ALEXANDRU SZEL

CONSTANTIN BUNGĂU

FUNDAMENTAREA OPTIMĂ A DECIZIILOR ÎN SISTEME TEHNICO-ECONOMICE

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN ORADEA

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
SZEL, ALEXANDRU
Fundamentarea optimă a deciziilor în sisteme tehnico-economice / Szel Alexandru, Bungău Constantin. - Oradea: Editura Universităţii din Oradea, 2011
Bibliogr.
ISBN 978-606-10-0667-0

I. Bungău, Constantin

62

Str. Universităţii nr. 1, RO – 410087, Oradea
Tel./Fax: +40 259 432830 int. 632
email: editura@uoradea.ro

Editura Universităţii din Oradea este recunoscută de *CNCSIS, cod 149.*

REZUMAT

Lucrarea reprezintă o succintă trecere în revistă a principalelor rezultate ştiinţifice din literatura de specialitate, dezvoltate în ultimii ani pentru fundamentarea deciziilor şi studiul sistemelor. După o scurtă prezentare a aspectelor teoretice, fără a avea pretenţia deplinei lor rigurozităţi matematice, sunt prezentate principalele tipuri de probleme considerate importante din punct de vedere practic cu schiţarea modului lor de soluţionare.

Pentru cititorii mai ambiţioşi doritori a aprofunda mai adânc aspectele teoretice ale modelării deciziilor, se prezintă o bibliografie specifică.

ABSTARCT

The book is a succinct overview of the major scientific results from specialized literature, developed in recent years to support decision and systems study. After a brief overview of the theoretical aspects, without claiming their full mathematical rigorous, are presented the main types of issues considered important from a practical perspective, with sketching how they solve.

For more ambitious readers who want to deepen more deeply the theoretical aspects of modeling decisions, is presented a specific bibliography.

Apariţia volumului a fost prijinită de
CENTRUL JUDEŢEAN PENTRU CULTURĂ BIHOR

Introducere

Suntem martorii unei dezvoltări tehnico-ştiinţifice nemaiîntâlnite. Managementul cunoaşterii începe să devină cheia succesului micilor şi marilor intreprinderi, informaţia este a patra resursă a omenirii aducătoare de putere economică, avantaj concurenţial celor care sunt capabili să înbogăţească, să gestioneze şi să utilizeze teoria cunoaşterii.

Trebuie să depunem efort pentru ca managementul cunoaşterii să devină o prioritate în vederea concurenţei cu specialiştii ţărilor dezvoltate. Cunoştiinţele omenirii se dublează aproape anual.

Statisticienii îi avertizează pe tineri că în ţările avansate este necesară multicalificarea, existând tineri care la 30 de ani au parcurs circa 13-14 locuri de muncă.

În universităţile moderne tinerii capabili, cu gândire alternativă asupra schimbărilor sunt selectaţi din primii ani pentru accesarea de cunoştiinţe suplimentare, cooptarea în proiecte pentru promovarea spre cercetare şi excelenţă.

Este deci necesar cooptarea tinerilor la conferinţe, simpozioane, proiecte, evaluarea ideilor şi specializarea lor, pentru a pregăti oameni deschişi spre viitor.

Domenii cu o dinamică extraordinară cum ar fi electronica, informatica, tehnologia mecatronică, etc., cu implicaţiile lor economice şi sociale, îşi reformulează competenţele la circa 3-ani. În aceste condiţii absolvenţii sunt nevoiţi a reconsidera o parte din cunoştiinţele însuşite chiar în primii ani de studii.

Companiile cu o evoluţie de-o asemenea dinamică, îşi selectează şi specializează noii angajaţi cu perspectivă de cercetare. În aceste condiţii este necesar de a pregăti specialişti cu iniţiativă, care sunt capabili de a oferi alternative la schimbările şi problemele actuale.

Nu putem renunţa la avantajele sistemelor moderne, trebuie să ţinem pasul cu implicaţiile dezvoltărilor tehnologice asupra economiei în ansamblu, trebuie să intrăm în competiţie pentru a ne implica în a fi primii în:

- a acumula cât mai multe informaţii şi cunoştinţe precise;
- a calcula, proiecta, a trage concluziile necesare;
- luarea deciziei, a unei decizii mai bune, creatoare de valori, uneori salvatoare de viaţă.

Sper că prezenta lucrare succintă cu puţinele sale exemple şi bibliografia anexată prezintă un suport pentru deciziile necesare aferente cercului de probleme a utilizatorilor, să deschidă orizonturi pentru viziunea modernă a problemelor şi a soluţionării acestora, să promoveze cultul pentru cercetare în generaţia prezentă şi viitoare.

Cele mai recente cercetări permit rezolvarea celor mai incredibile forme de modele (de exemplu rezolvarea sub forma generală a modelelor neliniare a fost recent publicată după mai bine de 60 ani). Perfecţionarea metodelor matematice, a produselor software, a dezvoltării capacităţii şi vitezei calculatoarelor electronice, deschid orizonturi largi în formularea şi rezolvarea modelelor pentru studiul sistemelor.

Vom fi fericiţi dacă un număr mare de absolvenţi, studenţi vor aborda metodele moderne în luarea decizilor, încurajând abordarea metodelor de cercetare în viaţa curentă de specialitate a lor, deschizând calea celor ambiţiosi spre excelenţă.

Oradea 2011,
Autorii

Cuprins

1. NOŢIUNI DE TEORIA GENERALĂ A SISTEMELOR [8], [10], [18], [19], [20], [25], [26], [27], [29], [31], [37]

Teoria generală a sistemelor (TGS) în sens cel mai larg este o colecţie de concepte generale, metode, principii, probleme, tehnici şi mijloace asociate de noţiunea de sistem. TGS nu este o teorie axiomatică, ea include o serie de teorii formale pe domenii funcţionale - teoria automatelor, teoria controlului optimal, cibernetica, teoria informaţiei, principii biologice, studii matematice, organizare şi conducere, etc. – precum şi o serie de concepte şi categorii preluate din ştiinţe particulare.

Prima definiţie a noţiunii de sistem a fost dată de Aristotel cu mai bine de două mii de ani în urmă, abia la începutul secolului XX s-a pus bazele unei teorii închegate privind sistemele prin biologul canadian Ludwig von Bertalanffy [23] care după o serie de publicaţii între anii 1928 - 1950, a formulat în 1969 un studiu privind scopul şi importanţa TGS, unele noţiuni de bază ale sale. Lucrări importante privind TGS au apărut în anii următori, de exemplu: [13], [18], [26], [29], [1], [31], [37].

Poate fi definită ca sistem orice secţiune a realităţii în care se identifică un ansanblu de fenomene, obiecte, procese, concepte, fiinţe sau grupuri, interconectate printr-o mulţime de relaţii reciproce, inclusiv mediul înconjurător şi care acţionează în comun pentru realizarea unor obiective definite.

La dezvoltarea TGS au contribuit ulterior mulţi specialişti paralel cu dezvoltarea electronicii, informaticii, matematicii şi inclusiv al biologiei, elaborând modele de interpretare şi previziuni ale evoluţiei.

Noţiunea de sistem.

Poate cea mai acceptată formulare a noţiunii de sistem este cel dată de L.A. Zadeh – E. Polak (1972):

“sistemul este o reuniune de obiecte, care sunt legate de conexiuni şi interacţiuni reciproce“. O altă formulare susţine că o multime de obiecte formează un sistem dacă prin conexiune i-a naştere cel puţin o proprietate nouă care nu este caracteristică nici unui obiect component.

TGS este un instrument logico-matematic a cărei sarcină este formularea şi definirea acelor principii generale care sunt aplicabile sistemelor în general.

Sistemul devine cibernetic (figura 1.1), atunci când apare reglarea cu conexiunea inversă astfel:

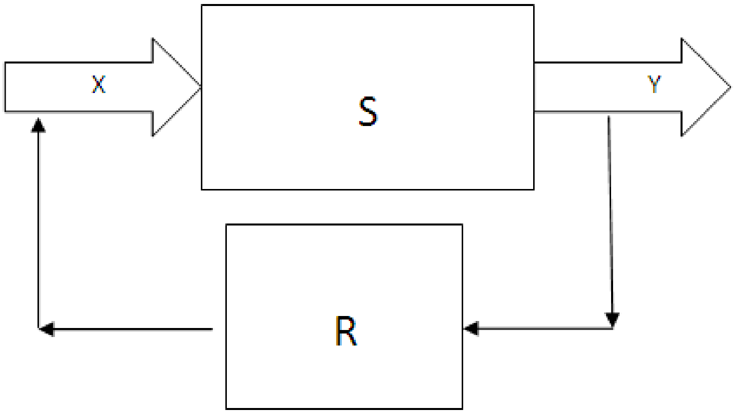

Figura 1.1 Sistem cibernetic
(S-sistemul condus, R- reacţia inversă)

Elementele e1, e2…..en care se află în interacţiune pot fi caracterizate prin mărimile q1, q2,…..qn, numite **mărimi de stare a sistemului**.

Sistemul este considerat deschis dacă există interacţiune între el şi mediul înconjurător (schimb de substanţă, energie, etc).

Dacă variabila timp apare explicit în relaţiile de evoluţie, vorbim de un sistem dinamic.

Interacţiunile modifică mărimile qi în timp, aceste modificări pot fi descrise cel mai simplu printr-un sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$dq/dt=fi\ (q1,q2,\ldots.qm) \quad i=1,2,\ldots.,m \tag{1.1}$$

Dacă la un moment dat avem f1=f2=….=fm=0, adică sistemul (1.1) are soluţii nişte constante, se spune că sistemul a atins o stare staţionară. Dacă mărimile q1*,…..qn* reprezintă o stare dorită a sistemului, putem estima în orice moment abaterile faţă de starea finală dqi/dt=fi [(q1*-q1),….(qm*-qm)].

Este important stabilitatea sistemului, ea fiind înţeleasă ca răspunsul sistemului la perturbaţiile mediului înconjurător.

O traiectorie este asimptotic stabilă dacă tinde asimptotic către Q* pentru f → ∞.

$$Q^*= \{ q1^*(t),\ldots..qm^*(t\} \quad t=0,1,\ldots.T \tag{1.2}$$

Echilibrul dinamic necesită o coordonare şi sincronizare riguroasă a proceselor interne.

Obiectele sistemului pot fi grupate în intrări notate cu X, şi ieşiri, notate cu Y. De obicei la sisteme complexe mai considerăm o mulţime de decizii M, şi o mulţime a scopurilor V.

De asemenea considerăm un process

P: X . M → Y şi o funcţie de performanţă

G: M . Y → V

Toate sistemele se compun din elemente.

Structura

Se defineşte cel mai des prin mulţimea de conexiuni care păstrează totalitatea sistemului, alteori se defineşte ca un invariant al sistemului.

Component sistem

O parte separabilă a elementelor în interacţiune a sistemului care din considerente de analiză constituie un întreg independent cu capacitatea de a realiza o funcţiune specifică. Componentele sunt strict interconectate între ele.

Subsistemul

Mulţimea elementelor separabile ale sistemului care realizează funcţiuni secundare, nu neapărat necesare funcţionării minimale a sistemului.

Elementul

Unitatea cea mai mică independentă care realizează o funcţiune independentă.

Mediul exterior

Mulţimea elementelor care nu fac parte din sistem, dar influenţează funcţionarea sistemului.

Perturbaţia

Efectele ivite din sistem sau din mediul exterior la care sistemul nu este pregătit, şi împiedică sau frânează funcţionarea sistemului. Aceste elemente pot constitui şi factori conflictuali.

Noţiuni des vehiculate despre sistem sunt: structura, starea, mediul, subsistemul, elementul, perturbaţia, procesul, intrarea, ieşirea, comportamentul, controlul, reacţia, obiectivul, reglarea, domeniul, cibernetic, optimal, adaptiv, cutie neagră, model, echilibrul, stabilitatea, precizia, siguranţa, funcţionarea, forma, model, eroarea, tehnologia, graful, dependent / independent, timpul, estimare, resurse, instruire, nivel, ierarhic, dinamică, funcţia, perioada, eveniment, randamentul, probabilitatea, interval, restricţii, acţiune, simularea, riscul, stohastic, transferul, frecvenţa, costul, aleator, jocul, strategia, etc.

Contextul şi semnificaţia acestor noţiuni se vor prezenta detaliat la expuneri.

Sistemele în general pot fi:

- statice sau dinamice;

- pasive sau active;
- inchise sau deschise;
- finite sau infinite;
- cu sau fără scop;
- naturale sau proiectate;
- deterministe sau stohastice;
- liniare sau neliniare;
- discrete sau continue;
- cu modele imitative, analogice sau simbolice.

Procesul este şirul modificărilor de stare ale sistemului. Controlul se poate realiza prin reglare sau conducere. Pot exista modele cu o singură sau cu mai multe ecuaţii.

Modelul cu o ecuaţie nu depinde de alte procese, de exemplu

import= f(export, GDP)

În funcţie de forma funcţiei aceasta poate fi liniară sau neliniară. În funcţie de caracterul variabilelor/ procesului putem avea modele deterministe sau stohastice.

Modelul stohastic este valabil doar în medie, totdeuna există şi efecte aleatoare. Variabilele sunt obsevabile în spaţiu şi timp, existând serii dinamice (temporale), parametrii sunt combinaţii spaţio-temporale, seriile dinamice ale acestora sunt date sub formă de tabele.

1.1. LEGILE DE FUNCŢIONARE A SISTEMELOR, CARACTERISTICI

- legi fundamentale:
    - orientarea spre anumite scopuri;
    - sistem de condiţii interne (material, fonduri, capital uman);
    - tendinţa de împlinire;
    - necesitatea nivelului de resurse energetice;
    - necesitatea asigurării pe un interval de timp;
    - legile de variaţie în timp şi spaţiu;
    - forma ciclului de viaţă a sistemelor (figura 1.2).

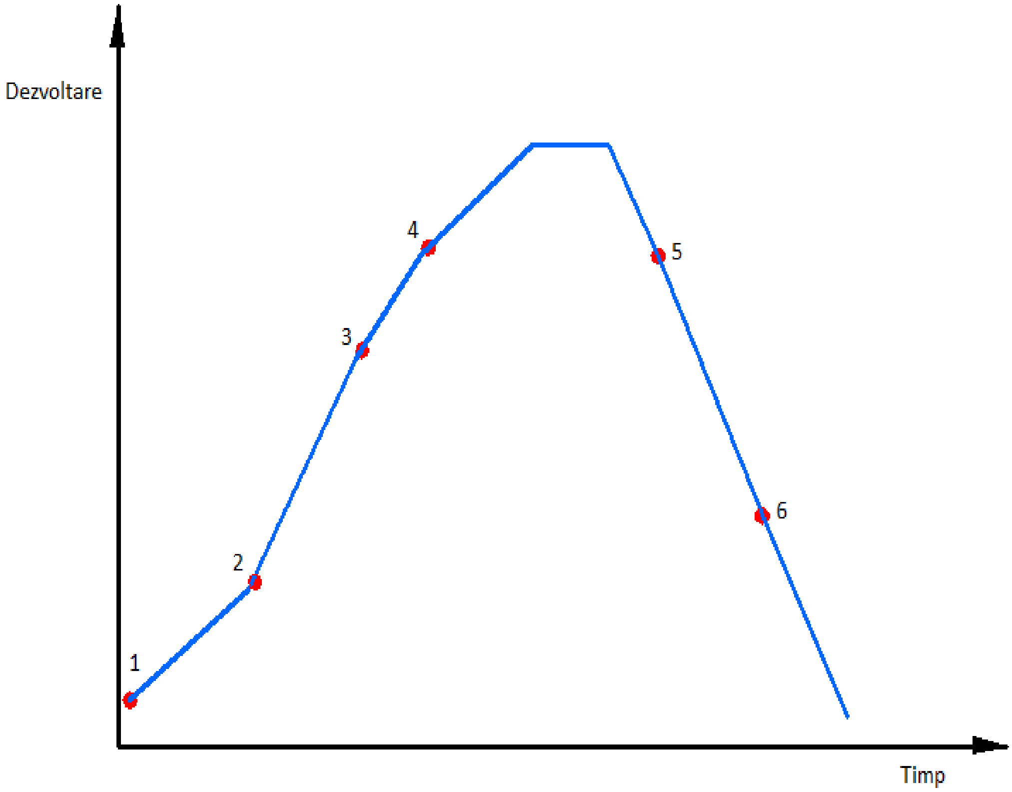

Figura 1.2. Etapele ciclului de viaţă

1- ideea realizării sistemului;
1-2 - etapa de pregătire a realizării;
2 - începutul realizării;
2-3 - etapa de proiecare;
3 - începerea funcţionării / ex. fabricaţiei;
3-4 - implementarea sistemului / ex produsului;
4 - începutul succesului;
4-5 - succesul;
5 - începutul declinului;
5-6 - etapa de declin;
6- începutul falimentului;
6-7 - etapa de faliment;
7- desfiinţarea sistemului.

- Legi de tip conseciinţă:
    - Existenţa domeniului de definiţie;
    - Orientarea input-output;

- Interacţiunea cu mediul;
- Gradul de definire, completitudine;
- Centralizare/specializare.

