A survey of Jørgensen numbers of two-generator Kleinian groups

Ryosuke Yamazaki

はじめに

本稿は，2 元生成 Klein 群の Jørgensen 数に関する（著者が認識している限りの）諸結果をまとめたものです．なお，後半で議論する Jørgensen 数の実現問題につきまして，山下靖氏（奈良女子大学）と著者の共著論文［51］が今年出版されました．本研究に興味を持って下さった方は，併せて是非そちらもご覧ください．

Klein 群とは，Möbius 変換群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の離散部分群のことであり，$\hat{\mathbb{C}}$ に双正則写像として作用する一方で，Poincaré 拡張による同型 $\mathrm{Isom}^{+}(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が成り立つので，3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ に向きを保つ等長変換からなる不連続群としてとらえることができます．そのため，Klein 群は複素解析や双曲幾何において古くから重要な研究対象であり，Thurston による 3 次元多様体論の一連の研究から，双曲多様体の背景にある Klein 群はより一層重要視されるようになりました. Klein 群論における最大の未解決問題であった，「曲面群に同型な Klein 群の変形空間は双曲多様体のエンド不変量により記述できるか？」という ending lamination 予想が，Minsky たち［4］，［26］により肯定的に解決されたことにより，ある意味で Klein 群の分類は与えられたといえますが，双曲多様体や Klein 群の構造に関する不変量や変形理論について，興味深い問題が数多く残されています．故に，今もなお函数論とトポロジーの両側面から，Klein 群論の活発な研究が行われています．

以上の背景から，$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の部分群の離散性の判定を考えることは非常に重要な問題となります．そのための数少ない手がかりの 1 つが Jørgensen の不等式です．その精密化として，佐藤宏樹氏は 2 元生成 Klein 群の Jørgensen 数を定義しました．本稿では，Jørgensen 数に関する既知の結果とその周辺の話題，および Jørgensen 群（Jørgensen 数が 1 の Klein 群）の分類問題，今後期待される応用について述べます．双曲幾何と Möbius 変換の基本事項については，［39］，［48］等の双曲幾何の標準的な教科書を適宜参照してください．

謝辞

著者の指導教官である逆井卓也先生，並びに山下靖先生には，著者の院生時代から今日に至るまで多大なるご支援を頂いております．なお，本稿にある Riley slice や diagonal slice 等の絵は山下先生が提供してくださったものです．また，小森洋平先生と Jørgensen 数の研究の開拓者である佐藤宏樹先生にも，多くの助言と激励を頂戴しました．その他，講演の機会を頂きました研究集会やセミナーの世話人の皆様, お世話になりました皆様に,

この場をお借りして深く御礼申し上げます.

Contents

本稿を通して，双曲空間のモデルは上半空間モデルを用いる．また，射影特殊線型群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{\pm E\}$ と Möbius 変換群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ の間の同型

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

を用いて，行列式が 1 の 2×2 行列により Möbius 変換を表すこととする．

1 Jørgensen の不等式とその精密化

1.1 初等的 Klein 群の分類と Jørgensen の諸定理

まず最初に初等的 Klein 群の分類を与え，続いて Jørgensen［13］による議論を述べる．$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の部分群 G が初等的（*elementary*）であるとは，双曲空間 $\mathbb{H}^3$ または理想境界 $\hat{\mathbb{C}}$ に有限な G-orbit が存在することをいう．初等的 Klein 群については，次の通り分類が与えられている．

Theorem 1.1（cf.［31］,［39］）. 初等的で torsion free な Klein 群は共役を除いて次の 3 通りに限る．

（i）parabolic cyclic : $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(ii) parabolic two-generator free abelian : $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $(\Im\tau > 0)$

(iii) loxodromic cyclic : $\left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ $(|\lambda| \neq 0, 1)$

この定理の torsion free という仮定が離散性に本質的に影響しないことが，次の主張からわかる．

Proposition 1.2（Selberg の補題［45］）．任意の SL(2, ℂ) の有限生成部分群は，torsion free な群を指数有限な正規部分群として含む．

以上より，群が非初等的な場合の離散性の判定が残る問題である．初等的 Klein 群の極限集合が高々 2 点以下となるのに対し，非初等的 Klein 群の極限集合は非可算集合となることからもわかるように，非初等的 Klein 群の方が圧倒的に複雑である．以下の議論の中で用いる PSL(2, ℂ) の非初等的部分群の性質は, 例えば［3］や宮地秀樹氏の素晴らしいノート［31］が詳しい．

Jørgensen［13］の諸結果を述べておく．次が本稿の中核をなす Jørgensen の不等式であり，PSL (2, ℂ) の非初等的部分群の離散性に対する数少ない必要条件である．

Theorem 1.3（Jørgensen［13］）．2 つの Möbius 変換 $X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が非初等的 Klein 群 G を生成するならば，次の不等式が成り立つ．

$$J(X, Y) := |\operatorname{tr}^2 X - 4| + |\operatorname{tr}[X, Y] - 2| \geq 1.$$

右辺 1 は best possible である．

この定理は，Fuchs 群に含まれる放物型 Möbius 変換が双曲曲面のカスプに対応することを主張する，次の Shimizu-Leutbecher の補題の代数的な一般化である．詳しくは［48］を参照せよ．

Lemma 1.4（Shimizu-Leutbecher の補題）．G を Klein 群とし，放物型 Möbius 変換 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含むとする．このとき，任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対し $c = 0$ または $|c| \geq 1$.

Theorem 1.3 を証明するためにもう 1 つ補題を用意する．

Lemma 1.5. $X \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の位数を 3 以上であるとする．このとき，準同型

$$\theta_X : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}),\ \theta_X(Y) = YXY^{-1}$$

と $Y \in PSL(2, \mathbb{C})$ に対して，正の整数 N が存在して $\theta_X^N(Y) = X$ を満たせば，$\langle X, Y \rangle$ は初等的である．

Proof of Theorem 1.3. $J(X, Y)$ は Möbius 変換による共役で不変であることに注意する．X の位数が 2 のとき，$\mathrm{tr}(X) = 0$ より $J(X, Y) \geq 4$ が従い，主張を満たす．よって，X の位数は 3 以上としてよい．

（i）X が放物型のとき，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

としてよい．このとき $J(X, Y) = |c|^2$ であり，$c = 0$ とすると，G は初等的となって仮定に反する．したがって Lemma 1.4 より，$|c| \geq 1$ となって $J(X, Y) \geq 1$ を得る．

（ii）それ以外のとき，

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

としてよい．このとき，

$$J(X, Y) = (1 + |bc|)\left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right|^2.$$

$J(X, Y) < 1$ とする．Lemma 1.5 の写像 θ_X に対して，$\theta_X^N(Y) = X$ を満たす N が存在することを示す．

$$Y_n := \theta_X^n(Y) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\ (n \geq 1),\quad Y_0 := Y$$

とおく．$Y_{n+1} = Y_n X Y_n^{-1}$ に注意すると，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n d_n \lambda - \dfrac{b_n c_n}{\lambda} & a_n b_n \left(\dfrac{1}{\lambda} - \lambda\right) \\ c_n d_n \left(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\right) & \dfrac{a_n d_n}{\lambda} - b_n c_n \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

したがって，

$$b_{n+1} c_{n+1} = -b_n c_n (1 + b_n c_n)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right).$$

これより

$$|b_n c_n| \leq (J(X, Y))^n |bc|$$

が帰納的に従う．いま $J(X, Y) < 1$ より，

$$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n d_n = 1$$

を得る．（1）より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda,\ \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{1}{\lambda}.$$

さらに，$|b_{n+1}\,/\,b_n| = |a_n|\,|\,\lambda - 1\,/\,\lambda|$ より，

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n+1}{b_n}\right| = |\lambda| \left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right| \leq |\lambda|\,(J\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))^{\frac{1}{2}}.$$

十分大きい全ての n に対して，

$$\left|\frac{b_n+1}{\lambda^n+1}\right| < \left(\frac{1+(J\,(X, Y))^{\frac{1}{2}}}{2}\right)\left|\frac{b_n}{\lambda^n}\right|$$

となり，$\lim_{n\to\infty} (b_n/\lambda_n) = 0$ を得る．同様にして $\lim_{n\to\infty} c_n\lambda_n = 0$．いま，$G$ に含まれる Möbius 変換の列 $\{X^{-n}Y_{2n}X_n\}$ を見ると，

$$X^{-n}Y_{2n}X^n = \begin{pmatrix} a_{2n} & b_{2n}/\lambda^{2n} \\ c_{2n}\lambda^{2n} & d_{2n} \end{pmatrix}$$

となって，一連の計算より $\lim_{n\to\infty} X^{-n}Y_{2n}X^n = X$．$G$ の離散性より，十分大きい n に対して

$$X^{-n}\,Y_{2n}X^n = X \text{ i.e. } Y_{2n} = X$$

となり $\theta_X^{2n}(Y) = X$ を得る．故に，G は初等的となり仮定に反するので，$J\,(X, Y) \geq 1$ を得る．さらに

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，$\langle X, Y\rangle = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ なので，X, Y は非初等的 Klein 群を生成し，$J\,(X, Y) = 1$ を満たす．故に，右辺の 1 は best possible である．　　(*q.e.d.*)

