{R}$  에 대해서  $\psi_X(t)$  는 연속이다.  
 e)  $\psi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \psi_X(at)$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\psi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 0 \cdot x} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1 \quad (1)$$

즉, 성질 (a)가 성립한다.

다음 식들이 성립한다.

$$|\psi_X(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1 \quad (2)$$

즉, 성질 (b)가 성립한다.

다음 식들이 성립한다.

$$\overline{\psi_X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{itx}} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-t]x} dF_X(x) = \psi_X(-t) \quad (3)$$

즉, 성질 (c)가 성립한다.

각 점  $x$  에서 지수함수  $\psi(x)$  가 연속이므로, 성질 (d)가 성립한다.

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \psi_{aX+b}(t) &= E \left( e^{it[aX+b]} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[at]x} e^{itb} dF_X(x) \\ &= e^{itb} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[at]x} dF_X(x) = e^{itb} \psi_X(at) \end{aligned} \quad (4)$$

즉, 성질 (e)가 성립한다. ■

명제 5.2.1의 성질 (b)에서 알 수 있듯이, 특성함수는 항상 존재한다. 명제 5.2.1의 성질 (b)와 성질 (d)에서 알 수 있듯이,  $\psi_X(\cdot)$  는 일양연속(uniformly continuous)이다. 따라서 다음 명제가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

**명제 5.2.2**

특성함수  $\psi_X(t)$ 가 점  $t = 0$ 에서  $n$ 번 미분가능하면, 다음 식이 성립한다.

$$\left. \frac{d^n \psi_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = i^n E(X^n)$$

**명제 5.2.3**

만약 확률분포함수  $F_X(\cdot)$ 에 해당하는 확률밀도함수  $f_X(\cdot)$ 가 존재하면, 특성함수  $\psi_X(\theta)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} \psi_X(\theta) = 0$$

만약 확률밀도함수  $f_X(\cdot)$ 가  $n$ 번 미분가능하면, 특성함수  $\psi_X(\theta)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\psi_X(\theta) = o(\theta^n) \text{ as } |\theta| \rightarrow \infty$$

증명. 명제 2.1.1의 성질 (h)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\psi_X(\theta) = \frac{1}{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f'(x) dx \tag{1}$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} |\psi_X(\theta)| = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f'(x) dx \right| = 0 \tag{2}$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\psi_X(\theta) = o(\theta) \text{ as } |\theta| \rightarrow \infty \tag{3}$$

따라서 첫 번째 성질이 성립한다. 이 성질에 대한 자세한 내용은 Feller [32, p. 513]를 참조하라.

같은 방법으로 자연수  $n$ 에 대해서 두 번째 성질을 증명할 수 있다. ■

다음 성질은 특성함수의 합성곱(convolution)에 관한 것이다.

**명제 5.2.4: 합성곱정리**

서로 독립이고 동일한 확률분포를 따르는 확률변수들  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 의 공통인 특성함수를  $\psi_X(t)$ 라고 하면, 실수들  $c_1, c_2, \dots, c_n$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\psi_{\sum_{k=1}^n c_k X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \psi_X(c_k t)$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \psi_{\sum_{k=1}^n c_k X_k}(t) &= E\left(\exp\left(i\left[\sum_{k=1}^n c_k X_k\right]t\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^n E(\exp(i[c_k X_k]t)) = \prod_{k=1}^n \psi_X(c_k t) \end{aligned} \quad (1)$$

■

**따름정리 5.2.1**

서로 독립인 확률변수들  $X$ 와  $Y$ 의 확률분포함수들을  $F_X(\cdot)$ 와  $F_Y(\cdot)$ 라고 하고 특성함수들을  $\psi_X(\cdot)$ 와  $\psi_Y(\cdot)$ 라고 하면, 확률변수  $Z = X + Y$ 의 확률분포함수  $F_Z(\cdot)$ 와 특성함수  $\psi_Z(\cdot)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)dF_Y(y) \\ \psi_Z(\lambda) &= \psi_X(\lambda)\psi_Y(\lambda) \end{aligned}$$

**예제 5.2.1** 확률변수  $X$ 의 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 가 각 자연수  $n$ 에 대해서 식  $\psi_X(\lambda) = \psi_n(\lambda)^n$ 을 만족하는  $\psi_n(\cdot)$ 이 존재하면, 이 확률변수는 무한분해가능(infinitely divisible)하다고 한다.

따름정리 5.2.1의 두 번째 성질을 이용해서, 무한분해가능한 확률분포의 특성함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_X(\lambda) = \exp\left(ia\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} [e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x 1_{\{|x|<1\}}] G(dx)\right) \quad (1)$$



여기서  $a(\in \mathbb{R})$ 와  $\sigma(\geq 0)$ 는 상수들이고,  $G$ 는 다음 부등식을 만족하는  $\sigma$ -유한측도(sigma-finite measure)이다.

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min \{x^2, 1\} G(dx) < \infty \tag{2}$$

이러한  $G$ 를 Lévy측도라고 부른다. 또한, 식 (1)을 Lévy–Khintchine식이라 부른다.

금융공학에서 확률변수의 무한분해가능은 중요한 역할을 한다. 무한분해가능에 관한 자세한 내용은 Feller [31], [32], Lukacs [47], Steutel [59], Steutel & Harn [60]을 참조하라. ■

다음 명제는 특성함수의 일의성(uniqueness)에 관한 것이다. 이 명제의 자세한 증명은 Dudley [27, pp. 303-304]를 참조하라.

**명제 5.2.5: 일의성정리**

확률변수들  $X$ 와  $Y$ 의 확률분포함수들을  $F_X(\cdot)$ 과  $F_Y(\cdot)$ 라 하고 특성함수들을  $\psi_X(\cdot)$ 과  $\psi_Y(\cdot)$ 라 하자. 확률변수들  $X$ 과  $Y$ 가 분포적으로(in distribution) 동일하기 위한 필요충분조건은 특성함수들  $\psi_X(\cdot)$ 과  $\psi_Y(\cdot)$ 가 동일한 것이다. 즉, 다음 명제가 성립한다.

$$X \stackrel{d}{\sim} Y \Leftrightarrow \psi_X(\lambda) \equiv \psi_Y(\lambda), (\lambda \in \mathbb{R})$$

다음 명제는 Lévy의 연속성정리(continuity theorem) 또는 수렴성정리(convergence theorem)에 관한 것이다. 이 명제에 대한 증명은 Williams [63, pp. 185-187]를 참조하라.

**명제 5.2.6: Lévy의 연속성정리**

확률변수  $X_n$ 의 확률분포함수를  $F_n(\cdot)$ 이라하고 특성함수를  $\psi_n(\cdot)$ 라 하자. 만약 각 점  $t(\in \mathbb{R})$ 에서 극한함수  $\psi(t) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$ 가 정의되고 함수  $\psi(t)$ 는 점  $t = 0$ 에서 연속이라고 하면, 함수  $\psi(t)$ 는 어떤 확률분포함수  $F(\cdot)$ 의 특성함수이고 또한 다음 식이 성립한다.

$$F_n \xrightarrow{d} F$$

**예제 5.2.2** 특성함수를 사용해서 중심극한정리(central limit theorem: CLT)를 증명해 보자.

서로 독립이고 동일한 확률분포를 따르는 확률변수들  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 의 공통적 특성함수를  $\psi_X(t)$ 라고 하자. 만약 확률변수  $X_k$ 가 평균 0이고 분산  $\sigma^2$ 이고 또한 유계인 3차적률을 가지면, 명제 5.2.2에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$\psi_{X_k}(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + O(t^3), \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\psi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \psi_X\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right) = \left\{1 - \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{t}{\sqrt{n}}\right]^2 + O\left(\left[\frac{t}{\sqrt{n}}\right]^3\right)\right\}^n \quad (2)$$

여기서 첫번째 등호는 명제 5.2.1의 성질 (e)와 명제 5.2.4에 의해서 성립하고, 두 번째 등호는 식 (1)에 의해서 성립한다. 식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 - \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{t}{\sqrt{n}}\right]^2 + O\left(\left[\frac{t}{\sqrt{n}}\right]^3\right)\right\}^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad (3)$$

명제 5.2.6의 연속성정리와 예제 5.2.2에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (4)$$

■

### 제 5.3절 특성함수의 역함수

정의 5.1.1에서 확률분포함수  $F_X(\cdot)$ 로부터 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 를 정의했다. 이 절에서는 주어진 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 로부터 확률분포함수  $F_X(\cdot)$ 를 유도하기로 하자.

**예제 5.3.1** 확률변수  $X$ 의 확률분포함수를  $F_X(\cdot)$  그리고 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 라 하자. 또한, 표준정규확률변수  $Y$ 가 확률변수  $X$ 와 독립이라고 가정하자. 명제 5.2.4에서 알 수 있듯이,

양수  $\alpha$ 에 대해서 확률변수  $Z_\alpha \doteq X + \alpha Y$ 의 특성함수는 다음과 같다.

$$\psi_{Z_\alpha}(t) = \psi_{X+\alpha Y}(t) = \psi_X(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \quad (1)$$

확률변수  $X$  대신 확률변수  $Z_\alpha$ 를 사용하는 이유는 임의의  $\alpha$ 에 대해서  $Z_\alpha$ 가 매우 평활한 확률변수이기 때문이다. 또한,  $\alpha$ 가 작은 양수이면 확률변수  $Z_\alpha$ 의 확률분포는 확률변수  $X$ 의 확률분포와 매우 비슷하다. ■

**예제 5.3.2** 연속형 확률변수  $X$ 의 확률밀도함수를  $f_X(\cdot)$  그리고 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 라 하자. 또한, 표준정규확률변수  $W$ 가 확률변수  $X$ 와 독립이라고 가정하자. 양수  $\alpha$ 에 대해서 확률변수  $Z_\alpha \doteq X + \alpha W$ 의 확률밀도함수  $f_{z_\alpha}(\cdot)$ 를 구해보자.

임의의 확률변수  $Y$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} E(\psi_Y(X - \xi)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_Y(x - \xi) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\exp(i[x - \xi]Y)) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i[x - \xi]y) f_Y(y) dy \right] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) f_X(x) dx \right] f_Y(y) dy \end{aligned} \quad (1)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$E(\psi_Y(X - \xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-i\xi y) \psi_X(y)] f_Y(y) dy = E\left(e^{-i\xi Y} \psi_X(Y)\right) \quad (2)$$

확률변수  $Y$ 의 확률분포가  $N(0, \alpha^{-2})$ 라고 하면, 확률밀도함수  $f_Y(y)$ 와 특성함수  $\psi_Y(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$f_Y(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 y^2}{2}\right), \quad \psi_Y(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \quad (3)$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \psi_X(y) \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 y^2}{2}\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[x - \xi]^2}{2\alpha^2}\right) f_X(x) dx \quad (4)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \psi_X(y) \exp\left(-\frac{\alpha^2 y^2}{2}\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{[\xi-x]^2}{2\alpha^2}\right) f_X(x) dx \quad (5)$$

식 (5)의 우변은 확률변수  $\alpha W$ 의 확률밀도함수와 확률변수  $X$ 의 확률밀도함수  $f_X(x)$ 의 합성곱이다. 즉, 확률변수  $Z_\alpha = X + \alpha W$ 의 확률밀도함수  $f_{Z_\alpha}(\cdot)$ 이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$f_{Z_\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} \psi_X(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) dt \quad (6)$$

■

**예제 5.3.3** 다음 식이 성립함을 증명하자.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

다음 함수를 정의하자.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \quad (2)$$

그림 5.3.1의 적분경로를  $C = C_1 + C_R + C_2 + C_\epsilon$ 으로 표기하자. 그림 5.3.1을 그리기 위해서는 아래에 수록한 Contour531.tikz 파일을 실행하라. Cauchy정리에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (4)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-iy}}{y} dy = 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (5)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} \left| e^{iRe^{i\theta}} \right| d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left| e^{-R\sin\theta} e^{iR\cos\theta} \right| d\theta = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi} \exp\left(-R\frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \exp\left(-2R\frac{\theta}{\pi}\right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \exp\left(-2R\left[1 - \frac{\theta}{\pi}\right]\right) d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 마지막 부등호는 다음 부등식들에 의해서 성립한다.

$$\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{and} \quad \sin\theta \geq 2\left[1 - \frac{\theta}{\pi}\right], \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \quad (8)$$

식 (7)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{\pi}{2R} [1 - e^{-R}] + \frac{\pi}{2R} [1 - e^{-R}] < \frac{\pi}{R} \quad (9)$$

식 (9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (10)$$

Taylor 전개를 적용하면, 각  $\epsilon (\in (0, 0.5))$ 에 대해서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\left| e^{i\epsilon e^{i\theta}} - 1 \right| < 2\epsilon \quad (11)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon e^{i\theta} i d\theta = i \int_0^\pi e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^\pi [e^{i\epsilon e^{i\theta}} - 1] d\theta + \pi i \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz - \pi i \right| \leq \left| i \int_0^\pi [e^{i\epsilon e^{i\theta}} - 1] d\theta \right| \leq \int_0^\pi 2\epsilon d\theta = 2\pi\epsilon \quad (13)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i \quad (14)$$

식 (5), 식 (10) 그리고 식 (14)를 식 (4)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

즉, 식 (1)이 성립한다. ■

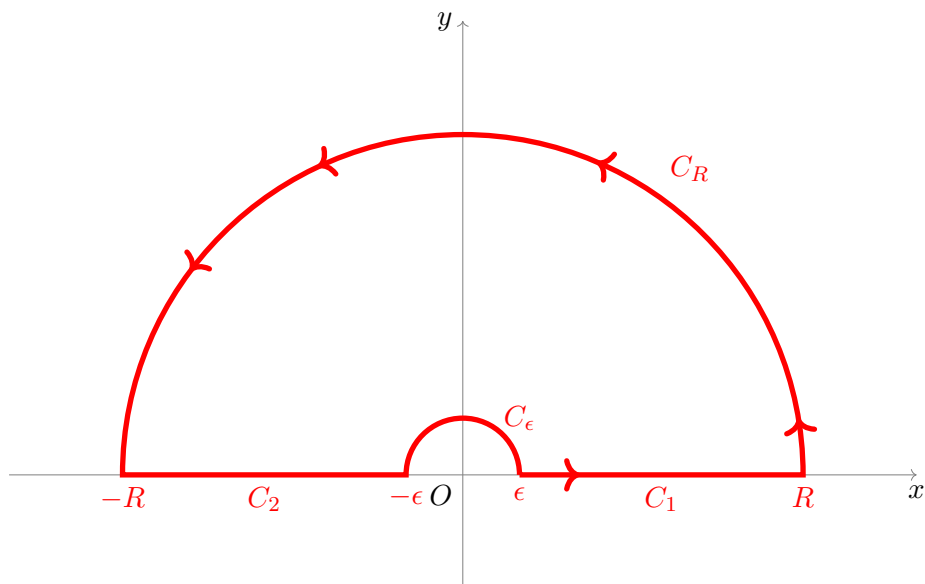


그림 5.3.1. 예제 5.3.3을 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: Contour531.tikz
3 % Programmed by CBS
    
```

```

4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=1.5, decoration={markings,
6 mark=at position 0.8cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
7 mark=at position 4.5cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
8 mark=at position 9cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
9 mark=at position 12.8cm with {\arrow[line width=2pt]{>}},
10 mark=at position 15cm with {\arrow[line width=2pt]{>}}
11 } ]
12
13 % The axes
14 \draw[help lines,->] (-4,0) -- (4,0) coordinate (xaxis);
15 \draw[help lines,->] (0,-1) -- (0,4) coordinate (yaxis);
16
17 \path[draw,line width=2pt,red,postaction=decorate] (0.5,0)
18     node[below] {\epsilon} -- node[below] {C_{1}}
19     (3,0) node[below] {R} arc (0:180:3) node[below] {-R} --
20     node[below] {C_{2}} (-0.5,0) node[below] {-\epsilon} arc (180:0:0.5);
21
22 % The labels
23 \node[below] at (xaxis) {$x$};
24 \node[left] at (yaxis) {$y$};
25 \node[below left] {$0$};
26 \node[red] at (0.5,0.5) {C_{\epsilon}};
27 \node[red] at (2,2.7) {C_{R}};
28 \end{tikzpicture}
29 % -----

```

예제 5.3.3에서 알 수 있듯이, 다음 보조정리가 성립한다.

**보조정리 5.3.1**

실수  $\alpha$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \text{sgn}(\alpha)$$

여기서  $\text{sgn}(\alpha)$ 는 다음과 같다.

$$\text{sgn}(\alpha) \doteq \begin{cases} 1, & (\alpha > 0) \\ 0, & (\alpha = 0) \\ -1, & (\alpha < 0) \end{cases}$$

**명제 5.3.1: 특성함수의 역함수**

확률분포함수  $F_X(\cdot)$ 의 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 라 하자. 만약  $F_X(\cdot)$ 가 점  $x$ 에서 연속이면, 다음

식이 성립한다.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im \{e^{-itx} \psi_X(t)\}}{t} dt$$

여기서  $\Im \{z\}$ 는  $z$ 의 허수부이다.

증명. 다음 식이 성립한다.

$$\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (1)$$

식 (1)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\Im \{e^{-itx} \psi_X(t)\} = \frac{e^{-itx} \psi_X(t) - \overline{e^{-itx} \psi_X(t)}}{2i} \quad (2)$$

명제 5.2.1의 성질 (c)를 식 (2)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\Im \{e^{-itx} \psi_X(t)\} = \frac{e^{-itx} \psi_X(t) - e^{itx} \psi_X(-t)}{2i} \quad (3)$$

다음 식들이 성립한다.

$$e^{-itx} \psi_X(t) = e^{-itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it[u-x]} dF_X(u) \quad (4)$$

$$e^{itx} \psi_X(-t) = e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} dF_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it[u-x]} dF_X(u) \quad (5)$$

식 (4)와 식 (5)를 식 (3)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\Im \{e^{-itx} \psi_X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t[u-x]) dF_X(u) \quad (6)$$

식 (6)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\Im \{e^{-itx} \psi_X(t)\}}{t} dt = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t[u-x])}{t} dF_X(u) dt \quad (7)$$



다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\sin(t[u-x])}{t} dt \right] dF_X(u) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t[u-x])}{t} dt \right] dF_X(u) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(u-x) dF_X(u) = \frac{\pi}{2} \left[ \int_{-\infty}^x [-1] dF_X(u) + \int_x^{\infty} dF_X(u) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

식 (7)과 식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\Im \{ e^{-itx} \psi_X(t) \}}{t} dt = \frac{\pi}{2} [1 - 2F_X(x)] \quad (9)$$

식 (9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im \{ e^{-itx} \psi_X(t) \}}{t} dt \quad (10)$$

■

명제 5.3.1과 증명에서 알 수 있듯이, 확률분포함수  $F_X(\cdot)$ 와 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-itx} \psi_X(t) - e^{itx} \psi_X(-t)}{2it} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} \psi_X(t)}{it} dt \quad (5.3.1)$$

식 (5.3.1)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$F_X(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_X(t)}{it} dt \quad (5.3.2)$$

식 (5.3.1)와 식 (5.3.2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$F_X(x) = F_X(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - 1}{it} \psi_X(t) dt \quad (5.3.3)$$

식 (5.3.3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \psi_X(t) dt \quad (5.3.4)$$

점  $x$ 에서 확률분포함수  $F_X(x)$ 가 미분가능이면, 식 (5.3.4)에서 알 수 있듯이 확률밀도함수

$f_X(x)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \{ e^{-itx} \psi_X(t) \} dt \quad (5.3.5)$$

여기서  $\Re(z)$ 는  $z$ 의 실수부이다. 지금까지 내용을 정리하면 다음과 같다.

### 따름정리 5.3.1

확률분포함수  $F_X(\cdot)$ 와 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 에 대해서, 다음 성질들이 성립한다.

a) 만약 점  $x$ 에서 확률분포함수  $F_X(x)$ 가 연속이면, 다음 식이 성립한다.

$$F_X(x) = F_X(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - 1}{it} \psi_X(t) dt$$

b) 만약 점  $a$ 와 점  $b$ 에서 확률분포함수  $F_X(x)$ 가 연속이면, 다음 식이 성립한다.

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \psi_X(t) dt$$

c) 만약 점  $x$ 에서 확률분포함수  $F_X(x)$ 가 미분가능이면, 확률밀도함수  $f_X(x)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \{ e^{-itx} \psi_X(t) \} dt$$

**예제 5.3.4** 표준정규확률변수의 확률밀도함수  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 의 특성함수  $\psi(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[x-it]^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 세 번째 등호는 예제 5.1.1의 식 (8)에 의해서 성립한다. 식 (1)에서 알 수 있듯이, 표준정규확률분포의 특성함수는  $\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ 이다.

특성함수  $\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ 가 주어졌을 때, 따름정리 5.3.1의 성질 (c)에서 알 수 있듯이

확률밀도함수  $f(\cdot)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[x+it]^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 세 번째 등호는 예제 5.1.1의 식 (8)에 의해서 성립한다. 식 (2)에서 알 수 있듯이, 특성함수  $\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ 의 확률밀도함수는 표준정규확률밀도함수이다. ■

**예제 5.3.5** 다음 지수확률밀도함수를 살펴보자.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (x \geq 0) \quad (1)$$

여기서  $\lambda(> 0)$ 는 양수이다.

이 지수확률밀도함수의 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos(tx) dx + i\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(tx) dx \end{aligned} \quad (2)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos(tx) dx = \left[ \frac{e^{-\lambda x} [-\lambda \cos(tx) + t \sin(tx)]}{\lambda^2 + t^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(tx) dx = \left[ \frac{e^{-\lambda x} [-\lambda \sin(tx) - t \cos(tx)]}{\lambda^2 + t^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{t}{\lambda^2 + t^2} \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)를 식 (2)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\psi_X(t) = \frac{\lambda[\lambda + it]}{\lambda^2 + t^2} = \frac{-\lambda}{it - \lambda} \quad (5)$$

특성함수  $\psi_X(t) = -\lambda/[it - \lambda]$ 가 주어졌을 때, 따름정리 5.3.1의 성질 (c)에서 알 수 있듯이 확률밀도함수  $f_X(\cdot)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{-\lambda}{it - \lambda} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t + i\lambda} dt \quad (6)$$

여기서  $g(t) \doteq i\lambda \exp(-itx)$ 이다.

그림 5.3.2의 적분경로를  $C = C_1 + C_R$ 로 표기하자. 그림 5.3.2을 그리기 위해서는 아래에 수록한 Contour532.tikz파일을 실행하라. Cauchy적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{g(z)}{z+i\lambda} dz = \frac{1}{2\pi} 2\pi i g(-i\lambda) = -\lambda e^{-\lambda x} \quad (7)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{g(z)}{z+i\lambda} dz + \frac{1}{2\pi} \int_R^{-R} \frac{g(z)}{z+i\lambda} dz = -\lambda e^{-\lambda x} \quad (8)$$

지금부터 다음 식을 증명하기로 하자.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{g(z)}{z+i\lambda} dz = 0 \quad (9)$$

만약  $z = Re^{i\theta} \in C_R$ 이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\left| i\lambda \exp(-ixRe^{i\theta}) \right| = \left| i\lambda \exp(xR \sin \theta) \exp(-ixR \cos \theta) \right| = \lambda \exp(xR \sin \theta) \quad (10)$$

만약 식  $R \geq 2\lambda$ 가 성립하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\left| Re^{i\theta} + i\lambda \right| \geq \left| Re^{i\theta} \right| - |i\lambda| = R - \lambda \geq R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \quad (11)$$

식 (11)에서 알 수 있듯이, 식  $R \geq 2\lambda$ 가 성립하면 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} + i\lambda} \right| \leq \frac{R}{R/2} = 2 \quad (12)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{g(z)}{z+i\lambda} dz \right| &= \left| \int_{\pi \leq \theta \leq 2\pi} \frac{i\lambda \exp(-ixRe^{i\theta})}{Re^{i\theta} + i\lambda} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_{\pi}^{2\pi} \left| i\lambda \exp(-ixRe^{i\theta}) \right| \left| \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta} + i\lambda} \right| d\theta \\ &\leq 2\lambda \int_{\pi}^{3\pi/2} \exp(xR \sin \theta) d\theta + 2\lambda \int_{3\pi/2}^{2\pi} \exp(xR \sin \theta) d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 두 번째 부등호는 식 (10)과 식 (12)에 의해서 성립한다. 다음 부등식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\sin \theta \leq \frac{2}{\pi} \left| \theta - \frac{3\pi}{2} \right| - 1, \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \quad (14)$$

식 (14)에서 알 수 있듯이, 다음 부등식들이 성립한다.

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \exp(xR \sin \theta) d\theta \leq \int_{\pi}^{3\pi/2} \exp\left(xR \left[2 - \frac{2}{\pi}\theta\right]\right) d\theta \quad (15)$$

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \exp(xR \sin \theta) d\theta \leq \int_{\pi}^{3\pi/2} \exp\left(xR \left[\frac{2}{\pi}\theta - 4\right]\right) d\theta \quad (16)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \exp\left(xR \left[2 - \frac{2}{\pi}\theta\right]\right) d\theta = \frac{\pi}{-2xR} \exp\left(xR \left[2 - \frac{2}{\pi}\theta\right]\right) = \frac{\pi}{2xR} [1 - e^{-xR}] \quad (17)$$

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \exp\left(xR \left[\frac{2}{\pi}\theta - 4\right]\right) d\theta = \frac{\pi}{2xR} \exp\left(xR \left[\frac{2}{\pi}\theta - 4\right]\right) = \frac{\pi}{2xR} [1 - e^{-xR}] \quad (18)$$

식 (15)~식 (18)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ 2\lambda \int_{\pi}^{3\pi/2} \exp(xR \sin \theta) d\theta + 2\lambda \int_{3\pi/2}^{2\pi} \exp(xR \sin \theta) d\theta \right] = 0 \quad (19)$$

식 (13)과 식 (19)에서 알 수 있듯이, 식 (9)가 성립한다.

식 (6)과 식 (9)를 식 (8)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{z + i\lambda} dz = \lambda e^{-\lambda x} \quad (20)$$

식 (20)에서 알 수 있듯이,  $\psi_X(t) = -\lambda/[it - \lambda]$ 는 모수가  $\lambda$ 인 지수확률변수의 특성함수이다. ■

```

1 % -----
2 % Filename: Contour532.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6 \draw (0,-4.4) -- (0,1); % Axis
7 \draw (-4.4,0) -- (4.4,0);
8
9 \node[above right] {$0$};

```

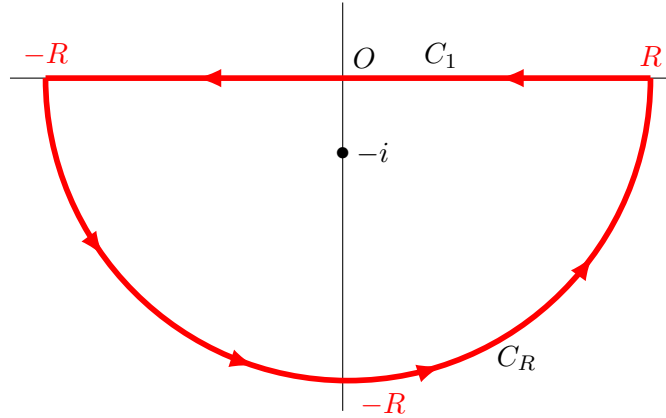


그림 5.3.2. 예제 5.3.5를 위한 적분경로