▪ Legi deductive din funcţionarea sistemelor:
- sunt observabile şi controlabile;

Sistemele pot fi controlate după Max Weber prin:
- conducere sistematică cu intervenţie nemijlocită, adică dictatorică;
- reglare, adică prin reacţie inversă şi autoinstruire.

La sisteme complexe apar ambele forme de control.
- Caracterul static şi dinamic;
- Caracterul deschis/inchis;
- Sisteme naturale/proiectate.

Stabilitatea, efectele şi clasificarea conflictelor. Catastrofele.

Semnale utilizate, eventual codificate:
- discrete;
- analogice.

Gradul de determinare sistemică
- ▪ o parte a componentelor sistemice poate fi de tipul nedeterminist;
- ▪ unele sisteme au chiar relaţii nedetrerministe;
- ▪ elementele mediului sistemului pot fi nedeterministe, în special în cazul sistemelor economice în permanentă schimbare.

Scaderea gradului de nedeterminare (a sistemelor economice) are ca efect:
- scăderea costurilor aferente ieşirilor nedorite;
- cresc costurile de susţinere;
- duce la creşterea ocazională a costurilor de transformare.

Se poate vorbi deci de un optim în gradul de determinare a sistemelor economice.

Sistemul cutie neagră – utilizat independent - se utilizează în special pentru cunoaşterea comportării funcţionale. Esenţa metodei constă în aplicarea de intrări după reguli de înainte stabilite asupra sistemului analizat, urmărind reacţiile sistemului, apoi relaţiile între intrările şi ieşirile (funcţiile de ieşire), trăgând concluzii asupra comportamentului sistemului.- din condiţiile de restricţie tragem concluzii asupra structurii.

Metoda se utilizează dacă nu cunoaştem construcţia internă a sistemului, nu putem descompune în componente, dorind totuşi analiza detaliată a funcţionării, sau dacă în scopul analizei nu este esenţial cunoaşterea structurii , analizînd doar comportamentul ca întreg al sistemului.

Noţiunea de echilibru şi stabilitate.

În literatură se vorbeşte de echilibru pentru sisteme inchise şi deschise.

Principiul doi al termodinamicii exprimă faptul că sistemul inchis atinge starea de echilibru independentă de timp, stare cu entropie maximă şi energie minimă. Echilibrul dinamic în sistemele deschise este starea independentă de timp, când caracteristiciile macroscopice nu se mai schimbă, de şi are loc un schimb permanent de materie/energie. Sistemele deschise lăsate independente nu este sigur că ajung la echilibru. Putem vorbi de un echilibru de tip doi dacă, comportamentul sistemului se poate descrie cu oscilaţii, adică, după ieşirea din echilibru sistemul intră în oscilaţie, stabilizat în jurul unei noi stări de echilibu. La sistemele cu reacţie inversă se asigură menţinerea stării sistemului în domeniul stabilităţii, în mod automat, fără intervenţie externă.

Sitemul devine labil, dacă:

- valorile de ieşire se îndepărtează de starea de echilibru;
- amplitudinea oscilaţiilor de ieşire creşte continuu.

Sistemul funcţionează ca o cutie neagră, pe baza condiţiilor de control şi reglare pe baza deciziilor în scopul stabilit.

Analiza funcţionării sistemelor. Cazuri de stări frecvente:

- abateri;
- corelaţii;
- coeziune;
- trenduri, prognoze;
- serii temporale.

1.2 METODE CLASICE DE INVESTIGARE SISTEMICĂ

Se referă la sisteme economice.

După cum operatorul de anchetă este sau nu direct în contact cu subiectul (subiecţii) anchetei, distingem:

1. Interviul, în care dialogul este nemijlocit;
2. Chestionarul, cu dialog nemijlocit.

1. Interviul poate fi de pregătire, interviul propriu-zis, având paşii:
   a) Pregătirea interviului;
   b) Desfăşurarea interviului;
   c) Consemnarea şi prelucrarea rezultatelor.
2. Chestionarul se desfăşoară astfel:
   a) Stabilirea ipotezelor, obiectivelor (anchetă preliminară);
      - Determinarea subiecţilor anchetei.
   b) Redactarea chestionarelor cu două faze:
      - Redactarea provizorie a chestionarului, verificat pe un lot redus de subiecţi;

- Redactarea definitivă, care se trimite la anchetă.

c) Aplicarea chestionarului;
d) Prelucrările şi interpretarea rezultatelor;
e) Redactarea şi comunicarea rezultatelor.

Caracteristiciile metodelor moderne de analiză şi proiectare sistemică [10], [15], [26], [29]

Omul este în centrul problemei (în organizaţia viitorului bazat pe cunoştiinţe creşte rolul resurselor umane, cresc cunoştiinţele, i-au parte la decizii);

- Flexibilitate;
- Uşor de utilizat;
- Principiul utilizării bazei de date;
- Dezvoltare cu bancă de metode (pentru probleme semistructurate-decizii structurate; omul interoghează maşina);
- Dezvoltare cu bancă de modele, (pentru probleme nestructurate, sprijin prin sfaturi inteligente; capacitate de concluzionare, explicare; maşina întreabă omul); sistem autoinstruibil;
- Analiza cuprinde elemente de sistem expert;
- Se tinde către sisteme descentralizate;
- Cerinţa integrării;
- Armonizarea între scop, proces (funcţionare, resurse), forma de organizare;
- Dezvoltare adaptată la strategia organizaţie, strategia informaţională se construieşte pe stategia de afacere;
- Câştigarea încrederii participanţilor organizaţiei, participarea activă a acestora;
- Funcţii noi de management;
- Realizarea sistemelor informatice de management MIS;
- Nu se recomandă bază de date separată pentru sectoarele de conducere, tehnic şi economic;
- Funcţionare organizaţie pe bază de cunoştiinţe;
- Dezvoltare organizaţie cu construcţie ierarhică;
- Diversificarea necesară;
- Creşte prestigiul personalităţii, trebuie să ne ocupăm şi cu interesele personale;
- Creşte prestigiul formal;
- Se prevalează cooperaţia liberă;
- Existenţa principiului controlling, nu numai soluţii izolate;
- Sistem orientat pe output, cordonat tehnologic, orientat pe piaţă, cu descompunere spaţială necesară, cu construcţie bine structurată;
- Descoperirea caracteristicilor specifice ale firmei;

- Informaţiile circulă în sistemul decizional atât pe verticală cât şi pe orizontală.

1.3. ANALIZA ŞI DIAGNOZA [7], [10], [19], [29]

Sistemele se pot descompune dacă conflictele nu se tratează şi se transformă în catastrofe.

- factorii diagnozei organizaţiei;
- diagnoza şi informatica;
- prezentarea unei metode utilizând arbori de decizii (explozie pe grafuri arborescente) de diagnoză economică cu elemente de sistem expert.

Analiza de sistem [15], [26]

- Analiza de situaţie, culegerea de informaţii;
- Analiza proceselor, tehnici.
    - Diagrama fluxului de date (entităţi, flux de date, memorii);
    - Dicţionar de date;
    - Specificarea proceselor.
        - Limbaj natural structurat;
        - Tabele de decizii;
        - Arbori de decizii.

Se defineşte tehnologia ca mulţimea metodelor, tehnicilor şi instrumentelor necesare realizării unui produs.

1.3.1. METODOLOGII CUNOSCUTE DE ANALIZĂ ŞI PROIECTARE A SISTEMELOR [7], [15], [22]

Metodologii structurate:

- SSADM (Structured Systems Analysis and Design Method);
- MERISE;
- Information Engineering (J. Martin).

Metodologii orientate pe obiecte:

- Obiect Modelling Technique.

Metodologii orientate pe procese:

- ARIS.

Alte metodologii:

- DAFNE;
- MEIN (Metodologie Informatică);
- Vorgehens Model;
- Jackson System Development.

Cele mai răspândite metodologii sunt metodologiile structurale şi metodologiile orientate pe obiecte. Dintre metodologiile structurale amintim sistemul englezesc SSADM (Structured Sysems Analysis and Design Method-1993), iar printre metodele orientate pe obiecte mai răspândit este metodologia OMT.

Caracteristiciile metodologiilor structurale:

- Orientare spre produs (cu ciclul de viaţă a acestuia);
- Descrierea precisă a etapelor de dezvoltare;
- Utilizarea unor tehnici generale sau specifice;
- Analiza are loc de sus în jos (de la compus spre component), proiectarea are loc de jos în sus;
- Se disting etape de proiectare logică şi fizică;
- Etapizare, iterativitate.

Conform metodologiei SSADM, recomandă o strategie de dezvoltare a sistemelor în cadrul organizaţiei cu următoarele etape:

- Analiza de fezabilitate;
- Analiza sistemului;
- Proiectarea sistemului (logică şi fizică);
- Realizrea sistemului;
- Implementarea sistemului;
- Exploatare cu modificări, revenind la prima etapă.

SSADM-ul acoperă doar parţial ciclul de viaţă a sistemelor, nu se ocupă de realizarea şi implementarea sistemelor, pentru care există metode bine puse la punct. Cunoscând tehnicile generale şi specifice, SSADM răspunde în primul rând la cerinţa ordonării activităţiilor.

Cele mai des utilizate tehnici informaţionale:

- Diagrama fluxului de date DFD;
- Modelul logic al datelor;
- Analiza relaţională a datelor;
- Definirea funcţiunilor, etc.

Caracteristicile metodologiilor orientate pe obiecte: [22], [15]

- Proceduri orientate pe aşa-numitele **cazuri de utilizare(CU)**, organizate în jurul colaboratorilor;
- Orientare pe arhitehtură (scheme, vizualizări ale colaboratorilor, etc, descompunerea sistemului în subsisteme, grupe, interfeţe, vizualizările lor);
- Descompunerea dezvoltării în iteraţii executate în cicluri, extinderea ciclurilor se face cu aşa numitele increment-uri.

Structurile de date + algoritmii formează **programe**.

Datele (caracteristiciile) + prelucrările (metodele) formează **obiectele.**

Obiectele se definesc cu ajutorul claselor.

Procedurile orientate pe cazuri de utilizare (CU) se aplică în fazele de:

- Analiză, cu mesaje trimise între clase prin iteraţii;
- Proiectare, prin transcrierea CU-urilor de analiză în CU-uri de proiectare cu notaţiile limbajului de programare selectat;
- Implementare, codurile sursă de proiectare + alte elemente vor forma aşa numitele componente, incluzând inclusiv ordinea lor de integrare;
- Testare, se controlează funcţionalitatea CU-urilor cu cazuri de testare (date de intrare+condiţii de execuţie+răspunsuri).

Fazele propriu-zise sunt pregătirea (inception); proiectarea (elaboration); realizarea (construction); predarea (transition).

Metode aplicabile în diverse faze de elaborare sistemică:

1. Analiza de sistem, analiza de problemă şi de situaţie:
   - Analiza documentelor;
   - Interviul;
   - Chestionare;
   - Metodele cunoaşterii în grup (ex. bursa de idei);
   - Observaţia, prelevare de probe;
   - Metode de analiză, calculaţii;
   - Analiza proceselor, activităţiilor;
   - Analiza cost-beneficiu;
   - Proiectarea muncii de dezvoltare.
2. Proiectare de sistem, analiza proceselor, paşii modelării datelor:
   - Proiectare orientată pe procese (separă datele de operaţii şi proceduri);
   - Modelare tip flux de date sau pe bază de structură de date;
   - Proiectare structurată de sistem (raţional, realizat în mod sistematic, în structuri clare, gândire modulară, metodă de descompunere în paşi a dezvoltării, ca în cazurile metodologiilor Gane & Sarson sau James Martin;
   - Proiectare de sistem orientat pe obiecte (permite alăturarea în sistem a datelor incompatibile între ele, funcţionalitatea sistemelor utilizator dezvoltate pe diverse platforme, manevrarea elementelor abstracte ale sistemului;
   - Proiectarea bazei de cunoştiinţe (la dezvoltarea sistemelor cu baze de cunoştiinţe, sisteme expert.
3. Implementarea
   - Tabele de decizii;
   - Programare orientată pe proces;
   - Programare structurată;
   - Programare orientată pe obiecte.

Instrumente utilizabile

- **Analiza de sistem:**
  - Analiza de certificate;

- Diagrame de flux;
- Diagrame HIPO (Hierarchy Plus Input – Process - Output);
- Diagrame;
- Analiză input/output;
- Instrumente structurate de analiză (diagrama de flux de date, diagrama de context sistem, dicţionar de date).

- Proiectare de sistem
  - Diagrame Gant;
  - Diagrama de reţea PERT;
  - Schema logică model de date;
  - Mijloacele proiectării fizice (configuraţie sistem, diagrama de flux sistem, descriere model de date fizice) liste, matrici.
- Implementarea
  - Scheme bloc, schemă de structură;
  - Produse soft de dezvoltare;
  - Tehnici de control, testare;
  - Mijloace de asamblare;
  - Posibilităţi de protecţie juridică.

1.4. SISTEME SOCIAL-ECONOMICE (ORGANIZAŢII) [23], [15], [10]

Metodele şi tehnicile ce vor fi prezentate în continuare pot fi aplicate atât de specialist cu orientare tehnică, cât şi de economişti, cercetători, etc., în cele ce urmează, aspectele sistemice se vor concentra mai mult asupra sistemului organizaţional al întreprinderilor.

PROIECŢIILE SISTEMULUI

- proiecţia de date;
- proiecţia de prelucrare;
- proiecţia sistemului informaţional.

Componentele modelului triadă a sistemului compus sunt (conform figurii 1.3):

- sistem real;
- sistem informatic;
- sistem de resurse.

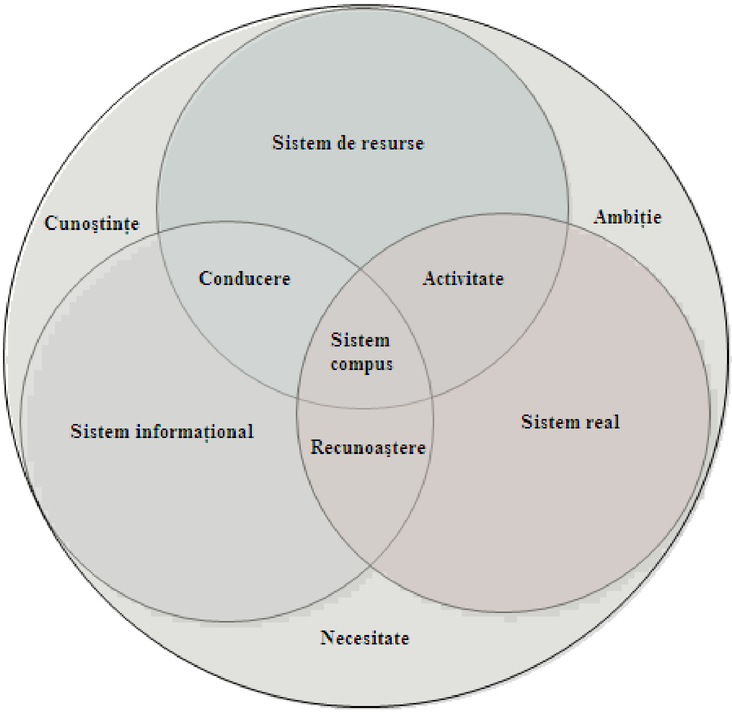

Figura 1.3. Modelul triadă a sistemului compus

Nivelurile proiecţiilor:

- nivel conceptual;
- nivel logic;
- nivel fizic.

- tipuri clasice de structura:
  - STAFF;
  - LINE ;
  - TOP;
  - DOWN.

Deciziile de planificare pot fi tactice sau strategice, soluţiile putând fi optime, adaptive sau satisfăcătoare. Tactic (la nivel operativ pe termen scurt) dacă este posibil în posesia unor informaţii certe şi suficiente, se folosesc modele deterministe cu calcul exact.

La nivel strategic (pe termen mediu şi lung) în lipsa unor informaţii certe, se utilizează metode şi tehnici de estimare a unor variante de evoluţie. Metodele strategice pot fi utilizate şi la decizii tactice, dacă metodele tactice nu sunt aplicabile sau nu dau rezultate concludente.

Planificarea pe termen lung - condiţii de asigurare pe cel puţin 3 perioade (cicluri de viaţă).

Planificare de termen mediu - condiţii de asigurare pe cel puţin 2 cicluri de viaţă.

Planificare pe termen scurt, asigură condiţii pe 1 ciclu de viaţă sau pe perioada de bilanţ sau an calendaristic.

1.4.1. CERINŢELE INFORMAŢIONALE ALE INTREPRINDERILOR MICI [23], [26], [29]

condiţia de continuitate a funcţionării:

- controlul valorificării;
- controlul datelor de producţie;
- evidenţa mişcărilor financiare, a nivelului disponibilului;
- evidenţa nivelului stocului de produse şi materiale;
- evidenţa nivelului de profitabilitate;
- nivelul resurselor umane;
- necesarul de resurse suplimentare;
- analiza costurilor permanente (chirii, etc.);
- alegerea formei potrivite a firmei.