Remark．Theorem 1.3 の逆は成り立たない．例えば

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ Y_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\rho = 4\cos^2\alpha$ とすると，$J\,(X, Y_\rho) = 16\cos^4\alpha \geq 1$ だが，α が十分小さい無理数のとき $\langle X, Y\rangle$ は非離散群なので，これが反例となる．（これは，後で詳しく論じる Riley slice の外部にある非離散群の例でもある .）

以降，この章では Theorem 1.3 の評価を本質的に用いることにより得られる主張を述べる．

Theorem 1.6（Jørgensen［13］）．$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の非初等的部分群 G が Klein 群であることの必

要十分条件は，G の任意の 2 元で生成される部分群が Klein 群であることである．

Proof. 離散群の部分群は離散群なので必要条件であることは直ちに従う．

逆に，G が PSL (2, $\mathbb{C}$) の非初等的な非離散群であり，かつ G の任意の 2 元生成部分群が Klein 群となっているとする．$\{\gamma_n\}$ を G の id でない相異なる元の列で id に収束するものとすると，仮定より任意の $h \in G$ に対し $\langle \gamma_n, h \rangle$ は Klein 群である．このとき，位数が 2 の Möbius 変換のトレースは 0 なので，任意の γ_n の位数は 3 以上としてよい．いま，PSL(2, $\mathbb{C}$) から $\mathbb{R}$ への tr^2 を対応させる写像は連続なので，Theorem 1.3 の写像 J : PSL(2, $\mathbb{C}$) × PSL(2, $\mathbb{C}$) → $\mathbb{R}$ も連続である．よって，$\lim_{n\to\infty} J(\gamma_n, h) = 0$．Theorem 1.3 の対偶から，十分大きい全ての n に対して $\langle \gamma_n, h \rangle$ は初等的となる．一方 G は非初等的なので，固定点を共有しない斜航型 Möbius 変換 h_1, h_2 を含む．いま，$\langle \gamma_n, h_1 \rangle$，$\langle \gamma_n, h_2 \rangle$ がともに初等的になるまで n を大きくすると，h_1, h_2 の固定点集合 Fix (h_1) ; Fix (h_2) はともに γ_n 不変となるが，γ_n の位数が 3 以上なので Fix $(h_1) \cup$ Fix $(h_2) \subset$ Fix (γ_n)．したがって，γ_n は 4 点以上を固定するので $\gamma_n = id$ となり，G が Klein 群になることが従う． (*q.e.d.*)

この主張から Klein 群論において 2 元生成の場合が基本的でかつ極めて重要な研究対象であることもうかがえる．なお PSL(2, $\mathbb{R}$) の部分群については，Theorem 1.6 で選ぶ G の 2 元を次の通り減らすことができる．

Theorem 1.7（Gilman［8］）．PSL(2, $\mathbb{R}$) の非初等的部分群 G が Fuchs 群であることの必要十分条件は，G の任意の双曲型の 2 元で生成される部分群が Fuchs 群であることである．

次が［13］の主定理であり，Klein 群の列の代数的極限は再び Klein 群になるという主張である．この定理の証明でも Jørgensen の不等式を本質的に用いる．

Theorem 1.8（Jørgensen［13］）．非初等的 Klein 群 G_0 の忠実（単射）かつ離散的な PSL(2, $\mathbb{C}$)- 表現の列 $\rho_n : G_0 \to$ PSL(2, $\mathbb{C}$) に対して，いま任意の $g \in G_0$ に対して $\{\rho_n(g)\}$ は PSL(2, $\mathbb{C}$) の中で収束するとし，

$$\rho(g) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(g)$$

と定める．この極限により得られる表現 $\rho_n : G_0 \to$ PSL(2, $\mathbb{C}$) もまた忠実かつ離散的な表現（即ち $G := \rho(G_0)$ は Klein 群）である．

この定理の証明のために，さらに補題を 2 つ用意する．

Lemma 1.9（［13］）．PSL(2, $\mathbb{C}$) の元の列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ が PSL(2, $\mathbb{C}$) の中で収束するとし，

$\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ とする．このとき任意の n に対して $\langle A_n, B_n\rangle$ がそれぞれ非初等的 Klein 群ならば，A, B はそれぞれ id でない．

Lemma 1.10（[13]）．G を PSL(2, $\mathbb{C}$) の非初等的部分群，$A \in G$ を位数無限の楕円型でも id でもない Möbius 変換とする．このとき，ある斜航型 Möbius 変換 $B \in G$ が存在して，$\langle A, B\rangle$ は 2 つの巡回群 $\langle A\rangle$ と $\langle B\rangle$ の自由積に同型な非初等的 Klein 群となる．

Proof of Theorem 1.8. ρ が PSL(2, $\mathbb{C}$) への表現（準同型写像）になっていることは，

$$\rho(gh) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(gh) = \lim_{n\to\infty} (\rho_n(g)\,\rho_n(h)) = \rho(g)\,\rho(h) \ \ (g,h \in G_0)$$

より直ちに従う. 次に単射であることを示す. $g \in \mathrm{Ker}\rho$, $g \neq \mathrm{id}$ とする. G_0 が非初等的なので，Lemma 1.10 より，ある斜航型 Möbius 変換 $h \in G_0$ が存在して，$\langle g, h\rangle$ は非初等的 Klein 群となる．一方 ρ_n が同型なので，$\langle \rho_n(g), \rho_n(h)\rangle$ も非初等的 Klein 群となり Lemma 1.9 の仮定を満たし，$\rho(g) \neq \mathrm{id}$ となり $g \in \mathrm{Ker}\rho$ に反する．したがって，$\mathrm{Ker}\rho = \{\mathrm{id}\}$ より ρ は単射であり，G が非初等的であることも従う．

次に G の離散性を示す．非離散群であるとして，$\{g_m\}$ を G の id でない相異なる元の列で id に収束するものとする．G は非初等的なので，固定点を共有しないある Möbius 変換 $h_1, h_2 \in G$ が存在し，これに対し，同型写像 $\psi_n : G \to G_n := \rho_n(G_0)$ を

$$\psi_n(g) := \rho_n \circ \rho^{-1}(g)$$

で定めると，任意の $g \in G$ に対し $g = \lim_{n\to\infty} \rho_n \circ \rho^{-1}(g)$ より，十分大きい m, n に対し $\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m)$ は id に十分近いので

$$J(\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m), \rho_n \circ \rho^{-1}(h_1)) < 1, J(\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m), \rho_n \circ \rho^{-1}(h_2)) < 1$$

が成り立つ．G_n は Klein 群なのでその部分群 $\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m)$, $\rho_n \circ \rho^{-1}(h_i)$ も Klein 群なので，十分大きい m, n に対し Theorem 1.3 より $\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m)$, $\rho_n \circ \rho^{-1}(h_i)$ $(i = 1, 2)$ は初等的となる．特に，

$$\mathrm{Fix}\left(\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m)\right) \subset \mathrm{Fix}\left(\rho_n \circ \rho^{-1}(h_1)\right),\ \mathrm{Fix}\left(\rho_n \circ \rho^{-1}(g_m)\right) \subset \mathrm{Fix}\left(\rho_n \circ \rho^{-1}(h_2)\right)$$

より，$n \to \infty$ とすると $\mathrm{Fix}(g_m) \subset \mathrm{Fix}(h_1)$, $\mathrm{Fix}(g_m) \subset \mathrm{Fix}(h_2)$ となり，$\mathrm{Fix}(h_1) \cap \mathrm{Fix}(h_2) = \emptyset$ の仮定に反するので，G の離散性が従い結論を得る． (*q.e.d.*)

1.2 Klein 群の Jørgensen 数とその計算例

この章以降，特に断らない限り群は 2 元生成で非初等的なものを考える．Jørgensen の不等式の精密化である，群の Jørgensen 数と Jørgensen 群を定義する．

Denition 1.1（[42]，[43]）．PSL(2, ℂ) の 2 元生成部分群 G に対し，

$$J(G) := \inf\{J(X, Y) \mid \langle X, Y\rangle = G\}$$

を，G の Jørgensen 数という．ただし $J(X, Y)$ は Jørgensen の不等式（Theorem 1.3）の左辺とする．また，$J(G) = 1$ の 2 元生成 Klein 群を Jørgensen 群という．

Jørgensen 数を議論するにあたり Jørgensen の不等式を再度考察してみると，$\mathrm{tr}^2 X - 4 = 0$ は X が id または放物型であることを表し，$\mathrm{tr}\,[X, Y] - 2 = 0$ は X と Y が共通の固定点をもつことと同値（[3] の p.68 を参照）なので，$[X, Y]$ が id に近いことを表す．つまり，$J(X, Y)$ は群の生成元が一様に id からどれだけ離れているかを表す共役不変量とみなすことができるので，その下限である $J(G)$ は群 G のある種の離散度を表しているといえる．

Remark．G が Klein 群のとき，Jørgensen の不等式より $J(G) \geq 1$ である．G が幾何学的有限 Klein 群の場合は，[11]，[47] 等の translation length に関する結果から，Jørgensen 数の定義における inf は min で置き換えられる．ただし，幾何学的無限な場合にも，$J(G) = r$ だが $J(X, Y) = r$ となる G の生成系 (X, Y) が存在しないような Klein 群の例はまだ知られていない．

次が Jørgensen 群でない Klein 群の Jørgensen 数の最初の厳密な計算例である．

Example 1（佐藤 [42]）．Whitehead 絡み目群の Jørgensen 数は 2 である．

[52]，[53] では，1 点穴空きトーラス群の擬フックス群の Jørgensen 数を計算し，特に Markoff 数の議論を利用することで次が得た．

Example 2（[52]，[53]）．$\mathrm{tr}\,(X), \mathrm{tr}\,(Y), \mathrm{tr}\,(XY) \in \mathbb{Z}$ である生成系 (X, Y) をもつ擬フックス型穴空きトーラス群の Jørgensen 数は 9 である．

Callahan [5] は，数論的な議論を用いて Jørgensen 数を研究した．例えば，次のような公式がある．

Proposition 1.11（[5]）．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B$ を放物型または楕円型の Möbius 変換とし，$G = \langle A, B\rangle$ が数論的 Klein 群であるとする．このとき，$J(G) = J(A, B)$.