```

10 \node at (1.3,0.3) {$C_{1}$};
11 \node at (2.3,-3.7) {$C_{R}$};
12 \node at (0,-1) {\bullet}; % Pole
13 \node at (0.4,-1) {$-i$}; % Pole
14
15 % Contour line
16 \draw[line width=0.75mm, red, xshift=2pt,
17   decoration={ markings,
18     mark=at position 0.25 with {\arrow{latex}},
19     mark=at position 0.75 with {\arrow{latex}}},
20   postaction={decorate}]
21   (4,0) -- (-4,0);
22 \draw[line width=0.75mm, red, xshift=2pt,
23   decoration={ markings,
24     mark=at position 0.2 with {\arrow{latex}},
25     mark=at position 0.4 with {\arrow{latex}},
26     mark=at position 0.6 with {\arrow{latex}},
27     mark=at position 0.8 with {\arrow{latex}}},
28   postaction={decorate}]
29   (-4,0) node[above] {$-R$} arc (180:270:4) node[below right]
30   {$-R$} arc (270:360:4) -- (4,0) node[above] {$R$};
31 \end{tikzpicture}
32 % -----

```

**예제 5.3.6** 형태모수(shape parameter)가  $\alpha(> 0)$ 이고 비율모수(rate parameter)가  $\beta(> 0)$ 인 감마확률분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad (x \geq 0) \tag{1}$$

자연수  $n$ 에 대해서 형태모수가  $\alpha = n$ 인 감마확률분포를 Erlang확률분포라 부르기도 한다. 이 예제에서는 형태모수가  $n$ 이고 비율모수가 1인 감마확률분포를 살펴보자.

이 감마확률분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x}, \quad (x \geq 0) \quad (2)$$

이 감마확률밀도함수의 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{itx} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} [itx]^k \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} [it]^k \int_0^\infty x^{k+n-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+n)}{k! \Gamma(n)} [it]^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty \binom{k+n-1}{k} [it]^k = \frac{1}{[1-it]^n} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 다섯 번째 등호는 다음 식에 의해서 성립한다.

$$\frac{1}{[1-x]^r} = \sum_{k=0}^\infty \binom{k+r-1}{k} x^k, \quad (|x| < 1) \quad (4)$$

여기서  $r$ 은 양수이다. 주의할 점은 식 (3)에서 여섯 번째 등호는  $t$ 가 구간  $(-1, 1)$ 에서 성립한다는 것이다. 식 (3)에서 알 수 있듯이, 감마확률변수의 특성함수는 다음과 같다.

$$\psi_X(t) = \frac{i^n}{[t+i]^n} \quad (5)$$

특성함수  $\psi_X(t) = i^n [t+i]^{-n}$ 이 주어졌을 때, 따름정리 5.3.1의 성질 (c)에서 알 수 있듯이 확률밀도함수  $f_X(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} \frac{i^n}{[t+i]^n} dt \quad (6)$$

그림 5.3.2의 적분경로  $C$ 에서, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C e^{-izx} \frac{i^n}{[z+i]^n} dz = \frac{i^n}{2\pi} \int_R^{-R} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz + \frac{i^n}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz \quad (7)$$

일반화Cauchy적분공식 (generalized Cauchy integral formula)에서 알 수 있듯이, 다음 식들

이 성립한다.

$$\frac{i^n}{2\pi} \oint_C \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} = \frac{i^n}{2\pi} \frac{2\pi i}{\Gamma(n)} \left. \frac{d^{n-1}e^{-izx}}{dz^{n-1}} \right|_{z=-i} = \frac{i^{n+1}}{\Gamma(n)} [-ix]^{n-1} e^{-x} = -\frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \quad (8)$$

식 (7) 과 식 (8) 에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz + \frac{1}{2\pi} \int_R^{-R} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz = -\frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \quad (9)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz = -\frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \quad (10)$$

예제 5.3.5의 식 (9) 를 유도하는 방법을 사용해서, 다음 식이 성립함을 증명할 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{e^{-izx}}{[z+i]^n} dz = 0 \quad (11)$$

식 (6), 식 (10) 과 식 (11) 에서 알 수 있듯이, 감마확률분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \quad (12)$$

■

**예제 5.3.7** 다음 이중지수확률밀도함수(double exponential probability density function) 를 살펴보자.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

이 이중지수확률밀도함수의 특성함수  $\psi_X(\cdot)$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{itx} \frac{1}{2} e^x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{[it-1]x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{[it+1]x} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-it} + \frac{1}{1+it} \right] \end{aligned} \quad (2)$$



식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\psi_X(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (3)$$

특성함수  $\psi_X(t) = [1+t^2]^{-1}$ 가 주어졌을 때, 따름정리 5.3.1의 성질 (c)에서 알 수 있듯이 확률밀도함수  $f_X(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{1+t^2} dt = I_1 + I_2 \quad (4)$$

여기에서  $I_1$ 과  $I_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$I_1 \doteq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{1-it} dt \quad (5)$$

$$I_2 \doteq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{1+it} dt \quad (6)$$

예제 5.3.5에서와 같이 그림 5.3.2의 적분경로를 사용해서, 다음 식이 성립함을 유도할 수 있다.

$$I_1 = \frac{1}{2} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x) \quad (7)$$

그림 5.3.3의 적분경로를  $C = C_1 + C_R$ 로 표기하자. 그림 5.3.3을 그리기 위해서는 아래에 수록한 Contour533.tikz파일을 실행하라. Cauchy 적분식에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint_C e^{-izx} \frac{1}{1+iz} dz &= \frac{1}{4\pi i} \oint_C e^{-izx} \frac{1}{z-i} dz \\ &= \frac{1}{4\pi i} 2\pi i e^{-i^2 x} 1_{(-\infty,0)}(x) = \frac{1}{2} e^x 1_{(-\infty,0)}(x) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_R} e^{-izx} \frac{1}{1+iz} dz + \frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R e^{-izx} \frac{1}{1+iz} dz = \frac{1}{2} e^x 1_{(-\infty,0)}(x) \quad (9)$$

예제 5.3.5에서와 동일한 방법을 사용해서, 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-izx} \frac{1}{1+iz} dz = 0 \tag{10}$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$I_2 = \frac{1}{2} e^x 1_{(-\infty, 0)}(x) \tag{11}$$

식 (7)과 식 (11)을 식 (4)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \tag{12}$$

식 (12)에서 알 수 있듯이, 특성함수  $\psi_X(t) = [1 + t^2]^{-1}$ 는 이중지수확률변수의 특성함수이다. ■

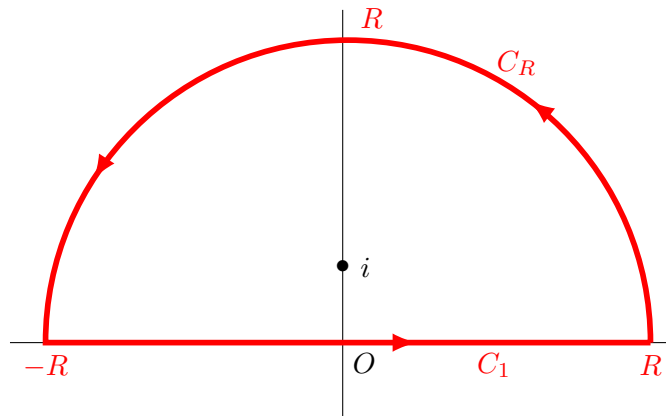


그림 5.3.3. 예제 5.3.7을 위한 적분경로

```

1 % -----
2 % Filename: Contour533.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}
6 \draw (0,-1) -- (0,4.4); % Axis
7 \draw (-4.4,0) -- (4.4,0);
8
9 \node[below right] {$O$};
10 \node[red] at (2.0, -0.3) {$C_{1}$};
11 \node[red] at (2.3,3.7) {$C_{R}$};
12 \node at (0,1) {$\bullet$}; % Pole
13 \node at (0.3,1) {$i$}; % Pole

```