1.4.2. CERINŢELE INFORMAŢIONALE ALE INTREPRINDERILOR MARI [23], [26], [29]

Cerinţe de transparenţă pentru proprietar şi manager, rolul crescut al resurselor umane (creativitate, etc). Cointeresarea şi informarea personalului, creşte cointeresarea lor faţă de strategia comună.

- informaţii despre politica firmei;
- informaţii de dezvoltare cercetare, managementul şi componenţa resurselor umane;
- reputaţia firmei;
- analize de piaţă;
- informaţii de competitivitate;
- calitatea produselor;
- rentabilitatea procesului de producţie;
- disponibilitatea prezentă şi viitoare a materiilor prime;
- modificarea viitoare a resurselor umane;
- potenţial de dezvoltare cercetare;
- direcţii de investiţii viitoare, cerinţe, posibilităţi;
- lichiditatea, factorii de cost;
- strategia, politica firmei;
- gestiunea costurilor;
- evidenţe pe subunităţi;

- orientarea către sisteme expert bazate pe cunoştiinţe, surse de cunoaştere;
- cunoaştere fundamentată ştiinţific;
- sisteme expert disponibile;
- cunoaştere intuitivă;
- cunoaştere generală;
- problematica resurselor umane, managamentul strategic al resurselor umane SHRM;

viziune bazată pe:

  - strategia de căutare;
  - strategia de menţinere;
  - strategia de dezvoltare;
  - strategia de disponibilizare;
  - modelul controlului managerial.

ANEXĂ: CUNOŞTIINŢE MINIMALE DE REŢELE DE CALCULATOARE [15]

- Reţele de date;
- Reţele de calculatoare (LAN, MAN, WAN, GAN);
- Dependente/independente de fabricant;
- Transmitere de date simplex, semiduplex, duplex;
- Topologie: hierarhice, ditribuire pe magistrală, reţea stelară, reţea de conexiune completă (fiecare calculator cu fiecare calculator);
- Comunicaţii: prin canale, punct cu punct, canal distribuitor;
- Linii de conexiune: analog, digital , cu sau fara sateliţi, standarde;
- Arhitecturi de reţea, de comunicaţii, straturi, modele;
- Reţele globale WAN, conexiuni de linii, de mesaje de pachete;
- Reţele locale, segmentare, conexiune;
- Trecere în revistă a softwerelor de comunicaţii;
- Serviciile reţelelor de calculatoare, tehnologii;
- Serviciile internetului.

2. DESPRE MODELARE

Etapele realizării unui model:
- stabilirea cerinţelor, restricţiilor;
- analiză de situaţie;
- proiectarea;
- realizarea, construcţia empirică sau axiomatică a modelului;
- testarea ipotezelor şi previziunilor modelului;
- culegerea datelor, implementarea;
- urmărirea rezultatelor, deducerea concluziilor provenite din modele;
- îmbunătăţirea modelului, sau alegerea altui model, repetând etapele de mai sus.

Există tehnici pentru sprijinirea unora sau a mai multe faze ale ciclului de viaţă.

2.1. MODELAREA DATELOR

- ✓ de sus în jos, descompunere în componente (top-down);
- ✓ de jos în sus, compunere (bottom-up).

Tipuri de modele de date:
- model liniar;
- model ierarhic;
- model reţea.

Algebra relaţională de tratare a datelor din tabela relaţională:

Principalele operaţii sunt:
- Filtrare (SELECT);
- Proiecţie (PROJECT);
- Conectare (JOIN);
- Divizare (DIVISION);
- Reunire (UNION);
- Diferenţă (DIFFERENCE);
- Intersecţie (INTERSECTION);
- Produs (PRODUCT).

Se întocmeşte diagrama entitate-legătură (1-1, 1-n, n-m).

2.2 ANALIZA RELAŢIONALĂ [7], [15], [26]

Analiza relaţională ne ajută la structurarea datelor în registre, dosare, fişiere, asigurând o redundanţă optimă şi siguranţă necesară.

Scopul metodei este:
1. Înţelegerea viziunii de utilizator, privind semnificaţia şi importanţa datelor;

2. Permite verificarea conexiunilor datelor (normalitatea, cerinţele de prelucrare, conţinut);
3. Asigurarea posibilităţii întreţinerii şi dezvoltării logice a datelor (descoperirea tuturor relaţiilor datelor; evidenţierea contradicţiilor; eliminarea redundanţelor excesive);
4. Gruparea cea mai convenabilă a datelor în mediul multiutilizator.

Analiza poate ajuta şi la sisteme de evidenţă manuală, la sisteme computerizate fiind obligatorie. Analiza constă în normalizarea succesivă a datelor iniţiale considerate nestructurate, ultima formă normalizată (de obicei a 3-a) furnizând structuri de date care satisface cerinţelor de mai sus.

Regulile de normalizare successive sunt:

- Eliminarea grupelor repetitive, obţinând forma normală 1 (FN1);
- Separarea datelor cu dependenţă parţială dintr-o relaţie (la relaţii cu chei multiple), obţinând forma normală 2 (FN2);
- Separarea datelor independente de cheia principală, obţinând forma normală 3 (FN3).

Formele normale FN4 şi FN5 legate de chei multiple, precum şi forma normal Boyce-Codd se utilizează mai rar.

EXEMPLUL 1. EVIDENŢA SPECIALIŞTILOR: presupunem că prima cheie de identificare este codul specialistului.

- **Informaţii nenormalizate:**

<u>Cod specialist</u>

- Nume;
- Adresa;
- Grad;
- Categorie de salarizare;
- Tip maşină;
- Cod specialitate;
- Descriere specialitate;
- Calificare.

- **Forma normală 1 (FN1)**

Se elimină grupele repetitive

Nerepetitive:

<u>Cod specialist</u>

- Nume;
- Adresa;
- Grad;
- Categorie de salarizare;

- Tip maşină.

Cu repetiţie:

Cod specialist;

Cod specialitate;

- Descriere specialitate;
- Calificare.

La pasul următor se analizează dacă există dependenţe funcţionale în relaţia respectivă, care au identificator compus. Se analizează dacă există informaţii în relaţie care nu depind de cheia compusă ci doar de o parte a acestuia. Relaţiile cu cheie unică nu se supun acestei etape.

- **Forma normală 2 (FN2)**

<u>Cod specialist</u>

- Nume;
- Adresa;
- Grad;
- Categorie de salarizare;
- Tip maşină.

Cod specialist;

Cod specialitate;

- Calificare.

Cod specialitate

- Descriere specialitate (depinde doar de cod specialitate).

În continuare vom căuta dacă există dependenţe funcţionale independente de cheia principială în oricare din relaţii. Gradul defineşte categoria de salarizare.

- **Forma normală 3 (FN3**)

<u>Cod specialist</u>

- Nume;
- Adresa;
- Grad;
- Tip maşină.

<u>Cod specialist</u>

<u>Cod specialitate</u>

Calificare

<u>Cod specialitate</u>

- Descriere specialitate

Grad

- Categorie de salarizare

*- simbolul cheii externe.

Cu o suficientă aproximaţie putem considera că ultima formă (FN3) reprezintă forma normală, care asigură o redundanţă optimă şi o siguranţă garantată. Relaţiile ultimei forme pot constitui o bază pentru structurarea informaţiilor în registre, cartoteci sau fisiere în vederea exploatării optime a informaţiilor.

Se precizează că pentru gestiunea bazei de date este acceptată în general limbajul SQL implementat în mai toate motoarele de bază de date (MS ACCESS SQL, VISUAL FOXPRO, etc.).

În modelare trebuie să avem în vedere că un model bun trebuie să fie cât mai simplu; cât mai sigur; cu răspuns corect. Modelele provenite din sistemele practice (economice, tehnice, etc.) de obicei sunt consistente (fără contradicţii).

Concepem relaţiile teoretice a modelului, pe care apoi le transformăm în formă matematică, evidenţiind entităţi cantitative observabile, caracteristicile sistemului (economic, tehnic), concluziile, efectele de mediu exterior. Forma funcţiilor nu rezultă totdeauna din teorie.

3. TEORIA DECIZIEI [10], [19], [12]

Sprijinirea deciziilor de conducere, inteligenţa artificială

- **Sistemele de sprijin a deciziilor pot fi cu**: [15], [10]

Suport de date, cu metode de prelucrare a datelor, a seriilor de timp;

- ✓ Suport de documente, cu prelucrarea documentelor. (căutare de texte, imagini);
- ✓ Suport de cunoştiinţe, cu cunoştiinţele specifice problemei descrise;
- ✓ Suport de comunicaţii, cu posibilităţile tehnologiei de reţele de comunicaţii;
- ✓ Suport de tabele (de exemplu excel, visual bazic, etc);
- ✓ Suport web;
- ✓ Suport de modele, cu propunere de metode pentru pregătirea deciziilor:
  - subsistem de manipulare date;
  - subsistem de manipulare modele, alegem din baza de modele;
  - subsistem de comunicaţii, cu instrucţiuni de modificare, funcţionare, interogare.

3.1. Inteligenţă artificială [36]

La sisteme bazate pe cunoştiinţe, cunoaşterea este posibil de formalizat şi cu un mecanism deductiv poate fi utilizată la rezolvarea problemei. Un asemenea sistem este, de exemplu **sistemul expert** cu o costrucţie modulară de tipul:

- Interfaţă utilizator;
- Modul de acumulare înregistrare cunoştinţe formalizate;
- Baza de cunoştiinţe, cu cunoştinţele formalizate înregistrate;
- Maşina / mecanism de deducţie, efectuază deducţii logice utilizând baza de cunoştiinţe;
- Memoria de lucru cu înregistrarea rezultatelor intermediare;
- Capacitate de explicare, poate explica paşii deducţiilor anterioare;

Cele mai multe aplicaţii de sisteme expert au fost realizate în domenii specifice de succes cum ar fi:

✓Diagnosticare (medicală, tehnică, selecţii) -30% din aplicaţii;

✓Construcţii (proiectare, configurare, asociere) -30% din aplicaţii.

În domeniul economic cele mai frecvente sunt:

✓Diagnostizare;

✓Referinţe de specialitate;

✓Consultanţă;

✓Sisteme de comunicaţii.

La expuneri se va prezenta un sistem de diagnosticare economica folosind tehnici de toria grafelor.

3.1.1. Reţele neuronale

Sunt realizate pe baza analogiilor biologice. Modelează prelucrarea informaţiilor neuronilor creierului, transmiterea informaţiilor între neuroni cu mijloace matematice. Cea mai importantă proprietate a lor este capacitatea de învăţare, din exemple, serii de date.

În procesul de învăţare cu anumiţi algoritmi modifică unele elemente a reţelei neuronale, până când nu realizează rezultatul aşteptat cu precizia dorită. În acelaşi timp unii neuroni prelucrează informaţiile în mod paralel, distribuind cunoştinţele legate de rezolvare între neuroni. Reţeaua învaţă încet, preia exemplele (modelele) de mii de ori în cursul învăţării, îşi modifică continuu şi sistematic unele elemente ale sale.

Cele mai frecvente grupe de aplicaţii sunt cunoscute în domeniile:

- Analiză şi decizii, prognoză (ex. Capacitate de creditare a firmelor, categorisirea produselor după calitate;
- prognoza cursului acţiunilor, devizelor;
- optimizări, foarte bune calităţi de optimizare euristică, grad de utilizare maşini, problema comis-voiajorului, etc.

3.1.1.1. Noţiuni preliminare

Tehnicile de IA bazate pe reţele neuronale pleacă de la structura şi schema biologică a unui neuron al creierului. Un neuron biologic include:

- nucleul neuronului, deci corpul celular (corpul celulei);
- dendritele, date de intrările în celulă (receptorii celulei);
- axonul, dat de ieşirea din celulă (răspunsul neuronului);
- sinapsa, prin care axonul se leagă de o altă celulă (neuron). Grafic, schema biologică a unui neuron poate fi redată astfel:

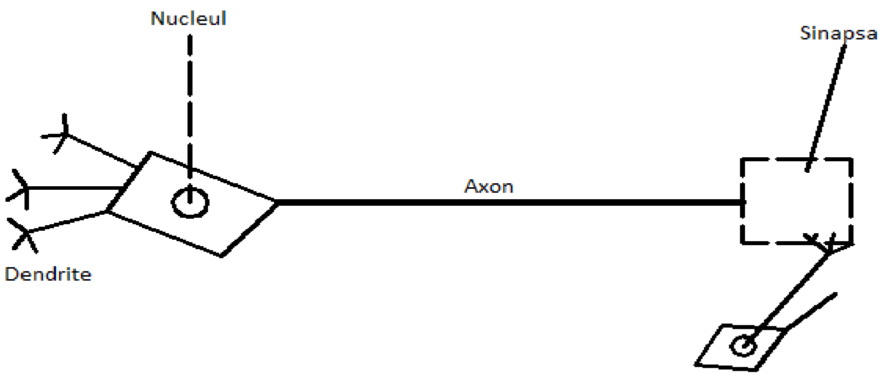

Figura 3.1 Schema biologică a unui neuron

Reţelele neuronale artificiale pleacă de la schema biologică a neuronului (conform figurii 3.1) şi este forrmată din mai multe noduri, ce conţine fiecare neuroni artificiali; interconectarea între noduri urmează diferite tipologii. Simplificat, structura şi funcţionarea *neuronului artificial* se prezintă astfel:

- intrările sunt comparabile cu impulsurile electrice primite de dendrite de la alţi neuroni;
- ieşirile sunt semnale transmise de nucleu prin intermediul axonului;
- se apelează la un tip de sinapsă pentru conexiunile între axon şi altă celulă.

Teoretic, neuronul artificial simulează comportamentul şi funcţionarea neuronului biologic; totuşi, primul se comportă relativ rigid şi "învaţă destul de greu" pe baza unor algoritmi retroactivi (din experienţă).

În termeni generali, *reţeaua neuronală artificială* este un sistem dinamic şi adaptiv, alcătuit din mai mulţi neuroni grupaţi pe nivele. Schematic, structura unui *neuron artificial*, care este prezentată în figura 3.2 – care este elementul esenţial al unei reţele neuronale artificiale - se prezintă astfel:

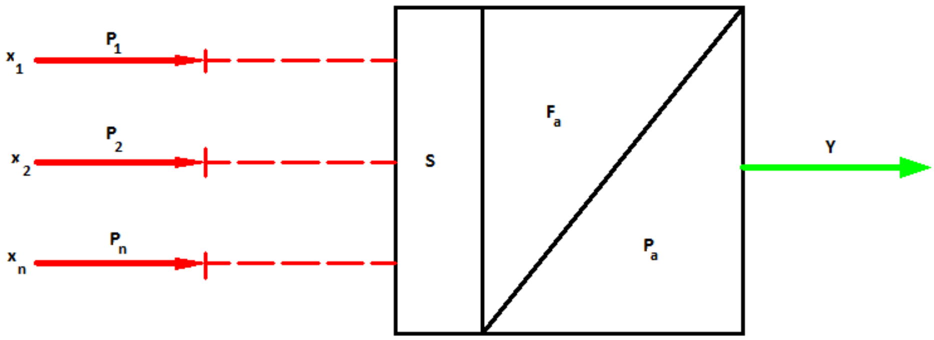

Figura 3.2 Structura unui neuron artificial

unde:

- X_i = intrările;
- P_i = ponderile asociate intrărilor;
- S = suma ponderată a intrărilor;
- F_a = funcţia de activare;
- P_a = pragul de activare;
- Y = ieşirea/răspunsul neuronului.

În fine, mai subliniem că există mai multe tipuri de reţele neuronale artificiale, după configuraţie, complexitate, etc.

Între astfel de tipuri de reţele, probabil că cel mai des folosite şi complexe sunt reţelele neuronale artificiale cu straturi ascunse (şi straturi multiple). Este de remarcat, totodată, că această tehnică de programare (cât şi utilizarea ei în proiectarea calculatoarelor din generaţia a cincea) are un loc aparte în cadrul strategiei Japoniei de a prelua controlul în domeniul soft la nivel mondial.

3.1.1.2. Retropropagarea erorii; reţele cu strat ascuns

În cazul unei reţele neuronale artificiale, celula elementară de învăţare se numeşte *perceptron.* În funcţionarea acestei celule este foarte dificilă problema de separabilitate liniară.

Dezavantajul utilizării perceptronului rezidă în faptul că nu poate rezolva probleme de clasificare neliniară. S-au conceput mai multe maniere de a rezolva această problemă. O primă manieră constă în a recoda intrarea perceptronului astfel încât să corespundă unei distorsiuni neliniare a spaţiului. O altă tehnică este aceea a apelării la generalizarea descompunerii în valori proprii şi în valori singulare. Dar nici una nu se compară cu succesul reţelelor cu strat ascuns multiperceptron cu retropropagare a erorii care constituie o parte importantă a aplicaţiilor cu reţele neuronale.

O *reţea cu retropropagarea erorii* poate fi văzută ca o generalizare a perceptronului.

Reţeaua este compusă dintr-un prim strat de celule de intrare (echivalent cu retina perceptronului), unul sau mai multe straturi de celule intermediare legate cu straturile precedente prin conexiuni modificabile prin învăţare şi un strat de ieşire care este singur în contact cu exteriorul. Pentru a da un răspuns la un stimul prezent la intrare (la stratul de intrare) reţeaua propagă la început (într-un prim timp) semnalul de la stratul de intrare la primul strat ascuns (prin conexiuni). Celulele stratului ascuns vor fi activate în funcţie de semnalul primit. Apoi ele îşi transformă activarea în răspuns. Răspunsul celulelor ultimului strat ascuns constituie la rândul său semnalul de intrare pentru celulele stratului de ieşire.