Outline of proof．$G = \langle X, Y\rangle$ であるとする．$\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の整数環 $\mathcal{O}_d$ の中で $|\,\mathrm{tr}\,[X, Y] - 2\,|$ は

$|\operatorname{tr}[A,B]-2|$ の単元倍となるが，$\mathcal{O}_d$ の任意の単元の絶対値は 1 である．したがって

$$J(A,B)=|\operatorname{tr}[A,B]-2|=|\operatorname{tr}[X,Y]-2|\leq J(X,Y)$$

より，主張を得る． (*q.e.d.*)

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

のとき $J(A,B)=|c|^2$ である．例えば，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1-i&1\end{pmatrix}$ のとき Whitehead 絡み目群 G_W に対応しているので，G_W が数論的であることを用いて $J(G_W)=J(A,B)=|1-i|^2=2$ となり，Example 1 の別証明を得る[*1]．同様にして次が得られる．

Corollary 1.12（Callahan［5］）．1 つの生成元が放物型でもう 1 つの生成元が放物型または楕円型であるような全ての 2 元生成数論的 Klein 群について，Jørgensen 数は以下の通りである．

- G が 8 の字結び目群のとき，$J(G)=1$.
- G が Whitehead 絡み目群のとき，$J(G)=2$.
- G が 6_2^2 の字絡み目群のとき，$J(G)=3$.
- G が 6_3^2 の字絡み目群のとき，$J(G)=2$.
- G が 8 の字結び目群の $\mathbb{Z}_2$ 拡大のとき，$J(G)=1$.
- G が Whitehead 絡み目群の $\mathbb{Z}_2$ 拡大のとき，$J(G)=\sqrt{2}$.
- G が 6_2^2 の字絡み目群の $\mathbb{Z}_2$ 拡大のとき，$J(G)=\sqrt{3}$.
- G が 6_3^2 の字絡み目群の $\mathbb{Z}_2$ 拡大のとき，$J(G)=\sqrt{2}$.
- $[\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_1):G]=8$ のとき，$J(G)=2$.
- $G=\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_3)$ のとき，$J(G)=1$.
- $[\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_7):G]=2$ のとき，$J(G)=2$.
- $G=\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_1)$ のとき，$J(G)=1$.
- $[\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_2):G\cap\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_2)]=24$ のとき，$J(G)=3$.
- $[\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_3):G\cap\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_3)]=30$ のとき，$J(G)=2$.
- $G=\mathrm{PGL}(2,\mathcal{O}_3)$ のとき，$J(G)=1$.
- $[\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_{15}):G\cap\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_{15})]=6$ のとき，$J(G)=2$.

2　Jørgensen 群の分類問題

Jørgensen 群の分類に関する研究は Jørgensen-Kiikka［15］，李−大市−佐藤［21］，［22］，

[*1] 佐藤宏樹氏の論文［42］では，$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ の計算を丁寧に行い，証明している．

[23] が知られている．主に $J(X, Y) = 1$ である生成系 (X, Y) をもつ Jørgensen 群について論じるので，言葉の定義をしておく．

Denition 2.1．$X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が Jørgensen 群を生成するとは，$J(X, Y) = 1$ を満たし $\langle X, Y\rangle$ は Jørgensen 群であることをいう．さらに，X, Y が Jørgensen 群を生成し，X が放物型（楕円型）であるとき，$\langle X, Y\rangle$ を放物型（楕円型）Jørgensen 群という．

Jørgensen 群を議論する上で次の主張が有力である．

Theorem 2.1（Jørgensen-Kiikka [15]）．$X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が Jørgensen 群を生成するならば，X は放物型または位数 7 以上の楕円型である．

まず，次の補題を証明する．

Lemma 2.2（[15]）．$X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が Jørgensen 群を生成し，X が放物型または斜航型のとき，$Y_1 := YXY^{-1}$ とすると X, Y_1 も Jørgensen 群を生成する．

Proof．$H := \langle X, Y_1\rangle$ は $G := \langle X, Y\rangle$ の部分群なので H の離散性を得る．さらに，X, Y_1 は互いに共役なので Möbius 変換の型は等しい．故に，H が初等的であるとすると仮定より $\mathrm{Fix}(X) = \mathrm{Fix}(Y_1)$ となり，G が非初等的であることに反する．以上より，H は非初等的 Klein 群である．

$J(X, Y_1) = 1$ を示す．$\mathrm{tr}(Y_1) = \mathrm{tr}(X)$ なので，トレース恒等式より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[X,Y_1] - 2 &= 2\mathrm{tr}^2 X + \mathrm{tr}^2 XY_1 - \mathrm{tr}^2 X\,\mathrm{tr}\,XY_1 - 4 \\
&= \left(\mathrm{tr}^2 X - \mathrm{tr}\,XY_1 - 2\right)(2 - \mathrm{tr}\,XY_1) \\
&= \left(\mathrm{tr}\,XY_1^{-1} - \mathrm{tr}^2 X + 2\right)\left(\mathrm{tr}\,XY_1^{-1} - 2\right) \\
&= \left(\mathrm{tr}\,[X,Y] - \mathrm{tr}^2 X + 2\right)(\mathrm{tr}[X,Y] - 2).
\end{aligned}
$$

さらに $J(X, Y) = 1$ と三角不等式から，

$$\left|\mathrm{tr}\,[X, Y] - \mathrm{tr}^2 X + 2\right| = \left|4 - \mathrm{tr}^2 X + \mathrm{tr}\,[X, Y] - 2\right| \leq \left|\mathrm{tr}^2 X - 4\right| + \left|\mathrm{tr}\,[X, Y] - 2\right| = 1.$$

これより

$$\left|\mathrm{tr}\,[X, Y] - \mathrm{tr}^2 X + 2\right| \leq 1$$

を得る．以上から

$$\left|\mathrm{tr}\,[X, Y_1] - 2\right| \leq \left|\mathrm{tr}\,[X, Y] - 2\right|.$$

故に $J(X, Y_1) \leq (X, Y) = 1$ となって，Theorem 1.3 から $J(X, Y_1) = 1$ が従い，主張を得る．

(*q.e.d.*)

Proof of Theorem 2.1．X が斜航型であるとすると，Lemma 2.2 の証明から

$$\left| \operatorname{tr}[X, Y] - \operatorname{tr}^2 X + 2 \right| = 1$$

を得る．よって，

$$\left| \operatorname{tr}[X, Y] - \operatorname{tr}^2 X + 2 \right| = \left| \operatorname{tr}[X, Y] - 2 \right| + \left| 4 - \operatorname{tr}^2 X \right|$$

が従う．G が非初等的なので $\operatorname{tr}[X, Y] - 2 \neq 0$．以上より，$\operatorname{tr}[X, Y] - 2$ は $4 - \operatorname{tr}^2 X$ の正の定数倍となる．さらに Lemma 2.2 より X, Y_1 も Jørgensen 群を生成するので，同様にして $\operatorname{tr}[X, Y_1] - 2$ も $4 - \operatorname{tr}^2 X$ の正の定数倍であることが従う．以上より，$\operatorname{tr}[X, Y_1] - 2$ は $\operatorname{tr}[X, Y] - 2$ の正の定数倍となり，$\operatorname{tr}[X, Y_1] - 2 = (\operatorname{tr}[X, Y] - \operatorname{tr}^2 X + 2)(\operatorname{tr}[X, Y] - 2)$ より，

$$\operatorname{tr}[X, Y] - \operatorname{tr}^2 X + 2 = 1$$

を得る．特に

$$(\operatorname{tr}[X, Y] - 2) + \left(4 - \operatorname{tr}^2 X\right) > 0.$$

このとき $\operatorname{tr}[X, Y] - 2$ は $4 - \operatorname{tr}^2 X$ の正の定数倍なので, $4 - \operatorname{tr}^2 X > 0$ となって仮定に反する．以上より X は斜航型でない．