```

14 |
15 | \draw[line width=0.75mm,red,xshift=2pt,
16 | decoration={ markings,
17 |   mark=at position 0.18 with {\arrow{latex}},
18 |   mark=at position 0.5 with {\arrow{latex}},
19 |   mark=at position 0.85 with {\arrow{latex}}},
20 | postaction={decorate}]
21 | (4,0) node[below] {\mathbb{R}} arc (0:90:4) node[above right] {\mathbb{R}}
22 |   arc (90:180:4) -- (-4,0) node[below] {\mathbb{-R}} -- (4,0);
23 | \end{tikzpicture}
24 | % -----

```

**예제 5.3.8** 연속인 확률분포함수에 대해 명제 5.2.5를 증명하기로 하자. 즉, 따름정리 5.3.1의 역정리를 사용해서 확률분포함수의 일의성을 증명하자.

연속형 확률변수들  $X$ 와  $Y$ 의 확률분포함수들을  $F_X(\cdot)$ 과  $F_Y(\cdot)$ 라 하고 특성함수들을  $\psi_X(\cdot)$ 과  $\psi_Y(\cdot)$ 라 하자. 만약 모든  $t \in \mathbb{R}$ 에 대해서 항등식  $\psi_X(t) \equiv \psi_Y(t)$ 이 성립하면, 따름정리 5.3.1의 성질 (b)에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$F_X(b) - F_X(a) = F_Y(b) - F_Y(a) \tag{1}$$

식 (1)에 식  $a = \infty$ 를 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$F_X(b) = F_Y(b) \tag{2}$$

임의의  $b \in \mathbb{R}$ 에 대해서 식 (2)가 성립하므로, 식  $F_X \equiv F_Y$ 가 성립한다. ■

**예제 5.3.9** 연속인 확률분포함수에 대해 명제 5.2.6에서 언급한 Lévy의 연속성정리를 증명하기로 하자. 즉, 따름정리 5.3.1의 역정리를 사용해서 연속성정리를 증명하자.

확률변수들  $X_n$ 과  $X$ 의 확률분포함수들을  $F_{X_n}(\cdot)$ 과  $F_X(\cdot)$ 라 하고 특성함수들을  $\psi_{X_n}(\cdot)$ 과  $\psi_X(\cdot)$ 라 하자. 이 확률분포함수들을  $F_{X_n}(\cdot)$ 과  $F_X(\cdot)$ 가 연속이라고 가정하고, 또한 표준정규확률변수  $Y$ 가 확률변수열  $\{X_n\}$ 과 확률변수  $X$ 와 독립이라고 가정하자. 양수  $\alpha$ 에 대해서 확률변수들  $Z_n \doteq X_n + \alpha Y$ 과  $Z \doteq X + \alpha Y$ 의 특성함수들은 다음과 같다.

$$\psi_{Z_n}(t) = \psi_{X_n + \alpha Y}(t) = \psi_{X_n}(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \tag{1}$$

$$\psi_Z(t) = \psi_{X + \alpha Y}(t) = \psi_X(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \tag{2}$$

식 (1), 식 (2)와 따름정리 5.3.1의 성질 (b)에서 알 수 있듯이, 임의의 실수들  $a$ 와  $b (> a)$ 에

대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\Pr(a \leq X_n + \alpha Y \leq b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \psi_{X_n}(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) dt \quad (3)$$

$$\Pr(a \leq X + \alpha Y \leq b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \psi_X(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) dt \quad (4)$$

다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{X_n}(t) = \psi_X(t), \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (5)$$

식 (3)과 식 (4)를 식 (5)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(a \leq X_n + \alpha Y \leq b) = \Pr(a \leq X + \alpha Y \leq b) \quad (6)$$

식 (6)에 식  $b = \infty$ 를 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(a \leq X_n + \alpha Y) = \Pr(a \leq X + \alpha Y) \quad (7)$$

식 (7)에 극한  $\alpha \rightarrow 0$ 을 적용하면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) = F_X(a) \quad (8)$$

■

**예제 5.3.10** 이 예제는 Lebesgue측도를 사용해서 명제 5.3.1을 좀 더 자세하게 증명하고자 한다. 즉, 다음 명제를 좀 더 자세하게 증명하기로 하자.

확률변수  $X$ 의 특성함수를  $\psi_X(\cdot)$ 라고 하고, 다음 함수를 정의하자.

$$f_X(x) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt \quad (1)$$

만약 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 가 실수집합  $\mathbb{R}$ 에서 Lebesgue적분가능하면, 함수  $f_X(x)$ 가 확률변수  $X$ 의 확률밀도함수이며 실수집합  $\mathbb{R}$ 에서 유계이고 연속이다.

첫째, 함수  $f_X(\cdot)$ 가 존재함을 증명하자. 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-itx} \psi_X(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| dt < \infty \quad (2)$$

따라서  $f_X(\cdot)$ 가 존재한다.

둘째, 함수  $f_X(\cdot)$ 가 유계임을 증명하자. 다음 식들이 성립한다.

$$2\pi |f_X(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| dt < \infty \quad (3)$$

따라서 함수  $f_X(\cdot)$ 는 유계이다.

셋째, 식  $\lim_{x_n \rightarrow x} f_X(x_n) = f_X(x)$ 를 증명하자. 식  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 가 성립한다고 가정하면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-itx_n) \psi_X(t) = \exp(-itx) \psi_X(t) \quad (4)$$

각  $t (\in \mathbb{R})$ 와 각  $n (\in \mathbb{N})$ 에 대해서, 다음 식이 성립한다.

$$|\exp(-itx_n) \psi_X(t)| \leq |\psi_X(t)| \quad (5)$$

가정에 의해서 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 가 실수집합  $\mathbb{R}$ 에서 Lebesgue적분가능이므로, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| dt < \infty \quad (6)$$

식 (4)~식 (6)에서 알 수 있듯이, Lebesgue 지배수렴정리에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx_n} \psi_X(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt \quad (7)$$

넷째, 함수  $f_X(\cdot)$ 가 비음(nonnegative)임을 증명하자. 예제 5.3.2에서 알 수 있듯이, 표준정규확률변수  $Y$ 와 양수  $\alpha$ 에 대해서 확률변수  $Z_\alpha \doteq X + \alpha Y$ 의 확률밀도함수  $f_{Z_\alpha}(\cdot)$ 는

다음과 같다.

$$f_{Z_\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} \psi_X(t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) dt \quad (8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_X(x) - f_{Z_\alpha}(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \psi_X(t) \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)\right] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)\right] dt \end{aligned} \quad (9)$$

각  $t (\in \mathbb{R})$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\psi_X(t)| \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)\right] = 0 \quad (10)$$

각  $t (\in \mathbb{R})$ 와 각  $n (\in \mathbb{N})$ 에 대해서, 다음 식이 성립한다.

$$\left| \psi_X(t) \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)\right] \right| \leq |\psi_X(t)| \quad (11)$$

가정에 의해서 특성함수  $\psi_X(\cdot)$ 가 실수집합  $\mathbb{R}$ 에서 적분가능이므로, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| dt < \infty \quad (12)$$

식 (10)~식 (12)에서 알 수 있듯이, Lebesgue 지배수렴정리에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_X(x) - f_{Z_\alpha}(x)| = 0 \quad (13)$$

식 (13)에서 알 수 있듯이,  $\alpha$ 가 0에 수렴하면  $f_{Z_\alpha}(\cdot)$ 가  $f_X(\cdot)$ 로 일양수렴한다. 또한  $f_{Z_\alpha}(\cdot)$ 가 실수함수이고 비음이다. 따라서  $f_X(\cdot)$ 도 실수함수이고 비음이다.

다섯째, 임의의 실수들  $a$ 와  $b$ 에 대해서 다음 식이 성립함을 증명하자.

$$\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx, \quad (-\infty < a < b < \infty) \quad (14)$$

지금까지는 주어진 특성함수  $\psi_X(t)$ 에 대해 식 (1)에서 정의된  $f_X(\cdot)$ 가 비음인 함수임을 보였다.

이 다섯째 단계에서는 이 비음함수  $f_X(\cdot)$ 를 사용해서 확률분포함수  $F_X(b) \doteq \Pr(-\infty < x \leq b)$ 를 나타내고자 한다. 다음과 같이 함수  $g_n(\cdot)$ 을 정의하자.

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x \leq a) \\ n[x - a], & (a < x \leq a + \frac{1}{n}) \\ 1, & (a + \frac{1}{n} < x \leq b + \frac{1}{n}) \\ n[b + \frac{1}{n} - x], & (b < x \leq b + \frac{1}{n}) \\ 0, & (b + \frac{1}{n} < x < \infty) \end{cases} \quad (15)$$

다음 식이 성립함을 자명하다.

$$0 \leq g_n(x) \leq 1, \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (16)$$

다음 식이 성립한다.

$$E_{Z_\alpha}(g_n(Z_\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f_{Z_\alpha}(x)dx \quad (17)$$

식 (16)과 Lebesgue지배수렴정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_{Z_\alpha}(g_n(Z_\alpha)) = E_X(g_n(X)) \quad (18)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_n(x)f_{Z_\alpha}(x) = g_n(x)f_X(x), \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (19)$$

$$g_n(x)f_X(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| dt 1_{(a, b+1]}(x) \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a, b+1]}(x)dx < \infty \quad (21)$$

식 (19)~식 (21)과 Lebesgue지배수렴정리에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_{Z_\alpha}(g_n(Z_\alpha)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f_{Z_\alpha}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f_X(x)dx \quad (22)$$

식 (18)과 식 (22)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_X(g_n(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f_X(x)dx \quad (23)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1_{(a,b]}(x), \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (24)$$

$$g_n(x) \leq 1_{(a,b]}(x) \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b]}(x)dx < \infty \quad (26)$$

식 (24)~식 (26)과 Lebesgue지배수렴정리에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b]}(x)f_X(x)dx \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_X(g_n(X)) = E_X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(X)\right) = E_X(1_{(a,b]}(X)) \quad (28)$$

식 (23), 식 (27)과 식 (28)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\Pr(a < X \leq b) \doteq E_X(1_{(a,b]}(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b]}(x)f_X(x)dx = \int_a^b f_X(x)dx \quad (29)$$

즉, 식 (14)가 성립한다. ■

**예제 5.3.11** Lebesgue측도를 사용해서 특성함수와 역정리를 살펴보자. 이에 대한 자세한 내용은 Chung [21]의 제6장을 참조하라.

확률변수  $X$ 의 확률측도를  $\mu(\cdot)$ 라 하면, 특성함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mu(dx) \quad (1)$$

만약 식  $a < b$ 가 성립하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mu((x_1, x_2)) + \frac{1}{2}\mu(\{x_1\}) + \frac{1}{2}\mu(\{x_2\}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} f_X(t)dt \quad (2)$$

여기서 피적분함수의 점  $t = 0$ 에서 값은 연속성에 의해서 정의된다. ■



## 제 6 장

# Laplace 변환

Laplace transform is an integral transform named after its discoverer Pierre-Simon Laplace. It takes a function of a real variable  $t$  (often time) to a function of a complex variable  $s$  (complex frequency). It is similar to the Fourier transform. While the Fourier transform of a function is a complex function of a real variable (frequency), the Laplace transform of a function is a complex function of a complex variable. Given a simple mathematical or functional description of an input or output to a system, the Laplace transform provides an alternative functional description that often simplifies the process of analyzing the behavior of the system, or in synthesizing a new system based on a set of specifications. So, for example, Laplace transformation from the time domain to the frequency domain transforms differential equations into algebraic equations and convolution into multiplication. It has many applications in the sciences and technology.

from WikiQuote

### 제 6.1 절 이상적분

Laplace 변환은 Riemann 적분에서 이상적분(improper integral)으로 정의된다. 먼저 이상적분을 간단히 복습해보자.

#### 정의 6.1.1: 이상적분

구간  $[a, \infty)$ 에서 정의되는 함수  $f(x)$ 에 대해서 극한  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$ 가 존재하면, 다음과

같이 이상적분을 정의한다.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$$

만약 극한  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$ 가 존재하면, 이상적분은 수렴한다고 하고, 그렇지 않으면 발산한다고 한다.

**예제 6.1.1** 만약  $n > -1$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_1^\infty x^n dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_1^R = \infty \quad (1)$$

이 경우에는  $\int_1^\infty x^n dx$ 는 발산한다.

만약  $n = -1$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_1^\infty x^{-1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^R = \infty \quad (2)$$

따라서,  $\int_1^\infty x^{-1} dx$ 도 발산한다.

만약  $n < -1$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\int_1^\infty x^n dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^n dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{R^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right] = -\frac{1}{n+1} \quad (3)$$

이 경우에는  $\int_1^\infty x^n dx$ 는 수렴한다. ■

#### 보조정리 6.1.1: 비교테스트

구간  $[a, \infty)$ 에서 식  $g(x) \geq f(x) \geq 0$ 을 만족하는 함수들  $f(x)$ 와  $g(x)$ 를 살펴보자. 만약 이상적분  $\int_a^\infty g(x)dx$ 가 수렴하면, 이상적분  $\int_a^\infty f(x)dx$ 도 수렴한다.

## 제6.2절 Laplace 변환의 정의

## 정의 6.2.1: Laplace 변환

구간  $[0, \infty)$ 에서 정의되는 함수  $f(x)$ 에 대해서 이상적분  $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ 이 수렴하는 실수  $s$ 가 적어도 하나 존재하면, 함수  $f(x)$ 의 Laplace 변환  $\mathcal{L}\{f(x)\}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} \doteq \mathcal{L}\{f(x)\}(s) \doteq \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

Riemann 적분이 아닌 다른 적분(측도)에서 Laplace 변환을 정의할 수 있다. 이 경우에는 다음과 같이 Laplace 변환을 정의한다.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} \doteq \mathcal{L}\{f(x)\}(s) \doteq \int_{0-}^\infty e^{-sx} f(x) dx \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\epsilon}^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (6.2.1)$$

식 (6.2.1)의 정의에서는 점  $x = 0$ 에서 매쓰(mass)를 Laplace 변환에 반영하고 있다. 예를 들어, Dirac 델타함수를 Laplace 변환하는 데 이 정의를 사용해야 한다. 원래  $s$ 는 복소수까지 고려할 수 있으나, 본서에서는 실수로 제한하기로 하자. 만약 함수  $f(x)$ 의 Laplace 변환  $\mathcal{L}\{f(x)\}$ 가 실수  $s = s_0$ 에서 존재하면, 각  $s > s_0$ 에 대해서  $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ 가 수렴하는 것은 자명하다. 즉, 각  $s > s_0$ 에 대해서 Laplace 변환이 존재한다.

**예제 6.2.1** 어떤 양수  $s$ 에 대해서 함수  $f(x) = x$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-sx} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} x \left[ -\frac{1}{s} \right] e^{-sx} \Big|_0^R - \int_0^R -\frac{1}{s} e^{-sx} dx \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_0^R = -\frac{1}{s^2} [0 - 1] = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1)$$

즉, 함수  $f(x) = x$ 의 Laplace 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}, \quad (s > 0) \quad (2)$$

■

**예제 6.2.2** Laplace 변환의 정의로부터 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\} = \frac{1}{s - \alpha}, \quad (s > \alpha) \quad (1)$$

■

**예제 6.2.3** 다음 함수의 Laplace 변환을 살펴보자.

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & (0 \leq t \leq 2) \\ 3, & (2 < t < \infty) \end{cases} \quad (1)$$

각  $s > 0$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_0^2 e^{-st} e^t dt + \int_2^{\infty} 3e^{-st} dt \\ &= \int_0^2 e^{[1-s]t} dt + 3 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R e^{-st} dt = \frac{e^{[1-s]t}}{1-s} \Big|_0^2 - \frac{3}{s} \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-st} \Big|_2^R \\ &= \frac{e^{2[1-s]}}{1-s} - \frac{1}{1-s} - \frac{3}{s} \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{-sR} - e^{2s}] \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{e^{2[1-s]}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + \frac{3}{s} e^{-2s}, \quad (s > 0) \quad (3)$$

■

**예제 6.2.4** Laplace 변환  $\mathcal{L}\{\cos bx\}$ 와  $\mathcal{L}\{\sin bx\}$ 를 구하기로 하자.

Euler식에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{ibx}\} = \mathcal{L}\{\cos bx\} + i\mathcal{L}\{\sin bx\} \quad (1)$$

예제 6.2.2에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{ibx}\} = \frac{1}{s - ib}, \quad (s > 0) \quad (2)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{ibx}\} = \frac{1}{s - ib} \cdot \frac{s + ib}{s + ib} = \frac{s + ib}{s^2 + b^2} = \frac{s}{s^2 + b^2} + i \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad (s > 0) \quad (3)$$

식 (1)과 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{\cos bx\} = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad (s > 0) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}\{\sin bx\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad (s > 0) \quad (5)$$

■

**예제 6.2.5** 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(x) + bg(x)\} &= \int_0^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{-sx} dx \\ &= a \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx + b \int_0^{\infty} g(x)e^{-sx} dx \\ &= a\mathcal{L}\{f(x)\} + b\mathcal{L}\{g(x)\} \end{aligned} \quad (1)$$

즉, Laplace 변환은 선형성 (linearity) 을 갖는다. ■

**예제 6.2.6** Laplace 변환의 선형성을 이용해서 다음 함수의 Laplace 변환을 구해보자.

$$f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \quad (1)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} = \frac{1}{2} \frac{s+a - [s-a]}{s^2 - a^2},\end{aligned}\quad (s > |a|) \quad (2)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad (s > |a|) \quad (3)$$

■

**예제 6.2.7** 다음 식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-a), \quad (s > a) \quad (1)$$

이 성질을 Laplace 변환의 이동성(shift property)이라 부른다.

■

**예제 6.2.8** Laplace 변환의 이동성을 이용해서 다음 함수의 Laplace 변환을 구해보자.

$$f(t) = e^{2t}t^2 \quad (1)$$

다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad (s > 0) \quad (2)$$

따라서, Laplace 변환의 이동성에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{2t}t^2\} = \frac{2}{[s-2]^3}, \quad (s > 2) \quad (3)$$

■

**예제 6.2.9** 부분적분을 사용하면, 도함수의 Laplace 변환식이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0) \quad (1)$$

식 (6.2.1)의 정의를 바탕으로 하면, 도함수의 Laplace 변환식이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0-) \quad (2)$$

■

**예제 6.2.10** 예제 6.2.9에 기술한 도함수의 Laplace 변환식을 이용해서 함수  $\cosh at$ 의 Laplace 변환을 구해보자.

다음 식들이 성립한다.

$$\frac{d}{dt} \sinh at = a \cosh at \quad (1)$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad (s > |a|) \quad (2)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \sinh at\right\} = \frac{1}{a} \left[ s \frac{a}{s^2 - a^2} - \sinh(0) \right] = \frac{1}{a} \left[ s \frac{a}{s^2 - a^2} - 0 \right] \quad (3)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad (s > |a|) \quad (4)$$

■

**예제 6.2.11** 예제 6.2.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}, \quad (s > 0) \quad (1)$$

예제 6.2.9에 기술한 도함수의 Laplace 변환식을 식 (1)에 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수

있다.

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (s > 0) \quad (2)$$

■

### 제 6.3 절 Laplace 변환의 성질

Laplace 변환  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$  에 대해서 역 Laplace 변환을 다음과 같이 표기하자.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x) \quad (6.3.1)$$

#### 정의 6.3.1: 지수차수

함수  $f(x)$  가 구간  $[0, \infty)$  에서 연속이고 다음 식을 만족하는 상수들  $c$  와  $\alpha$  가 존재한다고 하자.

$$|f(x)| < ce^{\alpha x}, \quad (0 \leq x < \infty)$$

이러한 함수  $f$  는 지수차수(exponential order)가  $\alpha$  라고 한다. 지수차수가  $\alpha$  인 함수들의 집합을  $\mathcal{E}_\alpha$  로 표기하자.

#### 정리 6.3.1

만약  $f(x) \in \mathcal{E}_\alpha$  이면, 각  $s > \alpha$  에 대해서 Laplace 변환  $\mathcal{L}\{f(x)\}$  가 존재한다.

증명. 각  $s > \alpha$  에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx &\leq \int_0^\infty e^{-sx} |f(x)| dx \leq c \int_0^\infty e^{-sx} e^{\alpha x} dx \\ &\leq c \int_0^\infty e^{-[s-\alpha]x} dx = c \left. \frac{-e^{-[s-\alpha]x}}{-\alpha} \right|_\infty^0 = c \frac{1}{s-\alpha} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $c$  는 상수이다. 따라서  $\mathcal{L}\{f(x)\}$  가 존재한다.

■



**예제 6.3.1** 각  $c \geq 1$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$|\sin x| \leq ce^x, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (1)$$

즉,  $\sin x \in \mathcal{E}_1$ 이다. 예제 6.2.4에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{\sin x\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad (s > 0) \quad (2)$$

■

**보조정리 6.3.1**

함수  $f(x) \in \mathcal{E}_\alpha$ 에 대해서  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ 가 존재하면, 각  $s > \alpha - a$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{-ax}f(x)\} = F(s + a)$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{-ax}f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}e^{-ax}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-[s+a]x}f(x)dx = F(s + a) \quad (1)$$

■

**예제 6.3.2** 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{s^3} \quad (1)$$

보조정리 6.3.1을 식(1)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{e^{-ax}x^2\} = \frac{2}{[s + a]^3} \quad (2)$$

■

주어진 Laplace 변환  $F(s)$ 에 대해서 역Laplace 변환된 함수  $f(x)$ 는 일의적으로 존재하는가? 그에 대한 답은 다음 정리에 있다. 이 정리의 증명에 대해서는 [https://sites.math.washington.edu/~marshall/math\\_135/UniqueLaplace.pdf](https://sites.math.washington.edu/~marshall/math_135/UniqueLaplace.pdf)을 참조하라.

**정리 6.3.2: 역Laplace 변환의 일의성**

만약 함수들  $f \in \mathcal{E}_\alpha$ 와  $g \in \mathcal{E}_\alpha$ 가 구간  $[0, \infty)$ 에서 연속이고, 또한 만약 함수들  $f$ 와  $g$ 가 구간  $[0, \infty)$ 에서 연속이면, 각  $x \in [0, \infty)$ 에 대해서 식  $f(x) = g(x)$ 가 성립한다.

**예제 6.3.3** 다음 역Laplace 변환을 계산하자.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+4}{s^2+4s+8} \right\} \quad (1)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+4}{s^2+4s+8} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{[s+2]^2+4} + \frac{2}{[s+2]^2+4} \right\} \\ &= e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} \right\} = e^{-2t} [\cos 2t + \sin 2t] \end{aligned} \quad (2)$$

정리 6.3.2에서 알 수 있듯이, 이 역Laplace 변환은 일의적으로 존재한다. ■

**예제 6.3.4** 다음 역Laplace 변환을 계산하자.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{s^2+2s+10} + \frac{3}{[s+1]^3} \right\} \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$\frac{3s+1}{s^2+2s+10} = \frac{3[s+1]}{[s+1]^2+3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{[s+1]^2+3^2} \quad (2)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3[s+1]}{[s+1]^2 + 3^2} \right\} = e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s}{s^2 + 3^2} \right\} = e^{-t} \left[ 3 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right] \quad (3)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{[s+1]^3} \right\} = \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{[s+1]^3} \right\} = \frac{3}{2} e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} = \frac{3e^{-t}t^2}{2} \quad (4)$$

식 (2)~식 (4)에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{s^2+2s+10} + \frac{3}{[s+1]^3} \right\} = 3e^{-t} \cos 3t - \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t + \frac{3e^{-t}t^2}{2} \quad (5)$$

정리 6.3.2에서 알 수 있듯이, 이 역Laplace 변환은 일의적으로 존재한다. ■

앞에서 소개한 도함수의 Laplace 변환식을 좀 더 자세하게 유도하기로 하자.

### 정리 6.3.3: 도함수의 Laplace 변환

만약  $f(x) \in \mathcal{E}_\alpha$  이고  $f'(x)$ 가 연속이면, 각  $s > \alpha$ 에 대해서  $\mathcal{L}\{f'(x)\}$ 가 존재하며 또한 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ e^{-sR} f(R) + s \int_0^R f(x) e^{-sx} dx \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{-sR} f(R)] - f(0) + s\mathcal{L}\{f(x)\} \end{aligned} \quad (1)$$

가정  $f \in \mathcal{E}_\alpha$ 에서 알 수 있듯이, 각  $s > \alpha$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$e^{-sR} |f(R)| \leq ce^{-sR} e^{\alpha R} = ce^{-(s-\alpha)R} \rightarrow 0 \text{ as } R \rightarrow \infty \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0) \quad (3)$$

따라서  $\mathcal{L}\{f'\}$ 가 존재함을 알 수 있다. ■

만약  $f \in C^2$ 이고 또한 만약  $f'(x) \in \mathcal{E}_\alpha$ 이면, 정리 6.3.3를 사용해서 다음 식들이 성립함을 증명할 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s\mathcal{L}\{f'(x)\} - f'(0) = s[s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)] - f'(0) \quad (6.3.2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f(x)\} - sf(0) - f'(0) \quad (6.3.3)$$

식 (6.3.3)을 구하는 과정을 반복 적용해서, 다음 따름정리를 얻을 수 있다.

**따름정리 6.3.1: 고차도함수의 Laplace 변환**

만약  $f \in C^n$ 이고 또한 만약  $f', f'', \dots, f^{(n-1)}(x) \in \mathcal{E}_\alpha$ 이면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n\mathcal{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

**예제 6.3.5** 정리 6.3.3에서 알 수 있듯이, Laplace 변환  $F(s) \doteq \mathcal{L}\{y\}$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\mathcal{L}\{ty'\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'(t)\} = -\frac{d}{ds}[sF(s) - y(0)] = -F(s) - sF'(s) \quad (1)$$

■

**따름정리 6.3.2: 적분의 Laplace 변환**

만약  $f(x) \in \mathcal{E}_\alpha$ 이면, 적분  $\int_0^x f(t)dt \in \mathcal{E}_\alpha$ 이고 또한 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(x)\}$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq c \int_0^x e^{\alpha t} dt = \frac{c}{\alpha} [e^{\alpha x} - 1] \leq \frac{c}{\alpha} e^{\alpha x} = C e^{\alpha x}. \quad (1)$$

여기서  $c$ 와  $C$ 는 상수들이다. 정리 6.3.3에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt \right\} = s \mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} - \int_0^0 f(t) dt = s \mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} \quad (2)$$

미적분의 근본적 정리를 식 (2)에 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = s \mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(x)\} \quad (4)$$

■

**예제 6.3.6** 따름정리 6.3.2에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \mathcal{L} \left\{ 2 \int_0^x t dt \right\} = 2 \mathcal{L} \left\{ \int_0^x t dt \right\} = \frac{2}{s} \mathcal{L}\{x\} = \frac{2}{s^3} \quad (1)$$

■

#### 정리 6.3.4: Laplace 변환의 미분

만약  $f(x) \in \mathcal{E}_\alpha$ 이면, 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{d^k}{ds^k} \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{[-x]^k f(x)\}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} [-x f(x)] dx = \mathcal{L}\{-x f(x)\} \quad (1)$$

같은 방법을 적용해서 다음 식들을 유도할 수 있다.

$$\frac{d^k}{ds^k} \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{[-x]^k f(x)\}, \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2)$$

■

**예제 6.3.7** Laplace 변환  $\mathcal{L}\{x \cos bx\}$  을 계산하자.

다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{\cos bx\} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad (1)$$

정리 6.3.4에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{x \cos bx\} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{s}{s^2 + b^2} \right] = \frac{s^2 - b^2}{[s^2 + b^2]^2} \quad (2)$$

■

## 제 6.4 절 Laplace 변환과 미분방정식

Laplace 변환을 사용해서 미분방정식을 쉽게 풀 수도 있다. 한 예로 다음 미분방정식(differential equation) 과 초기조건(initial condition) 으로 이루어진 초기값문제(initial value problem) 를 살펴보자.

$$2 \frac{df}{dt} = 1, \quad f(0) = 4 \quad (6.4.1)$$

미분방정식 6.4.1의 양변에 Laplace 변환을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{L} \left\{ 2 \frac{df}{dt} \right\} = \mathcal{L}\{1\} \quad (6.4.2)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$2\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \frac{1}{s} \quad (6.4.3)$$

정리 6.3.3을 식 (6.4.3)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$2s\mathcal{L}\{f\} - 8 = \frac{1}{s} \quad (6.4.4)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{4}{s} + \frac{1}{2s^2} \quad (6.4.5)$$

예제 6.2.11에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (6.4.6)$$

식 (6.4.5)와 식 (6.4.6)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) = 4 + \frac{1}{2}t \quad (6.4.7)$$

식 (6.4.7)이 식 (6.4.1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다.

**예제 6.4.1** 다음 초기값문제를 풀어보자.

$$y' - 2y = e^{-3x}, \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

우선 Laplace 변환을 사용하지 않고, 이 초기값문제를 풀어보자. 이 미분방정식의 양변에  $e^{-2x}$ 를 곱하면 다음 식을 얻는다.

$$[ye^{-2x}]' = e^{-5x} \quad (2)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$ye^{-2x} = \int e^{-5x} dx \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$y(x)e^{-2x} = -\frac{1}{5}e^{-5x} + c \quad (4)$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$1 = y(0)e^{-0} = -\frac{1}{5}e^0 + c \quad (5)$$

식 (4)와 식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$y(x) = -\frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{6}{5}e^{2x} \quad (6)$$

식 (6)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다.

지금부터는 Laplace 변환을 사용해서 이 초기값문제를 풀어보자. 이 미분방정식의 양변에 Laplace 변환을 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{y' - 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-3x}\} = \frac{1}{s+3} \quad (7)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s+3} \quad (8)$$

정리 6.3.3을 식 (8)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$s\mathcal{L}\{y\} - 1 - 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s+3} \quad (9)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{[s-2][s+3]} \quad (10)$$

식 (10)의 우변을 부분분수로 분해하면, 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{6}{s-2} + \frac{-1}{s+3} \quad (11)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{e^{2x}\} = \frac{1}{s-2}, \quad \mathcal{L}\{e^{-3x}\} = \frac{1}{s+3} \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$y = -\frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{6}{5}e^{2x} \quad (13)$$



식 (13)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.4.2** 다음 초기값문제를 풀어보자.

$$f'' - 4f' + 3f = 1, \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad (1)$$

따름정리 6.3.1에 초기조건  $f'(0) = f(0) = 0$ 을 대입하면, 다음 식들을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\}, \quad \mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} \quad (2)$$

식 (1)의 미분방정식에 Laplace 변환과 식 (2)를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$s^2\mathcal{L}\{f\} - 4s\mathcal{L}\{f\} + 3\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s} \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s[s-3][s-1]} \quad (4)$$

다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{3s} + \frac{1}{6[s-3]} - \frac{1}{2[s-1]} \quad (5)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \quad (6)$$

식 (6)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.4.3** 다음 초기값문제를 풀어보자.

$$f'' - 4f' + 3f = 2e^t, \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad (1)$$

따름정리 6.3.1에 초기조건  $f'(0) = f(0) = 0$ 를 대입하면, 다음 식들을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\}, \quad \mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} \quad (2)$$

다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{2e^t\} = \frac{1}{s-1} \quad (3)$$

식 (1)~식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$[s^2 - 4s + 3]\mathcal{L}\{f\} = \frac{2}{s-1} \quad (4)$$

다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{2}{[s-1]^2[s-3]} \quad (5)$$

식 (5)에 부분분수분해를 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{f\} = -\frac{1}{2[s-1]} - \frac{1}{[s-1]^2} + \frac{1}{2[s-3]} \quad (6)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$f = -\frac{1}{2}e^t - te^t + \frac{1}{2}e^{3t} \quad (7)$$

식 (7)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

## 제 6.5절 상수계수의 선형미분방정식

다음과 같은 상수계수의 선형미분방정식과 초기값으로 이루어진 초기값문제를 살펴보자.

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (6.5.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \quad (6.5.2)$$

식 (6.5.1)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$a\mathcal{L}\{y''\} + b\mathcal{L}\{y'\} + c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f\} \quad (6.5.3)$$

따름정리 6.3.1을 식 (6.5.4)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$a[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + b[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] + c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g\} \quad (6.5.4)$$

식 (6.5.4)를 정리하면, 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\widehat{g}(s) + \alpha[as + b] + a\beta}{as^2 + bs + c} \quad (6.5.5)$$

식 (6.5.5)에 역Laplace 변환을 적용하면, 이 초기값문제의 해  $y(x)$ 를 구할 수 있다.

**예제 6.5.1** 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (1)$$

이 미분방정식의 양변에 Laplace 변환을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (2)$$

따름정리 6.3.1을 식 (2)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (3)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} \quad (4)$$

다음 식이 성립한다.

$$\frac{s-1}{[s-2][s+1]} = \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+1} \quad (5)$$

식 (4)과 식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} \quad (6)$$

식 (6)의 양변에 역Laplace 변환을 적용하면, 다음 해를 얻는다.

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x} \quad (7)$$

식 (7)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.5.2** 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (1)$$

이 미분방정식의 양변에 Laplace 변환과 따름정리 6.3.1을 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 2^2} \quad (2)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{[s^2 + 1][s^2 + 4]} = \frac{5}{3} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{2}{s^2 + 4} \quad (3)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin t, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 2^2} \right\} = \sin 2t \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$y(x) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \quad (5)$$

식 (5)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.5.3** 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (1)$$

이 미분방정식의 양변에 Laplace 변환을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-x}\} = \frac{1}{s+1} \quad (2)$$

식 (2)에 따름정리 6.3.1을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$[s^2 - 3s + 2] \mathcal{L}\{y\} - sy'(0) - y(0) + 3y(0) = \frac{1}{s+1} \quad (3)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \left[ \frac{1}{s+1} + s - 2 \right] \quad (4)$$

식 (4)를 정리하면, 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{6[s+1]} + \frac{1}{2[s-1]} + \frac{1}{3[s-2]} \quad (5)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} \quad (6)$$

식 (6)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.5.4** 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$f'' + f' - 6f = e^{-3t}, \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad (1)$$

이 미분방정식의 양변에 Laplace 변환과 따름정리 6.3.1을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$s^2 \mathcal{L}\{f\} + s \mathcal{L}\{f\} - 6 \mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s+3} \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{[s+3]^2[s-2]} \quad (3)$$

식 (3)을 다음과 같이 부분분수분해할 수 있다.

$$\frac{1}{[s+3]^2[s-2]} = \frac{1}{25} \frac{1}{s+3} - \frac{1}{5} \frac{1}{[s+3]^2} + \frac{1}{25} \frac{1}{s-2} \quad (4)$$

식 (4)의 양변에 역Laplace변환을 적용하면, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) = -\frac{1}{25}e^{-3t} - \frac{t}{5}e^{-3t} + \frac{1}{25}e^{2t} \quad (5)$$

식 (5)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.5.5** 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$f'' + 6f' + 13f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \quad (1)$$

이 미분방정식의 양변에 Laplace변환과 따름정리 6.3.1을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$s^2\mathcal{L}\{f\} - 1 + 6s\mathcal{L}\{f\} + 13\mathcal{L}\{f\} = 0 \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s^2 + 5s + 13} \quad (3)$$

식 (3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f\} = -\frac{i}{4} \frac{1}{s+3-2i} + \frac{i}{4} \frac{1}{s+3+2i} \quad (4)$$

식 (4)의 양변에 역Laplace변환을 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$f(t) = -\frac{i}{4}e^{-[3-2i]t} + \frac{i}{4}e^{-[3+2i]t} \quad (5)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} \sin 2t \quad (6)$$

식 (6)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

**예제 6.5.6** 다음 초기값문제를 살펴보자.

$$f'' + 6f' + 13f = e^t, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad (1)$$

이 미분방정식의 양변에 Laplace 변환과 따름정리 6.3.1을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$s^2 \mathcal{L}\{f\} - 1 + 6s \mathcal{L}\{f\} + 13 \mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s-1} \quad (2)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{[s-1][s+3+2i][s+3-2i]} \quad (3)$$

식 (3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f\} = -\frac{1+2i}{40} \frac{1}{s+3-2i} - \frac{1-2i}{40} \frac{1}{s+3+2i} + \frac{1}{20} \frac{1}{s-1} \quad (4)$$

식 (4)의 양변에 역Laplace 변환을 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$f(t) = -\frac{1+2i}{40} e^{-[3-2i]t} - \frac{1-2i}{40} e^{-[3+2i]t} + \frac{1}{20} e^t \quad (5)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) = \frac{1}{20} e^{-3t} [2 \sin 2t - \cos 2t] + \frac{1}{20} e^t \quad (6)$$

식 (6)의 해가 식 (1)의 미분방정식과 초기조건을 만족함을 확인할 수 있다. ■

## 제6.6절 단위스텝함수의 Laplace 변환

점  $t = a$ 에서 단위스텝함수(unit step function)를 다음과 같이 정의하자.

$$u(t-a) \doteq 1_{[a,\infty)}(t) \doteq \begin{cases} 0, & (t < a) \\ 1, & (t \geq a) \end{cases} \quad (6.6.1)$$

**정리 6.6.1**

각  $s > 0$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^R = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned} \quad (1)$$

■

**예제 6.6.1** 다음 함수의 Laplace 변환을 구해보자.

$$f(t) = \begin{cases} -1, & (t < 3) \\ 5, & (t \geq 3) \end{cases} \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$f(t) = -1 + 6u(t-3) \quad (2)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{-1\} + 6\mathcal{L}\{u(t-3)\} = -\frac{1}{s} + 6\frac{e^{-3s}}{s} \quad (3)$$

■

**정리 6.6.2**



함수  $f(x) \in \mathcal{E}_\alpha$ 에 대해서  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ 가 존재하면, 각  $a > 0$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f(x)u(x-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(x+a)\}, \quad (s > \alpha)$$

또한, 함수  $f(x)$ 가 구간  $[0, \infty)$ 에서 연속이면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(x-a)u(x-a)$$

증명. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)u(x-a)e^{-sx}dx &= \int_a^\infty f(x)e^{-sx}dx = \int_0^\infty f(t+a)e^{-s[t+a]}dt \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty f(t+a)e^{-st}dt = e^{-as}\mathcal{L}\{f(x+a)\} \end{aligned} \quad (1)$$

즉, 첫 번째 식이 성립한다.

식 (1)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f(x-a)u(x-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(x)\} \quad (2)$$

식 (2)와 정리 6.3.2에서 알 수 있듯이, 두 번째 식이 성립함을 알 수 있다. ■

**예제 6.6.2** 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{s^3} \quad (1)$$

정리 6.6.2를 식 (1)에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}[t-a]^2u(t-a) = \begin{cases} 0, & (t < a) \\ \frac{1}{2}[t-a]^2, & (t > a) \end{cases} \quad (2)$$

■

**예제 6.6.3** 다음 함수를 살펴보자.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & (t < 3) \\ t^2, & (t > 3) \end{cases} \quad (1)$$

즉,  $f(t) = t^2 u(t-3)$ 이다. 정리 6.6.2를 식 (1)에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-3s} \mathcal{L}\{[t+3]^2\} = e^{-3s} \mathcal{L}\{t^2 + 6t + 9\} = e^{-3s} \left[ \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s} \right] \quad (2)$$

■

**예제 6.6.4** 다음 함수를 살펴보자.

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & (0 \leq t < 2\pi) \\ 0, & (t > 2\pi) \end{cases} \quad (1)$$

다음 식이 성립한다.

$$f(t) = [1 - u(t - 2\pi)] \cos 2t = \cos 2t - u(t - 2\pi) \cos 2t \quad (2)$$

정리 6.6.2를 식 (2)에 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} - \mathcal{L}\{u(t - 2\pi) \cos 2t\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} - e^{-2\pi s} \mathcal{L}\{\cos(2t + 2\pi)\} = [1 - e^{-2\pi s}] \mathcal{L}\{\cos 2t\} \\ &= [1 - e^{-2\pi s}] \frac{s}{s^2 + 4} \end{aligned} \quad (3)$$

■

**예제 6.6.5** 다음 미분방정식을 살펴보자.

$$f'' + 2f' - 3f = \begin{cases} 0, & (0 \leq t < 1) \\ 1, & (1 \leq t < 2) \\ 0, & (t \geq 2) \end{cases} \quad (1)$$

초기조건은 다음과 같다.

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad (2)$$

다음 식이 성립함은 명백하다.

$$u(t-1) - u(t-2) = \begin{cases} 0, & (0 \leq t < 1) \\ 1, & (1 \leq t < 2) \\ 0, & (t \geq 2) \end{cases} \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{u(t-1) - u(t-2)\} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \quad (4)$$

식 (1)과 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$f'' + 2f' - 3f = u(t-1) - u(t-2) \quad (5)$$

식 (5)의 양변에 Laplace 변환과 따름정리 6.3.1을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$s^2 \mathcal{L}\{f\} + 2s \mathcal{L}\{f\} - 3 \mathcal{L}\{f\} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \quad (6)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s[s-1][s+3]} e^{-s} - \frac{1}{s[s-1][s+3]} e^{-2s} \quad (7)$$

다음 부분분수분해식이 성립한다.

$$\frac{1}{s[s-1][s+3]} = -\frac{1}{3s} + \frac{1}{4[s-1]} + \frac{1}{12[s+3]} \quad (8)$$

다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{12}e^{-3t}\right\} = -\frac{1}{3s} + \frac{1}{4[s-1]} + \frac{1}{12[s+3]} \quad (9)$$

식 (7), 식 (9) 그리고 정리 6.6.2에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$f(t) = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^{t-1} + \frac{1}{12}e^{-3t+3}\right]u(t-1) - \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^{t-2} + \frac{1}{12}e^{-3t+6}\right]u(t-2) \quad (10)$$

식 (10)의 해가 미분방정식 (1)과 초기조건 (2)를 만족함을 확인할 수 있다. ■

### 제 6.7 절 합성곱

다음 정리를 쉽게 증명할 수 있다.

#### 정리 6.7.1: 합성곱정리

함수들  $f, g \in \mathcal{E}_\alpha$ 에 대해서 함수  $h(x) \doteq \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ 가 존재하고, 또한 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{h(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\}$$

#### 정의 6.7.1: 합성곱

정리 6.7.1의 조건 하에서 함수  $h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ 를 함수들  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 합성곱 (convolution, Faltung)이라 부르고, 식  $h = f * g$ 로 표기한다.

#### 보조정리 6.7.1

함수들  $f, g, h \in \mathcal{E}_\alpha$ 에 대해서 다음 성질들이 성립한다.

- a)  $f * g = g * f$
- b)  $(f * g) * h = f * (g * h)$

c)  $f * (g + h) = f * g + f * h$   
 d)  $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$

증명. 성질 (a)를 증명하기로 하자. 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{g * f\} = \mathcal{L}\{g\}\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{f * g\} \quad (1)$$

여기서 첫 번째 등호와 세 번째 등호는 정리 6.7.1에 의해서 성립한다. 연속함수들  $h_1, h_2$ 에 대해 식  $\mathcal{L}\{h_1\} = \mathcal{L}\{h_2\}$ 가 성립하면, 역Laplace변환의 일의성에서 알 수 있듯이 식  $h_1 = h_2$ 가 성립한다. 함수들  $g * f$ 와  $f * g$ 는 정적분이므로 연속이다. 따라서 식 (1)에서 알 수 있듯이  $g * f = f * g$ 이 성립한다.

같은 방법으로 나머지 성질들도 증명할 수 있다. ■

**예제 6.7.1** 식  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ 과 정리 6.7.1에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{1 * 1\} = \mathcal{L}\{1\}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s^2} \quad (1)$$

■

**예제 6.7.2** 다음 적분방정식을 풀기로 하자.

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t) \sin(x - t) dt \quad (1)$$

식 (1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = 1 + f * \sin(x) \quad (2)$$

식 (2)의 양변에 Laplace변환을 적용하면, 정리 6.7.1에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s} + \mathcal{L}\{f * \sin\} = \frac{1}{s} + \mathcal{L}\{f\} \frac{1}{s^2 + 1} \quad (3)$$

식 (3)을 정리하면, 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{s^2 + 1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \quad (4)$$

식  $\mathcal{L}\left\{\frac{x^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}}$ 를 식 (4)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} \quad (5)$$

■

**예제 6.7.3** 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} = \cos ax \quad (1)$$

식 (1)을 이용해서, 다음 역Laplace변환을 계산해보자.

$$h(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2 + 4)^2}\right\} \quad (2)$$

식 (2)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathcal{L}\{h\} = \frac{s^2}{[s^2 + 4]^2} = \frac{s}{s^2 + 4} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} = \mathcal{L}\{\cos 2x\} \cdot \mathcal{L}\{\cos 2x\} \quad (3)$$

식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \cos 2(x-t) \cos 2t dt \\ &= \int_0^x (\cos 2x \cos 2t + \sin 2x \sin 2t) \cos 2t dt \\ &= \cos 2x \int_0^x \cos^2 2t dt + \sin 2x \int_0^x \sin 2t \cos 2t dt \\ &= \cos 2x \int_0^x \cos^2 2t dt + \frac{1}{2} \sin 2x \int_0^x \sin 4t dt \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \cos 2x \int_0^x \frac{1 + \cos 4t}{2} dt + \frac{1}{2} \sin 2x \int_0^x \sin 4t dt \\
 &= \cos 2x \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right] + \frac{1}{8} \sin 2x [1 - \cos 4x] \\
 &= \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} [\cos 2x \sin 4x - \sin 2x \cos 4x]
 \end{aligned} \tag{5}$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$h(x) = \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} \tag{6}$$

■

### 제6.8절 역Laplace 변환

앞에서 정의했듯이, 함수  $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ 의 Laplace 변환  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ 는 다음과 같다.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \tag{6.8.1}$$

Mellin의 역변환, Bromwich적분, 그리고 Fourier–Mellin적분이라 불리우는 Laplace 역변환은 다음과 같다.

**정리 6.8.1: 역Laplace 변환**

다음 기술적 조건들을 만족하는 함수  $g : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ 와 상수  $\gamma \in \mathbb{R}$ 이 존재한다고 하자.

- a)  $f(t) = f(0) + \int_0^t g(x) dx$
- b) 함수들  $f(t)e^{-\gamma t}$ 와  $g(t)e^{-\gamma t}$ 가 구간  $[0, \infty)$ 에서 Lebesgue적분가능하다.

이러한 조건 하에서 각  $t > 0$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds$$

증명. 이 증명은 Lebesgue 적분을 바탕으로 한다. 따라서, Lebesgue 적분을 모르는 독자는 이 증명을 건너뛰는 것이 좋을 것 같다.

다음 함수를 정의하자.

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz \quad (1)$$

부분적분을 이용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^b \frac{d[1 - \cos x]}{x} dx = \frac{1 - \cos x}{x} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (2)$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$\left| \frac{1 - \cos x}{x^2} \right| = \left| - \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2(k+1)!} \right| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} \quad (3)$$

여기서 첫 번째 등호는 Taylor 전개에 의해서 성립한다. 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들을 만족하는 상수  $M$ 이 존재한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - \cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{2}{x^2} dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{|x|} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2}{x^2} dx \leq M \quad (4)$$

따라서, 적분  $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$ 는 절대적분가능 (absolutely integrable) 하다. 이 결과에서 알 수 있듯이, 함수  $S(x)$  유계이다. 예제 5.3.3에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

식 (5)의 적분을 Dirichlet 적분이라 한다. 식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S(Tx) = H(x) \doteq \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ \frac{1}{2}, & (x = 0) \\ 0, & (x < 0) \end{cases} \quad (6)$$

이  $H(x)$ 를 Heaviside 함수라고 부른다.



다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{t[\gamma+i\xi]} F(\gamma+i\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{t[\gamma+i\xi]} \int_0^\infty f(u) e^{-u[\gamma+i\xi]} du d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에 Fubini정리를 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds &= \int_0^\infty f(u) e^{[t-u]\gamma} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{[t-u]i\xi} d\xi \right] du \\ &= \int_0^\infty f(u) e^{-[u-t]\gamma} \frac{\sin T[u-t]}{\pi[u-t]} du \end{aligned} \quad (8)$$

가정에서 알 수 있듯이, 함수  $f(t)e^{-\gamma t}$ 와 도함수  $[f(t)e^{-\gamma t}]' = [f'(t) - \gamma f(t)]e^{-\gamma t}$ 는 Lebesgue적분가능이다. 따라서,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\gamma t} = 0$ 이다. 식 (8)의 우변함수를 부분적분하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds = -f(0)e^{t\gamma} S(-Tt) - \int_0^\infty [f(u)e^{-[u-t]\gamma}]' S(T[u-t]) du \quad (9)$$

식 (9)의 우변의 첫 번째 항에 극한  $T \rightarrow \infty$ 를 취하면, 다음 식을 얻는다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(0)e^{t\gamma} S(-Tt) = 0 \quad (10)$$

식 (9)의 우변의 두 번째 항에 극한  $T \rightarrow \infty$ 를 취하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^\infty [f(u)e^{-[u-t]\gamma}]' S(T[u-t]) du &= \int_0^\infty [f(u)e^{-[u-t]\gamma}]' H(u-t) du \\ &= \int_t^\infty [f(u)e^{-[u-t]\gamma}]' du = f(u)e^{-[u-t]\gamma} \Big|_{u=t}^{u=\infty} = f(t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 첫 번째 등호는 Lebesgue 지배수렴정리(Lebesgue's dominated convergence theorem)에 의해 성립한다. 식 (10)과 식 (11)을 식 (9)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds = f(t) \quad (12)$$

■

정리 6.8.1에서  $\gamma$ 는 Laplace 변환  $F(s)$ 의 모든 특이점들(all singularities)의 실수부보다

큰 상수를 선택하는 것으로 충분하다.

**예제 6.8.1** Laplace 변환  $F(s) = 1/\sqrt{s+1}$ 의 역변환을 구하기로 하자. 정리 6.8.1에서 알 수 있듯이, 다음 적분을 계산하면 된다.

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{\sqrt{s+1}} ds \quad (1)$$

여기서  $a$ 와  $t$ 는 양의 상수들이다.

다음 주가지(principal branch)를 생각해 보자.

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{|z|}} \exp\left(-i\frac{\arg(z)}{2}\right) \doteq \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right), \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \quad (2)$$

즉, 가지자름(branch cut)으로  $(-\infty, -1]$ 를 선택하자. 그림 6.8.1의 열쇠구멍경로를  $C = \sum_{j=0}^4 C_j + C_\epsilon$ 으로 표기하자. 그림 6.8.1을 그리기 위해서는 아래 수록한 InverseLaplace-Proof101.tikz파일을 실행하라. Cauchy 정리에서 알 수 있듯이, 함수  $f(z) = e^{zt}/\sqrt{z+1}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (3)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \int_{C_0} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \int_{C_1} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \int_{C_2} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \\ & + \int_{C_3} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \int_{C_4} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right| \leq \int_{C_\epsilon} \left| \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} \right| dz \leq 2\pi\epsilon \frac{e^{-t+\epsilon t \cos \theta}}{\sqrt{\epsilon}} \leq 2\pi\epsilon \frac{e^{[\epsilon-1]t}}{\sqrt{\epsilon}} \quad (5)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = 0 \quad (6)$$

다음 식이 성립한다.

$$\left| \int_{C_3+C_4} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right| \leq \left| \int_{\Re\{z\}<0} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right| + \left| \int_{0 \leq \Re\{z\} \leq a} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right| \quad (7)$$

다음 식이 성립한다.

$$\left| \int_{\Re\{z\}<0} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right| \leq \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{e^{tR \cos \theta}}{\sqrt{-R \cos \theta - 1}} d\theta + \frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{tR \cos \theta}}{\sqrt{-R \cos \theta - 1}} d\theta \quad (8)$$

식 (8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Re\{z\}<0} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = 0 \quad (9)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\left| \int_{0 \leq \Re\{z\} \leq a} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right| \leq \frac{2}{\sqrt{R}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{e^{R \cos \theta t}}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta \leq \frac{2}{\sqrt{R}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{e^{at}}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta \quad (10)$$

여기서 두 번째 부등호는 조건  $\theta_0 = \cos^{-1}(a/R) \leq \theta \leq \pi/2$ 에 의해서 성립한다. 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{0 \leq \Re\{z\} \leq 1} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = 0 \quad (11)$$

식 (9)와 식 (11)을 식 (7)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3+C_4} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_4} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = 0 \quad (12)$$

적분경로  $C_1$ 에서 변수변환  $z = xe^{i\pi} - 1$ 을 적용하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz &= \int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{\exp(xe^{i\pi}t - t)}{\sqrt{xe^{i\pi}}} d[xe^{i\pi} - 1] \\ &= e^{-t} \int_{R-1}^{\epsilon} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{xe^{i\pi/2}}} e^{i\pi} dx = e^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{x}i} dx \\ &= \frac{1}{i} e^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = -ie^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned} \quad (13)$$

적분경로  $C_2$ 에서 변수변환  $z = xe^{-i\pi} - 1$ 을 적용하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz &= \int_{-1-\epsilon}^{-R} \frac{\exp(xe^{-i\pi}t - t)}{\sqrt{xe^{-i\pi}}} d[xe^{-i\pi} - 1] \\ &= e^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{xe^{-i\pi/2}}} e^{-i\pi} dx = e^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{x}[-i]} [-1] dx \\ &= \frac{1}{i} e^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = -ie^{-t} \int_{\epsilon}^{R-1} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{C_1} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \int_{C_2} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \right] \\ = -2ie^{-t} \int_0^{\infty} e^{-ut} u^{-\frac{1}{2}} du = -2i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} = -2i\sqrt{\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (6), 식 (12)와 식 (15)를 식 (4)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_0} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz - \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz e^{-t} \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \end{aligned} \quad (16)$$

■