Acest semnal este transmis printr-un ansamblu secundar de conexiuni. Celulele din stratul de ieşire calculează ulterior activitatea lor în funcţie de semnalul primit de la stratul ascuns.

Apoi, celula stratului de ieşire transformă activitatea lor în răspuns care constituie răspunsul reţelei neuronale la stimulul prezent la intrare. Pentru a învăţa asocierea ansamblului de stimuli de intrare cu ansamblul de răspunsuri, reţeaua poate modifica intensitatea conexiunilor ce leagă celulele stratului de intrare cu cele ale stratului ascuns şi ale stratului ascuns cu cele ale stratului de ieşire.

Ca şi perceptronul, reţeaua cu retropropagare a erorii utilizează o învăţare supervizată.

Pentru învăţare, reţeaua trebuie să cunoască răspunsul bun pentru a putea calcula semnalul de eroare. Semnalul de eroare permite corectarea intensităţii conexiunilor. Ideea de bază este simplă. Reţeaua învaţă încercând să-şi dimensioneze eroarea la fiecare iteraţie. Se face o schimbare în intensitatea conexiunilor în sens invers sensului erorii de la stratul de ieşire spre stratul de intrare. Este suficientă aplicarea aceleiaşi proceduri la celelalte straturi ascunse şi întoarcerea este efectuată.

Problema este de a găsi o modalitate de a transmite semnalul de eroare celorlalte straturi ascunse. Pentru a face aceasta, se calculează mai întâi semnalul de eroare. Fiecare celulă din stratul de ieşire îşi calculează semnalul său de eroare. Apoi se consideră că celulele din stratul ascuns sunt responsabile de propriile erori în măsura în care ele pot să le comită.

De exemplu, pentru o celulă din stratul de ieşire, care trebuie să răspundă cu valoarea 1, dar răspunde cu valoarea Ø, eroarea constă în a nu acorda prea multă atenţie celulelor din stratul ascuns care le indică să fie active sau de a acorda prea multă atenţie celulelor din stratul care le indică să fie inactive. Soluţia este simplă, respectiv este suficient a amplifica anexiunile pozitive legate de celulele active ale stratului ascuns şi a diminua intensitatea conexiunilor negative provenind de la celulele active ale stratului ascuns. Pentru celulele stratului ascuns semnalul de eroare nu poate fi calculat direct. Trebuie să fie evaluat în funcţie de eroarea celulelor din stratul de ieşire.

Fiecare celulă din stratul ascuns consideră că eroarea sa se poate estima prin intermediul erorilor care au fost comise de celelalte celule ale stratului ascuns. Importanţa erorii depinde de intensitatea conexiunii între celula ascunsă şi celulele de ieşire şi se consideră că celula din stratul de ieşire a fost activată pe nedrept; aceasta corespunde unei erori mai mari decât dacă ar fi fost activată de o conexiune la intensitate mică. În calcul, eroarea trebuie ponderată cu intensitatea conexiunii ce leagă celula din stratul ascuns cu stratul de ieşire (o eroare mai mare trebuie să influenţeze mai mult decât una mai mică). Altfel spus, semnalul de eroare este multiplicat prin intensitatea conexiunii apoi este transmis celui din stratul ascuns. Cum aceasta se poate descrie reutilizând aceleaşi conexiuni, dar în sens invers, se utilizează termenul de *retropropagare a erorii.* Aceasta dă esenţa ideii de algoritm de retropropagare.

În continuare se impune stabilirea notaţiei, apoi se demonstrează că tehnica retropropagării corespunde tehnicii de optimizare neliniară a gradientului, iar în final se discută avantajele şi problemele retropropagării.

Algoritmul retropropagării a fost pus în evidenţă de numeroşi autori a căror competenţă viza analiza numerică (Bryson & HO, 1969) şi statistică (Werbson, 1974); totuşi, grupul lui McClelland & Rumelhart a susţinut cel mai activ tehnica retropropagării. O reţea cu strat ascuns este prezentată în figura 3.3:

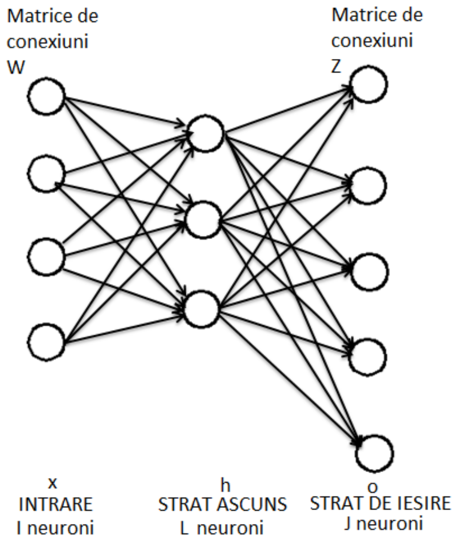

Figura 3.3 Reţeaua cu strat ascuns

Arhitectura unei reţele neuronale cu un strat ascuns *include* (vezi figura de mai sus):

- STRATUL DE INTRARE - este format din I celule (neuroni);
- STRATUL ASCUNS - este format din L celule (neuroni);
- STRATUL DE IEŞIRE - este format din J celule (neuroni).

Valoarea conexiunilor $\omega_{1,I}$, dintre celulele stratului de intrare şi cele ale stratului ascuns formează matricea W cu dimensiunea L*I. Valoarea conexiunilor $zj_{,l}$ dintre celulele stratului ascuns şi celulele de ieşire formează matricea Z cu dimensiunea J*L; totodată, avem:

- x = stimul de intrare;
- h = răspunsul stratului ascuns la acest stimul;
- = răspunsul stratului de ieşire;
- t = răspunsul teoretic (cel dorit de la matrice).

Pentru a utiliza tehnica retropropagării erorii, reţeaua trebuie să posede cel puţin un strat ascuns. În plus, funcţia care transformă activarea în răspuns trebuie să fie neliniară.

O reţea cu retropropagare este formată de regulă (tipic) din trei tipuri de straturi de celule:

- un strat de intrare;
- unul sau mai multe straturi ascunse;
- un strat de ieşire.

In analiza care urmează se consideră că reţeaua are un singur strat ascuns, dar aceasta nu este o limitare. Algoritmul se generalizează (în teorie) iară dificultate în cazul arhitecturii cu mai multe straturi. Este suficientă o înlocuire în ceea ce urmează termenul “stratul de ieşire” prin termenul “stratul următor”. Teoretic, se pot construi reţele cu un număr mare de straturi ascunse; în practică este rar nevoie de mai mult de trei straturi (şi două sunt suficiente). Argumentele sunt multe. După cum se va vedea, algoritmul poate fi extrem de lent, timpul de convergenţă devine repede prohibitiv, chiar cu cele mai bune maşini. Un alt argument apare din precizia maşinii. Deoarece retropropagarea este o tehnică numerică, trebuie efectuat un număr mare de transferuri de date, între diferite straturi, apărând un risc de creştere a erorii sistemului (prin rotunjire). Al treilea argument este mai mult teoretic şi răspunde teoremei lui Kolmogorov (1957) şi Hecht-Nielsen (1990) care indică faptul că este posibilă implementarea tuturor bijecţiilor cu două straturi ascunse dacă ele au suficiente elemente.

Într-o manieră mai tehnică, fie o reţea de neuroni cu un strat de intrare, un strat ascuns şi un strat de ieşire. Se notează:

- x_k = vector de I elemente reprezentând al k-lea stimul (stratul de intrare are I celule). Matricea I^*K (K numărul de stimuli de intrare) se notează X;
- h_k = un vector de L elemente, reprezentând răspunsul celor L celule din stratul ascuns când la intrare este prezent stimulul K (stratul ascuns are L celule);
- o_k = un vector de J elemente reprezentând răspunsul celulelor din stratul de ieşire pentru al K-lea stimul (stratul de ieşire are J celule);
- t_k = un vector de J elemente reprezentând răspunsul teoretic (dorit) al celulelor din stratul de ieşire pentru cel de al k-lea stimul. Matricea de răspunsuri teoretice o notăm cu t şi are dimensiunea J*K;
- W = matricea de ordin L*I a valorilor conexiunilor ce leagă celulele stratului de intrare de celulele stratului ascuns; $\omega_{1,l}$ dă valoarea conexiunii dintre celula i de intrare şi celula 1 a stratului ascuns;
- Z = matrice de ordin J*L a valorilor conexiunilor ce leagă celulele stratului ascuns cu celulele stratului de ieşire; $z_{j,l}$ dă valoarea conexiunii dintre celula 1 a stratului ascuns şi celula j a stratului de ieşire.

Pentru a utiliza tehnica retropropagării, răspunsul celulelor trebuie să fie o funcţie neliniară a stării de acţiune a celulei. Notând cu a_n - starea de activare a celulei *n* (care poate fi o celulă a stratului ascuns sau a stratului de ieşire) răspunsul celulei (notat cu o_n) va fi:

$$o_n = f(a_n) \qquad (3.1)$$

f - se numeşte funcţie de transfer.

Există mai multe funcţii de transfer satisfăcătoare. Cea mai cunoscută este *funcţia logistică.*

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(3.2)

aceasta întrucât calcularea derivatei sale este relativ simplă:

$$f'(x) = f(x)[1-f(x)] \qquad (3.3)$$

Funcţia tangentei hiperbolice este de asemenea deseori utilizată atunci când domeniul răspunsului este în intervalul [-1,1], conform figurii 3.5. Ea se calculează astfel:

$$\tan h\,(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

(3.4)

Derivata sa este de asemenea simplu de calculat:

$$\frac{\mathrm{d}\tan\mathrm{h}\ (\mathrm{x})}{\mathrm{dx}} = [sec\ h(x)]^2 = \frac{4}{(e^{x}-e^{-x})^2}$$

(3.5)

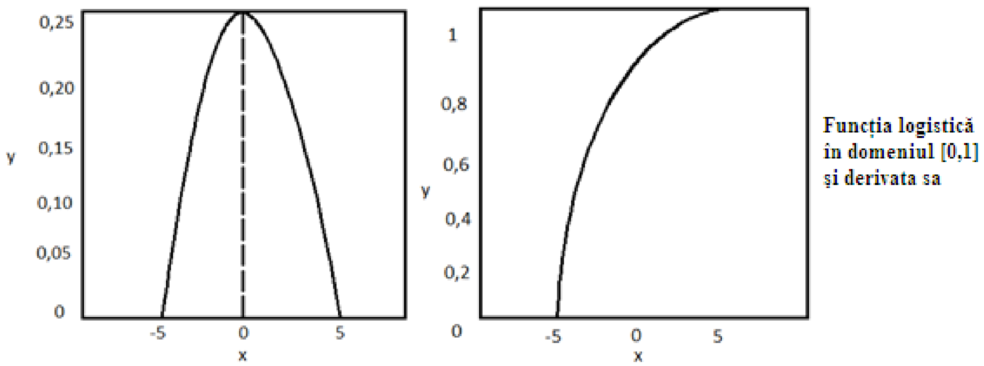

Figura 3.4. Funcţia logistică în domeniul [0,1] şi derivata sa

După cum se poate vedea, pe ansamblul lor, funcţiile lor (şi a derivatelor) se aseamănă foarte mult. În ilustrarea noastră vom utiliza funcţia logistică (figura 3.4) şi simplificarea adusă în formulă de derivata sa. Pentru a evita confuziile se păstrează etapa de calcul al derivatei.

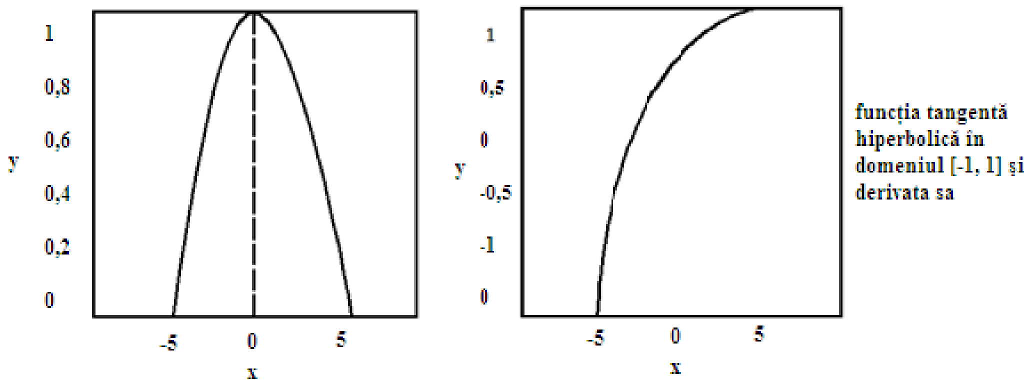

Figura 3.5. Funcţia tangentă hiperbolică în domeniul [-1,1] şi derivata sa

Algoritmul retropropagării erorii este destul de simplu în principiu, dar lung în explicarea detaliată. Aici, încă o dată, notarea matriceală permite exprimarea operaţiilor succesiunii cu o anumită uşurinţă şi o incontestabilă simplificare prin beneficiul notaţilor cu semnul ∑ sau Π. Pentru a răspunde la un stimul, semnalul este propagat de la stratul de intrare spre stratul de ieşire trecând prin stratul ascuns. Celulele stratului de intrare îşi calculează activarea lor şi o transmit stratului ascuns, utilizând funcţia de transfer. Celulele din stratul ascuns calculează activitatea lor şi o transformă în răspuns utilizând funcţia de transfer (funcţia logistică transformă activitatea în răspuns). Apoi ele transmit răspunsul lor celulelor din stratul de ieşire, care la rândul lor calculează activitatea lor şi o transformă în răspuns cu funcţia de transfer (funcţia logistică). Altfel spus, când al K-lea stimul este prezent în intrare, vectorul răspunsului celulelor din stratul ascuns h_k este dat de relaţia 3.6:

$$h_k = f\,(W_{xk}) \tag{3.6}$$

Cu f s-a notat funcţia de transfer a celulelor din stratul ascuns (funcţia logistică sau tangentă hiperbolică, sau orice altă funcţie derivabilă). Răspunsul celulelor din stratul de ieşire este dat prin:

$$O_t = f(z_{hk}) \tag{3.7}$$

Cu f s-a notat funcţia de transfer a celulelor din stratul de ieşire. Pentru simplificarea notaţiilor se admite că celulele stratului ascuns şi cele ale stratului de ieşire utilizează aceeaşi funcţie de transfer. Aceasta nu este o condiţie necesară, dar uşurează analiza. Este suficient ca mai apoi să adaptăm notarea după context, pentru a lua în calcul cazul unor funcţii de transfer diferite pentru diferite straturi de celule.

Retropropagarea erorii reprezintă o generalizare a memoriilor *hetero-asociative.* Problema (generală) este, deci, de a asocia unei mulţimi de K stimuli o mulţime de K răspunsuri. Comportamentul reţelei depinde de matricele de conexiuni W şi Z. Dacă reţeaua nu dă răspunsul aşteptat, putem modifica matricele de conexiuni pentru ameliorarea performanţelor reţelei.

Tehnica retropropagării este o tehnică de învăţare supervizată (pentru învăţare, reţeaua va trebui să cunoască răspunsul pe care l-ar fi avut de dat). Se modifică intensitatea conexiunilor pentru a micşora intensitatea erorilor comise de către celulă pentru răspunsul considerat. Procedura de a lua în calcul eroarea este aceeaşi pentru toate straturile, dar estimarea semnalului de eroare diferă după straturi. Pentru celulele stratului de ieşire, eroarea este evaluată prin compararea răspunsului dat de celulă cu răspunsul dorit (teoretic). Vectorul de eroare pentru al k-lea stimul va fi deci:

$$e_k=(t_k-o_k) \tag{3.8}$$

Semnalul de eroare ţine cont de eroarea comisă de către celulă şi starea de activarea a celulei. Pentru stratul de ieşire el este definit ca:

$$\delta_{ieşire,k} = f'(Zh_k) \otimes (c_k) = o_k \otimes (1 - o_k) \otimes (t_k - o_k) \tag{3.9}$$

Cu $\otimes$ am indicat produsul termen cu termen al vectorilor (produsul Hadamar) şi cu 1, un vector unitate. Procedura de învăţare generalizează procedura deja văzută în cazul liniar. Matricea de conexiuni Z este corectată prin iteraţii. La data t+1, Z devine:

$$Z_{[t+1]} = Z_{[t]} + \eta \delta_{ieşire,k} h_k^T = Z_{[t]} + \Delta t Z \tag{3.10}$$

(k - fiind ales aleatoriu şi η un număr real pozitiv conform regulii Widrow-Hoff pentru perceptron şi pentru memorii asociative liniare).