また，X が楕円型であるとすると，$\operatorname{tr}[X, Y] - 2 \neq 0$ より $|\operatorname{tr}^2 X - 4| < 1$．即ち $\operatorname{tr}^2 X > 3$．正規化して $X = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{q}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{q}} \end{pmatrix}$ とすれば,

$$\frac{3}{4} < \cos^2 \frac{\pi}{q} < 1$$

より $q > 6$．よって X の位数は 7 以上である．以上より結論を得る．(*q.e.d.*)

2.1　Fuchs 群の場合の分類

Theorem 2.1 を用いて，Jørgensen Fuchs 群は次の通り完全に分類される．

Theorem 2.3（Jørgensen-Kiikka［15］）．$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の部分群 G が Jørgensen 群ならば, G は $(2, 3, q)$ 型（$7 \leq q \leq \infty$）の Fuchs 群の意味での三角群である．即ち，G は次の表示をもつ．

$$G = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^8 = id \rangle$$

ただし $q = \infty$ は XY が放物型の場合を表す．

Remark. ここで「Fuchs 群の意味での三角群」とは $\mathbb{H}^2$ の向きを保つという意味であり，この場合は鏡映変換を含まない．したがって，この群は次章の議論で用いる抽象群論における本来の意味での三角群（Coxeter 群）の指数 2 の部分群であり，2 倍の双曲面積の基本領域をもつ．

Theorem 2.3 の証明のために次のトレース評価が有効である．

Lemma 2.4. $X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ が Jørgensen 群を生成するとき，$\mathrm{tr}\,(XY\,XY^{-1}) = 1$.

この補題は，トレース恒等式を繰り返し用いることにより初等的に示すことができるので，証明は省略する．さらに次が得られる．

Lemma 2.5（Jørgensen-Kiikka［15］）. $X, Y \in \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})$ が Jørgensen 群を生成するとき，$Y^1 = Y\,XY^{-1}$ に対し $H = \langle X, Y_1 \rangle$ は $(2, 3, q)$ 型（$7 \leq q \leq \infty$）の Fuchs 群の意味での三角群である．

Proof. まず, H は Jørgensen 群である．$Y_2 = XY_1$ とおくと $H = \langle X, Y_2 \rangle$ であり, $\mathrm{tr}\,[X, Y_2] = \mathrm{tr}\,[X, Y_1]$ より $J\,(X, Y_2) = 1$ となって，X, Y_2 も Jørgensen 群 H を生成する．Lemma 2.4 とトレース恒等式から

$$\mathrm{tr}^2 X = \mathrm{tr}\,[X, Y_2] + 1$$

を得る．さらにトレース恒等式から

$$\mathrm{tr}^2\, Y_2 + \mathrm{tr}^2\, XY_2 - \mathrm{tr}\, X\ \mathrm{tr}\, Y_2\, \mathrm{tr}\, XY_2 = 1$$

も従う．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}^2\, XY_2 - \mathrm{tr}\, X\ \mathrm{tr}\ Y_2\, \mathrm{tr}\, XY_2 &= -\,\mathrm{tr}\, XY_2\, (\mathrm{tr}\, X\ \mathrm{tr}\ Y_2 - \mathrm{tr}\, XY_2) \\ &= -\,\mathrm{tr}\, XY_2\, \mathrm{tr}\, X^{-1} Y_2 \\ &= -\,\mathrm{tr}\, XY_2\, \mathrm{tr}\, X.\end{aligned}$$

以上の計算から

$$\mathrm{tr}^2\, Y_2 - (\mathrm{tr}\ XY_2)(\mathrm{tr}\ X) = 1\,.$$

このとき $Y_2 = XY\,XY^{-1}$ より $\mathrm{tr}\ Y_2 = 1$．さらに，Theorem 2.1 より $\mathrm{tr} X \neq 0$．故に $\mathrm{tr}\, XY_2 = 0$ を得る．$\mathrm{tr}\, Y_2 = 1$, $\mathrm{tr}\, XY_2 = 0$ より，$H = \langle X, Y_2 \rangle$ について，X, Y_2, XY_2 の位数がそれぞれ q, 3, 2 となって，主張を得る． (*q.e.d.*)

Lemma 2.5 で構成した H が Fuchs 群として極大であることを示すことで，$H = \langle X, Y \rangle$ を

証明する．

Denition 2.2．F を Fuchs 群，$h \in F$ を双曲型 Möbius 変換とする．$h \in F$ が *hyperbolic boundary element* であるとは，$h \in F$ が理想境界 $\mathbb{S}^1 \cong \hat{\mathbb{R}}$ 上のある区間 I を保ち，F が I へ真性不連続に作用することをいう．

実際，hyperbolic boundary element は Riemann 面 $\mathbb{H}^2/F$ の境界上の曲線に対応する．（[3]，[12] を参照 .）(2, 3, q) 型の Fuchs 群の意味での三角群は，基本領域を見れば hyperbolic boundary element を含まないことは明らかである．次が知られている．

Proposition 2.6（Greenberg [12]）．F を hyperbolic boundary element をもたない Fuchs 群とする．このとき次の 2 条件は同値である．

(i) F は finite maximal である．即ち，F を有限指数部分群として含む Fuchs 群は F のみである．

(ii) F は極大 Fuchs 群である．F を真に含む Fuchs 群は存在しない．

[12] の Theorem 3B では，finite maximal でない三角群が完全に分類されている．それによれば，(2, 3, q) 型の三角群は finite maximal である．故に Proposition 2.6 より H は極大 Fuchs 群であり，$H = \langle X, Y \rangle$ が従う．

さらに，有限生成 Fuchs 群は幾何学的有限（[16] を参照）なので，任意の Jørgensen 群 G に対し，ある生成系 (X, Y) が存在して $J(X, Y) = 1$ を満たす．以上より，Theorem 2.3 の主張を得る．

2.2 李-大市-佐藤の予想

李-大市-佐藤 [21]，[22]，[23] は，次の正規化を用いて放物型 Jørgensen 群の分類問題を研究した．

Proposition 2.7（[21]，[22]，[23]）．$A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が放物型 Jørgensen 群を生成するならば，A, B は共役を除いて次の形に限る．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = B_{\sigma,\mu} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix} \quad (|\sigma| = 1,\ \mu \in \mathbb{C})$$

[21]，[22]，[23] ではこの正規化における $\mu = ik$ $(k \in \mathbb{R})$ の場合が調べられている．$|\sigma| = 1$ より $\sigma = -ie^{i\theta}$ とおくと，この $\sigma = -ie^{i\theta}, \mu = ik$ に対応する生成元 $B_{\sigma,\mu}$ を $\mathrm{B}_{\theta,k}$ と表す．即ち

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{\theta,k} = \begin{pmatrix} ke^{i\theta} & ik^2e^{i\theta} - ie^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & ke^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.8（[21]，[22]，[23]）．$G_{\theta,k} := \langle A, B_{\theta,k} \rangle$ に対して次が成り立つ．

（1）$0 \leq \theta \leq \pi/2, k \in \mathbb{R}$ に対して，$G_{\theta,k}$ が Klein 群であることの必要十分条件は $\mathrm{G}_{\theta,k}$ が Klein 群であることである．

（2）$0 \leq \theta \leq \pi, k \in \mathbb{R}$ に対して，$G_{\theta+\pi,k} = G_{\theta,k}$.

（3）$0 \leq \theta \leq 2\pi, k \in \mathbb{R}$ に対して，$G_{\theta,k}$ が Klein 群であることの必要十分条件は $G_{\theta,-k}$ が Klein 群であることである．

したがって群の離散性は，$0 \leq \theta \leq \pi/2, k \geq 0$ の場合を調べれば十分である．この群の変形族に関する Jørgensen 群の分類を簡潔に述べると，次の通りである．より詳細な双曲構造や等角境界の Riemann 面の性質については，[21]，[22]，[23] を参照せよ．

Theorem 2.9（李–大市–佐藤 [21]，[22]，[23]）．$G_{\theta,k}$ に対して次が成り立つ．

（1）$D_1 = \{(\theta, k) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq k \leq \sqrt{3}/2\}$ に対応する Jørgensen 群は 16 個存在し，そのうち 9 個は第 1 種 Klein 群で体積有限であり, 7 個は第 2 種 Klein 群である．特に，$(\theta, k) = (\pi/2, 0)$ はモジュラー群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$，$(\theta, k) = (\pi/2, 1/2)$ は Picard 群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$，$(\theta, k) = (\pi/6, \sqrt{3}/2)$ は 8 の字結び目群に対応している．

（2）$D_2 = \{(\theta, k) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, \sqrt{3}/2 \leq k \leq 1\}$ に対応する Jørgensen 群は可算無限個存在し，$(\theta, k) = (\pi/4, 1)$ のみ第 1 種 Klein 群で体積有限であり，それ以外全て第 2 種 Klein 群である．

（3）$D_3 = \{(\theta, k) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, k > 1\}$ に対応する Jørgensen 群は非可算無限個存在する．

李–大市–佐藤 [21]，[22]，[23] は，放物型 Jørgensen 群の分類は Theorem 2.9（即ち $\mu = ik\ (k \in \mathbb{R})$ の場合）で尽くされると予想した．後に，Callahan [5] が数論的な手法により次を示した．

Theorem 2.10（Callahan [5]）．$\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_3), \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_3), \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_7), \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_{11})$ は Theorem 2.9 の分類に含まれない Jørgensen 群である．

さらに [51] では，後述する diagonal slice について Jørgense 数の計算機実験を行った．その結果によると，diagonal slice の境界上に Theorem 2.9 の分類に含まれない（μ が純虚数とならない）生成系をもつ放物型 Jørgensen 群が存在し，それらは李–大市–佐藤の予想の反例になっている可能性があるが，証明はまだ得られていない．（生成元を取り替える

と Theorem 2.9 の分類に含まれる可能性もある .）また，diagonal slice の境界上の有界幾何をもたない幾何学的無限 Klein 群が，$J(X, Y) = 1$ となる生成系 (X, Y) をもたないような Jørgensen 群となっていることも示唆された.