```

1 % -----
2 % Filename: InverseLaplaceProof.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[
6   scale=4,
7   line cap=round,
8   dec/.style args={#1#2}{
9     decoration={markings, mark=at position #1 with {#2}},
10    postaction={decorate}
11  ]
12 \path[gray,thin,xshift=-1.2cm] (-.2,0) edge[->] (2.4,0) (1.2,-1.2) edge[->]
13 (1.2,1.2);
14 \draw[line width=2.0pt, color=red, dec={0.59}{\arrow{>}}]
15 ( {-180+\asin(0.1)}:1cm)coordinate(1) arc ( {-180+\asin(0.1)}: {-60}:1cm)coordinate
16 (2);
17 \draw[line width=2.0pt, color=red, dec={0.59}{\arrow{>}}]
18 ( {60}:1cm)coordinate(3) arc ( {60}: {180-\asin(0.1)}:1cm)coordinate(4);
19 \draw[line width=2.0pt, color=red, dec={0.69}{\arrow{>}}] (2) --node[right,black
20 ]{(3)};
21 \draw[line width=2.0pt, color=red, ][dec={0.59}{\arrow{<}}]

```

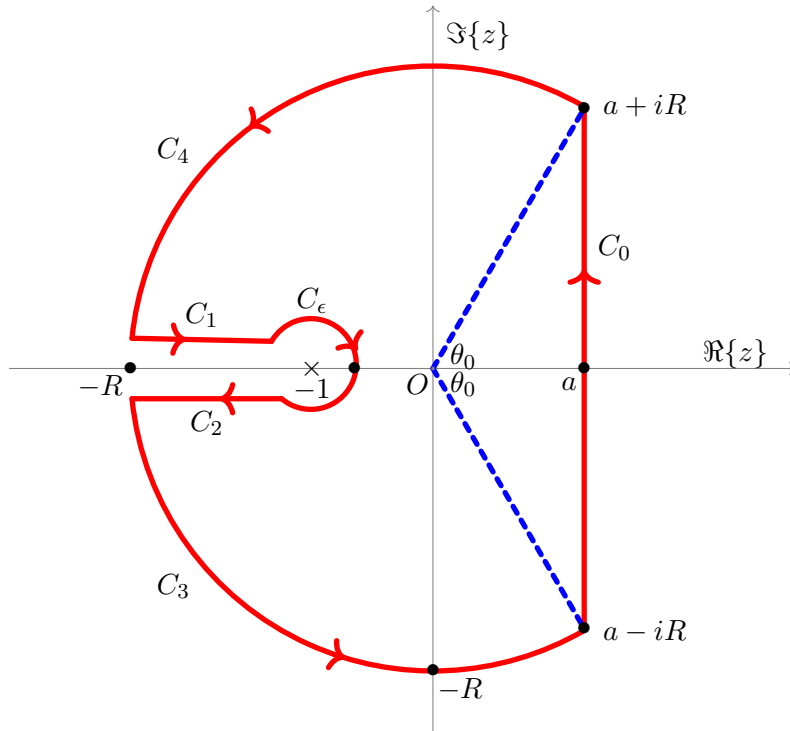


그림 6.8.1. 역Laplace변환을 위한 적분경로

```

19      (-0.5,-0.10)coordinate(5) arc (-130:150:1.5mm)coordinate(6);
20
21 \draw[line width=2.0pt, color=blue, dashed][dec={0.59}] (0,0) -- (0.5,0.86);
22 \draw[line width=2.0pt, color=blue, dashed][dec={0.59}] (0,0) -- (0.5,-0.86);
23 \draw[line width=2.0pt, color=red, dec={0.69}]{\arrowleft} (1)--node[below,black
24   ]{C_2}(5);
25 \draw[line width=2.0pt, color=red, dec={0.39}]{\arrowright} (4)--node[above,black]{
26   C_1}(6);
27
28 \path (-0.4,0.225) node{C_{\epsilon}}
29   (-140:1.12cm) node{C_3}
30   (140:1.12cm) node{C_4}
31   (0,0)node[circle,fill=gray,inner sep=.5pt]{};
32
33 \node at (1.0,0.05){\Re{\left\{ z \right\}}};
34 \node at (0.15,1.1){\Im{\left\{ z \right\}}};
35 \node at (0.6, 0.4) {C_0};
36 \node at (-0.4,0) {\times};
37 \node at (-0.4,-0.07) {-1};
38 \node at (-0.05,-0.05) {0};
39 \node at (0.5,0) {\bullet};
40 \node at (0.45,-0.05) {a};
41 \node at (-1,0) {\bullet};
42 \node at (-1.10,-0.06) {-R};
43 \node at (0,-1) {\bullet};
44 \node at (0.09,-1.06) {-R};
45 \node at (0.5,0.86) {\bullet};
46 \node at (0.7,0.87) {a + i R};
47 \node at (0.5,-0.86) {\bullet};
48 \node at (0.7,-0.87) {a - i R};
49 \node at (-0.26,0) {\bullet};
50 \node at (0.10,0.04) {\theta_0};

```

```

49 \node at (0.10,-0.05) {\theta_0};
50 \end{tikzpicture}
51 % -----

```

유리함수 (rational function)  $q(z) = f(z)/g(z)$  를 살펴보자. 복소역함수  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  는 차수가  $n$  이고 중복도가 각각  $m_1, m_2, \dots, m_k$  인 중복근들  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  를 갖는다고 하자. 다음 식이 성립한다.

$$g(z) = c_n [z - \lambda_1]^{m_1} [z - \lambda_2]^{m_2} \dots [z - \lambda_k]^{m_k} \tag{6.8.2}$$

여기서  $c_n$  은 상수이다. 또한 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{j=1}^k m_j = n \tag{6.8.3}$$

함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  는 차수가 최대  $n - 1$  인 복소역함수이고, 역함수들  $f(z)$  과  $g(z)$  은 공통근을 갖지 않는다고 하자. 정리 6.8.1의 증명에서 알 수 있듯이, 유리함수  $q(z)$  의 역Laplace 변환은 다음과 같다.

$$(\mathcal{L}^{-1}\{q\})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[a+iy]t} q(a + iy) dy \tag{6.8.4}$$

이 유리함수  $q(z)$  의 역Laplace 변환을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

**정리 6.8.2: 유리함수의 역Laplace 변환**

정리 6.8.1의 조건 하에서 다음 식이 성립한다.

$$(\mathcal{L}^{-1}\{q\})(t) = \sum_{j=1}^k \text{Res}(\lambda_j; e^{zt} q(z)), \quad t > 0$$

증명. 그림 6.8.2의 적분경로를  $C_R = \gamma_R + \Gamma_R$  로 표기하자. 여기서  $\gamma_R$  과  $\Gamma_R$  은 각각 다음과

같다.

$$\gamma_R = a + iy, \quad (y \in [-R, R]) \tag{1}$$

$$\Gamma_R = a + Re^{i\theta}, \quad \left(\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) \tag{2}$$

그림 6.8.2을 그리기 위해서는 아래 수록한 파일 InverseLaplaceProof102.tikz를 실행하라.

다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz \tag{3}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(a+iy)}{g(a+iy)} e^{[a+iy]t} i dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{f(a+iy)}{g(a+iy)} e^{[a+iy]t} dy \tag{4}$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a+iy)}{g(a+iy)} e^{[a+iy]t} dy = (\mathcal{L}^{-1}q)(t) \tag{5}$$

여기서 마지막 등호는 식 (6.8.4)에 의해서 성립한다. 제1.8절에서 자주 사용한 방법을 적용하면, 각  $t > 0$ 에 대해서 다음 식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz = 0 \tag{6}$$

식 (5)와 식 (6)을 식 (3)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$(\mathcal{L}^{-1}\{q\})(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{g(z)} e^{zt} dz = \sum_{j=1}^k \text{Res}(\lambda_j; e^{zt}q(z)) \tag{7}$$

여기서 두 번째 등호는 유수정리에 의해서 성립한다. ■

```

1 % -----
2 %InverseLaplaceProof102.tikz
3 % Programmed by CBS
4 % -----
5 \begin{tikzpicture}[scale=2.5]
6   \draw[->] (-1.5,0) -- (1.5,0) node[right] {\$Re \{z\} \$};
7   \draw[->] (0,-1.7) -- (0,1.7) node[above] {\$Im \{z\} \$};
8   \draw[red, line width=2pt] (0.7,-1.5) -- (0.7,1.5);

```

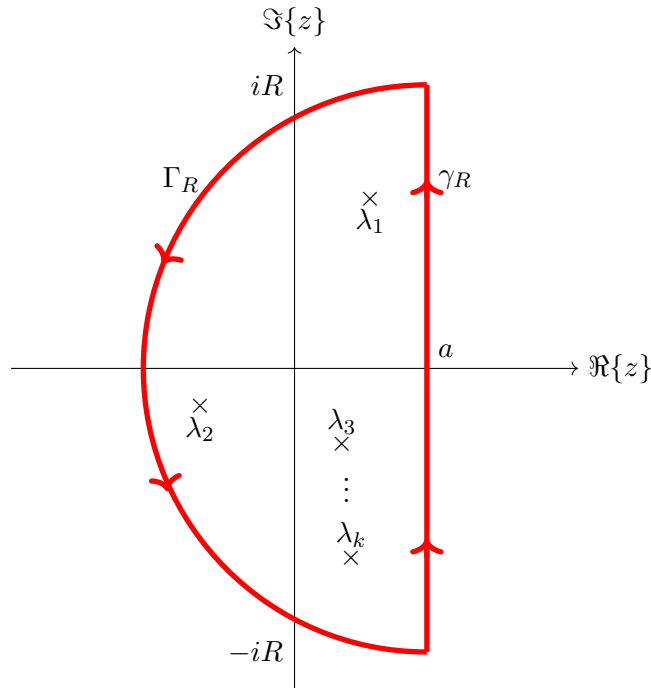


그림 6.8.2. 정리 6.8.2를 증명하기 위한 적분경로