Pentru celulele stratului ascuns, semnalul de eroare nu poate fi evaluat prin comparaţie cu o valoare ideală. El este estimat ca o funcţie a unui semnal de eroare provenind de la stratul de ieşire şi de la activarea stratului ascuns. Mai precis, vectorul ce dă semnalul de eroare pentru celulele din stratul ascuns se obţine ca:

$$\delta_{ascuns,k} = f'(W_{x_k}) \otimes (Z_{[t]}^T \delta_{ieşire,k}) = h_k \otimes (1 - h_k) \otimes (Z_{[t]}^T \delta_{ieşire,k}) \quad (3.11)$$

După cum se vede, semnalul de eroare se obţine propagând eroarea de la stratul de ieşire la stratul ascuns (prin operaţia Z^T din $\delta_{ieşire,k}$) ce corespunde cu sensul invers de propagare a semnalului atunci când sistemul dă un răspuns la o stimulare.

Învăţarea pentru stratul ascuns se derulează în continuare de o manieră similară celei a stratului de ieşire. Matricea de conexiuni W este corectată prin iteraţii. La etapa t+1, W devine:

$$W_{[t+1]} = W_{[t]} + \eta \delta_{ascuns,k} X_k^T = W_{[t]} + \Delta t W \quad (3.12)$$

Această procedură minimalizează pătratul erorilor fiecărei etape (atunci când η este convenabil ales). Ea converge spre un minim local (care poate fi de asemenea un minim global, bineînţeles) se demonstrează că retropropagarea erorii corespunde la procedura clasică în optimizări, de căutare a minimului unei funcţii prin tehnica gradientului). Forma cea mai generală a algoritmului este:

Retropropagare

- iniţierea pointerelor reţelelor cu valori mici aleatoare;

do

{

for (fiecare pereche de antrenament)

- prezentarea vectorului de intrare din perechea de antrenament curentă la intrarea reţelei şi propagarea fluxului de activare nivel cu nivel până la nivelul de ieşire (pasul *forward);*
- calculul erorii pe baza ieşirii obţinute şi a celei dorite şi propagarea ei înapoi nivel cu nivel, până la intrare ajustându-se ponderile astfel încât eroarea să scadă (pasul *backward)*

}

} **while** (eroarea se află peste pragul minim).

Exemplu:

Pentru a ilustra principiul retropropagării erorii (figura 3.6) vom lua un exemplu simplu. O reţea cu un strat de intrare (formată din trei neuroni), un strat ascuns (format din doi neuroni) şi un strat de ieşire (format din trei neuroni), astfel:

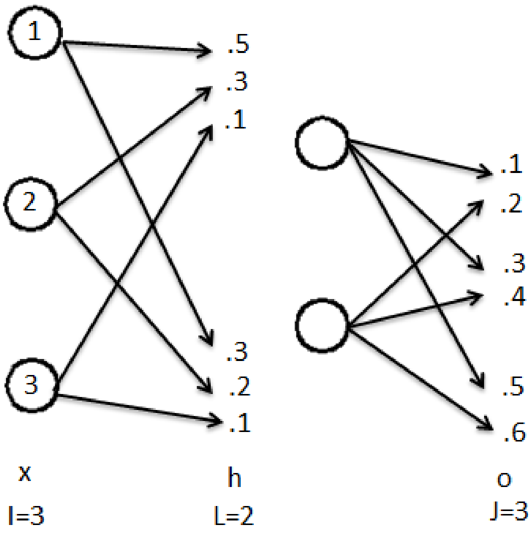

Figura 3.6. Principiul retropropagării erorii

Această reţea trebuie să înveţe să asocieze unui stimul la intrare x = [.1.2.3] un răspuns t = [1.3.7], Matricea conexiunilor dintre celulele de intrare şi celulele stratului ascuns W este de ordin LxI = 2x3

$$W = \begin{bmatrix} .5 & .3 & .1 \\ .3 & .2 & .1 \end{bmatrix}. \qquad (3.13)$$

Matricea conexiunilor dintre celulele stratului ascuns şi cele ale stratului de ieşire Z este de ordin J*L=3*2

$$W = \begin{bmatrix} .1 & .2 \\ .3 & .4 \\ .5 & .6 \end{bmatrix}. \qquad (3.14)$$

Reţeaua trebuie să înveţe să asocieze unui stimul $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. un răspuns

$$t = \begin{bmatrix} .1 \\ .3 \\ .7 \end{bmatrix}. \qquad (3.15)$$

Pentru început, vom transmite informaţia în sens normal. Vom începe prin a calcula activarea celulelor stratului ascuns (notată cu b):

$$b = W_x \tag{3.16}$$

unde:
b - activarea celulelor din stratul ascuns;
W - matricea de conexiuni dintre celulele stratului de intrare şi cele ale stratului ascuns;
x - stimul la intrare.

$$b = \begin{bmatrix} .5 & .3 & .1 \\ .3 & .2 & .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5*1+.3*2+.1*3 \\ .3*1+.2*2+.1*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\left(C_{ik} = \sum a_{ij} * b_{jk}\right)$$

(3.17)

Această activare (a celulelor stratului ascuns) este transformată în răspuns utilizând funcţia logistică

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(3.18)

unde, notând cu h răspunsul celulelor din stratul ascuns, avem:
h = f(b); b - starea de activare (a celulelor din stratul ascuns)

$$h = \begin{bmatrix} .8022 \\ .7311 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f(1.4) = 0.802183 \\ f(1.0) = 0.7310586 \end{pmatrix}.$$

Răspunsul celulelor stratului ascuns reprezintă intrare (stimuli) pentru celulele stratului de ieşire. Putem să calculăm activarea celulelor din stratul de ieşire (notat cu a).

a = Zh

Z - matricea de conexiuni dintre celulele stratului ascuns şi cele ale stratului de ieşire;
h - stimulul de intrare (răspunsul stratului ascuns)

$$a = \begin{bmatrix} .1 & .2 \\ .3 & .4 \\ .5 & .6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} .8022 \\ .7311 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1*.8022+.2*.7311 \\ .3*.8022+.4*.7311 \\ .5*.8022+.6*.7311 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2264 \\ 0.5331 \\ 0.8397 \end{bmatrix}$$

Aplicând funcţia logistică

(3.19)

obţinem răspunsul stratului de ieşire:

$$O = f(a) = \begin{bmatrix} 0.5564 \\ 0.6302 \\ 0.6984 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f(0.2264) = 0.5564 \\ f(0.5331) = 0.6302 \\ f(0.5331) = 0.684 \end{pmatrix}. \qquad (3.20)$$

În acest moment am obţinut răspunsul la stimulul de intrare; în continuare, poate începe etapa de învăţare. Vom calcula vectorul de eroare al stratului de ieşire (prin compararea răspunsului obţinut cu cel aşteptat teoretic):

$$C = t - 0 = \begin{bmatrix} .1 \\ .3 \\ .7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .5564 \\ .6302 \\ .6984 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4564 \\ -0.3302 \\ 0.0016 \end{bmatrix}. \qquad (3.21)$$

Pentru a calcula semnalul de eroare la ieşire $\delta_{ieşire}$ - vom calcula mai întâi derivata semnalului de ieşire:

$$f'(a)=f(a)[l-f(a)] \quad f(a) = 0 \qquad (3.22)$$

$$f'(a) = O \otimes [1 - 0] = \begin{bmatrix} 0.5564 \\ 0.6302 \\ 0.6584 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} .4436 \\ .3698 \\ .3016 \end{bmatrix}$$

unde avem:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} 0.2468 \\ 0.2330 \\ 0.2106 \end{bmatrix}$$

$\otimes$ produs termen cu termen ($C_{ij} = a_{ij} \times b_{ij}$). În continuare se evaluează semnalul de eroare:

$$\delta_{ieşire} = f'(a) \otimes c = 0 \otimes [1 - 0] \otimes [t - 0]$$

(3.23)

$$\delta_{ieşire} = \begin{bmatrix} .2468 \\ .2330 \\ .2106 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -0.4564 \\ -0.3302 \\ 0.0016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1126 \\ -0.0770 \\ 0.0003 \end{bmatrix}$$

Acest semnal de eroare este transmis celulelor stratului ascuns utilizând în sens invers legăturile. Pentru aceasta trebuie să calculăm o matrice R (pentru întoarcere retur) în care fiecare termen $r_{j,l}$ este obţinut prin multiplicarea semnalului de eroare al celulei de ieşire j cu intensitatea conexiunii dintre celula de ieşire j şi celula 1 stratului ascuns.

$$r_{j,l} = \delta_j^{ieşire} X Z_{i,j} \tag{3.24}$$

care, în notaţie matriceală, devine:

$$R = \begin{bmatrix} .1 & .2 \\ .3 & .4 \\ .5 & .6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -.1126 & -.1126 \\ -.0770 & -.0770 \\ .0003 & .0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0113 & -0.0225 \\ -0.0231 & -0.0225 \\ 0.0002 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

O dată propagată eroarea spre stratul ascuns, celulele stratului de ieşire pot corecta sinapsele lor. Se calculează ΔZ şi se corectează Z care devine $Z_{[t+1]}$ (cu η = 1 pentru simplificare):

$$Z_{[t+1]} = Z + \Delta Z = Z + \eta \delta_{ieşire} h^T \tag{3.25}$$

$$Z_{[t+1]} = \begin{bmatrix} .1 & .2 \\ .3 & .4 \\ .5 & .6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -.1126 \\ -0.0770 \\ 0.0003 \end{bmatrix} [.8022 \quad .7311] = \begin{bmatrix} .1 & .2 \\ .3 & .4 \\ .5 & .6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -.0904 & -.0823 \\ -.0617 & -.0563 \\ .0003 & .0002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .0096 & .1177 \\ .2383 & .3437 \\ .5003 & .6002 \end{bmatrix}$$

Notăm cu f eroarea estimată pentru celulele stratului ascuns. Fiecare coloană a matricei R dă eroarea estimată pentru fiecare celulă a stratului ascuns:

$$f = R^T 1 = Z^T \delta_{ieşire} = \begin{bmatrix} -0.0342 \\ -0.0531 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Semnalul de eroare pentru celulele stratului ascuns se calculează la fel ca pentru celulele stratului de ieşire:

$$\delta_{ascuns,k} = f'(b) \otimes f = h \otimes (1 \otimes h) \otimes (Z^T \delta_{ieşire}) = \begin{bmatrix} -0.0054 \\ -0.0104 \end{bmatrix}$$

(3.27)

Acum, se poate corecta matricea W, obţinând matricea W_{t+1}:

$$W_{[t+1]} = W + \Delta W = W + \eta \delta_{ascuns} X^T$$

(3.28)

$$W_{[t+1]} = \begin{bmatrix} .4946 & .2892 & .0837 \\ .2896 & .1791 & .0687 \end{bmatrix}$$

După cum vom vedea în paragraful ce urmează, aplicarea reţelelor neuronale pe problema estimării globale a riscului de faliment (simultan cu predicţia GAF) nu se îndepărtează semnificativ de principiul de lucru expus în exemplul ilustrat anterior. Astfel, reţeaua proiectată învaţă - într-o primă etapă - pe baza unor date reale x_1, x_2 ..., x_n ca stimuli de intrare (datele sunt asociate pentru două eşantioane de firme: un grup de firme care au ajuns la faliment şi un grup de firme ce au rămas în afaceri şi au prosperat). într-o a doua etapă, după mai multe mii de cicluri de învăţare, reţeaua devine capabilă a evalua situaţia unei firme oarecare, A, B sau C la momentul t, generând un scor drept răspuns (pe baza la care se face predicţia CAF).

3.1.1.3. Aplicarea reţelelor neuronale pe problema microciclicităţii în afaceri şi estimării riscului de faliment

Concentrarea atenţiei specialiştilor în economie asupra estimării riscului de faliment al firmei s-a soldat până în prezent cu unele rezultate favorabile (Modelul Z, Modelul A etc.), dar *în esenţă problema nu a fost soluţionată.* Suntem de părere că ar fi posibilă aflarea unei soluţii globale la această problemă - sau cel puţin facilitarea acestui demers - dacă s-ar concentra eforturile de analiză pe *un drum paralel,* respectiv în direcţia studierii CAF. Analiza în acest sens implică dezvoltarea unui număr suficient de "modele" şi *baze de date asociate*:

- ✓ pe principalele sectoare ale economiei naţionale;
- ✓ după dimensiunea firmelor;
- ✓ eventual, după alte criterii.

În prealabil dezvoltării unor modele de acest fel pe sectoare economice şi după dimensiunea firmei, se subînţelege că sarcina cea mai complexă rezidă în proiectarea unui model general - bazat sau nu pe tehnici de inteligenţă artificială - model ce ulterior va constitui cadrul de referinţă şi adaptare. Atâta timp cât organizarea sistemului informaţional- contabil diferă de la o ţară la alta, este recomandabil ca proiectarea unor modele generale de analiză a falimentului să fie limitate la un anume sistem economic naţional. Oricum, astfel de modele pot avea drept scop estimarea şi predicţia *simultană* atât a ciclului de afaceri al firmei cât şi a riscului de faliment asociat.

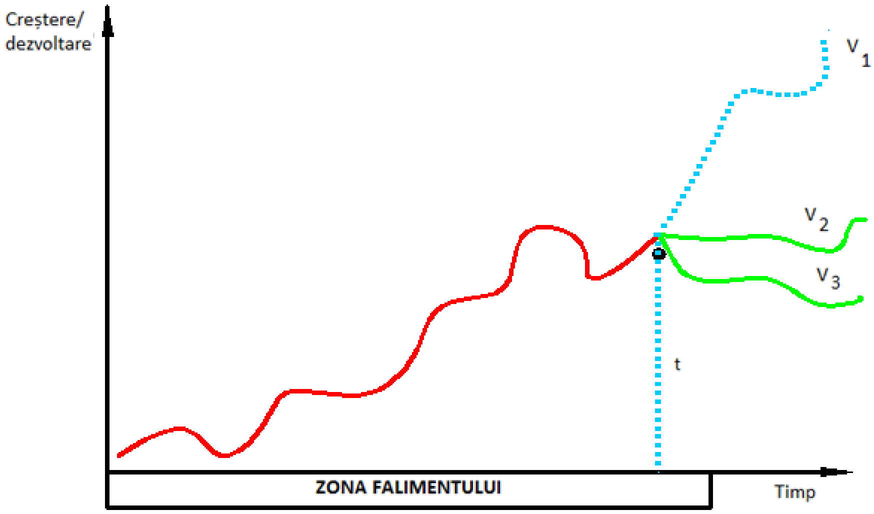

Figura 3.7 Analiza şi predicţia CAF

După cum spuneam anterior, *în toate cazurile în care predicţia CAF este posibilă se estimează implicit riscul de faliment asociat acelei firme.* Reciproca afirmaţiei este în bună măsură adevărată, respectiv *estimarea riscului de faliment al firmei dintr-o perspectivă globală presupune implicit şi trasarea unui anumit CAF*. Prin conexarea celor două probleme invocate, suntem de părere că se ajunge la o soluţie comună mult mai bine fundamentată şi care va exprima mai fidel situaţia firmelor din economia reală. Mai mult, predicţia CAF sprijină direct decidentul în a-şi controla evoluţia în afaceri, a-şi constitui rezerve şi a rămâne într-o zonă de "siguranţă" faţă de faliment. încercarea de predicţie a CAF trebuie să se bazeze pe istoricul firmei (datele statistice) ce caracterizează evoluţia ei în afaceri până la momentul respectiv; ulterior, proiectarea CAF poate urma mai multe variante, inclusiv prin reţele neuronale pentru analiza falimentului. Din schema grafică prezentată în figura 3.7. - ca situaţie posibilă la care se ajunge pe parcursul analizei CAF - rezultă următoarele:

- pe baza datelor strict statistice ce caracterizează evoluţia firmei până la momentul t, decidentul ar avea trei opţiuni posibile de proiecţie a CAF, adică variantele V_1, V_2, V_3;
- dacă, spre exemplu, analiza este făcută de un reprezentant al sistemului bancar atunci pare probabil ca el să selecteze varianta V_1;
- atunci când analiza este făcută de decidentul superior al firmei, acesta trebuie să-şi completeze analiza prin raportarea celor trei variante V_1, V_2, V_3 faţă

de evoluţia CAM (punerea faţă în faţă a CAF/CAM).