さらに Jørgensen 群について，次の主張が幾何学的に証明されている.

Theorem 2.11（Callahan［5］）．Jørgensen 群に対応する完備双曲構造は 8 の字結び目の補空間に限る.

3　Jørgensen 数の実現問題

この章の内容は，山下靖氏（奈良女子大学）と筆者の共同研究［51］に基づく.

先述の通り，任意の 2 元生成 Klein 群 G は $J(G) \geq 1$ を満たす．そこで，大市–佐藤［38］は次のような自然な問題を提起した．この実現問題の肯定的解決を与えることが，この章の目標である.

Problem 1．任意の 1 以上の実数 r に対し，$J(G) = r$ となる（非初等的）2 元生成 Klein 群 G は存在するか.

この問題に対し，大市–佐藤［38］は r が整数の場合に $J(G) = r$ を実現する Klein 群の存在と，$r > 4$ の場合に $J(G) = r$ を実現する Schottky 群の存在を主張した [*2].

3.1　$r \geq 2.5$ の場合の実現

ここでは Schottky 群の代わりに，Schottky 境界群（Schottky 空間の境界にある Klein 群）の変形空間である Riley slice を用いて，［38］における評価を拡張する.

Denition 3.1（［18］）．固定点を共有しない 2 つの放物型 Möbius 変換

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

で生成される群を G_ρ とする．次で定義される G_ρ の変形空間を，*Riley slice of Schottky space* という.

$$\mathcal{R} := \{\rho \in \mathbb{C} \,;\, G_\rho \text{ is free Kleinian and } \Omega(G_\rho) / G_\rho \text{ is a 4-times punctured sphere}\}$$

Riley slice は Schottky 空間の境界の部分集合である．詳細は［27］,［28］を参照せよ.

[*2] 佐藤宏樹先生曰く，［38］の証明には不十分な箇所があり，結果は正しいはずだが完全な証明は得られていないとのことであった.

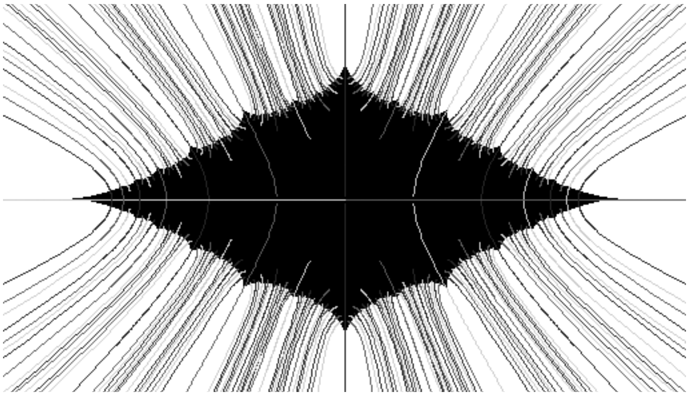

図 1　Riley slice

Keen-Series［18］と小森 -Series［19］は，G_ρ の極限集合の凸包（極限集合の任意の 2 点を結ぶ $\mathbb{H}^3$ の測地線を含む最小の凸集合）の境界 ∂C に対し，G_ρ による商空間として得られる Riemann 面 $\partial C/G_\rho$ の測地線層に沿った折れ曲がりを記述する，pleating ray と呼ばれる不変量を導入し，Riley slice の形状を記述した．議論の大まかな流れは次の通りである．

1. 位相的な 4 点穴空き球面上の本質的単純閉曲線のホモトピー類は，傾きを考えることにより有理数に対応する．有理数 p/q に対応する曲線のホモトピー類に属する測地線を $\gamma_{p/q}$ と表す．

2. $\gamma_{p/q}$ は G_ρ の元として

$$X^{m_1} Y^{m_2} X^{m_3} Y^{m_4} \cdots X^{m_{2q-1}} Y^{m_{2q}} \; (m_i \in \{\pm 1\})$$

の形をした語 $V_{p/q}$ で表される．特にそのトレース $\mathrm{tr}\, V_{p/q}$ は，ρ の q 次多項式である．

3. 2 つの Riemann 面 $\Omega(G_\rho)/G_\rho$ と $\partial C/G_\rho$ は同相である．つまり $\partial C/G_\rho \subset \mathbb{H}^3/G_\rho$ も 4 点穴空き球面である．そこで，$\gamma_{p/q}$ に対応する 3 次元双曲多様体 $\mathbb{H}^3/G_\rho$ 内の測地線 $\hat{\gamma}_{p/q}$ に沿った，$\partial C/G_\rho$ の折れ曲がりを記述する．これにより得られる $\mathcal{R}$ の部分集合を (rational) pleating ray といい $\mathcal{P}_{p/q}$ と表す．
各 $\mathcal{P}_{p/q}$ は

$$\{\rho \in \mathbb{C}\,;\, \Im\,\mathrm{tr}\, V_{p/q}(\rho) = 0,\ \left|\Re\,\mathrm{tr}\, V_{p/q}(\rho)\right| > 2\}$$

の高々 2 つの連結成分の和集合からなり，それぞれ $\mathcal{R}$ の境界上に端点にもつ曲線である．

4. $\mathcal{P}_{p/q}$ たちの和集合は $\mathcal{R}$ で稠密である.

［18］には David Wright 氏による Riley slice の絵が描かれている．図 1 は，山下靖氏が OHT［50］で描いた Riley slice である．中央にある黒い眼（菱形領域）の外側が Riley slice であり，菱形の頂点にあたる点は $\pm 4, \pm 2i$ である．Riley slice の外部（眼の外側）にある曲線たちについては後述のこと.

なお，2 つの放物型 Möbius 変換で生成された自由群の離散性と Riley slice の関係について，次の大定理が知られている.

Theorem 3.1（大鹿–宮地［36］）．G_ρ が自由群に同型でかつ Klein 群となるための必要十分条件は，ρ が Riley slice の閉包に含まれることである.

Riley slice の境界上の Klein 群は 3 点穴空き球面の双曲構造であるか，または両側退化群である．［36］において，Riley slice の境界は単純閉曲線であることも示されている.

Riley slice に含まれる Klein 群の Jørgensen 数を計算するにあたっては，次の主張が有力である.

Lemma 3.2（［29］,［35］）．G を階数 2 の自由群に同型な $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の部分群とする．G の生成系 (A, B) の交換子のトレース $\mathrm{tr}\,[A, B]$ の値は，生成系 (A, B) の取り方によらず一定である.

Riley slice とその境界上にある Klein 群 G_ρ が自由群であることに注意すると，G_ρ の任意の生成系 (C_ρ, D_ρ) に対して，Lemma 3.2 より

$$J(C_\rho, D_\rho) = |\,\mathrm{tr}^2\, C_\rho - 4| + |\,\mathrm{tr}\,[C_\rho, D_\rho] - 2| \geq |\,\mathrm{tr}\,[X, Y_\rho] - 2| = J(X, Y_\rho).$$

したがって, $J(G_\rho) = J(X, Y_\rho) = |\rho|^2$ を得る. これを踏まえた上で Riley slice の絵を見ると, 4 より小さい Jørgensen 数をもつ Klein 群が存在しているように見える.

以上の考察をもとに Riey slice 上で Jørgensen 数を評価する．実際に計算する上で次の主張が有力である.

Proposition 3.3（Keen-Series［18］）．rational pleating ray $\mathcal{P}_{p/q}$ の端点 ρ_0 に対して，$\mathrm{tr}\ V_{p/q}(\rho_0) = -2$.

pleating ray の性質から，$\mathcal{P}_{p/q}$ の端点 ρ_0 を求めると，$|\rho| > |\rho_0|$ となる $\rho \in \mathcal{P}_{p/q}$ が存在する．したがって，このとき $|\rho_0|^2$ 以上の任意の実数 r を Klein 群の Jørgensen 数として実現できることになる.