```

9   \draw[->,red,line width=2pt] (0.7,-1) -- (0.7,-0.9);
10  \draw[->,red,line width=2pt] (0.7,0.9) -- (0.7,1);
11  \draw[->,red,line width=2pt] (-0.67,0.6) -- (-0.7,0.55);
12  \draw[->,red,line width=2pt] (-0.68,-0.6) -- (-0.67,-0.65);
13  \draw[black, very thick] (0.7,0) node[above right] {$a$};
14  \draw[black, very thick] (0,1.5) node[left] {$i R$};
15  \draw[black, very thick] (0,-1.5) node[left] {$-i R$};
16  \draw[red, line width=2pt] (0.7,1.5) arc (90:270:1.5cm);
17  \node[draw=none] at (0.4,0.9) {$\times$};
18  \node[anchor=north] at (0.4,0.9) {$\lambda_1$};
19  \node[draw=none] at (-0.5,-0.2) {$\times$};
20  \node[anchor=north] at (-0.5,-0.2) {$\lambda_2$};
21  \node[draw=none] at (0.3,-1.0) {$\times$};
22  \node[anchor=south] at (0.3,-1.0) {$\lambda_k$};
23  \node[draw=none] at (0.25,-0.4) {$\times$};
24  \node[anchor=south] at (0.25,-0.4) {$\lambda_3$};
25  \node[draw=none] at (0.275,-0.6) {$\vdots$};
26  \node[draw=none] at (0.85,1) {$\gamma_R$};
27  \node[draw=none] at (-0.6,1) {$\Gamma_R$};
28  \end{tikzpicture}
29  % -----

```

**예제 6.8.2** 정의 6.8.2를 사용해서 유리함수의 역Laplace 변환들을 구해보자.

a) Laplace 변환  $q(s) = [s - 1]^{-1}$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s - 1]^{-1}\}(t) = \text{Res}(1; e^{st}q(s)) = e^t \tag{1}$$



즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s-1]^{-1}\}(t), (t > 0) \tag{2}$$

b) Laplace 변환  $q(s) = [1+s]^{-2}$  에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s+1]^{-2}\}(t) = \text{Res}(-1; e^{st}q(s)) = \left. \frac{d}{ds} e^{st} \right|_{s=-1} = \left. te^{st} \right|_{s=-1} \tag{3}$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s+1]^{-2}\}(t) = te^{-t}, (t > 0) \tag{4}$$

c) Laplace 변환  $q(s) = s/[1+s^2]$  에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}(t) = \text{Res}(i; e^{st}q(s)) + \text{Res}(-i; e^{st}q(s)) \tag{5}$$

또한 다음 식들이 성립한다.

$$\text{Res}(i; e^{st}q(s)) = \lim_{s \rightarrow i} [s-i] e^{st} \frac{s}{s^2+1} = \left. e^{st} \frac{s}{s+i} \right|_{s=i} = \frac{1}{2} e^{it} \tag{6}$$

$$\text{Res}(-i; e^{st}q(s)) = \lim_{s \rightarrow -i} [s+i] e^{st} \frac{s}{s^2+1} = \left. e^{st} \frac{s}{s-i} \right|_{s=-i} = \frac{1}{2} e^{-it} \tag{7}$$

식 (6) 과 식 (7) 을 식 (5) 에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t, (t > 0) \tag{8}$$

■



## 제 7 장

# 금융파생상품과 Fourier 변환

The characteristic function of the distribution of either an asset price or a rate is just the Fourier transform of its probability distribution function. Its probability distribution function can be recovered from the characteristic function through Fourier inversion. This is particularly important for many classes of models which only have a closed forms in their characteristic function representation. This is why a financial engineer should know Fourier transforms.

CBS

이 장에서는 Fourier 변환을 사용한 금융파생상품의 가치평가에 대해서 살펴보자. 이 장을 읽기 위해서는 해석학(real analysis), 복소함수론(complex analysis), 측도론(measure theory), 편미분방정식(partial differential equation), 확률미분방정식(stochastic differential equation)에 관한 기초적인 지식이 있어야 한다. 또한, 최병선 [2], [3], [4]에서 다루는 정도의 금융공학에 관한 지식이 있어야 한다.

Fourier 변환을 사용한 금융파생상품의 가치평가에 대한 좀 더 자세한 내용은 Carr & Madan [12], Cont & Tankov [22], Dempster & Hong [26], Dufresne & Garrido & Morales[28], Gatheral [33], In 'T Hout & Weidman[37], Jackson & Jaimungal & Surkov [38], Kwok & Leung & Wong [43], Lee [44], Lewis[45], Lord & Fang & Bervoets & Oosterlee[46], Schmelzle [52], Scott1997 [57], Zhu [64], Zhylyevsky [65] 등을 참조하라.

### 제 7.1 절 유럽형 옵션가치

원자산과정이  $\{S_u\}$  이고 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽형콜옵션의 무재정가치를 살펴보자. 원자산  $S_u$ 의 로그, 즉 로그원자산을  $x_u \doteq \ln S_u$ 로 표기하자. 만기시점  $T$ 에서

로그원자산  $x_T = \ln S_T$ 의 조건부확률밀도함수를  $f_t^Q(x_T) \doteq f^Q(x_T | x_t)$ 로 표기하자. 여기서  $Q$ 는 위험중립확률측도이다. 또한, 로그행사가가격을  $k \doteq \ln K$ 로 표기하자.

원자산과정이  $\{S_u\}$ 이고 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽형콜옵션의 시점  $t$ 에서 무재정가치  $C(K)$ 는 다음과 같다.

$$C(K) = e^{-r\tau} E_t^Q ([S_T - K]^+) \quad (7.1.1)$$

여기서  $\tau \doteq T - t$ 이고,  $A^+ \doteq \max\{A, 0\}$ 이다. 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} C(K) &= e^{-r\tau} E_t^Q ([S_T - K] 1_{\{S_T > K\}}) \\ &= e^{-r\tau} E_t^Q (S_T 1_{\{S_T > K\}}) - K e^{-r\tau} E_t^Q (1_{\{S_T > K\}}) \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

다음과 같이 내가격확률들 (ITM probabilities)  $p_1$  과  $p_2$ 를 정의하자.

$$p_1 \doteq \frac{e^{-r\tau}}{S_t} E_t^Q (S_T 1_{\{S_T > K\}}) \quad (7.1.3)$$

$$p_2 \doteq E_t^Q (1_{\{S_T > K\}}) \doteq Q(S_T > K) \quad (7.1.4)$$

식 (7.1.2)~식 (7.1.4)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션의 무재정가치  $C(K)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(K) = S_t p_1 - K e^{-r\tau} p_2 \quad (7.1.5)$$

다음과 같은 Radon-Nikodym 밀도를 생각해보자.

$$\frac{dQ}{dQ^S} \doteq \frac{\exp\left(\int_0^T r du\right)}{S_T/S_t} \Big/ \exp\left(\int_0^t r du\right) = S_t \frac{e^{r\tau}}{S_T} \quad (7.1.6)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 e^{-r\tau} E_t^Q (S_T 1_{\{S_T > K\}}) &= S_t E_t^Q \left( \frac{S_T/S_t}{e^{r\tau}} 1_{\{S_T > K\}} \right) \\
 &= S_t E_t^{Q^S} \left( \frac{S_T/S_t}{e^{r\tau}} 1_{\{S_T > K\}} \frac{dQ}{dQ^S} \right) = S_t E_t^{Q^S} (1_{\{S_T > K\}}) \\
 &= S_t Q^S (S_T > K)
 \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

여기서 세 번째 등호는 식 (7.1.6)에 의해서 성립한다. 식 (7.1.3)과 식 (7.1.7)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$p_1 = Q^S (S_T > K) \tag{7.1.8}$$

식 (7.1.4)와 식 (7.1.8)에서 알 수 있듯이, 식 (7.1.5)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(K) = S_t Q^S (S_T > K) - K e^{-r\tau} Q (S_T > K) \tag{7.1.9}$$

확률측도  $Q$ 는 채권가격  $e^{-r\tau}$ 를 기준재(numéraire)로 하고, 확률측도  $Q^S$ 는 원자산  $S_t$ 를 기준재로 함에 유의하라.

식 (7.1.9)를 유도하는 방법을 사용해서, 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽형풋옵션의 공정한 가치가 다음과 같음을 증명할 수 있다.

$$P(K) = K e^{-r\tau} Q (S_T \leq K) - S_t Q^S (S_T \leq K) \tag{7.1.10}$$

**예제 7.1.1** 원자산과정  $\{S_u\}$ 가 다음 확률미분방정식을 따른다고 하자.

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t^Q \tag{1}$$

여기서 무위험이자율  $r$ 과 변동성  $\sigma (> 0)$ 는 상수들이다. 이 경우에는 식 (7.1.9)로부터 Black-Scholes식을 유도할 수 있다.

$$C(K) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \tag{2}$$

여기서  $d_1$  과  $d_2$  는 각각 다음과 같다.

$$d_1 \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left[ r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \quad (3)$$

$$d_2 \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \quad (4)$$

Black-Scholes식의 유도에 관한 자세한 내용은 Black & Scholes [9], Merton [49], 최병선 [3]을 참조하라. ■

**예제 7.1.2** 이 예제에서는  $r_u$  또는  $\sigma_u$ 가 확률변수인 경우를 살펴보자. 확률공간  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 와 증대정보계  $\{\mathcal{F}_u | u \geq 0\}$ 에 대해서 위험중립확률측도  $Q$ 가 일의적으로 존재한다고 하자. 이 위험중립확률측도  $Q$  하에서 다음 확률미분방정식을 만족하는 확률과정  $\{S_u | u \geq 0\}$ 를 생각해보자.

$$\frac{dS_u}{S_u} = r_u du + \sigma_u dW_u^Q, \quad (u \geq 0) \quad (1)$$

여기서  $\{W_u^Q | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이고,  $\{\sigma_u | u \geq 0\}$ 는  $\{\mathcal{F}_u\}$ -적합과정이다. 또한,  $\{r_u | u \geq 0\}$ 는  $\{\mathcal{F}_u\}$ -적합과정으로서 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dr_u = \mu_{r,u} du + \sigma_{r,u} dW_{r,u}^Q, \quad (u \geq 0) \quad (2)$$

여기서  $\{W_{r,u}^Q | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이다. Brown운동들  $\{W_u^Q\}$ 와  $\{W_{r,u}^Q\}$ 는 서로 독립이라고 가정하자. 식 (1)에 Ito-Doebelin보조정리를 적용하면, 확률과정  $\{x_u \doteq \ln S_u | u \geq 0\}$ 가 다음 확률미분방정식을 만족함을 알 수 있다.

$$dx_u = \left[ r_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2 \right] du + \sigma_u dW_u^Q, \quad (u \geq 0) \quad (3)$$

원자산이  $S_u$ 이고 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 현재시점  $t$ 에서 유럽형콜옵션의 공정

한 가치  $C(K)$ 는 다음 위험중립가치평가식을 만족한다.

$$C(K) = E_t^Q \left( \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) [S_T - K]^+ \right) \quad (4)$$

식 (4)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(K) = I_1 - I_2 \quad (5)$$

여기서  $I_1$ 과  $I_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$I_1 \doteq E_t^Q \left( \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) S_T 1_{\{S_T > K\}} \right) \quad (6)$$

$$I_2 \doteq E_t^Q \left( \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) K 1_{\{S_T > K\}} \right) \quad (7)$$

위험중립확률측도  $Q$ 의 기준재는 단기금융계정 (money market account)  $M_u \doteq \exp \left( \int_t^u r_s ds \right)$ 이다.

기준재를 바꾸어서  $I_1$ 을 계산하기 위해서, 위험중립확률측도  $Q$ 를 원자산  $S_u$ 를 기준재로 하는 확률측도로 변환하기로 하자. 다음과 같은 확률과정  $\{\nu_{1,u} | u \geq t\}$ 를 정의하자.

$$\nu_{1,u} \doteq -\sigma_u, \quad (t \leq u \leq T) \quad (8)$$

다음과 같은 Novikov 조건이 만족된다고 가정하자.

$$E_t^Q \left( \exp \left( \frac{1}{2} \int_t^T \nu_{1,s}^2 ds \right) \right) < \infty \quad (9)$$

다음과 같이 Deléans 지수를 정의하자.

$$\xi_{1,u} \doteq \exp \left( - \int_t^u \nu_{1,s} dW_s^Q - \frac{1}{2} \int_t^u \nu_{1,s}^2 ds \right) \quad (10)$$

식 (8)을 식 (10)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\xi_{1,u} = \exp \left( \int_t^u \sigma_s dW_s^Q - \frac{1}{2} \int_t^u \sigma_s^2 ds \right) \quad (11)$$

다음과 같이 측도  $Q_1$  과 확률변수  $W_u^{Q_1}$  을 정의하자.

$$dQ_1 \doteq \xi_{1,T} dQ \quad (12)$$

$$W_u^{Q_1} \doteq W_u^Q + \int_t^u \nu_{1,s} ds = W_u^Q - \int_t^u \sigma_s ds \quad (13)$$

Girsanov 정리에서 알 수 있듯이,  $Q_1$  은 확률측도이며  $\{W_u^{Q_1}\}$  은 확률측도  $Q_1$  하에서 Brown 운동이다. 확률측도  $Q_1$  은 원자산  $S_u$  를 기준재로 하는 확률측도이다. 이 확률측도를  $Q^S$  로 표기하는 것이 일반적이거나 여기서는  $Q_1$  으로 표기하자. 식 (3) 과 식 (13) 에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$dx_u = \left[ r_u - \frac{1}{2} \sigma_u^2 \right] du + \sigma_u [dW_u^{Q_1} + \sigma_u du], \quad (t \leq u \leq T) \quad (14)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$dx_u = \left[ r_u + \frac{1}{2} \sigma_u^2 \right] du + \sigma_u dW_u^{Q_1}, \quad (t \leq u \leq T) \quad (15)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{S_T}{S_t} &= \exp \left( \ln \frac{S_T}{S_t} \right) = \exp \left( \int_t^T d \ln S_u \right) = \exp \left( \int_t^T dx_u \right) \\ &= \exp \left( \int_t^T r_s ds \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_t^T \sigma_s^2 ds + \int_t^T \sigma_s dW_s^Q \right) = \exp \left( \int_t^T r_s ds \right) \xi_{1,T} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 네 번째 등호는 식 (3) 에 의해서, 그리고 다섯 번째 등호는 식 (11) 에 의해서 성립한다. 다음 식이 성립함은 자명하다.

$$\frac{M_T}{M_t} = \exp \left( \int_t^T r_s ds \right) \quad (17)$$

식 (16) 과 식 (17) 을 식 (12) 에 대입하면, Radon-Nikodym 밀도가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\frac{dQ_1}{dQ} = \frac{S_T/S_t}{M_T/M_t} = \exp \left( -\int_t^T r_s ds \right) \frac{S_T}{S_t} \quad (18)$$



식 (18)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$dQ_1 = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \frac{S_T}{S_t} dQ \quad (19)$$

다음 식들이 성립한다.

$$I_1 = S_t \int 1_{\{S_T > K\}} \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \frac{S_T}{S_t} dQ = S_t \int 1_{\{S_T > K\}} dQ_1 \quad (20)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (6)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (19)에 의해서 성립한다.

식 (20)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I_1 = S_t Q_1(S_T > K) \quad (21)$$

기준재를 바꾸어서  $I_2$ 를 계산하기로 하자. 만기시점  $T$ 에서 채권가격이 1인 제로쿠폰채의 시점  $t$ 에서 가치를  $B(t, T)$ 라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (22)$$

식 (22)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\ln B(t, T) = -\int_t^T r_s ds \quad (23)$$

식 (2)와 식 (23)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{dB(u, T)}{B(u, T)} = r_u du + \sigma_{B(u, T)} dW_u^Q, \quad (t \leq u \leq T) \quad (24)$$

여기서  $\sigma_{B(u, T)}$ 는 제로쿠폰채가치의 변동성이다. 다음과 같은 확률과정  $\{\nu_{2, u} \mid u \geq t\}$ 를 정의하자.

$$\nu_{2, u} \doteq -\sigma_{B(u, T)}, \quad (t \leq u \leq T) \quad (25)$$

다음과 같은 Novikov 조건이 만족된다고 가정하자.

$$E_t^Q \left( \exp \left( \frac{1}{2} \int_t^T \nu_{2,s}^2 ds \right) \right) < \infty \quad (26)$$

다음과 같이 Deléans 지수를 정의하자.

$$\xi_{2,u} \doteq \frac{\exp \left( - \int_t^u r_s ds \right)}{B(t,u)} \quad (27)$$

다음과 같이 측도  $Q_2$ 와 확률변수  $W_u^{Q_2}$ 를 정의하자.

$$dQ_2 \doteq \xi_{2,T} dQ \quad (28)$$

$$W_u^{Q_2} \doteq W_u^Q + \int_t^u \nu_{2,s} ds = W_u^Q - \int_t^u \sigma_{B(s,T)} ds, \quad (t \leq u \leq T) \quad (29)$$

Girsanov 정리에서 알 수 있듯이,  $Q_2$ 는 확률측도이며  $\{W_u^{Q_2}\}$ 는 확률측도  $Q_2$  하에서 Brown 운동이다. 이  $Q_2$ 는 제로쿠폰채가치  $B(u, T)$ 를 기준재로 하는 확률측도이다. 이 확률측도를  $Q^T$ 로 표기하는 것이 일반적이거나 여기서는  $Q_2$ 로 표기하자. 식 (3)과 식 (29)에서 알 수 있듯이 다음 식이 성립한다.

$$dx_u = \left[ r_u - \frac{1}{2} \sigma_u^2 \right] du + \sigma_u [dW_u^{Q_2} + \sigma_{B(u,T)} du] \quad (30)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$dx_u = \left[ r_u - \frac{1}{2} \sigma_u^2 + \sigma_u \sigma_{B(u,T)} \right] du + \sigma_u dW_u^{Q_2}, \quad (t \leq u \leq T) \quad (31)$$

식 (27)과 식 (28)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$dQ_2 = \frac{\exp \left( - \int_t^T r_s ds \right)}{B(t,T)} dQ \quad (32)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} I_2 &= K \int 1_{\{S_T > K\}} \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) dQ \\ &= K \int 1_{\{S_T > K\}} B(t,T) dQ_2 = KB(t,T) \int 1_{\{S_T > K\}} dQ_2 \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (7)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (32)에 의해서 성립한다. 식 (33)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$I_2 = KB(t, T)Q_2(S_T > K) \tag{34}$$

식 (21)과 식 (34)를 식 (5)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$C(K) = S_t Q_1(S_T > K) - KB(t, T)Q_2(S_T > K) \tag{35}$$

식 (35)를 유도하는 과정에서  $\{W_{r,u}^Q\}$ 가 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이라는 것과 이자율과정  $\{r_u\}$ 와 변동성과정  $\{\sigma_u\}$ 가  $\{\mathcal{F}_u\}$ -적합과정이라는 것만을 가정했다는 점에 유의하라.

식 (35)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션가치의 델타는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{\partial C(K)}{\partial S_t} = Q_1(S_T > K) \tag{36}$$

식 (36)을 고려해서, Zhu [64, p. 24]는  $Q_1$ 을 델타확률측도(delta probability measure)라 명명했다.

식 (35)를 유도하는 방법을 사용하거나 또는 풋콜패리티를 사용해서, 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽형풋옵션의 공정한 가치가 같음을 알 수 있다.

$$P(K) = KB(t, T)Q_2(S_T \leq K) - S_t Q_1(S_T \leq K) \tag{37}$$

■

## 제7.2절 내가격확률과 Fourier 변환

다양한 확률측도들  $Q_1$ 과  $Q_2$ 를 사용해서 유럽형콜옵션의 Black-Schoels가치 뿐만아니라 다른 가치들을 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$C(K) = S_t Q_1(x_T > k) - KB(t, T)Q_2(x_T > k) \tag{7.2.1}$$

확률측도들  $Q_1$  과  $Q_2$  하에서 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 확률밀도함수들을 각각  $f_1(\cdot)$ 과  $f_2(\cdot)$ 라 하자. 이 확률밀도함수들의 Fourier 변환들  $\hat{f}_1(\cdot)$ 와  $\hat{f}_2(\cdot)$ 와 특성함수들  $\psi_1(\cdot)$ 과  $\psi_2(\cdot)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\hat{f}_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x_T} f_j(x_T) dx_T, \quad (j = 1, 2) \tag{7.2.2}$$

$$f_j(x_T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_T} \hat{f}_j(\lambda) d\lambda, \quad (j = 1, 2) \tag{7.2.3}$$

$$\psi_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_T} f_j(x_T) dx_T, \quad (j = 1, 2) \tag{7.2.4}$$

$$f_j(x_T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x_T} \psi_j(\lambda) d\lambda, \quad (j = 1, 2) \tag{7.2.5}$$

$$\psi_j(\lambda) = \hat{f}_j(-\lambda), \quad (j = 1, 2) \tag{7.2.6}$$

다음 예제는 Dirac 델타함수에 관한 것이다.

**예제 7.2.1** 다음 함수를 정의하자.

$$S_A(x) \doteq \frac{\sin(Ax)}{\pi x} \tag{1}$$

함수  $S_A(x)$ 는 다음과 같이 정의되는 비정규화된 sinc 함수 (unnormalized sinc function)  $\text{sinc}_U x$  나 정규화된 sinc 함수 (normalized sinc function)  $\text{sinc}_N x$ 와 밀접한 관계가 있다.

$$\text{sinc}_U x \doteq \frac{\sin x}{x}, \quad \text{sinc}_N x \doteq \frac{\sin \pi x}{\pi x} \tag{2}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\int_{-A}^A e^{i\lambda x} d\lambda = \left[ \frac{e^{i\lambda x}}{ix} \right]_{-A}^A = \frac{e^{iAx} - e^{-iAx}}{ix} = \frac{2}{x} \sin(Ax) \tag{3}$$

식 (1)과 식 (3)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$S_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^A \cos \lambda x d\lambda \tag{4}$$

예제 5.3.3에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \tag{5}$$

식 (1)과 식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_A(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Ax)}{\pi[Ax]} d(Ax) = 1 \tag{6}$$

임의의 콤팩트집합(compact set)  $K$ 와 임의의 작은 양수  $\epsilon$ 에 대해서, 다음 식들이 성립한다.

$$\int_{K \setminus (-\epsilon, \epsilon)} S_A(x) dx = \int_{K \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{\sin(Ax)}{\pi[Ax]} d(Ax) = \int_{K/A \setminus (-\epsilon/A, \epsilon/A)} \frac{\sin z}{\pi z} dz \tag{7}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{K \setminus (-\epsilon, \epsilon)} S_A(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{K/A \setminus (-\epsilon/A, \epsilon/A)} \frac{\sin z}{\pi z} dz \tag{8}$$

즉, 작은 양수  $\xi = o(\epsilon)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{K \setminus (-\xi, \xi)} S_A(x) dx = 0 \tag{9}$$

식 (6)과 식 (9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^{\xi} S_A(x) dx = 1 \tag{10}$$

식 (6)과 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 표현이 성립한다.

$$\delta(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} S_A(x) \tag{11}$$

식 (4)와 식 (11)에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$\delta(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} S_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x d\lambda \tag{12}$$



식 (7.2.3)에서 알 수 있듯이, 각  $j(= 1, 2)$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$Q_j(x_T > k) = \int_k^\infty f_j(x_T) dx_T = \int_k^\infty \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \exp(i\lambda x_T) d\lambda \right] dx_T \quad (7.2.7)$$

식 (7.2.7)에 Fubini정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$Q_j(x_T > k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \left[ \int_k^\infty \exp(i\lambda x_T) dx_T \right] d\lambda \quad (7.2.8)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \frac{\exp(i\lambda x_T)}{i\lambda} \Big|_{x_T=-\infty}^{x_T=\infty} d\lambda &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\lambda x_T) \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \delta(\lambda) d\lambda = \hat{f}_j(0) \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

여기서  $\delta(\lambda)$ 는 Dirac 델타함수이고 두 번째 등호는 예제 7.2.1의 식 (12)에 의해서 성립한다.

식 (7.2.9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \frac{\exp(i\lambda x_T)}{i\lambda} \Big|_{x_T=-\infty}^{x_T=\infty} d\lambda = 1 \quad (7.2.10)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \left[ \int_k^\infty \exp(i\lambda x_T) dx_T \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \left\{ \left[ \frac{\exp(i\lambda x_T)}{i\lambda} \right]_{x_T=\infty} - \left[ \frac{\exp(i\lambda x_T)}{i\lambda} \right]_{x_T=k} \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \frac{\exp(i\lambda x_T)}{i\lambda} \Big|_{x_T=-\infty}^{x_T=\infty} d\lambda \right] - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \frac{\exp(i\lambda k)}{i\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

여기서 두 번째 등호는 우대칭성에 의해서 성립한다. 식 (7.2.8), 식 (7.2.10), 그리고 식 (7.2.11)

에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$Q_j(x_T > k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}_j(\lambda) \frac{\exp(i\lambda k)}{i\lambda} d\lambda \quad (7.2.12)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$Q_j(x_T > k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left\{ \hat{f}_j(\lambda) \frac{\exp(i\lambda k)}{i\lambda} \right\} d\lambda \quad (7.2.13)$$

식 (7.2.13)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_j(x_T > k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Im\{\hat{f}_j(\lambda)\} \cos \lambda k + \Re\{\hat{f}_j(\lambda)\} \sin \lambda k}{\lambda} d\lambda \quad (7.2.14)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$Q_j(x_T \leq k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Im\{\hat{f}_j(\lambda)\} \cos \lambda k + \Re\{\hat{f}_j(\lambda)\} \sin \lambda k}{\lambda} d\lambda \quad (7.2.15)$$

식 (7.2.15)의 유도에 관한 좀 더 자세한 내용은 Scott [57]과 Bakshi & Madan [8]을 참조하라.

Heston [36, p. 331]이 언급했듯이, 식 (7.2.15)의 적분을 해석적으로 계산하는 것은 쉬운 일이 아니다. 심지어는 Black-Scholes 모형에서도 식 (7.2.15)의 적분을 해석적으로 계산하는 것도 쉽지 않다. 식 (7.2.15)의 적분을 계산하는 방법에 대해서는 Davies [25], Shephard [58], 그리고 In 'T Hout & Weideman [37]을 참조하라.

확률  $Q_j(x_T > k)$ 를 복소수를 사용해서 표현한 식 (7.2.12) ~ 식 (7.2.15)는 여러 가지 장점을 지니고 있다. 첫째, 옵션의 특성함수를 간단한 함수로 나타낼 수 있는 경우가 많고, 따라서 이 식들을 사용해서 확률  $Q_j(x_T > k)$ 를 해석적으로 구할 수 있는 경우가 많다. 둘째, 이 식들에 효율적인 수치적분법을 적용해서 확률  $Q_j(x_T > k)$ 를 계산할 수 있다. 셋째, 이 확률  $Q_j(x_T > k)$ 의 표현식들은 이자율과정이나 변동성과정과 같은 요인들에 의존하지 않는다. 따라서, 특성함수를 사용한 가치평가법은 유럽형옵션가치를 평가하는 데 이해하기 쉬우면서도 모형을 구성하는 요인들의 특성에 가장 적게 의존하는 공통적인 방법이다. 예를 들어, Scott [57]은 이러한 방법을 확률변동성과 확률적 이자율을 상정하는 점프확산모형의 가치평가에 적용하였다.

**예제 7.2.2** 예제 7.1.1의 Black-Scholes 확률미분방정식을 다시 살펴보자. 예제 7.1.1에서 정의했듯이,  $d_1$ 과  $d_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left[ r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \quad (1)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \quad (2)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 N(d_2) &= 1 - N(-d_2) \\
 &= \Pr\left(z \geq -\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau \right\}\right) \\
 &= \Pr\left(x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau + \sigma\sqrt{\tau}z \geq k\right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서  $z$ 는 표준정규확률변수이다. 다음 확률변수를 정의하자.

$$y \doteq x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau + \sigma\sqrt{\tau}z \tag{4}$$

식 (3)과 식 (4)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$N(d_2) = \Pr(y \geq k) = 1 - \Pr(y \leq k) \tag{5}$$

또한 다음 식이 성립한다.

$$y \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}\left(x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau, \sigma^2\tau\right) \tag{6}$$

확률변수  $y$ 의 특성함수는 다음과 같다.

$$\psi_Y(\theta) = \exp\left(i \left\{x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau\right\} \theta - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \tag{7}$$

정규확률분포함수  $N(x)$ 가 점  $x$ 에서 연속이므로, 명제 5.3.1에서 알 수 있듯이 다음 식들이 성립한다.

$$N(d_2) = \Pr(y \geq k) = 1 - \Pr(y \leq k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Im\{e^{-i\theta k} \psi_Y(\theta)\}}{\theta} d\theta \tag{8}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 &\Im\{e^{-i\theta k} \psi_Y(\theta)\} \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \Im\left\{\exp\left(i \left\{x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau - k\right\} \theta\right)\right\} \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \sin\left(\left\{x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau - k\right\} \theta\right)
 \end{aligned} \tag{9}$$



식 (8)과 식 (9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$N(d_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \sin\left(\left\{x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau - k\right\}\theta\right) d\theta \quad (10)$$

같은 방법으로 다음 식이 성립함을 증명할 수 있다.

$$N(d_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \sin\left(\left\{x_t + \left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau - k\right\}\theta\right) d\theta \quad (11)$$

■

### 제7.3절 Black-Scholes 환경 하에서 Fourier 변환

다음 확률미분방정식을 만족하는 Black-Scholes 확률과정  $\{S_u | u \geq 0\}$ 를 살펴보자.

$$\frac{dS_u}{S_u} = rdu + \sigma dW_u^Q, \quad (u \geq 0) \quad (7.3.1)$$

여기서  $r$ 과  $\sigma$ 는 상수들이고  $\{W_u^Q | u \geq 0\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이다. 식 (7.3.1)에 Ito-Doebelin 보조정리를 적용하면, 확률과정  $\{x_u = \ln S_u | u \geq 0\}$ 가 다음 확률미분방정식을 만족함을 알 수 있다.

$$dx_u = \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] du + \sigma dW_u^Q, \quad (u \geq 0) \quad (7.3.2)$$

식 (7.3.2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$x_T - x_t = \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tau + \sigma \left[W_T^Q - W_t^Q\right] \quad (7.3.3)$$

델타확률측도  $Q_1$ 에 대한 Radon-Nikodym 밀도는 다음과 같다.

$$\frac{dQ_1}{dQ} = \exp\left(\sigma \left[W_T^Q - W_t^Q\right] - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right) \quad (7.3.4)$$

식 (7.3.4) 에 식 (7.3.3) 을 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{dQ_1}{dQ} = \exp(x_T - x_t - r\tau) \quad (7.3.5)$$

델타확률측도  $Q_1$  하에서 확률변수  $x_T$  의 확률밀도함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\lambda) &= E_t^Q \left( \exp(-i\lambda x_T) \frac{dQ_1}{dQ} \right) = E_t^Q (\exp(-i\lambda x_T) \exp(x_T - x_t - r\tau)) \\ &= \exp(-x_t - r\tau) E_t^Q (\exp([1 - i\lambda]x_T)) \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

식 (7.3.3) 에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$x_T \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N} \left( x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau, \sigma^2 \tau \right) \quad (7.3.7)$$

따라서 확률측도  $Q$  하에서 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q (e^{x_T \theta}) = \exp \left( \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \tau \theta^2 \right) \quad (7.3.8)$$

식 (7.3.8) 에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q (\exp([1 - i\lambda]x_T)) = \exp \left( \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} [1 - i\lambda] + \frac{1}{2}\sigma^2 \tau [1 - i\lambda]^2 \right) \quad (7.3.9)$$

식 (7.3.9) 를 식 (7.3.6) 에 대입하면, 델타확률측도  $Q_1$  하에서 확률변수  $x_T$  의 확률밀도함수의 Fourier 변환이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\hat{f}_1(\lambda) = \exp(-i[x_t + r\tau]\lambda) \exp \left( -i\frac{\sigma^2 \tau}{2} \lambda - \frac{\sigma^2 \tau}{2} \lambda^2 \right) \quad (7.3.10)$$

식 (7.3.10) 은 예제 7.2.2의 식 (6) 과 동등하다.

선도중립확률측도  $Q_2$  에 대한 Radon-Nikodym 밀도는 다음과 같다.

$$\frac{dQ_2}{dQ} = \frac{\exp \left( -\int_t^T r du \right)}{B(t, T)} = \frac{\exp \left( -\int_t^T r du \right)}{E_t^Q \left( \exp \left( -\int_t^T r du \right) \right)} = \frac{e^{-r\tau}}{e^{-r\tau}} = 1 \quad (7.3.11)$$

확률측도  $Q_2$  하에서 확률변수  $x_T$ 의 확률밀도함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\hat{f}_2(\lambda) = E_t^Q \left( \exp(-i\lambda x_T) \frac{dQ_2}{dQ} \right) = E_t^Q (\exp(-i\lambda x_T)) \quad (7.3.12)$$

식 (7.3.8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$E_t^Q (\exp(-i\lambda x_T)) = \exp \left( -i \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \tau \lambda^2 \right) \quad (7.3.13)$$

식 (7.3.11)과 식 (7.3.13)에서 알 수 있듯이, 확률측도  $Q_2$  하에서 확률변수  $x_T$ 의 확률밀도함수의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\hat{f}_2(\lambda) = \exp(-i[x_t + r\tau]\lambda) \exp \left( i \frac{\sigma^2 \tau}{2} \lambda - \frac{\sigma^2 \tau}{2} \lambda^2 \right) \quad (7.3.14)$$

**예제 7.3.1** 예제 7.2.2를 다시 살펴보자.

식 (7.3.14)에서 알 수 있듯이, 확률측도  $Q_2$ 의 특성함수는 다음과 같다.

$$\psi_2(\theta) = \hat{f}_2(-\theta) = \exp \left( -\frac{\sigma^2 \tau}{2} \theta^2 \right) \exp \left( i \left\{ x_t + \left[ r - \frac{\sigma^2}{2} \right] \tau \right\} \theta \right) \quad (1)$$

식 (1)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ \psi_2(\theta) \frac{\exp(-i\theta k)}{i\theta} \right\} \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2}\sigma^2 \tau \theta^2 \right) \Re \left\{ \frac{1}{i\theta} \exp \left( i \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau - k \right\} \theta \right) \right\} \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2}\sigma^2 \tau \theta^2 \right) \frac{1}{\theta} \sin \left( \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau - k \right\} \theta \right) \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)와 예제 7.2.2의 식 (10)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$Q_2(x_T > k) = N(d_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left\{ \psi_2(\theta) \frac{\exp(-i\theta k)}{i\theta} \right\} d\theta \quad (3)$$