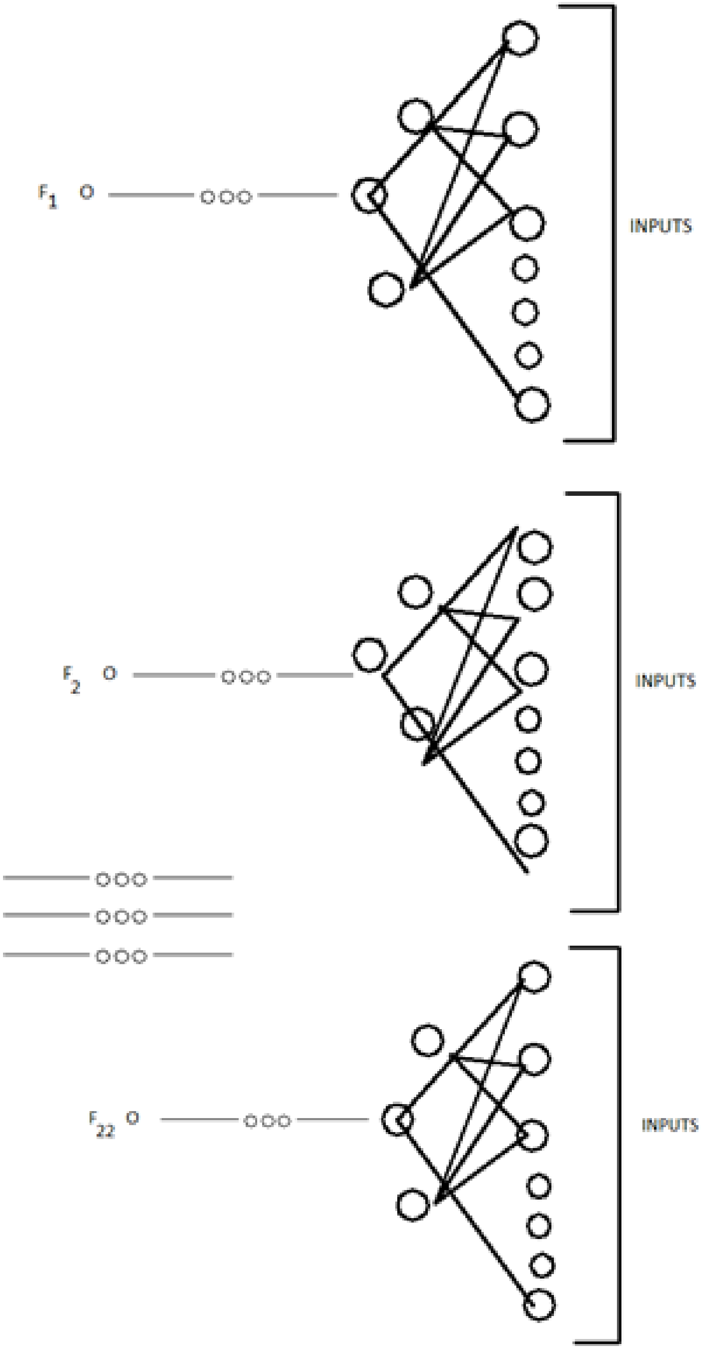

Figura 3.8 Descompunerea/derivarea factorilor

Pe de altă parte, dezvoltarea unui model de analiză globală a falimentului şi de predicţie a CAF credem că poate avea loc îndeosebi pe baza tehnicilor de inteligenţă artificială. Opinăm că un model de acest tip - pentru analiza globală a falimentului în paralel cu studierea şi predicţia CAF - trebuie să includă **două părţi:**

- **Partea I** - formularea unui diagnostic pe baza unor indicatori financiari la momentul *t* (se poate apela la modelul Z, modelul Varetto/Marco etc.);
- **Partea a II-a** - completarea diagnosticului pe baza evaluării influenţei factorilor F_1- F_{22} la momentul *t.*

Prin structurarea modelului invocat în două părţi distincte avem în vedere separarea clară a influenţei factorilor F_1- F_{22} într-o “secvenţă” ce poate fi cuantificată precis pe baza indicatorilor contabili reţinuţi - care se include în partea I - şi o “secvenţă” ce poate fi evaluată mai puţin precis - aceasta urmând a fi inclusă în partea a II-a- şi pentru care se vor concepe ulterior anumite metode de măsurare. Avantajul dezvoltării unui model de analiză globală a falimentului şi predicţie a CAF rezidă în includerea influenţelor unor factori non-cuantificabili şi care nu se regăsesc în Modelul Z sau altele similare; totodată, modelul devine şi un instrument deosebit de util în asistarea decidentului în activitatea de administrare curentă a afacerilor.

Teoretic, cele două părţi ale modelului pot să deţină sau nu ponderi egale în structura concluziei finale, în funcţie de numărul indicatorilor contabili reţinuţi în prima parte ce reflectă influenţe cuantificabile precis.

Pentru agregarea ambelor părţi ale modelului, un ajutor incontestabil oferă tehnicile de IA şi calculatoarele performante. Considerăm că pentru problema la care ne referim cel mai oportun este a se recurge la reţele neuronale, astfel;

- **Partea I-a** a modelului urmează să fie structurată în funcţie de tipul şi numărul indicatorilor contabili reţinuţi pentru analiză. Structurarea cunoştinţelor în cadrul “bazei de date” este relativ flexibilă şi poate fi concepută în funcţie de datele relevante de care dispune expertul uman.
- **în partea a II-a** a modelului, factorii F_1, F_2, ...F_{22} se vor “descompune” pe patru sau cinci nivele - cu luarea în considerare a interdependenţelor dintre ei - pentru a forma o nouă bază de date. Schematic, se va reprezenta descompunerea/derivarea factorilor, conform figurii 3.8.
- Informaţiile pe baza cărora se descrie fiecare factor F_1, F_2, F_{22}, în forma derivata/descompusă devin *inputs* pentru baza de date/cunoştinţe devin x_1, x_2, ..., x_n ca stimulii de intrare în reţea. Este important de subliniat că baza de date/cunoştinţe poate fi permanent îmbogăţită prin transferul unor date din baza de cunoştinţe externe de care dispune expertul uman. în fapt, trebuie să discutăm despre două *reţele neuronale globale,* fiecare compusă din mai multe subreţele neuronale astfel:

- reţea neuronală globală (pentru partea I a modelului) şi care va procesa, prin intermediul unor subreţele, datele relevante oferite de indicatorii contabili reţinuţi;
- a doua reţea neuronală globală (partea a II -a a modelului), aceasta urmând a procesa, prin intermediul unor subreţele, *inputs* aferente factorilor F_1, F_2, ..., F_{22}.

Structurarea grafică a modelului (figura 3.9) se poate face după schema următoare:

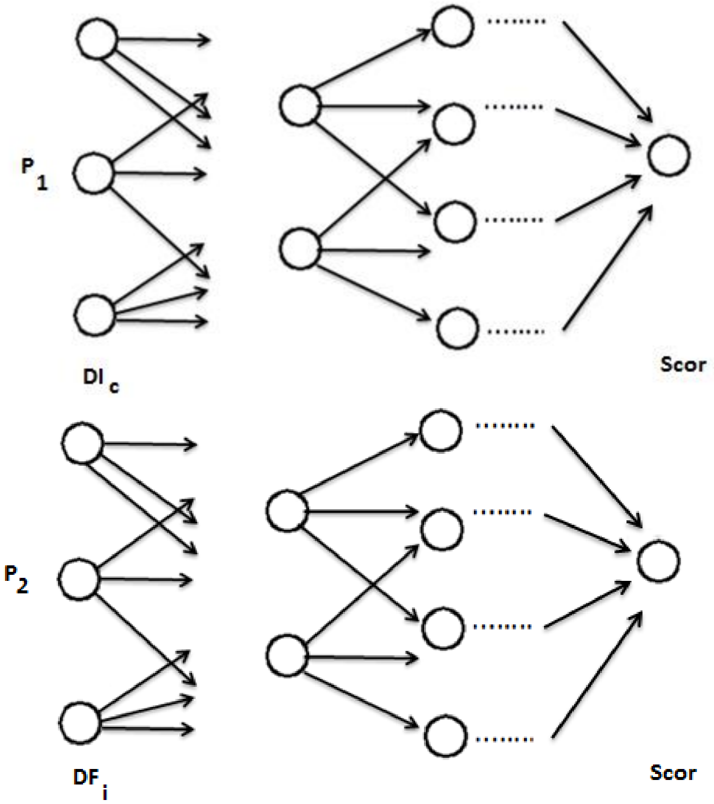

Figura 3.9 Reţele neuronale globale

unde:

DI_c - datele asociate indicatorilor contabili reţinuţi;

DF_i - date derivate pentru factorii F_1, F_2, F_{22}.

Cele două ieşiri/scoruri generate de cele două reţele globale vor constitui intrări într- altă reţea distinctă care prin comparare va oferi scorul final.

În forma finală de funcţionare a modelului, în funcţie de ponderea prestabilită între cele două părţi ale sale, ar urma ca fiecare să participe într-o anume proporţie în structura soluţiei la problema estimării riscului de faliment şi prediciie a CAF. Soluţia finală va lua forma unui interval - [1,10] spre exemplu - pentru care se stabilesc trei sau patru subintervale de interpretare (în fapt, este vorba despre maşina de inferenţă):

- [6, 10] situaţie foarte pozitivă;
- [3 , 6) situaţie medie;
- [0, 3) risc maxim de faliment.

Totodată, în măsura în care, la momentul *t* de analiză a riscului de faliment se procesează cu ajutorul modelului datele relevante privind situaţia firmei pe ultimii cinci ani, atunci soluţia finală amintită include cinci puncte principale pentru trasarea CAF (figura 3.10).

După cum se remarcă din figură, în cazul de faţă, traseul CAF este fragmentat şi nu sinuos, dar acest aspect este secundar. Finalizarea analizei şi predicţiei CAF de către decident va trebui să includă însă şi punerea faţă în faţă a accstuia cu unul/două CAM, după cum subliniam anterior.

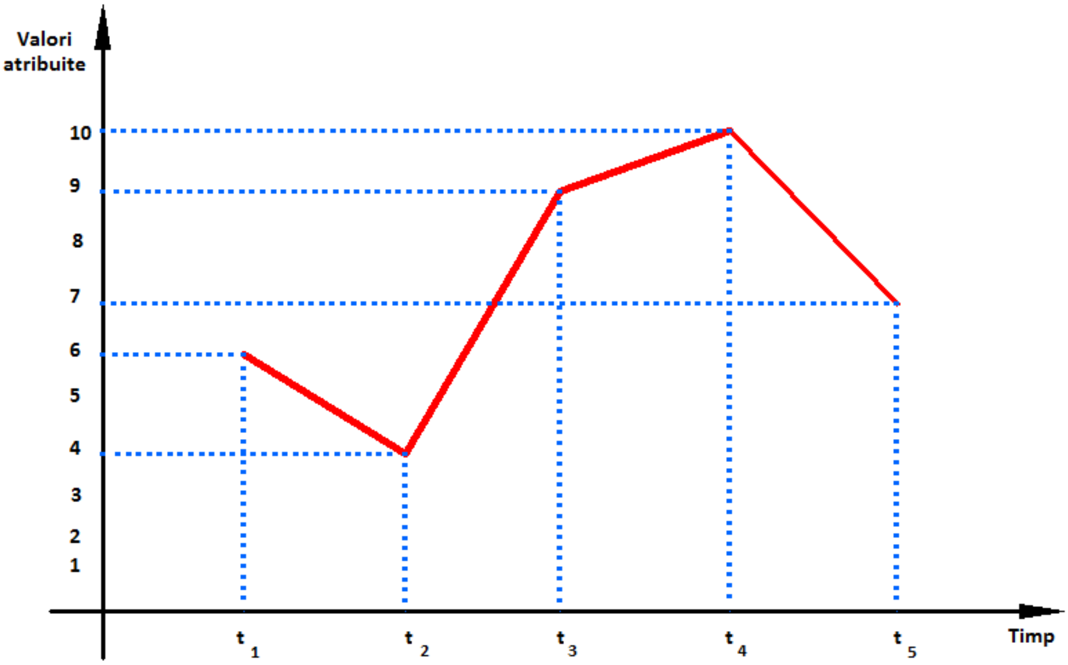

Figura 3.10 Trasarea CAF pe baza scorului de estimare globală a riscului de faliment

3.2. ELEMENTE ALE PROCESULUI DECIZIONAL [10], [12]

În general în cadrul procesului decizional se disting elementele:

- Decidentul sau mulţimea care urmează să ia decizia;
- Formularea/numele problemei;
- Mulţimea variantelor (alternativelor) posibile, din care trebuie aleasă o variantă optimă;
- Mulţimea consecinţelor anticipate pentru fiecare variantă;

- Mulţimea criteriilor ale decidentului;
- Obiectivele (scopurile) decidentului.

Shematic elementele procesului decizional sunt prezentate în tabelul 3.1.

Conceptul de utilitate:

Utilitatea după J. von Neumann şi O. Morgenstern, este o mărime subiectivă care depinde de aprecierea decidentului. Pentru a îngrădi caracterul subiectiv al utilităţii se întroduc axiome:

- Două variante Vi, Vj pot fi totdeuna comparate între ele, decidentul pronunţându-se prin una din următoarele opţiuni:
    - Preferă pe Vi lui Vj (Vi > Vj);
    - Preferă pe Vj lui Vi (Vj > Vi);
    - Cele două variante îi sunt indiferente (Vi ~ Vj).
- Relaţia de preferinţă este tranzitivă, iar relaţia de indiferenţă este tranzitivă şi simetrică;
- Decidentul înafara variantelor simple, poate considera mixturi probabilistice de tipul Vk=[pVi, (1-p)Vj], cu p probabilitatea realizării variantei Vi, iar 1-p probabilitatea realizării variantei Vj;
- Dacă Vi este preferat lui Vj, atunci o mixtură [pVi, (1-p)Vk] va fi preferat[mixturii;
- [pVj, (1-p)Vk];
- La trei variante V1, V2, V3 distincte, dacă decidentul exprimă V1 > V2 atunci, implicit va exprima relaţia:

$$[pV1, (1-p)V3] > [pV2, (1-p)V3]. \qquad (3.29)$$

Tabelul 3.1 Elementele procesului decizional

Variante	Starea naturii N1					Starea naturii Nn			
	Criteriul x1	**Criteriul x2**	**......**	**Criteriul xr**	**.....**	**Criteriul x1**	**Criteriul x2**	**.......**	**Criteriul xr**
V1	X111	X112		X11r		X121	X122		X1nr
V2	X211	X212		X21r		X221	X222		X2nr
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .		. . .
Vj	XJ11	XJ12		XJ1r		XJ21	XJ22		XJnr
. . .									
Vm	Xm11	Xm12		Xm1r		Xm21	Xm22		Xmnr

Pe baza acestor axiome se introduce **funcţia de utilitate u(Vi)** definit pe mulţimea variantelor, cu valori – numere reale, cu proprietăţile:

- Vi > Vj dacă şi numai dacă u(Vi) > u(Vj);
- u[pVi, (1-p)Vj] = p.u(Vi)+(1-p).u(Vj);
- cu proprietăţile de mai sus, utillitatea poate suferi o transformare liniară pozitivă:

$$u(Vj) = a.u(Vi)+b \quad \text{cu } a>0 \text{ si } b\geq 0. \qquad (3.30)$$

La procese multidimensionale se acceptă aditivitatea utilităţilor (fapt care nu totdeuna se poate asigura). **Noile cercetări recomandă normalizarea utilităţilor, după care ele devin sumabile.**

3.3. TIPURI DE PROCESE DE DECIZIE ŞI MODUL DE REZOLVARE A LOR [12]

a. Clasificarea proceselor decizionale

Se pot face clasificări ale proceselor decizionale din mai mule puncte de vedere:

a. după numărul variantelor posibile:

- procese de decizie cu număr finit de variante;
- procese de decizie cu număr infinit de variante.

b. după numărul criteriilor:

- procese de decizii cu un singur criteriu;
- procese de decizii cu mai multe criterii (multidimensionale).

c. după numărul de stări şi probabilitatea de realizare:

- procese de decizii în condiţii de certitudine (o singură stare a naturii, probabilitate de realizare 1);
- procese de decizii în condiţii de risc (mai multe stări ale naturii cu probabilităţi cunoscute);
- procese de decizii în condiţii de încertitudine (mai multe stări, fără a cunoaşte probabilitatea lor).

d. după numărul de stări şi probabilitatea de realizare:

- proces decizional unic (desfăşurat la momentul t);
- succesiuni de procese decizionale desfăşurate la momente diferite.

e. după numărul decidenţilor:

- procese decizionale cu decident unic;
- decizii de grup.

b. Procese de decizii multicriteriu (multidimensionale)

Se pune problema aditivităţii multidimensionale a utilităţiilor, care nu totdeuna este posibilă. Ultimele cercetări operează pe utilităţi normalizate, metoda devenind general aplicabilă.

c. Procese de decizie în condiţii de risc şi incertitudine

Clasic în condiţii de risc se utilizează varianta cu utilitatea medie ponderată:

$$\underset{i}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} pj \cdot u(x_{ij}) \qquad (3.31)$$

i = 1,2,....,m p1+p2+.....+pn = 1

În condiţii de incertitudine:

În problema de tipul de mai sus nu se cunosc probabilităţiile. Soluţia optimă poate fi căutată utilizând una din metodele de mai jos:

- Regula prudentă (Wald), se alege varianta căreia îi corespunde utilitatea:

$$\underset{i}{\mathrm{Max}} \, [\underset{j}{\mathrm{Min}} \, u(x_{ij})] \qquad (3.32)$$

i = 1,2,....,m j = 1,2,....,n

- Regula regretului (Savage), se va alege varianta cu utilitatea:

$$\underset{i}{\mathrm{Min}} \, [\underset{j}{\mathrm{Max}} \, (\underset{i}{\mathrm{Max}} \; u(x_{ij}) \; - u(x_{ij}))] \qquad (3.33)$$

i = 1,2,....,m j = 1,2,....,n

- Regula lui Laplace

Se consideră problema în condiţii de risc cu probabilităţi egale între ele.