ここで rational pleating ray として $\mathcal{P}_{11/19}$ を選ぶ．このとき曲線 $\gamma_{11/19}$ を表す語 $V_{11/19}$ は，

$$V_{11/19} = XYX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1}YXY^{-1}XYX^{-1}Y^{-1}XY^{-1}X^{-1} \\ YXY^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}Y^{-1}XY^{-1}X^{-1}YXY^{-1}.$$

トレース多項式 tr $V_{11/19}(\rho)$ を計算すると，

$$\mathrm{tr}\, V_{11/19}(\rho) = -\rho^{19} + 6\rho^{18} - 25\rho^{17} + 74\rho^{16} - 176\rho^{15} + 344\rho^{14} - 567\rho^{13} + 798\rho^{12} - 961\rho^{11} \\ + 990\rho^{10} - 863\rho^{9} + 622\rho^{8} - 356\rho^{7} + 144\rho^{6} - 26\rho^{5} - 12\rho^{4} + 11\rho^{3} - 2\rho^{2} - \rho + 2.$$

tr $V_{11/19}(x) = -2$ の解を Mathematica で計算し，それらの絶対値の 2 乗を求めると，全て 2.467 未満となる．つまり，pleating ray $\mathcal{P}_{11/19}$ の端点 ρ_0 は $|\rho_0|^2 < 2.467$ となる．以上の議論から，次が得られた．

Theorem 3.4（[52]）．任意の 2.467 以上の実数 r に対し，$J(G_\rho) = r$ を実現する 2 元生成 Klein 群 G_ρ が Riley slice 上に存在する．特に，この G_ρ は Schottky 境界群である．

これ以下の Jørgensen 数を Riley slice の Klein 群で実現することは極めて困難である．この議論と密接に関連する問題として，「Riley slice の眼の内側（Riley slice の外部）に最大でどれだけ大きな円が描けるか」という古典的な未解決問題があるが，一方で宮地秀樹氏による，次の素晴らしい定理が知られている．

Theorem 3.5（宮地 [32]，[33]）．Riley slice の境界群 G_ρ が幾何学的有限ならば，ρ は内方向カスプである．

したがって，Riley slice の境界で原点から最も近い点は幾何学的無限群に対応するため，先述の通り両側退化群となり，その点は rational pleating ray の端点になっておらず，より困難な問題である．

また，Riley slice の外部にある群 G_ρ が離散的になるための条件も研究されている．Agol [1] は，自由群に同型でない Klein 群 G_ρ は（双曲的）2 橋絡み目群または Heckoid 群であると主張した．[20] も参照のこと．秋吉–作間–和田–山下 [2] は 1 点穴空きトーラス群の character variety に関する議論を用いて，Riley slice の外部の 2 橋絡み目群まで pleating ray を拡張した．山下氏の絵（図 1）にある曲線がそれを表している．さらに [2] では，G_ρ が自由群に同型でない場合にも，G_ρ が Klein 群ならば必ず extended pleating ray に乗ると予想されている．例えば，$\rho = \omega = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2$ は 8 の字結び目群に対応しており，$J(G_\omega) = 1$ である．残りの実現問題を考えるには，$J(G_\rho) = 1$ から extended pleating ray を辿って Klein 群を連続的に変形することで，Jørgensen 数を単調増加させるのが筋が良さそうだが，Riley slice の外部では extended pleating ray の至るところで非離散群が現れるので，この方

法ではこれが限界であった.

Remark. 佐藤宏樹氏は Schottky 群の Jørgensen 数について，次のように予想した .（例えば［44］を参照 .）

$$\inf\{J(G) \mid G \text{ is a Schottky group}\} = 1,\quad \inf\{J(G) \mid G \text{ is a classical Schottky group}\} = 4$$

Gilman-Waterman［9］は Schottky 境界群について調べている．これによると，Theorem 3.4 で得られた 4 未満の Jørgensen 数をもつ Klein 群は非古典的 Schottky 境界群である．故に，Riley slice 上にある Klein 群から（双曲多様体のカスプを開くことにより）得られる Schottky 群は，いずれもこの主張を満たしている.

3.2　$1 \leq r \leq 4$ の場合の実現

続いて，小さい Jørgensen 数をもつ Klein 群を構成する．そもそも Jørgensen 数が 4 未満の非整数である Klein 群の計算例は，Corollary 1.12 と Theorem 3.4 以外にほとんど知られていなかった．この節では，Series-Tan- 山下［46］が定義した diagonal slice を用いて，$1 \leq r \leq 4$ を Klein 群の Jørgensen 数として実現する.

まず SL(2, ℂ)- 指標多様体を定義し，diagonal slice を定式化する．指標多様体は基本群の表現とその変形を記述するのには欠かせない概念であり，現代の Klein 群論において最も中心的な役割を果たしている.

Denition 3.2. $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ を，曲面 Σ の基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma)$ から線型 Lie 群 G への表現全体の集合とする．$\mathrm{Hom}(\pi, G)$ への G の共役作用による幾何学的不変式論の意味 [*3] での商空間 $X(\pi, G) := \mathrm{Hom}(\pi, G) /\!/ G$ を指標多様体（*character variety*）という.

表現 $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ の指標（*character*）を $\chi_\rho(\gamma) := \mathrm{tr}\,\rho(\gamma)$ $(\gamma \in \pi)$ により定義し，指標全体 $\{\chi_\rho \mid \rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)\}$ に affine 代数多様体としての構造を入れると，$X(\pi, G)$ と一致する .（詳細は［6］,［24］を参照 .）これが指標多様体といわれる所以である . 特に, SL(2, ℂ)-指標多様体については，次の Fricke の定理が古典的な結果として知られている.

Theorem 3.6（［7］,［10］）. $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ とし, π が階数 2 の自由群に同型であるとする．$[\rho]$ を表現 $\rho : \pi = \langle A, B\rangle \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の共役類とすると，1 対 1 対応

$$[\rho] \longleftrightarrow (\mathrm{tr}\,\rho(A), \mathrm{tr}\,\rho(B), \mathrm{tr}\,\rho(AB))$$

により，$X = X(\pi, G)$ は affine 空間 $\mathbb{C}^3$ と同型となる.

[*3] 単に共役による商空間と思って以降の議論には差し支えない.

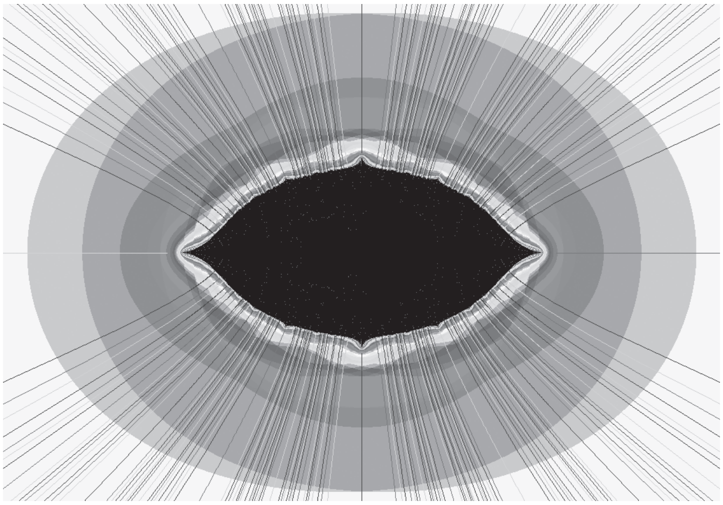

図 2　diagonal slice

つまり，2 元生成群の SL(2, ℂ)- 表現の共役類は複素 3 次元の自由度をもつ．以下，X を階数 2 の自由群に同型な曲面群の SL(2, ℂ)- 指標多様体とし，$(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ に対応する SL(2, ℂ)- 表現を $\rho_{x,y,z}$ で表す.

Denition 3.3（[46]）．次で定義される X の複素 1 次元部分空間を，*diagonal slice of Schottky space* という．

$$\Delta := \{(x, x, x) \in \mathbb{C}^3 \mid \rho_{x,x,x} \text{ is discrete and faithful}\} \cong \mathbb{C}$$

一般に，$x \in \Delta$ に対して $\rho_{x,x,x}$ は Schottky 群に対応しており，$\mathrm{tr}\,\rho(A) = \mathrm{tr}\,\rho(B) = \mathrm{tr}\,\rho(AB)$ なので，双曲多様体 $\mathbb{H}^3/\rho(\pi)$ は位数 3 の対称性を持つ種数 2 のハンドル体である．そこで群に位数 3 の楕円型を加えると，その Klein 群は偏角 $2\pi/3$ の cone axis を 2 つもつ双曲的 orbifold に対応している．したがって，その orbifold の等角境界は位数 3 の cone point を 4 つもつ球面になっていて，4 点穴空き球面の各カスプが位数 3 の cone point に変わったと考えることができるので，Riley slice に関する Keen-Series 理論のアナロジーが考えられる．以上の議論を用いて，Series-Tan- 山下［46］により次が証明された.