같은 방법으로 다음 식들이 성립함을 증명할 수 있다.

$$Q_1(x_T > k) = N(d_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left\{ \psi_1(\theta) \frac{\exp(-i\theta k)}{i\theta} \right\} d\theta \quad (4)$$



**예제 7.3.2** 확률밀도함수  $f(x)$ 의 확률분포함수  $F(x)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy \tag{1}$$

확률분포함수  $F(x)$ 의 Fourier 변환  $\hat{F}(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{F}(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} \int_{-\infty}^x f(y)dydx \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} F(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} F(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \right] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\theta x}}{-i\theta} f(x)dx \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)와 예제 7.2.1의 식 (5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\hat{F}(\theta) = 2\pi\delta(0) + \frac{1}{i\theta}\hat{f}(\theta) \tag{3}$$

여기서  $\hat{f}(\theta)$ 는 함수  $f(x)$ 의 Fourier 변환이다. 다음 예제에서 식 (3)을 사용할 것이다. ■

**예제 7.3.3** 이 예제는 Lewis [45]를 바탕으로 한 것이다. 그러나 본저자는 이 Lewis의 방법에는 수리적 논리전개에서 문제가 있다고 생각한다. (물론 본저자가 잘못 생각하고 있을 수도 있다.) 관심있는 독자들은 Schmelzle [52]을 참조하며, 이 문제점에 대한 해결책을 생각해보라.

확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 위험중립확률측도  $Q$  하에서 확률분포는 다음과 같다.

$$x_T \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}\left(x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau, \sigma^2\tau\right) \tag{1}$$

따라서 확률밀도함수  $f^Q(x_T)$ 의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\hat{f}^Q(\theta) = \exp\left(-i\left\{x_t + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau\right\}\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \tag{2}$$

이 확률변수  $x_T$ 의 위험중립확률측도  $Q$  하에서 확률분포함수를  $F^Q(\cdot)$ 라 하고 이 확률분포함수의 Fourier 변환을  $\hat{F}^Q(\cdot)$ 라고 하자. 함수  $g(x) \doteq [e^x - e^k]^+$ 의 일반화 Fourier 변환

(generalized Fourier transform)은 다음과 같다.

$$\hat{g}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} [e^x - e^k]^+ dx = -\frac{1}{\theta[\theta + i]} e^{k[1-i\theta]}, \quad (\Im\{\theta\} < -1) \quad (3)$$

일반화 Fourier 변환에 대해서는 <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/generalized-fourier-transforms>을 참조하라.

다음 식이 성립한다.

$$C(k) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} [e^x - e^k]^+ f^Q(x) dx \quad (4)$$

Lewis는 식 (4)에 식 (3)과 명제 3.9.2를 적용해서 다음 식을 유도하였다.

$$C(k) = -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}^Q(\theta) \frac{1}{\theta[\theta - i]} e^{k[1+i\theta]} d\theta \quad (5)$$

여기서  $\theta$ 는  $-\infty + i\alpha$ 에서  $\infty + i\alpha$ 까지 움직이는 복소수이므로, 본저자는 식 (5)를 다음과 같이 써야한다고 생각한다.

$$C(k) = -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}^Q(\theta) \frac{1}{\theta[\theta - i]} e^{k[1+i\theta]} d\theta \quad (6)$$

이에 대해서는 따름정리 3.9.3을 참조하라. 식 (5)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(k) = I_1 - I_2 \quad (7)$$

여기서  $I_1$ 과  $I_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$I_1 \doteq -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}^Q(\theta) \frac{1}{[\theta - i]} e^{k[1+i\theta]} d\theta \quad (8)$$

$$I_2 \doteq -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}^Q(\theta) \frac{1}{\theta} e^{k[1+i\theta]} d\theta \quad (9)$$

적분  $I_2$ 를 계산하기 위해서, Lewis는 적분경로에서  $\alpha = 0$ 를 채택하였다. 다음 식이 성립한다.

$$I_2 = -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^Q(\theta) \frac{1}{\theta} e^{k[1+i\theta]} d\theta \quad (10)$$

예제 7.3.2의 식 (3)을 식 (10)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$I_2 = -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} e^k \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{F}^Q(\theta) - 2\pi\delta(0)] e^{ik\theta} d\theta \quad (11)$$

식 (11)과 역Fourier 변환에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I_2 = -e^{-r\tau} K [F^Q(k) - 1] \quad (12)$$

식 (1)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$F^Q(k) = N(-d_2) \quad (13)$$

여기서  $d_2$ 는 다음과 같다.

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ x_t - k + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \right\} \quad (14)$$

식 (12)~식 (14)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I_2 = e^{-r\tau} KN(d_2) \quad (15)$$

그러나, 적분경로에서  $\alpha = 0$ 로 잡는 것은  $\Im\{\theta\} < -1$ 이라는 일반화Fourier 변환의 가정에 어긋난다는 점에 유의하라.

식 (8)에서 변수변환  $\eta = \theta - i$ 를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$I_1 = -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i[\alpha-1]}^{\infty+i[\alpha-1]} \hat{f}^Q(\eta+i) \frac{1}{\eta} e^{ik\eta} d\eta \quad (16)$$

적분  $I_1$ 를 계산하기 위해서, Lewis는 적분경로에서  $\alpha = 1$ 을 채택하였다. 다음 식이 성립한다.

$$I_1 = -e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^Q(\eta+i) \frac{1}{\eta} e^{ik\eta} d\eta \quad (17)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\hat{f}^Q(\eta+i) = S_t e^{r\tau} \hat{h}^Q(\eta) \quad (18)$$

여기서  $\hat{h}^Q(\eta)$ 는 다음과 같다.

$$\hat{h}^Q(\eta) \doteq \exp\left(-i\left\{x_t + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau\right\}\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\eta^2\right) \quad (19)$$

이  $\hat{h}^Q(\eta)$ 는 다음 확률분포를 따르는 확률변수  $y_T$ 의 확률밀도함수  $h^Q(y)$ 의 Fourier 변환이다.

$$y_T \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}\left(x_t + \left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau, \sigma^2\tau\right) \quad (20)$$

이 확률변수  $y_T$ 의 위험중립확률측도  $Q$  하에서 확률분포함수를  $H^Q(\cdot)$ 라 하고, 이 확률분포함수의 Fourier 변환을  $\hat{H}^Q(\cdot)$ 라고 하자. 식 (18)을 식 (17)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$I_1 = -S_t \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}^Q(\eta) \frac{1}{\eta} e^{ik\eta} d\eta \quad (21)$$

예제 7.3.2의 식 (3)을 식 (21)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$I_1 = -S_t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{H}^Q(\eta) - 2\pi\delta(0)\right] e^{ik\eta} d\eta \quad (22)$$

식 (22)와 역Fourier 변환에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I_1 = -S_t [H^Q(k) - 1] \quad (23)$$

식 (20)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$H^Q(k) = N(-d_1) \quad (24)$$

여기서  $d_1$ 은 다음과 같다.

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{x_t - k + \left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\} \quad (25)$$

식 (23)~식 (25)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$I_1 = S_t N(d_1) \quad (26)$$

그러나 적분경로에서  $\alpha = 1$ 으로 잡는 것은  $\Im\{\theta\} < -1$ 이라는 일반화Fourier 변환의 가정에

어긋난다는 점에 유의하라.

식 (15)와 식 (26)을 식 (7)에 대입하면, 다음과 같은 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 얻는다.

$$C(k) = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} KN(d_2) \tag{27}$$

■

### 제 7.4절 Carr-Madan 변환

유럽형콜옵션의 가치는 다음과 같다.

$$c(k) = e^{-r\tau} \int_k^\infty [e^{x_T} - e^k]^+ f_t^Q(x_T) dx_T \tag{7.4.1}$$

여기서  $k = \ln K$  이고,  $f_t^Q(x_T) = f^Q(x_T|x_t)$ 는 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 위험중립확률측도  $Q$  하에서 확률밀도함수이고,  $k = \ln K$ 이다.

유럽형콜옵션가치  $c(k)$ 의 Fourier 변환을  $\hat{c}(\lambda)$ 라 하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{c}(\lambda) &\doteq \int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda k} c(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda k} \left\{ e^{-r\tau} \int_k^\infty [e^{x_T} - e^k]^+ f_t^Q(x_T) dx_T \right\} dk \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

식 (7.4.2)에 Fubini정리를 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$\hat{c}(\lambda) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^\infty f_t^Q(x_T) \left\{ \int_{-\infty}^{x_T} e^{-i\lambda k} [e^{x_T} - e^k]^+ dk \right\} dx_T \tag{7.4.3}$$

다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{x_T} e^{-i\lambda k} [e^{x_T} - e^k]^+ dk = e^{x_T} \int_{-\infty}^{x_T} e^{-i\lambda k} dk - \int_{-\infty}^{x_T} e^{[1-i\lambda]k} dk \tag{7.4.4}$$

식 (7.4.4)의 우변의 첫 번째 정적분은 존재하지 않는다. 이러한 문제를 해결하기 위해서



Carr & Madan [12]은 다음과 같이 변형콜옵션가치를 정의하였다.

$$c_\alpha(k) = e^{\alpha k} c(k) \quad (7.4.5)$$

여기서  $\alpha (> 0)$ 는 감폭모수(damplng parameter)이다. 이 변형콜옵션가치  $c_\alpha(k)$ 의 Fourier 변환을  $\hat{c}_\alpha(\lambda)$ 라 하면, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{c}_\alpha(\lambda) &\doteq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} c_\alpha(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \left\{ e^{\alpha k} e^{-r\tau} \int_k^{\infty} [e^{x_T} - e^k]^+ f_t^Q(x_T) dx_T \right\} dk \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{[\alpha-i\lambda]k} \int_k^{\infty} [e^{x_T} - e^k]^+ f_t^Q(x_T) dx_T \right\} dk \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

식 (7.4.6)에 Fubini정리를 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$\hat{c}_\alpha(\lambda) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_t^Q(x_T) \left\{ \int_{-\infty}^{x_T} e^{[\alpha-i\lambda]k} [e^{x_T} - e^k]^+ dk \right\} dx_T \quad (7.4.7)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_T} e^{[\alpha-i\lambda]k} [e^{x_T} - e^k]^+ dk &= e^{x_T} \int_{-\infty}^{x_T} e^{[\alpha-i\lambda]k} dk - \int_{-\infty}^{x_T} e^{[\alpha-i\lambda+1]k} dk \\ &= e^{x_T} \frac{e^{[\alpha-i\lambda]x_T}}{\alpha-i\lambda} - \frac{e^{[\alpha-i\lambda+1]x_T}}{\alpha-i\lambda+1} = \frac{e^{[\alpha-i\lambda]x_T}}{[\alpha-i\lambda][\alpha-i\lambda+1]} \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{x_T} e^{[\alpha-i\lambda]k} [e^{x_T} - e^k]^+ dk = \frac{e^{-i\{\lambda+i[\alpha+1]\}x_T}}{[\alpha-i\lambda][\alpha-i\lambda+1]} \quad (7.4.9)$$

식 (7.4.9)를 식 (7.4.7)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\hat{c}_\alpha(\lambda) = \frac{e^{-r\tau}}{[\alpha-i\lambda][\alpha-i\lambda+1]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\{\lambda+i[\alpha+1]\}x_T} f_t^Q(x_T) dx_T \quad (7.4.10)$$

식 (7.4.10)에서 알 수 있듯이, 변형콜옵션가치의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$\hat{c}_\alpha(\lambda) = \frac{e^{-r\tau}}{[\alpha-i\lambda][\alpha-i\lambda+1]} \hat{f}_t^Q(\lambda+i[\alpha+1]) = \frac{e^{-r\tau} \hat{f}_t^Q(\lambda+i[\alpha+1])}{\alpha^2 + \alpha - \lambda^2 - i[2\alpha+1]\lambda} \quad (7.4.11)$$

여기서  $\hat{f}_t^Q(\lambda)$ 는  $f_t^Q(x)$ 의 Fourier 변환이다.

다음 식들이 성립한다.

$$\hat{c}_\alpha(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} c_\alpha(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} [e^{\alpha k} c(k)] dk \quad (7.4.12)$$

식 (7.4.12)와 따름정리 5.3.1에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$e^{\alpha k} c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k} \hat{c}_\alpha(\lambda) d\lambda \quad (7.4.13)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k} \hat{c}_\alpha(\lambda) d\lambda \quad (7.4.14)$$

콜옵션가치  $c(k)$ 가 실수이므로,  $\hat{c}_\alpha(\lambda)$ 의 실수부는 우함수이고 허수부는 기함수이다. 따라서, 식 (7.4.14)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c(k) = \frac{1}{\pi} e^{-\alpha k} \int_0^{\infty} e^{i\lambda k} \hat{c}_\alpha(\lambda) d\lambda \quad (7.4.15)$$

식 (7.4.15)의 적분을 수치적으로 계산할 때 피적분함수가 실수가 아닌 복소수가 될 수도 있다. 이러한 경우에는 다음 식을 사용한다.

$$c(k) = \frac{1}{\pi} e^{-\alpha k} \int_0^{\infty} \Re \{ e^{i\lambda k} \hat{c}_\alpha(\lambda) \} d\lambda \quad (7.4.16)$$

식 (7.4.15)나 식 (7.4.16)을 이용해서 Fourier 변환  $\hat{c}_\alpha(\lambda)$ 로부터 콜옵션가치  $c(k)$ 를 수치적으로 구하기 위해서는 이산형 Fourier 변환을 적용할 수 있다. 이산형 Fourier 변환을 적용하기 전에 감폭모수  $\alpha$ 와 식 (7.4.15)의 적분구간을 정해야 한다. 이에 대한 명확한 답은 없다. 만약  $\alpha = 0$ 이고  $\lambda = 0$ 이면, 식  $\hat{c}_\alpha(0) = \infty$ 가 성립한다. 따라서, 감폭모수  $\alpha$ 가 큰 양수로 하는 것이 좋을 것 같다. 그러나, 만약 감폭모수  $\alpha$ 가 아주 크면, 동일한 문제가 발생한다고 할 수 있다. 만약  $\hat{c}_\alpha(0)$ 가 유한이라면, 옵션가치평가식 (7.4.15)에서 적분가능성에 관한 문제가 발생하지 않는다. 만약  $\hat{c}_\alpha(0)$ 가 유한이라면, 식 (7.4.11)에서 알 수 있듯이  $\hat{f}_t^Q(i[\alpha + 1])$ 는 유한이다.

따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} E_t^Q (S_T^{\alpha+1}) &= E_t^Q \left( e^{[\alpha+1] \ln S_T} \right) = E_t^Q \left( e^{[\alpha+1]x_T} \right) \\ &= \int e^{-i\lambda x_T} \Big|_{\lambda=[\alpha+1]i} f_t^Q(x_T) dx_T = \hat{f}_t^Q([\alpha+1]i) < \infty \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

결론적으로 말하면, 식 (7.4.17)를 만족하는  $\alpha$ 를 선택하는 것은 타당하다.

식 (7.4.15)을 사용해서 잔여기간(tenor)  $\tau$ 가 짧은 OTM옵션의 가치를 평가할 때, 역 Fourier변환에서 큰 진동이 있는 경우가 있다. 이 진동을 경감시키기 위해서, Carr & Madan [12]의 수정인자  $e^{\alpha k}$  대신  $\sinh(\alpha k)$ 를 이용할 것을 제안하였다.

## 제7.5절 Heston모형

### 7.5.1 Heston모형과 Fourier변환

Heston [36]이 제시한 확률변동성모형은 다음과 같다.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \quad (7.5.1)$$

$$dv_t = \bar{\kappa}[\bar{\theta} - v_t] dt + \xi \sqrt{v_t} dW_{2,t} \quad (7.5.2)$$

$$E^P (dW_{1,t} dW_{2,t}) = \rho dt \quad (7.5.3)$$

여기서  $P$ 를 역사적측도 (historical measure), 물리적측도 (physical measure) 또는 진짜측도 (true measure)라 부른다. 이 Heston모형의 모수들은 다음과 같다.

- a)  $\mu (\in \mathbb{R})$ : 원자산과정의 추세모수 (drift parameter)
- b)  $\bar{\kappa} (> 0)$ : 분산의 평균회귀속도 (mean reversion speed)
- c)  $\bar{\theta} (> 0)$ : 분산의 평균회귀수준 (mean reversion level)
- d)  $\xi (> 0)$ : 분산의 변동성 (volatility)
- e)  $\rho (\in [-1, 1])$ : Brown운동들  $\{W_{1,t}\}$ 와  $\{W_{2,t}\}$ 의 상관계수
- f)  $v_0 (> 0)$ : 분산의 초기 수준

식 (7.5.1)에서 알 수 있듯이 원자산과정은 Black-Scholes 확률과정이고, 식 (7.5.2)에서 알 수 있듯이 확률분산과정 (stochastic variance process)은 Cox & Ingersoll & Ross [24]가

제시한 CIR 확률과정이다. 다음 부등식을 Feller 조건이라 한다.

$$2\bar{\kappa}\bar{\theta} > \xi^2 \quad (7.5.4)$$

만약 Feller 조건이 만족되면, Heston 모형에 의해서 생성된 분산  $v_t$ 는 거의 확실하게 (almost surely) 진양 (strictly positive)이다.

**예제 7.5.1** Heston 모형의 두 번째 식 (7.5.2)는 변동성  $\sqrt{v_t}$ 이 아닌 분산  $v_t$ 에 관한 것이다. 이를 강조하기 위해서 분산이 다음 확률미분방정식을 만족하는 경우를 살펴보자.

$$d\sqrt{v_t} = -\beta v_t dt + \delta dW_{2,t} \quad (1)$$

변수변환  $u_t \doteq v_t^2$ 을 적용하면, 식 (1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$du_t = -\beta u_t^2 dt + \delta dW_{2,t} \quad (2)$$

식 (1)에 Ito-Doebelin 보조정리를 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} du_t^2 &= 2u_t du_t + [du_t]^2 \\ &= 2u_t [-\beta u_t^2 dt + \delta dW_{2,t}] + \delta^2 dt \\ &= [\delta^2 - 2\beta u_t^3] dt + 2\delta u_t dW_{2,t}. \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dv_t = 2\beta \left[ \frac{\delta^2}{2\beta} - v_t \sqrt{v_t} \right] dt + 2\delta \sqrt{v_t} dW_{2,t} \quad (4)$$

■

Heston 모형의 확률과정  $\{[S_t, v_t]^T\}$ 를 위험중립확률측도  $Q$  하에서 모형으로 나타내보자. 식 (7.5.1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d \left[ W_{1,t} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} t \right] \quad (7.5.5)$$

식 (7.5.5)에 Girsanov정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}^Q \tag{7.5.6}$$

여기서  $W_{1,t}^Q$ 는 다음과 같다.

$$W_{1,t}^Q \doteq W_{1,t} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} t \tag{7.5.7}$$

이  $\{W_{1,t}^Q\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이다. Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 식 (7.5.6)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$d \ln S_t = \left[ r - \frac{1}{2} v_t \right] dt + \sqrt{v_t} W_{1,t}^Q \tag{7.5.8}$$

식 (7.5.2)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dv_t = \{ \bar{\kappa}[\bar{\theta} - v_t] - \nu(S_t, v_t, t) \} dt + \xi \sqrt{v_t} d \left[ W_{2,t} + \frac{\nu(S_t, v_t, t)}{\xi \sqrt{v_t}} t \right] \tag{7.5.9}$$

함수  $\nu(S_t, v_t, t)$ 를 변동성위험프리미엄(volatility risk premium)이라 부른다. 식 (7.5.9)에 Girsanov정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$dv_t = \{ \bar{\kappa}[\bar{\theta} - v_t] - \nu(S_t, v_t, t) \} dt + \xi \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \tag{7.5.10}$$

여기서  $W_{2,t}^Q$ 는 다음과 같다.

$$W_{2,t}^Q \doteq W_{2,t} + \frac{\nu(S_t, v_t, t)}{\xi \sqrt{v_t}} t \tag{7.5.11}$$

이  $\{W_{2,t}^Q\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이다. Breeden [10]의 소비모형(consumption model)에서는 위험프리미엄이 분산에 비례한다고 가정한다. 여기서도

식  $\nu(S_t, v_t, t) = \nu v_t$ 가 성립한다고 가정하자. 단,  $\nu$ 는 상수이다. 이러한 가정과 식 (7.5.11)을 식 (7.5.10)에 대입하면, 다음 식이 성립한다.

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t] dt + \xi \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \tag{7.5.12}$$

여기서  $k = \bar{\kappa} + \nu$ 와  $\theta = \bar{\kappa}\bar{\theta}/[\bar{\kappa} + \nu]$ 는 분산과정의 위험중립모수들이다. 지금까지 내용을

정리하면, Heston의 확률변동성모형은 다음과 같다.

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}^Q \quad (7.5.13)$$

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t] dt + \xi \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \quad (7.5.14)$$

$$E^Q \left( dW_{1,t}^Q dW_{2,t}^Q \right) = \rho dt \quad (7.5.15)$$

여기서  $Q$ 를 위험중립확률측도이다.

주어진  $s$ 와  $t(> s)$ 에 대해서, 다음과 같이  $c_t$ 를 정의하자.

$$c_t \doteq \frac{2\kappa}{\xi^2 [1 - e^{-\kappa[t-s]}]} \quad (7.5.16)$$

Cox & Ingersoll & Ross [24]에서 알 수 있듯이, 확률변수값  $v_s$ 가 주어진 조건 하에 확률변수  $2c_t v_t$ 는 자유도가  $4\kappa\theta/\xi^2$ 이고 비중심모수(noncentrality parameter)가  $2c_t v_s \exp(-\kappa[t-s])$ 인 비중심카이제곱확률분포(noncentral chi-squared distribution)를 따른다. 따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$E(2c_t v_t | v_s) = \frac{4\kappa\theta}{\xi^2} + 2c_t v_s \exp(-\kappa[t-s]) \quad (7.5.17)$$

$$\text{Var}(2c_t v_t | v_s) = \frac{8\kappa\theta}{\xi^2} + 8c_t v_s \exp(-\kappa[t-s]) \quad (7.5.18)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$E(v_t | v_s) = \theta [1 - e^{-\kappa[t-s]}] + v_s e^{-\kappa[t-s]} \quad (7.5.19)$$

$$\text{Var}(v_t | v_s) = \frac{\theta\xi^2}{2\kappa} [1 - e^{-\kappa[t-s]}]^2 + \frac{v_s\xi^2}{\kappa} e^{-\kappa[t-s]} [1 - e^{-\kappa[t-s]}]^2 \quad (7.5.20)$$

비중심카이제곱확률분포에 대한 자세한 내용은 Choi [5]의 제1.5.15소절을 참조하라. 식 (7.5.19)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(v_t | v_s) = \theta \quad (7.5.21)$$

즉, Heston모형이 평균회귀성(mean reversion property)을 갖음을 알 수 있다.

### 7.5.2 헤지포트폴리오와 Heston 편미분방정식

이 소절에서는 Heston모형을 기반으로 하는 금융상품가치의 편미분방정식을 유도하고자 한다. 이 소절의 내용은 Gatheral [33]을 바탕으로 한 것이다.

Black-Scholes모형은 확률미분방정식 1개로 구성된다. 따라서, 원자산과 옵션 1개를 선형결합해서 무위험포트폴리오를 복제한 다음, 이를 바탕으로 Black-Scholes 편미분방정식을 유도할 수 있다. 그러나, Heston모형은 확률미분방정식들 2개로 구성되므로, 원자산과 옵션 1개를 선형결합해서 무위험포트폴리오를 복제할 수 없고, 대신에 원자산과 옵션 2개를 선형결합해서 무위험포트폴리오를 복제할 수 있다. 또한, 이를 바탕으로 Heston 편미분방정식을 유도할 수 있다.

시점  $t$ 에서 가치가  $V_t = V(S_t, v_t, t)$ 인 옵션 1단위의 위험을 헤징하기 위해서 가치가  $S_t$ 인 원자산  $\delta$ 단위 그리고 가치가  $U_t = U(S_t, v_t, t)$ 인 다른 옵션  $\varphi$ 단위로 구성된 포트폴리오를 생각해보자. 이 포트폴리오의 시점  $t$ 에서 가치  $\Pi_t$ 는 다음과 같다.

$$\Pi_t = V_t + \delta S_t + \varphi U_t \tag{7.5.22}$$

이 포트폴리오가 자기금융조건 (self-financing condition)을 만족하면, 포트폴리오가치의 확률증분은 다음과 같다.

$$d\Pi_t = dV_t + \delta dS_t + \varphi dU_t \tag{7.5.23}$$

Ito-Doebelin보조정리를 사용하면, 다음 식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial V_t}{\partial v_t} dv_t \\ &\quad + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} dt + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial v_t} dt + \frac{1}{2} \xi^2 v_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial v_t^2} dt \end{aligned} \tag{7.5.24}$$

$$\begin{aligned} dU_t &= \frac{\partial U_t}{\partial t} dt + \frac{\partial U_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial U_t}{\partial v_t} dv_t \\ &\quad + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} dt + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} dt + \frac{1}{2} \xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} dt \end{aligned} \tag{7.5.25}$$

식 (7.5.24)와 식 (7.5.25)를 식 (7.5.23)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left[ \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial v_t^2} \right] dt \\ & + \varphi \left[ \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} \right] dt \\ & + \left[ \delta + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \varphi \frac{\partial U_t}{\partial S_t} \right] dS_t + \left[ \frac{\partial V_t}{\partial v_t} + \varphi \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \right] dv_t \end{aligned} \quad (7.5.26)$$

이 포트폴리오의 위험을 원자산과 변동성으로 헤징하기 위해서, 다음과 같은 헤지모수들을 선택하자.

$$\varphi = -\frac{\partial V_t}{\partial v_t} \bigg/ \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \quad (7.5.27)$$

$$\delta = -\frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{\partial V_t}{\partial v_t} \cdot \frac{\partial U_t}{\partial S_t} \bigg/ \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \quad (7.5.28)$$

식 (7.5.27)과 식 (7.5.28)을 식 (7.5.26)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left[ \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial v_t^2} \right] dt \\ & + \varphi \left[ \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} \right] dt \end{aligned} \quad (7.5.29)$$

식 (7.5.29)의  $\Pi_t$ 는 무위험포트폴리오의 시점  $t$ 에서 가치임을 기억하라. 무위험포트폴리오의 시점  $t$ 에서 가치  $\Pi_t$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} d\Pi_t = r\Pi_t = r[V_t + \delta S_t + \varphi U_t] \\ = r \left\{ V_t + \left[ \frac{\partial V_t}{\partial v_t} \cdot \frac{\partial U_t}{\partial S_t} \bigg/ \frac{\partial U_t}{\partial v_t} - \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \right] S_t - \frac{\partial V_t}{\partial v_t} \bigg/ \frac{\partial U_t}{\partial v_t} U_t \right\} \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

여기서  $r$ 은 무위험이자율이고, 세 번째 등호는 식 (7.5.27)과 식 (7.5.28)에 의해서 성립한다. 식 (7.5.29)와 식 (7.5.30)에서 알 수 있듯이, 다음 편미분방정식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial v_t^2} - rV_t + rS_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \right] \bigg/ \frac{\partial V_t}{\partial v_t} \\ & = \left[ \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \rho \xi v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} - rU_t + rS_t \frac{\partial U_t}{\partial S_t} \right] \bigg/ \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \end{aligned} \quad (7.5.31)$$

식 (7.5.31)의 좌변은  $U_t$ 에 의존하지 않고, 우변은  $V_t$ 에 의존하지 않는다. 따라서, 식 (7.5.31)의 좌변과 우변은  $U_t$ 나  $V_t$ 에 의존하지 않고  $S_t$ ,  $v_t$  그리고  $t$ 에만 의존하는 함수



$f(S_t, v_t, t)$ 로 표기할 수 있다. Heston [36]은 다음과 같은 형태의  $f(S_t, v_t, t)$ 를 사용할 것을 제안하였다.

$$f(S_t, v_t, t) = -\kappa[\theta - v_t] + \nu(S_t, v_t, t) \tag{7.5.32}$$

### 7.5.3 옵션가치의 편미분방정식

식 (7.5.32)를 식 (7.5.31)에 대입하면, 다음 편미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \{-\kappa[\theta - v_t] + \nu(S_t, v_t, t)\} \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \\ &= \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \rho\xi v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} - rU_t + rS_t \frac{\partial U_t}{\partial S_t} \end{aligned} \tag{7.5.33}$$

식 (7.5.33)을 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -rU_t + \frac{\partial U_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial U_t}{\partial S_t} + \{-\kappa[\theta - v_t] + \nu(S_t, v_t, t)\} \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \\ & \quad + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \rho\xi v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \tag{7.5.34}$$

식 (7.5.34)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU = 0 \tag{7.5.35}$$

여기서 Heston모형의 생성자(generator)  $\mathcal{A}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} & \doteq rS_t \frac{\partial}{\partial S_t} + \{-\kappa[\theta - v_t] + \nu(S_t, v_t, t)\} \frac{\partial}{\partial v_t} \\ & \quad + \frac{1}{2}v_t S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} + \rho\xi v_t S_t \frac{\partial^2}{\partial S_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2}{\partial v_t^2} \end{aligned} \tag{7.5.36}$$

변동성이  $\sigma$ 인 확률과정  $\{S_u\}$ 를 원자산으로 하고 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽

형콜옵션의 시점  $t$ 에서 Black-Scholes가치  $C_{BS}(S_t, t)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C_{BS}(S_t, t) = S_t \quad (7.5.37)$$

$$\lim_{S_t \rightarrow \infty} \frac{\partial C_{BS}(S_t, t)}{\partial S_t} = 1 \quad (7.5.38)$$

이 식들에 대한 자세한 내용은 최병선 [5]을 참조하라. 따라서 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽형콜옵션의 Heston가치  $U(S_t, v_t, t)$ 은 다음 경계조건들을 만족함을 알 수 있다.

$$U(S_t, \infty, t) = S_t \quad (7.5.39)$$

$$\frac{\partial U(\infty, v_t, t)}{\partial S_t} = 1 \quad (7.5.40)$$

또한 다음 경계조건이 성립함을 자명하다.

$$U(0, v_t, t) = 0 \quad (7.5.41)$$

확률변수들  $S_t$ 와  $x_t \doteq \ln S_t$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial U_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \frac{\partial U_t}{\partial x_t}, \quad \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t \partial S_t} = \frac{\partial}{\partial v_t} \left( \frac{1}{S_t} \frac{\partial U_t}{\partial x_t} \right) = \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t \partial x_t} \quad (7.5.42)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{1}{S_t} \frac{\partial U_t}{\partial x_t} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial U_t}{\partial x_t} + \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial x_t} = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial U_t}{\partial x_t} + \frac{1}{S_t^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial^2 x_t} \quad (7.5.43)$$

식 (7.5.42)와 식 (7.5.43)을 식 (7.5.34)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} -rU_t + \frac{\partial U_t}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial U_t}{\partial x_t} + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu(e^{x_t}, v_t, t) \} \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_t^2} + \rho \xi v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.44)$$

다음과 같은 가정을 하자.

$$\nu(S_t, v_t, t) = \nu(e^{x_t}, v_t, t) = \nu v_t \quad (7.5.45)$$

여기서  $\nu$ 는 상수이다. 식 (7.5.45)를 식 (7.5.44)에 대입하면, 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$

인 유럽형콜옵션의 Heston가치  $U(S_t, v_t, t)$ 가 다음 편미분방정식을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 -rU_t + \frac{\partial U_t}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial U_t}{\partial x_t} + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu v_t \} \frac{\partial U_t}{\partial v_t} \\
 + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_t^2} + \rho \xi v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} = 0 \quad (7.5.46)
 \end{aligned}$$

### 7.5.4 다변량Feynman-Kac정리

표준형 Brown운동들  $\{w_{1,t}\}$ 와  $\{w_{2,t}\}$ 가 다음 식을 만족한다고 가정하자.

$$E(dw_{1,t}dw_{2,s}) = \rho dt\delta_{t,s} \quad (7.5.47)$$

다음과 같은 확률미분방정식들을 살펴보자.

$$dx_{1,u} = \beta_1(x_{1,u}, x_{2,u}, u)du + \gamma_{11}(x_{1,u}, x_{2,u}, u)dW_{1,u} + \gamma_{12}(x_{1,u}, x_{2,u}, u)dW_{2,u} \quad (7.5.48)$$

$$dx_{2,u} = \beta_2(x_{1,u}, x_{2,u}, u)du + \gamma_{21}(x_{1,u}, x_{2,u}, u)dW_{1,u} + \gamma_{22}(x_{1,u}, x_{2,u}, u)dW_{2,u} \quad (7.5.49)$$

주어진 Borel가측함수(Borel measurable function)  $h(y_1, y_2)$ 에 대해서, 다음 함수들을 정의하자.

$$g(x_1, x_2, t) \doteq E(h(X_{1,T}, X_{2,T})|X_{1,t} = x_1, X_{2,t} = x_2, t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7.5.50)$$

$$f(x_1, x_2, t) \doteq E(e^{-r[T-t]}h(X_{1,T}, X_{2,T})|X_{1,t} = x_1, X_{2,t} = x_2, t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7.5.51)$$

2변량Feynman-Kac정리에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + g_3 + \frac{1}{2} [\gamma_{11}^2 + 2\rho\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{12}^2] g_{11} \\
 + [\gamma_{11}\gamma_{21} + \rho\gamma_{11}\gamma_{22} + \rho\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}] g_{12} + \frac{1}{2} [\gamma_{21}^2 + 2\rho\gamma_{21}\gamma_{22} + \gamma_{22}^2] g_{22} = 0 \quad (7.5.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + f_3 + \frac{1}{2} [\gamma_{11}^2 + 2\rho\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{12}^2] f_{11} \\
 + [\gamma_{11}\gamma_{21} + \rho\gamma_{11}\gamma_{22} + \rho\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}] f_{12} + \frac{1}{2} [\gamma_{21}^2 + 2\rho\gamma_{21}\gamma_{22} + \gamma_{22}^2] f_{22} = rf \quad (7.5.53)
 \end{aligned}$$

함수들  $g$ 와  $f$ 의 말기조건들은 다음과 같다.

$$g(x_1, x_2, T) = h(x_1, x_2) \quad \forall(x_1, x_2) \tag{7.5.54}$$

$$f(x_1, x_2, T) = h(x_1, x_2) \quad \forall(x_1, x_2) \tag{7.5.55}$$