- Regula optimistă (a lui Hurwicz) recomandă să se aprecieze pentru fiecare strategie în parte, o probabilitate p_1 de realizare a situaţiei celei mai avantajoase (coeficient optimist) şi o probabilitate p_2 de realizare a situaţiei celei mai dezavantajoase (coeficient pesimist), astfel ca $p_1 + p_2 = 1$.

Cu ajutorul acestor două probabilităţi se calculează speranţele matematice şi se alege strategia care corespunde speranţei matematice celei mai avantajoase.

Utimele cercetări recomandă o metodă de normalizare a utilităţilor, conferind acestora o mai mare independenţă, aditivitatea utilităţilor fiind de sine rezolvată.

d. Succesiuni de procese de decizie, arbori de decizii.

Procesul de decizie în condiţii de risc sau incertitudine, modelat schematic anterior, reprezintă des doar o etapă dintr-o succesiune de decizii în condiţii de risc sau incertitudine.

Reprezentarea succesiunii proceselor de decizie se face prin aşa-numitul ”arbore decizional”, prezentat în figura 3.11.

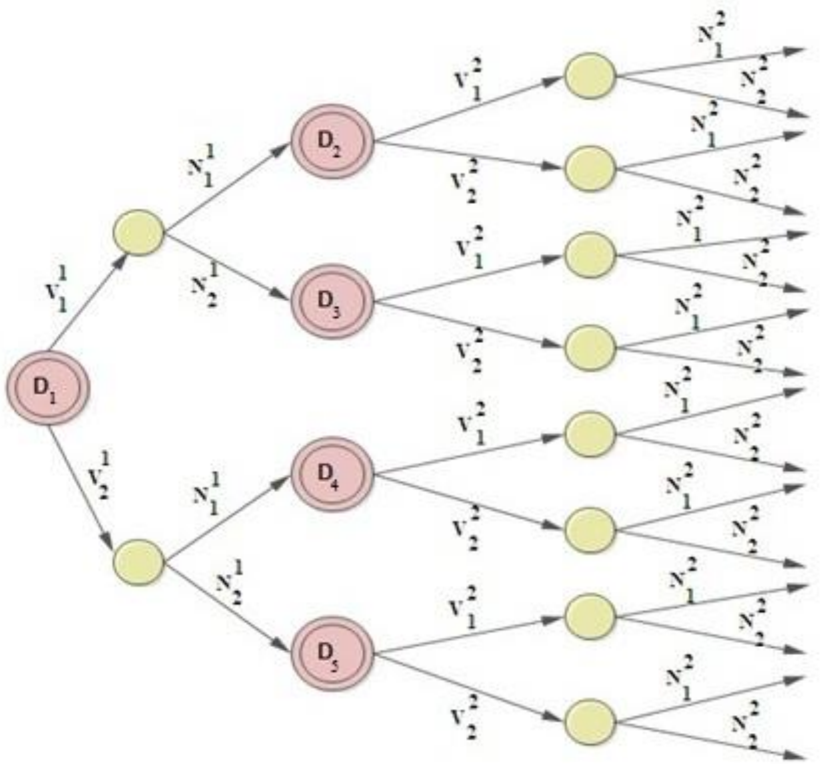

Figura 3.11 Arbore decizional

Figura de mai sus corespunde unei investiţii cu două variante posibile (V_1 şi V_2). Execuţia lucrării se poate desfăţura în condiţii favorabile în ceea ce priveşte condiţiile de import ale utilajelor (N_1^1) sau în condiţii nefavorabile (N_2^1) influenţând costul.

După terminarea investiţiei, exploatarea ei se poate face în trei schimburi(V_1^2) sau numai în două (V_2^2), producând în funcţie de conjunctură pierderi (N_1^2) sau (N_2^2) la sfârşitul unei perioade de exploatare (de exemplu 5 ani). Arborele decizional deci va avea 8 strategii posibile.

Pentru determinarea strategiei optime, se determină variant optimă pentru fiecare nod decizional D2-D5 în condiţii de risc sau incertitudine, cu probabilităţile p(N_1^2) şi p(N_2^2) cunoscute sau nu. Utilitatea obţinută pentru fiecare din cele patru variante optime astfel găsite vor fi utilităţile nodului decizional corespunzător. Se aplică apoi regulile deciziilor în condiţii de risc dacă se cunosc p(N_1^2) şi p(N_2^2), sau în condiţiile de incertitudine dacă cele două probabilităţi sunt necunoscute.

e. Decizii de grup

Conform sistemului de axiome von Neumann-Morgenstern, se consideră că decidentul individual la alegerea între două variante a şi b procedează raţional dacă poate exprima précis că a este preferabil, echivalent sau nonpreferabil lui b şi dacă respect regula de tranzitivitate.

Pentru cazul mai complex al unui grup de decizie J. K. Arrow defineşte cinci astfel de condiţii:

1. Metoda de decizie colectivă trebuie să fie aplicabilă mulţimii tuturor variantelor posibile.
2. Dacă o anumită variant urcă pe scara preferinţelor fiecărui individ, atunci ea trebuie să urce pe scara preferinţelor grupului
3. Dacă decizia se referă la n alternative posibile, **clasamentul** făcut de un grup acestora nu trebuie să fie modificat prin luarea în considerare a unei noi variante. De exemplu dacă se compară variantele a şi b, prima fiind preferată şi se ia în considerare variant c, relaţia între a şi b nu trebuie să se modifice.
4. Regula după care se extrage decizia colectivă nu trebuie să fie independentă de opiniile individuale, ci trebuie să depindă direct de acestea.
5. Decizia colectivă nu trebuie să fie identică cu opinia unui anumit membru al grupului, fără a ţine seama de opiniile celorlalţi.

   Analizînd aceste condiţii Arrow demonstrează că nu există nici o metodă de decizie colectivă care să satisfacă cele cinci condiţii enunţate şi care să ducă intotdeuna la o soluţie corectă când nmărul decidenţilor este mai mare sau egal cu 2, iar numărul alternativelor superior lui 2. Rezultatul este cunoscut sum numele de paradoxul lui Arrow, în literatură propunându-se o serie de metode de ieşire din Impas. Una din metode constă în aplicarea metodei ELECTRE. Recent problema aditivităţii utilităţilor a fost rezolvată prin normalizarea acestora.

3.4. PROBLEME STOHASTICE [10]

Ipoteze de lucru:

Presupunem că în acest caz evenimentele sunt disjuncte şi exhaustive, astfel ca se adoptează numai o singură strategie, şi numai unul din rezultate se produce neapărat. Evenimentele care nu sunt disjuncte şi nici exhaustive, pot fi reduse prin descompunere boleană.

De exemplu pornind de la două rezultare o1 şi o2 care nu sunt nici disjuncte, nici exhaustive se pot forma patru rezultate care posedă aceste proprietăţi:

1. o1 şi o2 se produc simultan;
2. o1 se realizează şi o2 nu;
3. o2 se realizează şi o1 nu;
4. nu se produce nici o1 nici o2.

Vom reprezenta problema cu ajutorul unei matrice (tabelul 3.2); coloanele (oi) vor desemna rezultate posibile, iar liniile (ci) vor reprezenta utilitatea (uij) ce se obţine când se adoptă strategia ci şi se produce rezultatul oj.

Matricea descrisă se mai numeşte matricea câştigurilor, care este prezentată în tabelul 3.2.

Tabelul 3.2 Rezultate strategii

	O1	O2	....	oj	....	On
C1						
C2						
. . .						
Cj				uij		
. . .						
Cm						

Să considerăm problema de decizie cu un singur obiectiv, conform tabelului 3.3:

Tabelul 3.3 Strategii posibile

	O1	O2
C1	1	5
C2	2	3

Pentru fiecare pereche (ci,oj) câştigul (utilitatea) reprezintă diferenţa dintre venitul adus de rezultatul oj şi cheltuielile necesitate de strategia ci.

Presupunem că se cunosc (sau s-au putut estima) probabilităţile fiecărui rezultat în funcţie de fiecare strategie posibilă P(OJ,CI):

P(O1/C1)= 0,7 P(O2/C1)=0,3

P(O1/C2)= 0,4 P(O2/C2)=0,6

Strategia de urmat poate fi aleasă după valoarea medie a câştigurilor:

E(C1)= 0,7 X 1 + 0,3 X 5 = 2,2

E(C2)= 0,4 X 2 + 0,6 X 3 = 2,6

Întrucât E(C2) > E(C1) strategia preferată v-a fi C2.

Criteriul rezultat pe calea acestui raţionament poată numele de **criteriul utilităţii maxime** şi poate fi aplicat direct ori de câte ori rezultatele şi strategiile sunt disjuncte şi exhaustive.

Formulat în acest caz general, criteriul utilităţii maxime se scrie:

$$\text{Max}[\ E(Ci) = \sum_{j=1}^{n} P(OJ/CI).U\ (OJ,CI)] \qquad (3.34)$$

La probleme mai complexe, de exemplu cu două obiective, criteriul teoretic aplicabil, ridică probleme dificile de calcul, de aceea criteriul utilităţii maxime este cel mai puţin utilizat în practică. Mai frecvent se utilizează variante ale sale: criteriul eficacităţii maxime, criteriul satisfacerii, criteriul eficienţei maxime, etc. Acestea rezultă din criteriul general când se impun diferite restricţii asupra utilităţii.

Metodele de decizii multidimensionale nebazate pe utilitate, cum ar fi metoda ELECTRE sau alte metode de decizii în grup, oferă decidenţilor o alternativă de operare în universul complex al obiectivelor multiple. Unele soluţii asigură chiar optimul economic cu mai multe obiective.

3.5. METODE DE PERFECŢIONARE A PROCESELOR DE DECIZIE

1. Brainstormingul propus de Osborn în 1957, cu fazele de delimitare temă, alegere participanţi la discuţii, fixarea conducătorului grupului; faza de desfăşurare propriu-zisă a şedinţei (max. o oră); faza de valorificare (interval de 1-2 zile);
2. Tehnica Delphi (ancheta prin iteraţii), în special pentru prognoză pe termen lung. Se stabileşte un chestionar, se sintetizează informaţiile, se elaborează un alt chestionar mai amănunţit care se trimite experţilor, etc.

Se procedează prin iteraţii, se caută consensul majorităţii. Tehnica prin mai multe iteraţii, lasă timp de reflexie.

Se mai cunosc şi alte metode de perfecţionare, de exemplu instruire prin simulare, jocul de întreprindere, calificări sociologice şi psihologice, etc.

3.6. ALTE PRINCIPII ALE ANALIZEI SISTEMELOR COMPLEXE (SISTEME ECONOMICE)

1. Viziunea sistemică;
2. Priorităţile orientate spre priorităţile sistemului;

3. Rezolvarea eficientă a problemelor concrete ale sistemului;
4. Tendinţa integratoare a analizei - Acţiunile trebuie corelate cu componentele tehnice, economice - financiare, informatice;
5. Analiza, proces repetitiv;
6. Analiza trebuie iniţiată şi coordonată de conducerea sistemului, cu participarea specialistilor proprii;
7. Soluţiile să fie simple, fiabile, cu componente moderne;
8. Trebuie asigurate acţiuni pentru perfecţionarea resurselor umane;
9. Se recomandă analiza întregului sistem, dacă nu se opune conducerea.

Tipurile de planificare uzuale sunt:

- tipul satisfăcător;
- tipul optimizant;
- tipul adaptiv.

4. SIMULAREA DINAMICII SISTEMELOR, MODELARE DINAMICĂ FORRESTER [20]

Modelarea dinamică este o metodă de identificare a sistemului condus care include factorii care interacţionează, producând efecte observate punând în evidenţă relaţiile tip cauză effect care transform informaţia în decizie şi deciziile în acţiune.

Componentele de bază, a unui model dinamic FORRESTER, sunt puncte de acumulare, numite nivele, şi ritmuri ale unor fluxuri de curgere care alimentează punctele de acumulare. Nivelele dirijează ritmurile sau debitele fluxurilor şi a acestea la rândul lor determină variaţia nivelurilor.

La nivelul unităţilor economice se pot identifica şase tipuri principale de fluxuri interconectate: materiale, comenzi, fonduri, utilaje, forţă de muncă, informaţii. În mod corespunzător vor exista 6 tipuri de nivele, legate prin fluxurile ce le deplasează conţinutul conform unor funcţii de decizie care reglează ritmurile de curgere.

Înţelegerea funcţionării unei întreprinderi, în limbajul modelării dinamice FORRESTER (figura 4.1), depinde de înţelegerea interacţiunilor dintre fluxurile de informaţii, comenzi, material, fonduri, personal, utilaje. Modul în care se cuplează aceste fluxuri pentru a se amplifica unul pe celalalt, poate furniza o bază pentru anticiparea efectelor deciziilor, strategiilor, formelor de organizare şi de investigaţie.

Elaborarea unui model dinamic presupune identificarea sistemelor de conducere elementare de exemplu în care se încearcă menţinerea nivelului impus, prin decizie (comandă de acţiune asupra nivelului) şi conexiune inversă.

Într-un asemenea sistem elementar de comandă a stocului nu există nici o întârziere între comanda mărfurilor şi recepţionarea lor în depozit. Scopul sistemului este să menţină stocul dorit x_d, care apare ca o constantă în procesul de decizie. Decizia asupra comenzilor trebuie să aducă stocul la starea dorită. O politică simplă ar fi exprimată cu relaţia:

$$R = K\,((X_d - X) \qquad (4.1)$$

K ar trebui să specifice cât de repede trebuie corectată eroarea de stoc şi să asigure dimensionalitatea corectă adică:

$$\frac{unitati\ de\ timp}{timp} = \frac{1}{timp} \qquad K = \frac{1}{T} \qquad (4.2)$$

Unde:

T se cheamă timp de ajustare.

Sistemele de genul celor de mai sus se numesc de ordinul 1; comanda este condiţionată de un singur nivel. În multe cazuri reale comanda este condiţionată de două sau mai multe niveluri. Problema descrisă mai sus poate fi completată spre exemplu în sensul luării în considerare a mărfurilor comandate şi nelivrate x_i şi a unui ritm de primire p.

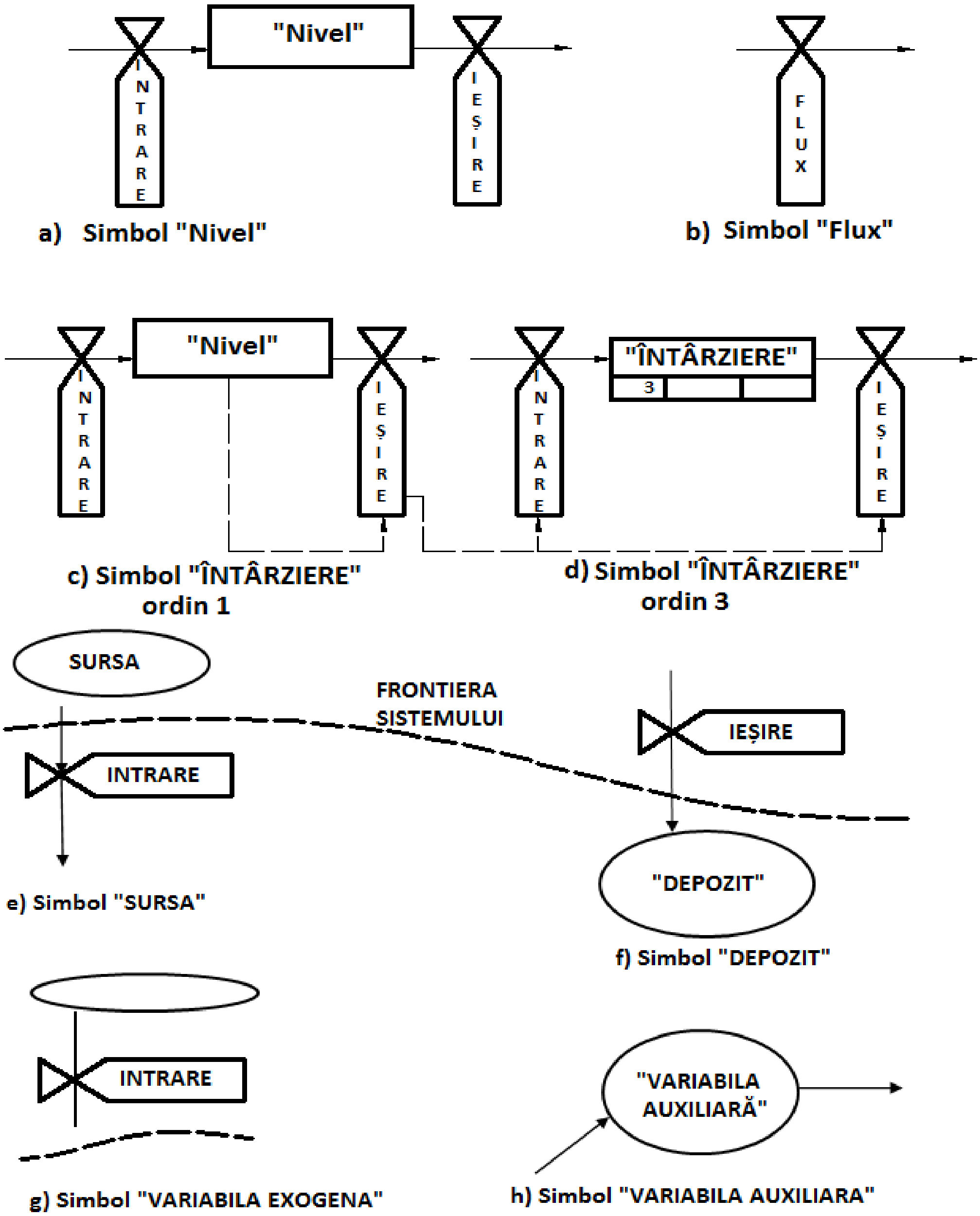

Figura 4.1. Simboluri utilizate in modelare FORRESTER

Combinaţia variabilei de nivel reprezentând mărfurile comandate C cu variabila de flux reprezentând ritmul de primire p are efectul introducerii unei întârzieri între ritmul comenzii şi ritmul primirii.