Theorem 3.7（Series-Tan- 山下［46］）．Δ は rational pleating ray で記述できる．

図 2 が山下氏による diagonal slice Δ の絵であり，Riley slice と同様に中央にある眼の外部が Δ である．［46］では，位数 2 の楕円型 Möbius 変換 3 つ組を用いて Δ の Klein 群を解析している [*4]．その方法により，Δ 上の群と通約可能な singular solid torus generator と呼ばれる Klein 群 $G_\zeta = \langle A_\zeta, B \rangle$ を選び，Jørgensen 数を議論した．この生成系に関して tr $[A_\zeta,$

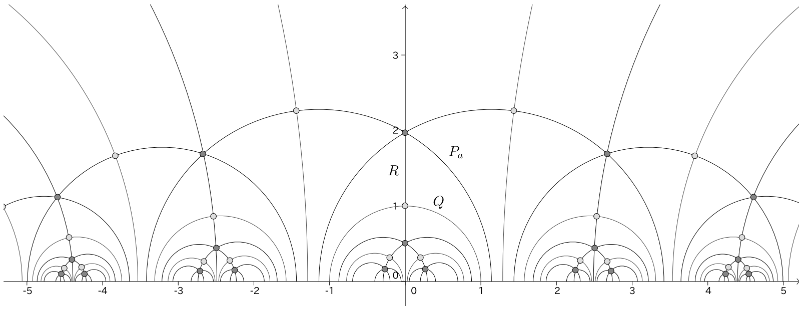

図 3　P_a, Q, R の回転軸と G_a の作用による像

$B] = 1$ であり，$\zeta = 3i$ のとき A_{3i} は放物型なので，$J(G_{3i}) = J(A_{3i}, B) = 1$ となる．$\zeta = 3i$ は diagonal slice（図 2）において黒い眼の上側の点（尖った部分の先端の点）に対応している．この点から pleatin ray を辿れば，離散性を保ったまま $J(A_\zeta, B)$ の値は単調増加するので，Klein 群の Jørgensen 数を単調増加させることができるのではないかと考えた．以下では singular solid torus generator を計算しやすい形に取り替えて計算する．

$z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して，z, w を端点とする向き付けられた $\mathbb{H}^3$ の測地線を $[z, w]$ とし，$[z, w]$ を軸とする位数 2 の楕円型 Möbius 変換（π - 回転）を $M([z, w])$ と表す．$M([z, w])$ は, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の元として

$$M([z, w]) = \frac{i}{w - z}\begin{pmatrix} z + w & -2zw \\ 2 & -z - w \end{pmatrix}$$

と表される．実数 $a \geq 1$ に対して，

$$P_a := M([a, -3a]),\ Q := M([1, -1]),\ R := M([0, \infty])$$

とし，G_a を P_a, Q, R で生成される $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の部分群とする．G_a は $\mathbb{H}^3$ へ $\{(x, 0, t) \mid t > 0\} \cong \mathbb{H}^2$ を保って作用している．このとき，$\mathbb{H}^2$ への作用は 3 つの測地線 $[a, -3a]$，$[1, -1]$，$[0, \infty]$ で囲まれた領域（図 3 を参照）を基本領域に取れるので真性不連続であり，G_a は Klein 群となる．特に G_a は $(2, 3, \infty)$ 型の三角群（Coxeter 群）であり，次の表示をもつ．

$$G_a = \langle P_a, Q, R \mid P_a^2 = Q^2 = R^2 = (QR)^2 = (RP_a)^3 = id \rangle$$

Remark．G_a は $\mathbb{H}^3$ へ向きを保って作用しているが，$\pi-$ 回転 P_a, Q, R を $\{(x, 0, t) \mid t > 0\} \cong \mathbb{H}^2$ へ制限すると，$\mathbb{H}^2$ の測地線に関する反転写像となるため，$\mathbb{H}^2$ の向きは保たない．しかし等長変換群なので，Fuchs 群を指数 2 の部分群として含む．

---

*4 もともとは，[2] において 1 点穴空きトーラスの理論で用いられた方法である．

$$A_a := P_a Q = \begin{pmatrix} -3a/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2a \end{pmatrix}, B := R = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

とする．$Q = A_a B A_a^{-1} B^{-1} A_a B$ に注意すると，(A_a, B) は G_a の生成系となるので，G_a は 2 元生成 Klein 群である．$\mathrm{tr}\,[A_a, B] = 1$ より，この生成系に関する Jørgensen 数は

$$J(A_a, B) = \left| \frac{(3a^2+1)^2}{4a^2} - 4 \right| + 1 = \frac{(3a^2-1)^2}{4a^2}, J(B, A_a) = 5$$

となるので，$J(A_a, B)$ が小さい値を取るときに $J(G_a) = J(A_a, B)$ となることを示し，次の通り実現問題の残りの解を与えることができた.

Theorem 3.8（[51]）．$a_0 = (\sqrt{7} + 2)/3$ に対して，$1 \leq a \leq a_0$ ならば

$$J(G_a) = J(A_a, B) = \frac{(3a^2-1)^2}{4a^2}$$

が成り立つ．特に $J(G_1) = 1, J(G_{a0}) = 4$ である．即ち，任意の実数 $1 \leq r \leq 4$ に対し，$J(G_a) = r$ を実現する Klein 群 G_a が存在する.

証明の概略を述べる．詳細は [51] を参照せよ.

Outline of proof. G_a の元を次の 3 通りに分類する.

(i) 楕円型

(ii) G_a の元による共役で $\langle P_a, Q \rangle$ に含まれる斜航型（放物型 $A_1 = P_1 Q$ もこれに含める）

(iii) G_a の元による共役で $\langle P_a, Q \rangle$ に含まれない斜航型

$1 \leq a \leq a_0$, i.e. $1 \leq J(A_a, B) \leq 4$ とする．いま，G_a のある生成系 (C_a, D_a) が存在して $J(C_a, D_a) < J(A_a, B)$ であるとする．トレースは共役不変なので，必要に応じて適宜 G_a の元による共役で生成系を取り替えてよい.

Case 1　C_a が (i) 型の元のとき，基本領域の形から G_a の楕円型の元の位数は 2 または 3 である．C_a が位数 2 のとき，$\mathrm{tr}\, C_a = 0$ より

$$J(C_a, D_a) = 4 + |\,\mathrm{tr}\,[C_a, D_a] - 2\,| \geq 4 \geq J(A_a, B).$$

また，位数 3 の元は G_a の 2 元生成系の元となることは不可能である.

Case 2　C_a が (ii) 型の元のとき，P_a, Q が位数 2 の元であることに注意すると，C_a は（共役により）$C_a = P_a Q P_a Q \cdots$ または $C_a = Q P_a Q P_a \cdots$ の形をしており，この語の長さが奇数の場合，C_a は P_a または Q と共役になる．よって，語の長さは偶数となり，$C_a = (P_a Q)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ の形になる.

Case 2-1　$|n| > 1$ のとき，$\langle C_a, D_a\rangle \neq G_a$ を示す．$(2, 3, n)$ 型の三角群 $H_{a,n}$ を

$$H_{a,n} := \langle P_a, Q, R \mid P_a^2 = Q^2 = R^2 = (QR)^2 = (P_a R)^3 = (P_a Q)^n = id\rangle$$

と定め，$\pi : G_a \to H_{a,n}$ を自然な射影とする．このとき $\pi(C_a) = \pi((P_a Q)^n) = \mathrm{id}$ であり，$|n| > 1$ のとき $H_{a,n}$ は巡回群とならないので，

$$\pi(\langle C_a, D_a\rangle) = \langle \pi(D_a)\rangle \neq H_{a,n}$$

が従い，$\langle C, D\rangle \neq G_a$ を得る．

Case 2-2　$|n| = 1$ のとき，$\mathrm{tr}^2\, C_a = \mathrm{tr}^2\, A_a$ である．

Case 2-2-1　$[C_a, D_a]$ がタイプ（i）の元のとき，$\mathrm{tr}\,[C_a, D_a] = 0$ とすると，

$$J(C_a, D_a) = |\,\mathrm{tr}^2\, C_a - 4\,| + 2 > |\,\mathrm{tr}^2\, A_a - 4\,| + 1 = J(A_a, B).$$

$\mathrm{tr}\,[C_a, D_a] = \pm 1$ とすると，

$$J(C_a, D_a) = |\,\mathrm{tr}^2\, C_a - 4\,| + |\,\mathrm{tr}\,[C_a, D_a] - 2| \geq |\,\mathrm{tr}^2\, A_a - 4\,| + 1 = J(A_a, B).$$

Case 2-2-2　$[C_a, D_a]$ が（ii）型の元のとき，$[C_a, D_a] = A_a^m\,(m \in \mathbb{Z})$ の形になる．したがって，$1 \leq b \leq a$ に対して $\mathrm{tr}\,[C_b, D_b]$ は b について連続に変化し，$[C_1, D_1] = A_1$ は放物型なので，

$$\lim_{b \to 1} \mathrm{tr}\,[C_b, D_b] = 2 \text{ or } -2.$$

$\lim_{b\to1} \mathrm{tr}\,[C_b, D_b] = 2$ とすると，b が 1 に十分近いとき $J(C_b, D_b)$ は 0 に十分近くなるため，Jørgensen の不等式（Theorem 1.3）より G_b が非初等的 Klein 群であることに反する．ゆえに，このとき $\lim_{b\to1} \mathrm{tr}\,[C_b, D_b] = -2$ より，$\mathrm{tr}\,[C_a, D_a] \leq -2$ を得る．したがって，

$$J(C_a, D_a) \geq |\,\mathrm{tr}^2 A_a - 4\,| + 4 \geq J(A_a, B).$$

Case 2-2-3　（iii）型の元 E_a について，$\mathrm{tr}\, E_a$ は a について単調増加するので，

$$\mathrm{tr}\, E_a \in \{\pm x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 3\} \cup \{\pm yi \mid y \in \mathbb{R}, y \geq 1\} \tag{2}$$