다변량 Feynman-Kac 정리에 대한 자세한 내용은 최병선 [3, 제5,7절]을 참조하라.

### 7.5.5 내가격확률의 편미분방정식

이 소절에서는 내가격확률 (ITM probability)의 편미분방정식을 유도하기로 하자.

식 (7.1.5)에서 알 수 있듯이, 만기시점  $T$ 에서 행사가격이  $K$ 인 유럽형콜옵션의 가치  $C(K)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$C(K) = e^{xt} Q_1(x_T > \ln K) - Ke^{-r\tau} Q_2(x_T > \ln K) = e^{xt} p_1 - Ke^{-r\tau} p_2 \tag{7.5.56}$$

여기서  $p_1 \doteq Q_1(x_T > \ln K)$ 와  $p_2 \doteq Q_2(x_T > \ln K)$ 는 내가격확률들 (ITM probabilities)이다. 예를 들어, Black-Scholes 모형에서  $p_1 = Q^S(x_T > \ln K)$ 는 유럽형콜옵션의 델타이고  $p_2 = Q(x_T > \ln K)$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 (만기시점  $T$ 에서) 원자산  $S_T$ 가 행사가격  $K$  이상일 확률이다. 식 (7.5.56)의 우변의 첫 번째 항  $e^{xt} p_1$ 은 권리행사를 할 수 있는 확률을 고려한 원자산의 현재시점  $t$ 에서 가치를 나타내고, 두 번째 항  $Ke^{-r\tau} p_2$ 는 권리행사가 되는 확률을 고려한 지불대금의 현재시점  $t$ 에서 가치이다. 따라서 각 항을 금융파생상품의 가치로 간주할 수 있다.

식 (7.5.56)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial C(K)}{\partial t} = e^{xt} \frac{\partial p_1}{\partial t} - Ke^{-r\tau} \left[ rp_2 + \frac{\partial p_2}{\partial t} \right] \tag{7.5.57}$$

$$\frac{\partial C(K)}{\partial x_t} = e^{xt} \left[ p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_t} \right] - Ke^{-r\tau} \frac{\partial p_2}{\partial x_t} \tag{7.5.58}$$

$$\frac{\partial C(K)}{\partial v_t} = e^{xt} \frac{\partial p_1}{\partial v_t} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial p_2}{\partial v_t} \tag{7.5.59}$$

식 (7.5.58)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 C(K)}{\partial x_t^2} = e^{xt} \left[ p_1 + 2 \frac{\partial p_1}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t^2} \right] - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t^2} \tag{7.5.60}$$

식 (7.5.59)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 C(K)}{\partial v_t^2} = e^{x_t} \frac{\partial^2 p_1}{\partial v_t^2} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 p_2}{\partial v_t^2} \quad (7.5.61)$$

식 (7.5.58)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 C(K)}{\partial x_t \partial v_t} = e^{x_t} \left[ \frac{\partial p_1}{\partial v_t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t \partial v_t} \right] - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t \partial v_t} \quad (7.5.62)$$

다변량Feynman-Kac정리에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션가치  $C(K)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} -rC(K) + \frac{\partial C(K)}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial C(K)}{\partial x_t} + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu v_t \} \frac{\partial C(K)}{\partial v_t} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 C(K)}{\partial x_t^2} + \rho \xi v_t \frac{\partial^2 C(K)}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 C(K)}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.63)$$

식 (7.5.57)~식 (7.5.62)를 식 (7.5.63)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$S_t h_1 - Ke^{-r\tau} h_2 = 0 \quad (7.5.64)$$

여기서  $h_1$ 과  $h_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1 \doteq -rp_1 + \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \left[ p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_t} \right] + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu v_t \} \frac{\partial p_1}{\partial v_t} \\ + \frac{1}{2}v_t \left[ p_1 + 2\frac{\partial p_1}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t^2} \right] + \rho \xi v_t \left[ \frac{\partial p_1}{\partial v_t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t \partial v_t} \right] + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 p_1}{\partial v_t^2} \end{aligned} \quad (7.5.65)$$

$$\begin{aligned} h_2 \doteq \frac{\partial p_2}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial p_2}{\partial x_t} + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu v_t \} \frac{\partial p_2}{\partial v_t} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t^2} + \rho \xi v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial v_t^2} \end{aligned} \quad (7.5.66)$$

식 (7.5.64)는 모든  $S_t (> 0)$ 와  $K$ 에 대해서 성립한다. 따라서, 식  $h_1 = 0$ 와 식  $h_2 = 0$ 가 성립한다. 즉, 내가격확률  $p_1$ 은 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} -rp_1 + \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \left[ p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_t} \right] + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu v_t \} \frac{\partial p_1}{\partial v_t} \\ + \frac{1}{2}v_t \left[ p_1 + 2\frac{\partial p_1}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t^2} \right] + \rho \xi v_t \left[ \frac{\partial p_1}{\partial v_t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t \partial v_t} \right] + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 p_1}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.67)$$

또한, 내가격확률  $p_2$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial p_2}{\partial x_t} + \{ \kappa[\theta - v_t] - \nu v_t \} \frac{\partial p_2}{\partial v_t} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t^2} + \rho \xi v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.68)$$

유럽형콜옵션의 지불금액조건  $C_T = [S_T - K]^+$ 를 만족시키기 위해서 편미분방정식들 (7.5.67)과 (7.5.68)가 만족시켜야 할 경계조건들은 각각 다음과 같다.

$$p_1(x_T, v_T, T; k) = 1(x_T \geq k) \quad (7.5.69)$$

$$p_2(x_T, v_T, T; k) = 1(x_T \geq k) \quad (7.5.70)$$

여기서  $k = \ln K$ 이다.

### 7.5.6 새로운 형태의 Heston 확률미분방정식들

Heston (1993)이 뛰어난 이유 중의 하나는 편미분방정식들 (7.5.67)과 (7.5.68)을 푸는 것이 아니라, 2변량 확률과정  $\{[x_u, v_u]^T\}$ 가 따르는 확률미분방정식들 편미분방정식들 (7.5.67)과 (7.5.68)을 적절히 변형해서, 함수  $p_1$ 이나 함수  $p_2$ 가 만족시키는 새로운 형태의 편미분방정식들을 제시한 것이다.

식 (7.5.69)에서 알 수 있듯이, 다음 위험중립가치평가식이 성립한다.

$$p_1(x, v, t; k) = E^{Q_1}(1(x_T \geq k) | x_t = x, v_t = v) \quad (7.5.71)$$

다음 변수들을 정의하자.

$$x_{1,t} = x_t, \quad x_{2,t} = v_t \quad (7.5.72)$$

$$h(x_{1,T}, x_{2,T}) = 1(x_{1,T} \geq k) \quad (7.5.73)$$

식 (7.5.71)~식 (7.5.73)에서 알 수 있듯이, 함수  $\check{h} \doteq E^{Q_1}(h(x_{1,T}, x_{2,T}) | x_{1,t} = x, x_{2,t} = v, t)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\check{h} = p_1(x, v, t; k) \quad (7.5.74)$$

2변량Feynman-Kac정리에서 알 수 있듯이, 함수  $\check{h}$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &\mu_1\check{h}_1 + \mu_2\check{h}_2 + \check{h}_3 + \frac{1}{2} [\sigma_{11}^2 + 2\rho\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}^2] \check{h}_{11} \\ &+ [\sigma_{11}\sigma_{21} + \rho\sigma_{11}\sigma_{22} + \rho\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}] \check{h}_{12} + \frac{1}{2} [\sigma_{21}^2 + 2\rho\sigma_{21}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2] \check{h}_{22} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.75)$$

식 (7.5.67)에서 알 수 있듯이, 내가격확률  $p_1 = p_1(x, v, t; k)$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &\left[ r + \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial p_1}{\partial x_t} + \{ \kappa\theta - [\kappa + \nu - \rho\xi]v_t \} \frac{\partial p_1}{\partial v_t} + \frac{\partial p_1}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t^2} + \rho\xi v_t \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 p_1}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.76)$$

식 (7.5.75)과 식 (7.5.76)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mu_1 = r + \frac{1}{2}v_t \quad (7.5.77)$$

$$\mu_2 = \kappa\theta - [\kappa + \nu - \rho\xi]v_t \quad (7.5.78)$$

$$\sigma_{11}^2 + 2\rho\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}^2 = v_t \quad (7.5.79)$$

$$\sigma_{11}\sigma_{21} + \rho\sigma_{11}\sigma_{22} + \rho\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} = \rho\xi v_t \quad (7.5.80)$$

$$\sigma_{21}^2 + 2\rho\sigma_{21}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 = \xi^2 v_t \quad (7.5.81)$$

다음과 같이  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$  그리고  $\sigma_{22}$ 를 선택하기로 하자.

$$\sigma_{11} = \sqrt{v_t}, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = \xi\sqrt{v_t} \quad (7.5.82)$$

식 (7.5.82)에서 선택한  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$  그리고  $\sigma_{22}$ 는 식 (7.5.79)~식 (7.5.81)을 만족한다. 다음 확률미분방정식들을 살펴보자.

$$dx_u = \left[ r + \frac{1}{2}v_u \right] du + \sqrt{v_u} dW_{1,u}^Q \quad (7.5.83)$$

$$dv_u = \{ \kappa\theta - [\kappa + \nu - \rho\xi]v_t \} du + \xi\sqrt{v_u} dW_{2,u}^Q \quad (7.5.84)$$

여기서  $\{[dW_{1,u}^Q, dW_{2,u}^Q]^T\}$ 는 2변량Brown운동이다. 확률과정  $\{[x_u, v_u]^T\}$ 가 확률미분방정식들 식 (7.5.83)과 식 (7.5.84)을 만족하면, 내가격확률  $p_1 = p_1(x, v, t; k)$ 는 편미분방정식 (7.5.76)을 만족한다.

같은 방법으로  $p_2 = p_2(x, v, t; k)$ 에 해당하는 확률미분방정식들을 구해보자. 식 (7.5.70)에서 알 수 있듯이, 다음 위험중립가치평가식이 성립한다.

$$p_2(x, v, t; k) = E^{Q^2}(1(x_T \geq k) | x_t = x, v_t = v) \quad (7.5.85)$$

다음 변수들을 정의하자.

$$x_{1,t} = x_t, \quad x_{2,t} = v_t \quad (7.5.86)$$

$$h(x_{1,T}, x_{2,T}) = 1(x_{1,T} \geq k) \quad (7.5.87)$$

식 (7.5.85)~식 (7.5.87)에서 알 수 있듯이, 함수  $\tilde{h} \doteq E(h(x_{1,T}, x_{2,T}) | x_{1,t} = x, x_{2,t} = v, t)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\tilde{h} = p_2(x, v, t; k) \quad (7.5.88)$$

2변량Feynman-Kac정리에서 알 수 있듯이, 함수  $\tilde{h}$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \mu_1 \tilde{h}_1 + \mu_2 \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 + \frac{1}{2} [\sigma_{11}^2 + 2\rho\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}^2] \tilde{h}_{11} \\ & + [\sigma_{11}\sigma_{21} + \rho\sigma_{11}\sigma_{22} + \rho\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}] \tilde{h}_{12} + \frac{1}{2} [\sigma_{21}^2 + 2\rho\sigma_{21}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2] \tilde{h}_{22} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.89)$$

식 (7.5.88)에서 알 수 있듯이, 내가격확률  $p_2 = p_2(x, v, t; k)$ 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial p_2}{\partial x_t} + \{ \kappa\theta - [\kappa + \nu]v_t \} \frac{\partial p_2}{\partial v_t} + \frac{\partial p_2}{\partial t} \\ & + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t^2} + \rho\xi v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 p_2}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.90)$$



(7.5.89)과 식 (7.5.90)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\mu_1 = r - \frac{1}{2}v_t \quad (7.5.91)$$

$$\mu_2 = \kappa\theta - [\kappa + \nu]v_t \quad (7.5.92)$$

$$\sigma_{11}^2 + 2\rho\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}^2 = v_t \quad (7.5.93)$$

$$\sigma_{11}\sigma_{21} + \rho\sigma_{11}\sigma_{22} + \rho\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} = \rho\xi v_t \quad (7.5.94)$$

$$\sigma_{21}^2 + 2\rho\sigma_{21}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 = \xi^2 v_t \quad (7.5.95)$$

다음과 같이  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$  그리고  $\sigma_{22}$ 를 선택하기로 하자.

$$\sigma_{11} = \sqrt{v_t}, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = \xi\sqrt{v_t} \quad (7.5.96)$$

식 (7.5.96)에서 선택한  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$  그리고  $\sigma_{22}$ 는 식 (7.5.93)~식 (7.5.95)를 만족한다. 다음 확률미분방정식들을 살펴보자.

$$dx_u = \left[ r - \frac{1}{2}v_u \right] du + \sqrt{v_u} dW_{1,u}^Q \quad (7.5.97)$$

$$dv_u = \{ \kappa\theta - [\kappa + \nu]v_t \} du + \xi\sqrt{v_u} dW_{2,u}^Q \quad (7.5.98)$$

여기서  $\{[dW_{1,u}^Q, dW_{2,u}^Q]^T\}$ 는 2변량Brown운동이다. 확률과정  $\{[x_u, v_u]^T\}$ 가 확률미분방정식들 식 (7.5.97)과 식 (7.5.98)을 만족하면, 내가격확률  $p_2 = p_2(x, v, t; k)$ 는 편미분방정식 (7.5.90)을 만족한다.

### 7.5.7 특성함수의 편미분방정식

확률측도들  $Q_1$ 과  $Q_2$  하에서 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 특성함수들  $\psi_1(\cdot)$ 와  $\psi_2(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\psi_j(x, v, t; \lambda) = E^{Q_j}(\exp(i\lambda x_T) | x_t = x, v_t = v), \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.99)$$

이에 해당하는 경계조건들은 다음과 같다.

$$\psi_j(x, v, T; \lambda) = E^{Q_j}(\exp(i\lambda x_T) | x_T = x, v_t = v) = \exp(i\lambda x), \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.100)$$

내가격확률  $p_1 = p_1(x, v, t; k)$ 의 편미분방정식 (7.5.76)을 구하는 방법을 적용해서 다음과 같은 특성함수  $\psi_1 = \psi_1(x, v, t; \lambda)$ 의 편미분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[ r + \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + \{ \kappa\theta - [\kappa + \nu - \rho\xi]v_t \} \frac{\partial \psi_1}{\partial v_t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_t^2} + \rho\xi v_t \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.101)$$

내가격확률  $p_2 = p_2(x, v, t; k)$ 의 편미분방정식 (7.5.90)을 구하는 방법을 적용해서 다음과 같은 특성함수  $\psi_2 = \psi_2(x, v, t; \lambda)$ 의 편미분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[ r - \frac{1}{2}v_t \right] \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} + \{ \kappa\theta - [\kappa + \nu]v_t \} \frac{\partial \psi_2}{\partial v_t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_t^2} + \rho\xi v_t \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.102)$$

특성함수의 편미분방정식들 (7.5.101)과 (7.5.102)를 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\begin{aligned} [r + e_j v_t] \frac{\partial \psi_j}{\partial x_t} + \{ \kappa\theta - b_j v_t \} \frac{\partial \psi_j}{\partial v_t} - \frac{\partial \psi_j}{\partial \tau} \\ + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_t^2} + \rho\xi v_t \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_t \partial v_t} + \frac{1}{2}\xi^2 v_t \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial v_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5.103)$$

여기서  $\tau = T - t$ 이고, 또한 다음 식들이 성립한다.

$$b_1 = \kappa + \nu - \rho\xi, \quad e_1 = \frac{1}{2} \quad (7.5.104)$$

$$b_2 = \kappa + \nu, \quad e_2 = -\frac{1}{2} \quad (7.5.105)$$

특성함수의 편미분방정식 (7.5.103)과 경계조건 (7.5.100)으로 구성된 경계값문제를 풀어서 특성함수  $\psi_j$ 를 구할 수 있다. Heston [36]을 따라서, 이후 로그원자산  $x_t = \ln S_t$ 의 특성함수가 다음과 같은 선형로그함수라고 가정하자.

$$\psi_j(\lambda, x_t, v_t) = \exp(C_j(\tau, \lambda) + D_j(\tau, \lambda)v_t + i\lambda x_t), \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.106)$$

다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \tau} = \left[ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v_t \right] \psi_j, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x_t} = i \psi_j \lambda, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial v_t} = D_j \psi_j \quad (7.5.107)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_t^2} = -\psi_j \lambda^2, \quad \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial v_t^2} = D_j^2 \psi_j, \quad \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_t \partial v_t} = i D_j \psi_j \lambda \quad (7.5.108)$$

식 (7.5.107)과 식 (7.5.108)을 식 (7.5.103)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$[r + e_j v_t] \lambda i + [\kappa \theta - b_j v_t] D_j - \left[ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v_t \right] - \frac{1}{2} v_t \lambda^2 + \rho \xi v_t D_j \lambda i + \frac{1}{2} \xi^2 v_t D_j^2 = 0 \quad (7.5.109)$$

식 (7.5.109)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[ e_j \lambda i - b_j D_j - \frac{\partial D_j}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \lambda^2 + \rho \xi D_j \lambda i + \frac{1}{2} \xi^2 D_j^2 \right] v_t + \left[ r \lambda i + \kappa \theta D_j - \frac{\partial C_j}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (7.5.110)$$

식 (7.5.110)에 항등식원리를 적용하면, 다음 미분방정식들을 얻는다.

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = e_j \lambda i - b_j D_j - \frac{1}{2} \lambda^2 + \rho \xi D_j \lambda i + \frac{1}{2} \xi^2 D_j^2 \quad (7.5.111)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = r \lambda i + \kappa \theta D_j \quad (7.5.112)$$

미분방정식 (7.5.111)은 Riccati미분방정식이다.

### 7.5.8 Riccati미분방정식

계수들이  $P(t), Q(t), R(t)$ 인 Riccati미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dy(t)}{dt} = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)y^2(t) \quad (7.5.113)$$

함수  $y(t)$ 를 다음과 같이 표현하자.

$$y(t) = -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{R(t)} \quad (7.5.114)$$

식 (7.5.114)를 미분방정식 (7.5.113)에 대입하면, 다음 미분방정식을 얻는다.

$$w''(t) - \left[ \frac{P'(t)}{P(t)} + Q(t) \right] w'(t) + P(t)R(t)w(t) = 0 \quad (7.5.115)$$

다음 식들을 만족하는 상수들  $b$ 와  $c$ 가 존재한다고 하자.

$$- \left[ \frac{P'(t)}{P(t)} + Q(t) \right] = b, \quad P(t)R(t) = c \quad (7.5.116)$$

이러한 경우에 미분방정식 (7.5.115)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w''(t) + bw'(t) + cw(t) = 0 \quad (7.5.117)$$

방정식  $z^2 + bz + c = 0$ 의 두 근  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (7.5.118)$$

따라서 미분방정식 (7.5.117)의 해는 다음과 같다.

$$w(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} \quad (b^2 - 4c \neq 0) \quad (7.5.119)$$

$$w(t) = [c_1 + c_2 t] e^{\alpha t}, \quad (b^2 - 4c = 0) \quad (7.5.120)$$

여기서  $c_1$ 과  $c_2$ 는 상수들이다.

식 (7.5.114), 식 (7.5.119)와 식 (7.5.120)에서 알 수 있듯이, Riccati미분방정식 (7.5.113)의 해는 다음과 같다.

$$y(t) = - \frac{c_3 \alpha e^{\alpha t} + \beta e^{\beta t}}{c_3 e^{\alpha t} + e^{\beta t}} \frac{1}{R(t)}, \quad (b^2 - 4c \neq 0) \quad (7.5.121)$$

$$y(t) = - \frac{[\alpha c_3 + 1 + \alpha t] e^{\alpha t}}{[c_3 + t] e^{\alpha t}} \frac{1}{R(t)}, \quad (b^2 - 4c = 0) \quad (7.5.122)$$

여기서  $c_3 \doteq c_1/c_2$ 이다.

### 7.5.9 특성함수방정식의 Riccati해

미분방정식 (7.5.111)을 다음과 같은 Riccati미분방정식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - U_j D_j + R D_j^2 \quad (7.5.123)$$

여기서  $P_j, U_j$  그리고  $R$ 은 다음과 같다.

$$P_j = e_j \lambda i - \frac{1}{2} \lambda^2, \quad U_j = b_j - \rho \xi \lambda i, \quad R = \frac{1}{2} \xi^2 \quad (7.5.124)$$

식 (7.5.117)에서 알 수 있듯이, 식 (7.5.124)에 상응하는 미분방정식은 다음과 같다.

$$w''(t) + U_j w'(t) + P_j w(t) = 0 \quad (7.5.125)$$

방정식  $z^2 + U_j z + P_j = 0$ 의 두 근  $\alpha_j$ 와  $\beta_j$ 는 다음과 같다.

$$\alpha_j = \frac{-U_j + \sqrt{U_j^2 - 4P_j R}}{2}, \quad \beta_j = \frac{-U_j - \sqrt{U_j^2 - 4P_j R}}{2} \quad (7.5.126)$$

다음 식이 성립한다.

$$\sqrt{U_j^2 - 4P_j R} = \sqrt{[b_j - \rho \xi \lambda i]^2 - [2e_j \lambda i - \lambda^2] \xi^2} \doteq d_j, \quad (7.5.127)$$

일반적으로  $d_j \neq 0$ 이므로, 식  $d_j \neq 0$ 가 성립한다고 가정하자.

식 (7.5.121)에서 알 수 있듯이, 미분방정식 (7.5.123)의 해는 다음과 같다.

$$D_j(\tau) = -\frac{c_3 \alpha e^{\alpha_j \tau} + \beta e^{\beta_j \tau}}{c_3 e^{\alpha_j \tau} + e^{\beta_j \tau}} \frac{1}{R(t)} \quad (7.5.128)$$

초기조건  $D_j(0) = 0$ 를 식 (7.5.128)에 대입하면, 다음 식이 성립한다.

$$-\frac{c_3 \alpha + \beta}{c_3 + 1} \frac{1}{R(0)} = 0 \quad (7.5.129)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$c_3 = -\frac{\beta_j}{\alpha_j} = -\frac{U_j + d_j}{U_j - d_j} \doteq -g_j \quad (7.5.130)$$

식 (7.5.130)을 식 (7.5.128)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$D_j(\tau) = -\frac{1 - e^{[\alpha_j - \beta_j]\tau}}{1 - g_j e^{[\alpha_j - \beta_j]\tau}} \cdot \frac{\beta_j}{R(t)} = \frac{[1 - e^{d_j\tau}][U_j + d_j]}{[1 - g_j e^{d_j\tau}]\xi^2} \quad (7.5.131)$$

여기서 마지막 등호는 식  $2R = \xi^2$ 에 의해서 성립한다.

식 (7.5.131)을 식 (7.5.112)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = r\lambda i + \kappa\theta \frac{[1 - e^{d_j\tau}][U_j + d_j]}{[1 - g_j e^{d_j\tau}]\xi^2} \quad (7.5.132)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$C_j = r\lambda i\tau + \kappa\theta \frac{U_j + d_j}{\xi^2} \int_0^\tau \frac{1 - e^{d_j z}}{1 - g_j e^{d_j z}} dz + K_1 \quad (7.5.133)$$

여기서  $K_1$ 은 상수이다. 식  $C_j(0, \lambda) = 0$ 에서 알 수 있듯이, 식 (7.5.133)에  $\tau = 0$ 를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$K_1 = 0 \quad (7.5.134)$$

식 (7.5.134)를 식 (7.5.133)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$C_j = r\lambda i\tau + \kappa\theta \frac{U_j + d_j}{\xi^2} \int_0^\tau \frac{1 - e^{d_j z}}{1 - g_j e^{d_j z}} dz \quad (7.5.135)$$

식 (7.5.135)에 변수변환  $x = e^{d_j z}$ 를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$C_j(\tau, \lambda) = r\lambda i\tau + \kappa\theta \frac{U_j + d_j}{\xi^2 d_j} \int_1^{\exp(d_j\tau)} \frac{1 - x}{1 - g_j x} \cdot \frac{1}{x} dx \quad (7.5.136)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} C_j(\tau, \lambda) &= r\lambda i\tau + \kappa\theta \frac{U_j + d_j}{\xi^2 d_j} \int_1^{\exp(d_j\tau)} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1 - g_j}{1 - g_j x} \right] dx \\ &= r\lambda i\tau + \kappa\theta \frac{U_j + d_j}{\xi^2 d_j} \left[ \ln x + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln(1 - g_j x) \right]_1^{\exp(d_j\tau)} \\ &= r\lambda i\tau + \kappa\theta \frac{U_j + d_j}{\xi^2 d_j} \left[ d_j\tau + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \end{aligned} \quad (7.5.137)$$

식 (7.5.130)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{U_j + d_j}{d_j} \cdot \frac{1 - g_j}{g_j} = \frac{U_j + d_j}{d_j} \cdot \frac{1 - \frac{U_j + d_j}{U_j - d_j}}{\frac{U_j + d_j}{U_j - d_j}} = -2 \quad (7.5.138)$$

식 (7.5.138)을 식 (7.5.137)에 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$C_j(\tau, \lambda) = ri\tau\lambda + \frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left\{ [U_j + d_j]\tau - 2 \ln \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right\} \quad (7.5.139)$$

식 (7.5.131)과 식 (7.5.139)를 식 (7.5.106)에 대입하면, 로그원자산  $x_t = \ln U_t$ 의 특성함수가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_j(\lambda, x_t, v_t) = \exp & \left( ri\tau\lambda + \frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left\{ [U_j + d_j]\tau - 2 \ln \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{[U_j + d_j][1 - e^{d_j \tau}]}{\xi^2[1 - g_j e^{d_j \tau}]} v_t + i\lambda x_t \right), \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.140) \end{aligned}$$

### 7.5.10 유럽형옵션의 Heston가치평가식

확률측도들  $Q_1$ 과  $Q_2$  하에서 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 확률밀도함수들은 각각  $f_1(\cdot)$   $f_2(\cdot)$ , 이 확률밀도함수들의 Fourier 변환들 각각  $\hat{f}_1(\cdot)$ 과  $\hat{f}_2(\cdot)$ , 그리고 특성함수들은 각각  $\psi_1(\cdot)$ 과  $\psi_2(\cdot)$ 로 표기한다. 또한,  $k = \ln K$ 이다.

식 (5.3.1)에서 알 수 있듯이, 내가격확률  $p_j$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} p_j &= Q_j(S_T > K) = Q_j(x_T > k) = 1 - Q_j(x_T \leq k) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} d\lambda, \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.141) \end{aligned}$$

함수들  $\psi_2$ 와  $e^{-i\lambda k}$ 에 Euler식을 적용하면,  $e^{-i\lambda k} \psi_2/[i\lambda]$ 의 실수부는  $\lambda$ 의 우함수이고 허수부  $\lambda$ 의 기함수임을 알 수 있다. 따라서 식 (7.5.141)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p_1 = Q_1(S_T > K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left\{ \frac{e^{-i\lambda k} \psi_1(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} \right\} d\lambda \quad (7.5.142)$$

$$p_2 = Q_2(S_T > K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left\{ \frac{e^{-i\lambda k} \psi_2(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} \right\} d\lambda \quad (7.5.143)$$

식 (7.5.142)와 식 (7.5.143)에 관한 자세한 내용은 Gil-Pelaez [34]를 참조하라.

식 (7.2.1)에서 표기했듯이, Heston모형에 의한 유럽형콜옵션가치를 다음과 같다.

$$C(K) = S_t Q_1(x_T > k) - KB(t, T) Q_2(x_T > k) \quad (7.5.144)$$

확률측도  $Q_j$  하에서 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 특성함수  $\psi_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_T} f_j(x_T) dx_T$ 가 식 (7.5.140)에 주어졌다. 식 (7.5.141)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$Q_j(x_T > k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} d\lambda, \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.145)$$

식 (7.5.140)을 식 (7.5.145)에 대입해서  $Q_1(x_T > k)$ 와  $Q_2(x_T > k)$ 를 계산한다. 이렇게 계산된  $Q_1$ 과  $Q_2$ 를 식 (7.5.144)에 대입해서, 유럽형콜옵션의 Heston가치를 계산한다.

### 7.5.11 배당이 있는 주식에 대한 Heston가치평가식

이 소절에서는 연속형 배당률이  $q$ 인 주식에 대해서 살펴보자. 이 주식의 주가가 다음과 같은 Heston의 확률변동성모형을 따른다고 하자.

$$dS_t = [r - q]S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}^Q \quad (7.5.146)$$

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t]dt + \xi \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \quad (7.5.147)$$

$$E^Q(dW_{1,t}^Q dW_{2,t}^Q) = \rho dt \quad (7.5.148)$$

여기서  $Q$ 는 위험중립확률측도이다.

앞에서와 마찬가지로, 로그원자산  $x_t = \ln S_t$ 의 특성함수가 다음과 같은 선형로그함수라고 가정하자.

$$\psi_j^q(\lambda, x_t, v_t) = \exp\left(C_j^q(\tau, \lambda) + D_j^q(\tau, \lambda)v_t + i\lambda x_t\right), \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.149)$$

이 모형에서  $D_j^q(\tau)$ 는 식 (7.5.131)에서 기술한  $D_j(\tau)$ 와 같다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$D_j^q(\tau) = -\frac{1 - e^{[\alpha_j - \beta_j]\tau}}{1 - g_j e^{[\alpha_j - \beta_j]\tau}} \cdot \frac{\beta_j}{R(t)} = \frac{[1 - e^{d_j \tau}][U_j + d_j]}{[1 - g_j e^{d_j \tau}]\xi^2} \quad (7.5.150)$$

또한,  $C_j^q(\tau)$ 는 식 (7.5.139)에서 기술한  $C_j(\tau)$ 에서  $r$ 대신  $r - q$ 를 대입해야 한다. 즉, 다음



식이 성립한다

$$C_j^q(\tau, \lambda) = [r - q]i\tau\lambda + \frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left\{ [U_j + d_j]\tau - 2 \ln \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right\} \quad (7.5.151)$$

식 (7.5.141)에서와 마찬가지로, 내가격확률들을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_j^q(x_T > k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda k} \psi_j^q(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} d\lambda, \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.152)$$

이 경우에 Heston모형에 의한 유럽형콜옵션가치를 다음과 같다.

$$C^q(K) = S_t e^{-q\tau} Q_1^q(x_T > k) - K e^{-r\tau} Q_2^q(x_T > k) \quad (7.5.153)$$

풋콜패리티에서 알 수 있듯이, 유럽형풋옵션의 Heston가치  $P^q(K)$ 는 다음과 같다.

$$P^q(K) = C^q(K) + K e^{-r\tau} - S_t e^{-q\tau} \quad (7.5.154)$$

식 (7.5.154)에 식 (7.5.153)을 대입하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$P^q(K) = K e^{-r\tau} [1 - Q_j^q(x_T > k)] - S_t e^{-q\tau} [1 - Q_1^q(x_T > k)] \quad (7.5.155)$$

식 (7.5.144)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\tilde{Q}_j^q \doteq 1 - Q_j^q(x_T > k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda k} \psi_j^q(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} d\lambda, \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.156)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$\tilde{Q}_j^q = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left\{ \frac{e^{-i\lambda k} \psi_j^q(\lambda, x_t, v_t)}{i\lambda} \right\} d\lambda, \quad (j = 1, 2) \quad (7.5.157)$$

식 (7.5.157)을 식 (7.5.155)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$P^q(K) = K e^{-r\tau} \tilde{Q}_2^q - S_t e^{-q\tau} \tilde{Q}_1^q \quad (7.5.158)$$

## 7.5.12 Black-Scholes식의 유도

식 (7.5.13)~식 (7.5.15)에서 알 수 있듯이, Heston의 확률변동성모형은 다음과 같다.

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}^Q \quad (7.5.159)$$

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t] dt + \xi \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \quad (7.5.160)$$

$$E^Q \left( dW_{1,t}^Q dW_{2,t}^Q \right) = \rho dt \quad (7.5.161)$$

여기서  $Q$ 를 위험중립확률측도이다. 식 (7.5.159)~식 (7.5.161)에 다음 식들을 대입하자.

$$v_t = \sigma^2, \quad \theta = v_t = \sigma^2, \quad \xi = 0, \quad \rho = 0 \quad (7.5.162)$$

그 결과로 식 (7.5.159)~식 (7.5.161)은 다음 식으로 변형된다.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \quad (7.5.163)$$

여기서  $\{W_u^Q\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$  하에서 Brown운동이다.

식 (7.5.123)과 식 (7.5.124)에서 알 수 있듯이, Heston특성함수  $\psi_j$ 에 해당하는 Riccati 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - U_j D_j + R D_j^2 \quad (7.5.164)$$

여기서  $P_j, U_j$  그리고  $R$ 은 다음과 같다.

$$P_j = e_j \lambda i - \frac{1}{2} \lambda^2, \quad U_j = b_j - \rho \xi \lambda i, \quad R = \frac{1}{2} \xi^2 \quad (7.5.165)$$

식 (7.5.162)를 식 (7.5.165)에 대입하면, 다음 식들을 얻는다.

$$P_j = e_j \lambda i - \frac{1}{2} \lambda^2, \quad U_j = b_j, \quad R = 0 \quad (7.5.166)$$

따라서 미분방정식 (7.5.164)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - b_j D_j \quad (7.5.167)$$

미분방정식 (7.5.167)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial(e^{b_j\tau}D_j)}{\partial\tau} = e^{b_j\tau}P_j \quad (7.5.168)$$

따라서 다음 식들이 성립한다.