を得る．したがって $[C_a, D_a]$ が（iii）型の元のとき，

$$J(C, D) = |\,\mathrm{tr}^2\, C - 4\,| + |\,\mathrm{tr}\,[C, D] - 2| \geq |\,\mathrm{tr}^2 A_a - 4\,| + 1 = J(A_a, B).$$

Case 3　C_a が（iii）型の元のとき，（2）より $\mathrm{tr}^2\, C_a \geq 9$ または $\mathrm{tr}^2\, C_a \leq -1$．したがって，

$$J(C, D) \geq |\,\mathrm{tr}^2\, C_a - 4\,| \geq 5 \geq J(A_a, B).$$

以上から $J(A_a, B)$ が G_a の Jørgensen 数を与えることが従い，主張を得る．　*(q.e.d.)*

Theorem 3.4 と Theorem 3.8 を合わせて，次の通り実現問題の肯定的な解決を得た．

Theorem 3.9（山下–山﨑［51］）．任意の 1 以上の実数は 2 元生成 Klein 群の Jørgensen 数として実現される．

4　今後の課題

最後に，2 元生成 Klein 群について本稿で論じた話題と関連する興味深い未解決問題を列挙する．

Problem 2．楕円型 Jørgensen 群を全て分類せよ．

1 つ目の生成元が位数 n $(n \geq 7)$ の楕円型である Jørgensen 群の変形族を構成すること自体が簡単な問題ではないが，Jørgensen 数による 2 元生成 Klein 群の分類を考える上では，避けて通れない問題である．

Problem 3．Jørgensen 数が 4 の 2 元生成 Klein 群を全て分類せよ．

これまでの諸結果から，4 未満の Jørgensen 数をもつ Klein 群を構成することは簡単ではなく，［41］，［53］などでは，Schottky 群や Schottky 境界群のある変形族に対しては Jørgensen 数が 4 より真に大きいという評価が得られている．以上を踏まえると，Jørgensen 数が 4 の前後では Klein 群の変形において興味深い現象が起きているのではないかという予想がつくため，この問題が考えられる．

Problem 4．Jørgensen 数が 1 から連続的に単調増加する 2 元生成 Klein 群の実 1 次元パラメータ空間を記述せよ．

Theorem 3.9 では，Riley slice と diagonal slice という指標多様体の 2 つの部分集合を用いて議論した．指標多様体の 1 つの部分集合により Klein 群の Jørgensen 数を全て実現することができれば，Jørgensen 数という離散群の複雑さを測る共役不変量を用いて Klein 群の変形族をパラメータ化するという点において，Problem 4 は非常に興味深い問題である．

参考文献

［1］I. Agol, *The classication of non-free 2-parabolic generator Kleinian groups*, Slides of talks given at Austin AMS Meeting and Budapest Bolyai conference, July 2002, Budapest, Hungary.

［2］H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Mathematics, 1909, Sringer-Verlag 2007.

［3］A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, New York 1983.

[4] J. Brock, R. Canary and Y. Minsky, *The classication of Kleinian surface groups, II: The ending lamination conjecture*, Ann. of Math. **176** (2012), 1−149.

[5] J. Callahan, *Jørgensen number and arithmeticity*, Conf. Geom. Dynam. **13** (2009) 160−186.

[6] M. Culler and P. Shalen, *Varieties of group representations and splitting 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109−146.

[7] R. Fricke, *Über die Theorie der automorphen Modulgrupper*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1896), 91−101.

[8] J. Gilman, *Inequalities and discrete subgroups of PSL* $(2, \mathbb{R})$, Canad. J. Math. **40**, No.1 (1988), 114−130.

[9] J. Gilman and P. Waterman, *Classical Two-parabolic T-Schottky groups*, J. D' Analyse Mathema-tique, **xcviii** (2006), 1−42.

[10] W. M. Goldman, *Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces*, Handbook of Teichmüller theory volume II (editor : A. Papadoppoulos), (1991), 611−684.

[11] L. Greenberg, *Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups*, in Discrete Groups and Au-tomorphic Functions, edited by W. J. Harvey, Academic Press (1977), 199−257.

[12] L. Greenberg, *Maximal Fuchsian groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, No. 4 (1963), 569−573.

[13] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976), 739−749.

[14] T. Jørgensen, *A note on subgroups of SL* $(2, \mathbb{C})$, Quart J. Math. Oxford Ser. II, **28** (1977), 209−212.

[15] T. Jørgensen and M. Kiikka, *Some extreme discrete groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **1** (1975), 245−248.

[16] S. Katok, *Fuchsian groups*, The Unvercity of Chicago Press 1992.

[17] L. Keen and C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori*, Topology. **32** (1993), 719−749.

[18] L. Keen and C. Series, *The Riley Slice of Schottky Space*, Proc. LMS **69** (1994), 72−90.

[19] Y. Komori, C. Series, *The Riley slice revisited*, The Epstein Birthday Schrift, Geom. Topol. Monogr 1, Geom. Topol. Publ. Conventry, (1998), 303−316.

[20] D. Lee and M. Sakuma, *Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (I)*, Hiroshima Math. J. **43** (2013), 239−264.

[21] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type I (Finite type)*, Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), 409−430.

[22] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type II (Countably innite case)*, Osaka J. Math. **41** (2004), 491−506.

[23] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type III (Uncountably innite case)*, Kodai Math. J. **28** (2005), 248−264.

[24] A. Lubotzky and A. Magid *Varieties of representations of nitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **58** (1985).

［25］A. Marden, *Schottky groups and circles*, In Contribution to Analysis, Academic Press, New York and London, (1974), 273−278.
［26］B. Maskit, *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, (1987).
［27］B. Maskit, *On free Kleinian groups*, Duke Math. J. **93** (1981), 755−765.
［28］B. Maskit and G. Swarup, *Two parabolic generator Kleinian groups*, Isr. J. Math. **64** (1988), 257−266.
［29］W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Interscience Publishers, 1966.
［30］Y. Minsky, *The classication of Kleinian surface groups. I. Models and bounds*, Ann. of Math. **171** (2010), 1−107.
［31］宮地秀樹，私的 3 次元双曲幾何入門，2002 年度関西低次元トポロジー若手セミナー予稿 2003.
［32］H. Miyachi, *Cusps in complex boundaries of one-dimensional Teichmüller space*, Conform. Geom. Dyn., **7** (2003), 103−151.
［33］H. Miyachi, *On cusps in the boundary of the one-dimensional Teichmüller space*, RIMS Koukyuroku **1163** (2000), 18−23.
［34］D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's pearls. The vision of Felix Klein*, Cambridge Univ. Press, New York, 2002.
［35］J. Nielsen, *Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, Math. Ann. **78** (1917), 385−397.
［36］K. Ohshika and H. Miyachi, *Uniform models for the closure of the Riley slice*, In the tradition of Ahlfors−Bers, V, Contemporary Math, **510**, (2010), 249−306.
［37］大鹿健一，離散群，岩波書店 2008.
［38］M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen numbers of discrete groups*, RIMS Koukyuroku **1518** (2006), 105−118.
［39］J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1994.
［40］作間誠，結び目と 3 次元多様体～幾何構造とファイバー構造を中心として～，第 63 回トポロジーシンポジウム講演集 2016.
［41］H. Sato, *Jørgensen's inequality for classical Schottky groups of real type*, Dedicated to Professor Mitsuru Nakai on his sixtieth birthday, J. Math. Soc. Japan, **50**, (1998), 945−968.
［42］H. Sato, *The Jørgensen number of the Whitehead link group*, Bol. Soc. Mat. Mexicana(3) **10**, Special issue (2004), 495−502.
［43］H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contem. Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. kra and B. Maskit, (2000), 271−287.
［44］科学研究費補助金研究成果報告書課題番号：19549178.
［45］A. Selberg, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces*, in Contributions to function theory, Tata Institute of Fundamental Research (1960), 147−164.

［46］ C. Series, S. P. Tan and Y. Yamashita, *The diagonal slice of Schottky space*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), no.4 2239−2282.

［47］ P. B. Shalen, *Orders of elements in nite quotients of Kleinian groups*, Pacic J. Math. **256**, No. 1 (2012), 211−234.

［48］ 谷口雅彦，松崎克彦，双曲的多様体とクライン群，日本評論社 1993.

［49］ H. Yamamoto, *An example of a non-classical Schottky group*, Duke Math J. 63 (1991), 193−197.

［50］ Y. Yamashita, OHT − *A software for the dynamics of the modular group action on the character variety*, RIMS Koukyuroku **1586** (2008), 18−25.

［51］ Y. Yamashita, and R. Yamazaki, *The realization problem for Jørgensen numbers*, Conform. Geom. Dyn., **23** (2019), 17−31.

［52］ R. Yamazaki, *Some extensions of Oichi-Sato's theorem for the Jørgensen numbers of the Kleinian groups*, master thesis, University of Tokyo (2016).

［53］ R. Yamazaki, *Jørgensen numbers of quasi-fuchsian punctured torus groups*，学習院高等科紀要 **14**，（2016），151−163.