$$e^{b_j\tau}D_j = \int_0^\tau e^{b_j\tau}P_j dz = P_j \frac{1}{b_j} [e^{b_j\tau} - 1] \quad (7.5.169)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$D_j = \frac{P_j}{b_j} [1 - e^{-b_j\tau}] \quad (7.5.170)$$

식 (7.5.112)와 식 (7.5.170)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial C_j}{\partial\tau} = r\lambda i + \kappa\sigma^2 \frac{P_j}{b_j} [1 - e^{b_j\tau}] \quad (7.5.171)$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$C_j = \int_0^\tau \left\{ r\lambda i + \kappa\sigma^2 \frac{P_j}{b_j} [1 - e^{-b_jz}] \right\} dz \quad (7.5.172)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$C_j = r\lambda i\tau + \frac{\kappa\sigma^2 P_j}{b_j} \left\{ \tau + \frac{1}{b_j} [e^{-b_j\tau} - 1] \right\} \quad (7.5.173)$$

식 (7.5.170)과 식 (7.5.173)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$C_j + D_j\sigma^2 + i\lambda x_t = r\lambda i\tau + \frac{\kappa\sigma^2 P_j}{b_j}\tau + \frac{P_j\sigma^2}{b_j} [1 - e^{-b_j\tau}] \left[ 1 - \frac{\kappa}{b_j} \right] + i\lambda x_t \quad (7.5.174)$$

식 (7.5.162)에서 식  $\theta - v_t = 0$ 을 가정했으므로, 식 (7.5.160)에서  $\kappa$ 는 자유모수 (free parameter)이다. 이 자유모수를  $\kappa = b_j$ 로 선택하면, 식 (7.5.174)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_j + D_j\sigma^2 + i\lambda x_t = ir\tau\lambda + \sigma^2 P_j\tau + i\lambda x_t \quad (7.5.175)$$

우선  $j = 2$ 인 경우를 살펴보자. 식 (7.5.105)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$e_2 = -\frac{1}{2}, \quad P_2 = -\frac{1}{2}\lambda i - \frac{1}{2}\lambda^2 \quad (7.5.176)$$

따라서 식 (7.5.175)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_2 + D_2\sigma^2 + i\lambda x_t = i \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\lambda^2 \quad (7.5.177)$$

즉, 확률측도  $Q$  하에서 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 특성함수  $\psi_2$ 는 다음과 같다.

$$\psi_2(\lambda, x_t, v_t) = \exp \left( i \left\{ x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\lambda^2 \right) \quad (7.5.178)$$

정규확률분포의 특성함수에서 알 수 있듯이, 이 특성함수에 해당하는 확률분포는 다음과 같다.

$$x_T \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N} \left( x_t + \left[ r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau, \sigma^2\tau \right) \quad (7.5.179)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$Q_2(x_T > k) = \Pr \left( z > \frac{\ln K - \{ \ln S_t + [r - \frac{1}{2}\sigma^2] \tau \}}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \quad (7.5.180)$$

여기서  $z$ 는 표준정규확률변수이다. 즉, 다음 식들이 성립한다.

$$Q_2(x_T > k) = N \left( \frac{\ln \frac{S_t}{K} + [r - \frac{1}{2}\sigma^2] \tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) = N(d_2) \quad (7.5.181)$$

다음으로  $j = 1$ 인 경우를 살펴보자. 식 (7.5.105)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$e_1 = \frac{1}{2}, \quad P_1 = \frac{1}{2}\lambda i - \frac{1}{2}\lambda^2 \quad (7.5.182)$$

따라서 식 (7.5.175)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_1 + D_1\sigma^2 + i\lambda x_t = i \left\{ x_t + \left[ r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau \right\} \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\lambda^2 \quad (7.5.183)$$

즉, 확률측도  $Q$  하에서 확률변수  $x_T = \ln S_T$ 의 특성함수  $\psi_1$ 은 다음과 같다.

$$\psi_1(\lambda, x_t, v_t) = \exp\left(i\left\{x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\lambda^2\right) \quad (7.5.184)$$

정규확률분포의 특성함수에서 알 수 있듯이, 이 특성함수에 해당하는 확률분포는 다음과 같다.

$$x_T \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}\left(x_t + \left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau, \sigma^2\tau\right) \quad (7.5.185)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$Q_1(x_T > k) = \Pr\left(z > \frac{\ln K - \{\ln S_t + [r + \frac{1}{2}\sigma^2]\tau\}}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (7.5.186)$$

즉, 다음 식들이 성립한다.

$$Q_1(x_T > k) = N\left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + [r + \frac{1}{2}\sigma^2]\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = N(d_1) \quad (7.5.187)$$

식 (7.5.181)과 식 (7.5.187)을 식 (7.5.56)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$C(K) = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \quad (7.5.188)$$

식 (7.5.188)은 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이다.



## 참고 문헌

- [1] 최병선 (2002) *Fourier* 해석입문, 세경사.
- [2] 최병선 (2009) 금융공학 I: *Elements of Financial Engineering*, 세경사.
- [3] 최병선 (2013) 금융공학 II: *Black-Scholes Formula*, 세경사.
- [4] 최병선 (2015) 금융공학 III: *Introduction to Financial Engineering*, 김구재단.
- [5] 최병선 (2016) 금융공학 IV: *Monte Carlo Methods for Finance and Economics*, 김구재단.
- [6] 최병선·이성백 (2001) 행렬의 대각화와 *Jordan*표준형, 세경사.
- [7] Bak, J. and Newman, D.J. (1982) *Complex Analysis*, Springer.
- [8] Bakshi, G. and Madan, D. (2000) Spanning and derivative-security valuation, *Journal of Financial Economics* **55**, 205-238.
- [9] Black, F. and Scholes, M. (1973) The pricing of option and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81**, 637-659.
- [10] Breeden, D.T. (1979) An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics* **7**, 265-296.
- [11] Burg J.P. (1967) Maximum Entropy Spectral Analysis. Proceedings of 37th Meeting, Society of Exploration Geophysics, Oklahoma City.
- [12] Carr, P.P. and Madan, D.B. (1999) Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance* **2**, 61-73.
- [13] Chatfield, C. and Xing, H. (2019) *The Analysis of Time Series: An Introduction with R (Seventh Edition)*, Chapman and Hall/CRC.
- [14] Choi, B.S. (1986) On the relation between the maximum entropy probability density function and the autoregressive model, *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing* **ASSP-34**, 1659-1661.

- [15] Choi, B.S. (1990) An information theoretic spectral density, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing* **ASSP-38**, 717-721.
- [16] Choi, B.S. (1991) A time-domain interpretation of the KL spectrum, *IEEE Trans. Signal Processing* **SP-39**, 721-723.
- [17] Choi, B.S. (1993) Multivariate maximum entropy spectrum, *J. Multivariate Analysis* **46**, 56-60.
- [18] Choi, B.S. (1998) An information-theoretic derivation of the 2-D maximum entropy spectrum, *IEEE Signal Processing Letters* **5**, 271-272.
- [19] Choi, B.S. and Cover, T.M. (1984) An information theoretic proof of Burg's maximum entropy spectrum, *Proceedings of the IEEE* **72**, 1094-1095.
- [20] Choi, B.S. and Cover, T.M. (1987) A proof of Burg's theorem, in *Maximum-Entropy and Bayesian Spectral Analysis and Estimation Problems*, C. R. Smith and G. J. Erickson (Eds.), 75-84.
- [21] Chung, K.L. (2001) *A Course in Probability Theory (Third Edition)*, Academic Press.
- [22] Cont, R., and Tankov, P. (2004) *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall.
- [23] Cover, T.M. and Thomas, J.A. (2006) *Elements of Information Theory (Second Edition)*, Wiley.
- [24] Cox, J.C., Ingersoll, J.E. and Ross, S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* **53** 385-407.
- [25] Davies, R. B. (1973) Numerical inversion of a characteristic function, *Biometrika* **60**, 415-417.
- [26] Dempster, M.A.H. and Hong, S. S. G. (2000) Spread option valuation and the fast Fourier transform. Technical report WP 26/2000. Cambridge: The Judge Institute of Management Studies, University of Cambridge.
- [27] Dudley, R.M. (2002) *Real Analysis and Probability (Second Edition)*, Cambridge University Press.
- [28] Dufresne, D., Garrido, J., and Morales, M. (2009) Fourier inversion formulas in option pricing and insurance, *Methodology and Computing in Applied Probability* **11**, 359-383.
- [29] Dym, H. and McKean, H.P. (1972) *Fourier Series and Integrals*, Academic Press.
- [30] Epps, T.W. (1993) Characteristic functions and their empirical counterparts: geometrical interpretations and applications to statistical inference, *The American Statistician* **47**, 33-38.



- [31] Feller, W. (1968) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I (Third Edition)*, Wiley.
- [32] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II (Second Edition)*, Wiley.
- [33] Gatheral, J. (2006) *The Volatility Surface: A Practitioners Guide*, Wiley.
- [34] Gil-Pelaez, J. (1951) Note on the inversion theorem, *Biometrika* **38**, 481-482.
- [35] Golub, G.H. and van Loan, C.f. (1996) *Matrix Computations (Third Edition)*, Johns Hopkins University Press.
- [36] Heston, S.L. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *The Review of Financial Studies* **6**, 327–343.
- [37] In 'T Hout, K. J. and J. Weidman (2011) A Contour integral method for the Black-Scholes and Heston equations, *SIAM Journal on Scientific Computing* **33**, 763-785.
- [38] Jackson, K.R., Jaimungal, S., and Surkov, V. (2008) Fourier space time-stepping for option pricing with Lévy models, *Journal of Computational Finance* **12**, 1–29.
- [39] Jondeau, E., Poon, S., and Rockinger, M. (2007) *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, Springer.
- [40] Körner, T.W. (1988) *Fourier Analysis*, Cambridge University Press.
- [41] Körner, T.W. (1993) *Exercises for Fourier Analysis*, Cambridge University Press.
- [42] Kutz, J.N. (2013) *Data-driven Modeling & Scientific Computation: Methods for Complex Systems & Big Data*, Oxford University Press.
- [43] Kwok Y.K., Leung K.S., and Wong H.Y. (2012) Efficient options pricing using the fast Fourier transform. In: Duan J.C., Härdle W., Gentle J. (eds) *Handbook of Computational Finance. Springer Handbooks of Computational Statistics*, Springer.
- [44] Lee, R. (2004) Option pricing by transform methods: Extensions, unification, and error control, *Journal of Computational Finance* **7**, 51–86.
- [45] Lewis, A. (2001) A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes, Envision Financial Systems and Option City.net, California. Available at <http://optioncity.net/pubs/ExpLevy.pdf>
- [46] Lord, R., Fang, F., Bervoets, F., and Oosterlee, C. W. (2008) A fast and accurate FFT-based method for pricing early-exercise options under Lévy processes., *SIAM Journal on Scientific Computing* **30**, 1678–1705.
- [47] Lukacs, E. (1970) *Characteristic Functions*, Charles Griffin & Co. Ltd.

- [48] Marple, Jr., S.L. (1987) *Digital Spectral Analysis With Applications*, Prentice-Hall.
- [49] Merton, R. (1973) Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Sciences* **4**, 141–183.
- [50] Percival, D. and Walden, A. (2020) *Spectral Analysis for Univariate Time Series*, Cambridge University Press.
- [51] Priestley, M.B. (1982) *Spectral Analysis and Time Series*, Two-Volume Set, Academic Press.
- [52] Schmelzle, M. (2010) Option pricing formulae using Fourier transform: Theory and application. Available at <https://pdfs.semanticscholar.org/ac25/a70209eeaca577c2a03c30d09d9c2275c6e2.pdf>
- [53] Schuster, A. (1897) On Lunar and Solar Periodicities of Earthquakes, *Proceedings of the Royal Society of London* **61**, 455–465.
- [54] Schuster, A. (1898) On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena, *Terrestrial Magnetism* **3(1)**, 13–41.
- [55] Schuster, A. (1906) On the Periodicities of Sunspots, *Philosophical Transactions of the Royal Society* **206**, 69–100.
- [56] Percival, D. and Walden, A. (2020) *Spectral Analysis for Univariate Time Series*, Cambridge University Press.
- [57] Scott, L.O. (1997) Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates, *Mathematical Finance* **7**, 413–426.
- [58] Shephard, N.G. (1991) From characteristic function to distribution function: A simple framework for the theory, *Econometric Theory* **7**, 519–529.
- [59] Steutel, F.W. (1979) Infinite divisibility in theory and practice, *Scandinavian Journal of Statistics* **6**, 57–64.
- [60] Steutel, F.W. and van Harn, K. (2003) *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line*, Chapman & Hall.
- [61] Van Loan, C. (1992) *Computational frameworks for the fast Fourier transform.*, SIAM.
- [62] Wegert, E. (2012) *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*, Birkhäuser.
- [63] Williams, D. (1991) *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.
- [64] Zhu, J. (2010) *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation*, Springer.
- [65] Zhylyevsky, O. (2010) A fast Fourier transform technique for pricing American options under stochastic volatility, *Review of Derivatives Research* **13**, 1–24.

# 찾아보기

- $\sigma$ -유한측도, 199
- $z$  변환, 149
- 2D DFT, 184
- 2D FFT, 184
- 2D Fourier transform, 182, 184
- 2D Fourier transform pair, 183
- 2D Fourier 변환, 182, 184
- 2D Fourier 변환쌍, 183
- 2D IFFT, 184
- 2D inverse Fourier transform, 183
- 2D 역Fourier 변환, 183
- 2변량Brown운동, 301
- 2변량Feynman-Kac 정리, 297, 303
  
- absolutely integrable, 254
- amplitude, 152
- analytic, 22
- analytic function, 11
- angle, 122, 155
- AR model, 186
- ARMA model, 186
- arrays, 140, 142
- asset price, 265
- autoregressive model, 186
- autoregressive moving-average model, 186
- Bartlett 윈도우, 173
- Bhatia, A., 111
- Black-Schoels가치, 273
- Black-Scholes가치, 295
- Black-Scholes모형, 293, 298
- Black-Scholes식, 268, 286, 312, 315
- Black-Scholes식의 유도, 312
- Black-Scholes 편미분방정식, 293
- Black-Scholes 확률과정, 290
- Black-Scholes 확률미분방정식, 277
- Black-Scholes 환경, 279
- Borel measurable function, 297
- Borel가측함수, 297
- bounded, 38
- branch, 64
- branch cut, 50, 64, 67, 70, 73, 76, 82, 256
- Bromwich 적분, 253
- Brown운동, 268, 270, 272, 273, 289, 291, 297
- Burg, J., 186
- calculus of variations, 186

- Carr-Madan 변환, 286  
 Cauchy-Riemann 식, 12  
 Cauchy 적분식, 25–31, 38–40, 68, 70, 73,  
     114, 192, 193, 215  
 Cauchy 정리, 13, 17, 21, 39, 45, 64, 88,  
     158, 189, 256  
 Cauchy 확률밀도함수, 192  
 center of mass, 188  
 central limit theorem, 200  
 characteristic function, 1, 187, 265  
 Choi, B.S., 186  
 CIR 확률과정, 290  
 clockwise direction, 40  
 closed curve, 4  
 CLT, 200  
 compact, 4  
 compact set, 275  
 comparison test, 224  
 complex analysis, 265  
 complex conjugate, 119  
 complex exponential function, 1  
 complex integral, 1  
 complex line integral, 7  
 complex matrix, 118  
 consumption model, 291  
 continuity theorem, 199  
 contour integral, 12, 96  
 conv.m, 150, 152  
 converge absolutely and uniformly, 32  
 convergence theorem, 199  
 convolution, 149, 157, 197, 250  
 counterclockwise, 5, 24  
 counterclockwise direction, 22, 40  
 Cover, T.M., 186  
 curve, 4  
 damping parameter, 287  
 Daniel 윈도우, 173  
 Deléans 지수, 269, 272  
 delta probability measure, 273  
 DFT, 105, 118, 123, 125, 139–141, 146,  
     147, 152, 163, 165, 167,  
     171–173, 175, 177, 178  
 DFT 행렬, 123  
 differential equation, 236  
 Dirac 델타함수, 117, 225, 274, 276  
 discrete Fourier transform, 105, 118, 123  
 discretization bias, 154  
 double exponential probability density  
     function, 214  
 drift parameter, 289  
 eigenvalue, 119  
 eigenvector, 119  
 entropy, 185  
 essential singularity, 36  
 Euler 식, 2, 3, 188  
 even function, 100  
 exponential order, 230  
 exterior point, 20  
 Faltung, 250  
 fast Fourier transform, 126  
 Feller 조건, 290

- FFT, 126, 141, 153, 154, 167, 183
- fft.m, 140, 146, 147, 149, 150, 167, 170, 172, 180
- fftshift.m, 146
- financial engineer, 265
- floating point operation, 125
- flop, 125
- folding, 137
- Fourier analysis, 1
- Fourier approximation, 95
- Fourier cosine expansion, 100
- Fourier expansion, 99, 100
- Fourier integral, 112
- Fourier inversion, 265
- Fourier series, 96
- Fourier sine expansion, 100
- Fourier transform, 111, 265
- Fourier transform pair, 112
- fourier.m, 115
- Fourier–Mellin 적분, 253
- Fourier 계수, 99, 108
- Fourier 근사, 95, 105
- Fourier 급수, 96, 99, 118, 125
- Fourier 변환, 111, 114, 115, 117, 125, 149, 153, 155, 183, 273, 274, 279, 280, 282, 288, 289, 309
- Fourier 변환쌍, 112
- Fourier 사인 전개, 100
- Fourier 적분, 1, 112, 113, 118
- Fourier 적분 정리, 112
- Fourier 전개, 99, 100
- Fourier 코사인 전개, 100
- Fourier 해석, 1, 118
- free parameter, 313
- frequency, 136
- frequency space, 152
- Fubini 정리, 255, 276, 286, 287
- Gauss 함수, 114, 115
- generalized Cauchy integral formula, 214
- generalized Fourier transform, 283
- generator, 295
- Gibbs' phenomenon, 104
- Gibbs 현상, 104
- ginput.m, 175
- Girsanov 정리, 270, 272, 291
- Green's theorem, 17
- Green 정리, 13, 17, 38
- Hadamard, J., 1
- Hamming 윈도우, 173, 175
- Hanning 윈도우, 173, 177, 178
- Heaviside 함수, 254
- Hermite 전치행렬, 119
- Hermite 행렬, 118–120
- Heston 가치, 296, 297, 310, 311
- Heston 가치평가식, 309, 310
- Heston 모형, 289, 290, 292, 293, 295, 310, 311
- Heston의 확률변동성 모형, 292
- Heston 특성함수, 312
- Heston 편미분방정식, 293
- Heston 확률미분방정식, 300, 301

- historical measure, 289
- hole, 21
- holomorphic, 22
- Homer Simpson's Face, 111
- IDFT, 124, 140, 141, 146, 147, 165, 167, 171, 173, 175, 178
- IFFT, 141
- ifft.m, 140, 147, 149, 150, 167, 170, 172, 180
- ifourier.m, 115
- iid, 186
- improper integral, 223
- in distribution, 199
- independent and identically distributed, 186
- infinitely divisible, 198
- initial condition, 236
- initial point, 4
- initial value problem, 236
- interior point, 20, 96
- inverse DFT, 124
- inverse discrete Fourier transform, 124
- inverse Fourier transform, 112
- inverse operator, 146, 147
- isolated singularity, 36, 47
- ITM probability, 266, 298
- Ito-Doebelin보조정리, 268, 279, 290, 291, 293
- Jondeau, E., 187
- Jordan curve theorem, 20
- Jordan경로, 4, 17
- Jordan곡선정리, 20
- keyhole contour, 64
- KL스펙트럼, 185
- Kraus, K., 163
- Kronecker함수, 124
- Kullback-Leibler information number, 185
- Kullback-Leibler information number spectrum, 185
- Kullback-Leibler정보수, 185
- Lévy-Khintchine식, 199
- Lévy의 연속성정리, 199, 217
- Lévy측도, 199
- Lapalce역변환, 253
- Laplace transform, 225
- Laplace변환, 149, 223, 225, 236, 241–248, 250, 253
- Laplace변환의 미분, 235
- Laurent series, 40
- Laurent급수, 40, 44, 45, 96
- Lebesgue's dominated convergence theorem, 255
- Lebesgue적분, 254
- Lebesgue적분가능, 218, 255
- Lebesgue지배수렴정리, 219–221, 255
- Lebesgue측도, 218, 222
- left-hand limit, 96
- linearity, 227
- Log, 24

- MA model, 186
- Maple 명령문, 142
- mass, 225
- max.m, 165
- maximum entropy spectrum, 185
- mean reversion level, 289
- mean reversion property, 292
- mean reversion speed, 289
- measure theory, 265
- Mellin의 역변환, 253
- ME스펙트럼, 185
- money market account, 269
- moving-average model, 186
- multi-valued function, 67
- multiply connected domain, 4
- multiply connected region, 21
- negative frequency, 146
- negatively oriented boundary, 45
- nextpow2.m, 172, 175
- noncentral chi-squared distribution, 292
- noncentrality parameter, 292
- normalized sinc function, 274
- Novikov조건, 269, 272
- numéraire, 267
- numpy.fft, 140
- numpy.ifft, 140
- numpy.rfft, 140
- numpy.rifft, 140
- Nyquist frequency, 167, 175, 177, 178, 182
- Nyquist 주파수, 138, 177
- odd function, 100
- order of zero, 37, 38
- original branch cut, 50, 55
- Ornstein-Uhlenbeck 확률미분방정식, 290
- orthogonal approximation, 95
- orthogonal functions, 97
- orthogonal matrix, 120
- orthogonal transform, 155
- OTM 옵션, 289
- parametric model, 185
- Parseval 등식, 156
- partial differential equation, 265
- Parzen 윈도우, 173
- path integral, 7
- period, 136
- periodogram, 185
- phase, 152
- physical measure, 289
- piecwisely continuous, 96, 99, 112, 113, 116
- piecwisely smooth, 13, 17, 32, 45
- Pierre-Simon Laplace, 223
- Plancharel-Parseval 등식, 155
- Poisson kernel, 28
- Poisson 핵, 28
- pole, 36, 38, 158
- pole of order, 38
- polynomial, 57
- Poon, S., 187
- positive orientation, 5, 22, 24
- positively oriented, 45

- positively oriented boundary, 45
- power spectrum, 164
- principal branch, 64, 67, 70, 73, 76, 78, 82, 85, 88, 256
- principal value, 24
- punctured disc, 36, 37
- Radon-Nikodym 밀도, 266, 270, 280, 281
- rate, 265
- rate parameter, 212
- rational function, 260
- real analysis, 265
- real line integral, 9
- real matrix, 118
- rectifiable curve, 6
- regular, 22
- relative length, 155
- removable singularity, 36, 37
- residue, 38, 39, 46
- Riccati 미분방정식, 305, 306, 312
- Riccati 해, 307
- Riemann 적분, 223, 225
- Riemann 합, 12
- right-hand limit, 96
- Rockinger, M., 187
- sample autocorrelation, 186
- sampling frequency, 137, 177, 182
- self-financing condition, 293
- shape parameter, 212
- shift property, 228
- sigma-finite measure, 199
- sign function, 118
- signum function, 118
- simple closed curve, 45
- simple closed curve, 4, 13
- simple closed path, 32, 46
- simple curve, 4
- simple region, 17
- simply connected domain, 4
- sinc 함수, 274
- singular point, 36
- singularity, 36, 158
- sinusoid, 136
- smooth curve, 10
- spectral analysis, 1, 152
- spectrum, 164
- square matrix, 120
- stochastic differential equation, 265
- stochastic variance process, 290
- sunspot data, 164
- sunspot.dat, 165
- Symbolic Math Toolbox, 101, 115
- tapering, 171
- Taylor 급수, 2
- Taylor 전개, 203, 254
- Temple, G.F.J., 95
- tenor, 289
- terminal point, 4
- the fundamental theorem of calculus, 20
- the residue theorem, 45, 57
- Thomas, J.A., 186
- time space, 152



- time step, 135, 163
- trace, 122
- transpose matrix, 119
- trigonometric polynomial, 100
- true measure, 289
- uniform convergence, 104
- uniqueness, 199
- unit step function, 245–248, 250
- unitary matrix, 118, 120
- unnormalized sinc function, 274
- Vandermonde 행렬, 123
- Vandermonde 행렬식, 124
- volatility, 289
- volatility risk premium, 291
- volatility smile, 187
- WikiQuote, 223
- window, 173
- zero-padding, 171
- 가지, 64
- 가지자름, 50, 51, 55, 64, 67, 70, 73, 76, 82, 256
- 가치평가법, 277
- 각, 122, 155
- 감마확률분포, 212
- 감폭모수, 287, 288
- 경계조건, 305
- 경로독립성, 18
- 경로적분, 7, 12, 96
- 고립특이점, 36, 47
- 고유값, 119
- 고유벡터, 119
- 곡선, 4
- 공액복소수, 119, 155
- 공정한 가치, 267
- 공통근, 260
- 구멍, 21
- 구분적으로 연속, 96, 99, 112, 113, 116
- 구분적으로 평활, 13, 17, 32, 45
- 극점, 36, 38, 44
- 극차수, 38
- 금융상품가치, 293
- 기준재, 267, 269, 271
- 기함수, 100, 288, 309
- 길이를 갖는 곡선, 6
- 꼬리가 무거운, 153, 187
- 내가격확률, 266, 273, 298, 299, 301, 304, 305, 309, 311
- 내가격확률의 편미분방정식, 298
- 내점, 20, 96
- 다가치함수, 67
- 다변량Feynman-Kac 정리, 297–299
- 다중연결영역, 4, 21
- 단기금융계정, 269
- 단순경로, 4
- 단순닫힌경로, 4, 13, 32, 45, 46
- 단순연결영역, 4, 24
- 단순영역, 17
- 단위스텝함수, 118, 245–248, 250
- 단위원, 188
- 닫힌경로, 4, 24, 25

- 대각행렬, 121
- 델타, 298
- 델타확률측도, 273, 280
- 도함수의 Laplace 변환, 233
- 로그행사가격, 266
- 만기시점, 266
- 매개변수모형, 185
- 매쓰, 225
- 멱함수, 57, 130
- 모수적 방법, 185
- 무위험이자율, 267, 294
- 무위험포트폴리오, 293, 294
- 무재정가치, 266
- 무한대에서 유수, 47
- 무한분해가능, 198
- 물리적측도, 289
- 미분방정식, 2, 236, 242-245, 250, 307
- 미적분학의 기본정리, 20
- 배당이 있는 주식, 310
- 변동성, 267, 271, 289, 294, 295
- 변동성과과정, 277
- 변동성스마일, 187
- 변동성위험프리미엄, 291
- 변분법, 186
- 변형콜옵션가치, 287
- 복소공간, 119
- 복소멱함수, 260
- 복소벡터, 119
- 복소선적분, 7, 9
- 복소수집합, 2
- 복소적분, 1, 189
- 복소지수함수, 1
- 복소평면, 4, 129, 188
- 복소함수론, 265
- 복소해석, 11, 13
- 복소행렬, 118
- 본질적 특이점, 36, 44, 45
- 부분분수분해, 240
- 부호함수, 118
- 분포적으로, 199
- 비교테스트, 224
- 비율모수, 212
- 비정규화된 sinc 함수, 274
- 비중심모수, 292
- 비중심카이제곱확률분포, 292
- 사인함수, 95
- 삼각다항식, 100, 103, 107
- 삼각함수, 118
- 상대적 길이, 155
- 상삼각행렬, 121
- 상수계수의 선형미분방정식, 240
- 샘플링주파수, 137, 177
- 생성자, 295
- 선도중립확률측도, 281
- 선적분, 10, 12
- 선형결합, 95
- 선형대수학, 118
- 선형로그함수, 310
- 선형성, 227
- 소비모형, 291
- 수렴성정리, 199
- 수치적분법, 153, 277

- 스펙트럴해석, 1, 152
- 스펙트럼, 164, 165
- 시간간격, 135, 163
- 시간공간, 152
- 시계방향, 40
- 시계열데이터, 152
- 시계열분석, 185
- 시그넘함수, 118
- 시누소이드, 136, 163
- 시점, 4
- 실대칭행렬, 120
- 실린더, 188
- 실선적분, 9
- 실수부, 288, 309
- 실해석, 11
- 실행렬, 118
- 양방향, 5, 22, 24, 45, 47
- 양방향 경계, 45
- 어레이즈, 140, 142
- 엔트로피, 185
- 역Fourier변환, 112, 113, 115, 153, 284, 289
- 역Laplace변환, 230, 232, 242-248, 250, 253, 258, 260, 263
- 역Laplace변환의 일의성, 232
- 역사적측도, 289
- 역시계방향, 5, 40, 47
- 역이산형Fourier변환, 124
- 역작용소, 146, 147, 170
- 역정리, 217, 222
- 역회전, 124
- 연속, 218
- 연속성, 222
- 연속성정리, 200, 217
- 연속형 배당률, 310
- 열쇠구멍경로, 64, 79, 88, 256
- 영차수, 37, 38
- 옵션가치, 187
- 옵션가치의 편미분방정식, 295
- 옵션가치평가식, 288
- 옵션의 특성함수, 277
- 외점, 20
- 우극한, 96
- 우대칭성, 276
- 우함수, 100, 288, 309
- 원가지자름, 50, 55
- 원자산, 267, 294
- 원자산과정, 289
- 위상, 152
- 위험중립가치평가식, 300, 301
- 위험중립모수, 291
- 위험중립확률측도, 266, 268, 273, 279, 282, 285, 286, 291, 292, 298, 310, 312
- 위험프리미엄, 291
- 윈도우, 173
- 유계, 38, 218
- 유니터리행렬, 118, 120-122, 124
- 유럽형옵션, 309
- 유럽형옵션가치, 277
- 유럽형콜옵션, 266, 273, 286, 296-298, 315

- 유럽형콜옵션가치, 310, 311
- 유럽형풋옵션, 267, 311
- 유리함수, 57, 260, 262, 263
- 유수, 38, 39, 46
- 유수정리, 45, 57, 79, 82, 85, 261
- 음방향 경계, 45
- 음의 주파수, 146
- 이동성, 228
- 이동평균모형, 186
- 이산형 합성곱, 149
- 이산형 Fourier 변환, 105, 118, 123, 288
- 이산화편의, 154
- 이상적분, 223
- 이자율과정, 277
- 이중지수확률밀도함수, 214
- 이중지수확률변수, 216
- 이항확률분포, 150
- 일반화 Plancharel 등식, 158
- 일반화 Cauchy 적분공식, 214
- 일반화 Fourier 변환, 283, 284, 286
- 일양성, 104
- 일양수렴, 104, 220
- 일의성, 199, 217
- 일의성정리, 199
- 자기금융조건, 293
- 자기회귀모형, 186
- 자기회귀이동평균모형, 186
- 자유모수, 313
- 잔여기간, 289
- 적률모함수, 1
- 적률생성함수, 149
- 적분경로, 24
- 적분의 Laplace 변환, 234
- 적합과정, 268, 273
- 전치행렬, 119
- 절대일양수렴, 32
- 절대적분가능, 254
- 점프확산모형, 277
- 정규화된 sinc 함수, 274
- 정규확률밀도함수, 189
- 정규확률분포, 191, 314
- 정방행렬, 120
- 제거가능한 특이점, 36-38, 44, 45
- 제로쿠폰채, 271
- 제로쿠폰채가치, 271, 272
- 제로패딩, 171
- 조건부확률밀도함수, 266
- 중점, 4
- 좌극한, 96
- 주가지, 64, 67, 70, 73, 76, 78, 82, 85, 88, 256
- 주값, 24
- 주기, 135, 136
- 주기함수, 99
- 주파수, 135, 136, 149, 164
- 주파수공간, 152
- 주파수구간, 167
- 중복근, 260
- 중복도, 260
- 중심극한정리, 200
- 지불금액조건, 300
- 지수차수, 230

- 지수확률밀도함수, 178, 209
- 지수확률변수, 211
- 지지대, 154
- 직교공간, 124
- 직교근사법, 95
- 직교변환, 155
- 직교함수계, 97
- 직교행렬, 120
- 진짜측도, 289
- 진폭, 152
- 질량중심, 188
- 차분방정식, 135
- 채권가격, 267, 271
- 초기값문제, 236
- 초기조건, 236, 242-245, 250
- 최대엔트로피스펙트럼, 185
- 최소Kullback-Leibler 정보수스펙트럼, 185
- 추세모수, 289
- 측도론, 265
- 컴팩트, 4
- 컴팩트집합, 275
- 코사인법칙, 121
- 코사인함수, 95
- 콜옵션가치, 288
- 태양흑점, 164
- 태양흑점 데이터세트, 165
- 테이퍼링, 171, 173
- 테이퍼링과정, 172
- 트레이스, 122
- 특성함수, 1, 187, 195, 197, 222, 274, 277, 303-305, 309, 314
- 특성함수방정식, 307
- 특성함수의 역함수, 200, 206
- 특이점, 36-38, 158
- 특이점에서 유수, 39
- 편미분방정식, 265, 293-295, 298-301, 303-305
- 평균회귀성, 292
- 평균회귀속도, 289
- 평균회귀수준, 289
- 평활한 곡선, 10
- 평활한 함수, 139
- 폴딩, 137
- 표본자기상관계수, 186
- 표준정규확률밀도함수, 147, 149
- 표준정규확률변수, 201, 208, 278, 314
- 표준정규확률분포, 188
- 푹콜패리티, 273, 311
- 피어리오도그램, 185
- 합성곱, 149, 157, 197, 250
- 합성곱벡터, 150
- 합성곱정리, 198, 250
- 해석개론, 11
- 해석적, 22, 24, 32, 33, 36-38, 64
- 해석학, 265
- 해석함수, 11
- 행렬식, 122
- 행사가격, 266
- 허수부, 288, 309
- 헤지모수, 294

해징, 294

형태모수, 212

확률미분방정식, 265, 267, 268, 279, 293,  
297, 303

확률밀도함수, 1, 188

확률변동성, 277

확률변동성모형, 289, 310, 312

확률분산과정, 290

확률분포함수, 187, 198, 208

확률적 이자율, 277

회전, 124, 125



## 저자 소개

---

최 병 선 (崔秉善, [datalyab.com](http://datalyab.com))

서울대학교 수학과 (이학사)

미국 Stanford대학교 (PhD in Statistics and Economics)

연세대학교 상경대학 교수 역임

서울대학교 경제학부/데이터사이언스대학원 교수 역임

서울대학교 경제학부 명예교수

서울대학교 금융경제연구원 연구원

<https://sites.google.com/view/cbsdataly>

## 금융공학 IX: Fourier Analysis for Financial Engineering

2021년 9월 1일 제1판 1쇄 인쇄

2021년 9월 1일 제1판 1쇄 발행

저 자 최 병 선

발행인 김 영 식

발행처 서울대학교 금융경제연구원

서울특별시 관악구 관악로 1 우편번호 08826

전 화 02-880-5424

팩 스 02-888-4231

E-mail [sirfe@snu.ac.kr](mailto:sirfe@snu.ac.kr)

<https://sirfe.snu.ac.kr>

---

ISBN 979-11-952542-6-2 93320

비매품





# Creative Commons Book List by 최병선

dataly1lab.com

<https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%B5%9C%EB%B3%91%EC%84%A0>

1. SAS를 이용한 현대통계학 (제2판)
2. 행렬의 대각화와 Jordan표준형
3. Fourier 해석 입문
4. Lebesgue적분 입문
5. Wavelet 해석
6. 회귀분석(상)
7. 다변량시계열분석
8. 이산형 재무모형의 수리적 배경
9. 회귀분석(하)
10. 단변량시계열분석
11. 금융공학 IV: Monte Carlo Methods for Finance and Economics
12. 금융공학 V: Introduction to Financial Engineering with R
13. SAS/IML 입문
14. 금융공학 VII: Scientific Computing For Finance and Economics
15. 금융공학 III: Introduction to Financial Engineering
16. 금융공학 VIII: Bayesian Methods for Finance and Economics
17. 계산재무론: Computational Finance