O nouă valoare pentru mărfurile comandate se calculează pornind de la vechea valoare, adaugând unităţile care au venit prin ritmul de comandă şi scăzând unităţile care au ieşit prin ritmul de primire. O întârziere de C săptămâni între ritmul de comandă şi cel de primire se determină cu expresia:

$$P=\frac{X_2}{C} \qquad (4.3)$$

Politica de asigurare a stocului real la nivelul dorit s-ar exprima prin relaţia:

$$R(k+1)=\frac{1}{T}(X_d - X_1(k+1)) \qquad (4.4)$$

Unde:

$$X_1(k+1) = X_1(k) + DT\frac{X_2(k)}{C}$$

$$X_2(k) = X_2(k-1) + DT\left(\frac{X_d - X_1(k-1)}{T} - \frac{X_1(k-1)}{C}\right)$$

Estimaţiile de tipul (4.1) sau (4.2) poartă numele de ecuaţii de ritm; ele arată cum sunt comandate fluxurile şi reflectă procesele de control implicate în structura sistemului de reacţia de stare existent în sistem.

Ecuaţiile de tipul (4.3) sau (4.4) care permit calculul noii valori a nivelului, dintr-o valoare precedent, pe baza modificărilor apărute în intervalul DT, poartă numele de ecuaţii de nivel.

Înafara acestor categorii de ecuaţii se mai utilizează uneori ecuaţii auxiliare care permit precizări asupra unor ritmuri.

Modelul FORRESTER descrie dinamica unui sistem astfel:

La fiecare moment de timp (K) se determină valoarea stărilor (nivelurilor) sistemului şi a mărimilor auxiliare, cu ajutorul variabilelor de stare şi auxiliare la momentul precedent (J) şi a fluxului în intervalul de timp (JK). Cu ajutorul acestui rezultat se determină fluxul în intervalul de timp următor (KL). Apoi se actualizează timpul şi se trece la pasul de simulare următor.

Ecuaţia fundamentală a unei mărimi de stare (nivel), care defineşte un nivel are forma:

NIVEL.K= NIVEL.J + (PS) (INTRARE.JK – IESIRE.JK) (4.5)

unde:
NIVEL = mărime de stare;
INTRARE= flux de intrare;
IESIRE= flux de iesire;
PS =pasul de simulare.

O astfel de ecuaţie constituie un bilanţ material pe un interval de timp dat.

Fluxurile sunt generate de ecuaţii de ritm care exprimă decizii ce modelează aceste fluxuri; ele depind numai de variabilele auxiliare şi de alte fluxuri decât cele calculate.

FLUX.KL=f (NIVEL 1.K,…NIVEL J.K, AUX 1.K,…AUX J.K,…..FLUX J.K)

Variabilele auxiliare permit scrierea condensată a interacţiunilor, sub forma:

AUX.1 = NIVEL 1.K + (ALFA) (NIVEL 2.K)

Întârzierile în tranzmiterea informaţiei se definesc sub forma:

$$\text{IESIRE . KL} = \frac{NIVELK}{INT} \tag{4.6}$$

Unde:
INT - reprezintă durata medie a mărimii în nivel.

Condiţiile iniţiale se presupun cunoscute, de exemplu NIVEL.0 = N_0 dat.

5. TEORIA CELEI MAI BUNE APROXIMAŢII

Noţiunea de cea mai bună aproximaţie s-a format în urma tratării matematice a unor clase largi de probleme teoretice şi practice. În mod clasic problema aproximării funcţiei de evoluţie cu polinoame de diverse grade se bazează pe rezultatele lui Cebâşev M. care a dat o metodă de determinare a coeficienţilor polinomului de cea mai bună aproximaţie. Ulterior au fost dezvoltate şi alte metode analitice.

Să presupunem că la momentele t1<t2<….<tm, m≥ 1, dispunem de valorile unei funţii f (t). Un studiu amănunţit al funcţiei f (t) impune cunoaşterea ei pe cât mai multe puncte din intervalul [A, B] pe care este considerat. Dacă nu se cunoaşte f(t) pe tot intervalul de mai sus, se încearcă înlocuirea ei cu o funcţie g(f, t) care să coincidă cu f (t) pe punctele t=ti, i=1,2,….m şi care să fie definită pentru t€[A, B]. În general cunoaştem valorile f(t) numai în anumite puncte tk, k= 1,2, …..m din [A, B]. În unele cazuri se ia g(f,t) polinomul de interpolare al lui Lagranj de ordinul m-1. Definim distanţa ρ(f1,f2) a două funcţii f2(x) şi f2(x) pe un interval închis [a, b] astfel:

$$\rho(f1,f2) = \max_{x\in[a,b]} |f1(x) - f2(x)| \qquad (5.1)$$

Fie o submulţime H a funcţiilor continue pe [a, b]. Dorim să minimizăm distanţa între f(x) şi elementele mulţimii H, în sensul găsirii a unei funcţii h*(x) din H, astfel că:

ρ(f,h*)≤ ρ(f,h) pentru oricare h€H.

Obţinem formularea:

$$\inf_{h\in H}\{ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| \} = \varepsilon(f; H ; [a, b]) \qquad (5.2)$$

Numărul ε se numeşte cea mai bună aproximaţie a funcţiei f(x= prin funcţii din mulţimea H, în sensul distanţei definite anterior.

Dacă funcţia h*(x) din mulţimea H satisface condiţia:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - h*(x)| \} = \varepsilon(f; H ; [a, b]) \qquad (5.3)$$

spunem că h*(x= este o funcţie de cea mai bună aproximare din mulţimea H, pentru funcţia f(x), pe intervalul [a, b] în sensul distanţei.

Considerăm acum mulţimea R_n al tuturor polinoamelor de grad cel mult egal cu n, n≥0,

$$P \in R_n \rightarrow P(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (5.4)$$

Fie o funcţie continuă pe [a, b], care nu aparţine mulţimii R_n, şi fie P(x) un polinom din R_n.

Numărul $\rho(f,P)= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$ exprimă distanţa sau abaterea polinomului P(x) de la funcţia f(x).

Lui P.L.Cebâşev se datoresc unele rezultate fundamentale cu privire la cea mai bună aproximaţie a funcţiilor prin polinoame [35].

Teorema de alternanţă a lui Cebâşev:

Dacă f(x) este o funcţie continuă pe [a, b] şi P*(x) este un polinom de cea mai bună aproximaţie, de gradul n, pentru f(x) pe intervalul [a, b], atunci există n+2 puncte x1<x2<… <xn+2 în intervalul [a, b] astfel că:

$$|f(xi) - p*(xi)| = \varepsilon(f; R_n ; [a, b]) \quad i=1,2,\ldots\ldots n+2 \qquad (5.5)$$

şi diferenţa f(x)-P*(x) să aibă semne alternante pe şirul de puncte xi
sgn $|f(xi) - P*(xi)|$ = - sgn $|f(xi+1) - P*(xi+1)|$ i = 1,2,....n+1

Practic se vor egala valorile polinomului în n+2 puncte cu valorile funcţiei, la capetele intevalului, etc., cu semne alternante, obţinând forma (coeficienţii) polinomului dorit pentru gradul ales.

De exemplu pentru polinomul P*(x)=a0.x+a1, dacă există f’’(x) pe [a,b],
Se obţine:

$$a0 = (f(b) - f(a))/(b - a) \qquad (5.6)$$

$$a1 = \left[\frac{f(b) + f(a)}{2}\right] - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] * \frac{a + b}{2} \qquad (5.7)$$

În practică pentru cazuri mai simple liniare pe porţiuni de evoluţie uneori se foloseşte metoda celor mai mici pătrate.

6. ESTIMAŢIA STATISTICĂ ŞI VERIFICAREA IPOTEZELOR [27]

Se pune problema de a găsi în urma unor experienţe efectuate, legea de probabilitate sau caracteristicile variabilelor observate sau măsurate. În acest scop se aplică metoda selecţiei sau metoda eşantioanelor.

Caracteristicile statistice se referă pe de o parte la variabila sau la populaţia teoretică, pe de altă parte la selecţie sau eşantionul empiric, dar ele au aceleaşi definiţii. O problemă importantă este determinarea repartiţiei caracteristicilor de selecţie. În literatură se demonstrează că variabila ns^2 / σ^2 este egală cu suma pătratelor a n+1 variabile independente şi normale (0,1).

O astfel de variabilă are o repartiţe $\chi 2$ cu n+1 grade de libertate.

Teoremă:

În selecţiile dintr-o populaţie care este normală (m, σ), media $\tilde{x}$ şi dispersia s^2 sunt independente, media este normală (m, $\sigma / \sqrt{n}$), iar ns^2 / σ^2 are o repartiţie $\chi 2$ cu n-1 grade de libertate. În procesul de estimare se disting două cazuri:

a. Când se cunoaşte forma repartiţiei variabilei, dar există unii parametri necunoscuţi care trebuie estimaţi;
b. Când nu cunoaştem forma repartiţiei.

În primul caz, să presupunem că avem un singur parametru necunoscut. Fie F(x: α) funcţia de repartiţie cunoscută ca formă, conţinând un parametru constant ß care trebuie estimat.

Dacă n este mare, zicem că α ’ este o estimaţie eficientă a lui α , dacă pentru orice ε **> 0, probabilitatea**

P(|α ’- α | < ε) tinde către 1 când n→∞.

Cea mai importantă metodă de a găsi anumite estimaţii se bazează pe “principiul verosimilităţii maxime” introdus de R.A. Fischer. Dacă pentru un eşantion am găsit pentru medie valoarea m1, conform principiului de mai sus, admitem că populaţia are o medie m, astfel încât extragerea din această populaţie a unui eşantion cu media m1 să fie cea mai probabilă.

În cazul unei selecţii dintr-o repartiţie unidimensională, având un singur parametru necunoscut, să luăm o selecţie dată de valorile x1,x2,….,xn dintr-o repartiţie de tip continuu cu densitatea de probabilitate f(x, α). Se defineşte funcţia de verosimilitate, astfel:

L(x1,x2....,xn; α)= f(x1, α)..........f(xn; α) (1)

Se presupune că selecţia a fost extrasă dintr-o repartiţie discretă, unde variabilele z1,z2,.....zr au frecvenţele respective f1,f2,...fr cu f1+f2+.....+fr= n.

Dacă notăm P(X= zi) = pi(α), avem funţia de verosimilitate de forma:

L(x1,x2,.........xn; α) =$(p1)^{f1}$……. $(pr)^{fr}$

Principiul constă în a alege o astfel de estimaţie pentru mulţimea valorilor lui α , astfel încât ea să maximizeze funcţia de estimaţie L.

Cum log L atinge maximul pentru aceeaşi valoare a lui α ca şi L, putem considera ecuaţia verosimilităţii:

∂ ***ln L/***∂ α = 0

O soluţie a ecuaţiei, ca funcţie de variabilele de selecţie α'= α '(x1,x2,...,xn) dacă ea corespunde maximului lui L, se numeşte "estimaţia de maximă verosimilitate a lui α".

Dacă repartiţia conţine doi parametrii necunoscuţi, vom avea ecuaţiile:

$\partial \ln L/\partial \alpha = 0 \qquad \partial \ln L/\partial \gamma = 0$

şi orice pereche de soluţii a acestor ecuaţii corespunde maximului lui L, constituind perechi de estimaţii de maximă verosimilitate pentru α şi ***γ.***

Luând expresia f al densităţii de repartiţie cunoscute conform relaţiei 1 putem defini expresia lui L.

Exemplu pentru variabila X normală (m, σ) cu ambii parametri necunoscuţi întroducând densitatea de repartiţie f al repartiţiei normale rezultă:

$$L=\prod_1^n f(xi)=\prod_1^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\boldsymbol{exp}\left[-\frac{(xi-m)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (6.1)$$

$$\partial\, ln\, L/\partial\, m=\sum_1^n \frac{xi-m}{\sigma^2}=0 \qquad (6.2)$$

$$\partial\, ln\, L/\partial\, \sigma=\sum_1^n\left[\left(-\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{(xi-m)^2}{\sigma^3}\right]=0 \qquad (6.3)$$

Pentru a măsura această precizie trebuie să găsim două numere pozitive ε şi δ astfel încât:

P(α ' – δ < α < α ' + δ) = 1- ε

sau

P(α ' < α < α ' ') = 1- ε

Un asemenea interval se numeşte „interval de incredere" sau de siguranţă pentru parametrul α, iar 1- ε este "coeficientul de încredere" conform definiţiilor întroduse de J. Neumann. Deci fiecărui interval de siguranţă îi corespunde o probabilitate.

Vom spune conform ultimei relaţii că α este cuprins între ,α ' şi α ' ' cu o probabilitate de 95%, ceea ce înseamnă că la un număr mare de extrageri de eşantioane, în 95% din cazuri, parametrul α nu va depăşii limitele intervalului de mai sus. Probabilitatea de a greşi (5%) se numeşte “prag de semnificaţie”.

Pentru două variabile independente date de

Y= $\sqrt{n}\frac{\bar{x}-m}{\sigma}$. Z= $\frac{n s^2}{\sigma^2}$ şi un procent t dat de t= $\sqrt{n-1}\frac{Y}{\sqrt{Z}} = \sqrt{n-1}\frac{\bar{x}-m}{s}$

cu Y normală (0,1) şi Z are legea $\chi 2$ cu n-1 grade de libertate. Se spune că, t satisface legea Student cu n-1 grade de libertate.

Avem:

$$P\left(-t_p < \sqrt{n-1}\frac{\bar{x}-m}{s} < t_p\right) = 1-\frac{p}{100} \qquad (6.4)$$

sau

$$P\left(\bar{x} - t_p \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + t_p \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\frac{p}{100} \qquad (6.5)$$

Aceasta este definiţia intervalului de încredere pentru m, cu coeficientul de încredere 1- $\frac{p}{100}$.

În tabelele repartiţiei Student pentru t se dau valorile t_p (% din t) în funcţie de numărul n al gradelor de libertate şi de procentul p dat de noi, definit ca:

$$P(|t| > t_p) = \frac{p}{100}. \qquad (6.6)$$

Similar construind variabila:

$$\frac{n s^2}{\sigma^2} \qquad (6.7)$$

care are o repartiţie $\chi 2$ cu n-1 grade de libertate, cu un prag de p% dat, putem găsi pentru dispersie mai multe intervale de încredere. Se va alege intervalul $(X^2_{p_1}, X^2_{p_2})$

rezultând:

$$p1 = 100 - \frac{1}{2}p, \quad p2= \frac{1}{2}p \qquad (6.8)$$

Intervalul de încredere va fi:

$$P\left(X^2_{p_1} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < X^2_{p_2}\right) = 1-\frac{p}{100} \quad (6.9)$$

sau

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{X^2_{p_1}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{X^2_{p_2}}\right) = 1-\frac{p}{100} \quad (6.10)$$

Metode asemănătoare se folosesc şi când nu cunoaştem exact repartiţia selecţiei.

Interpretarea statistică, permite de asemenea, să apreciem dacă două eşantioane provin din aceeaşi populaţie, ţinând seama de parametrii lor.

Când se lucrează cu mai multe eşantioane, se adoptă ”ipoteza nulă": se presupune că eşantioanele provin din aceeaşi populaţie şi că diferenţa dintre parametrii lor se datoreşte hazardului extragerii, că în realitate diferenţa este nulă.

Calculăm probabilitatea de a extrage din una şi aceeaşi populaţie două eşantioane, între ai căror parametrii să existe o diferenţă egală sau mai mare cu cea găsită. În practică, de obicei se adoptă regula:

1. Dacă probabilitatea este mai mare ca 0,05, ipoteza este acceptată, diferenţa este socotită ca “nesemnificativă”;
2. Dacă probabilitatea este mai mică decât 0,01, ipoteza este respinsă, diferenţa fiind socotită ca “semnificativă”;
3. Dacă probabilitatea este cuprinsă între 0,01 şi 0,05 situaţia este îndoielnică şi cercetarea trebuie repetată.

Dacă dorim să comparăm o repartiţie teoretică (ipotetică) cu una experimentală (empirică), considerăm frecvenţele teoretice g1,g2,……,gn şi cele experimentale f1,f2,….,fn. Pentru exprimarea neconcordanţei dintre ipoteză şi realitate, însumăm diferenţa acestor frecvenţe:

$$\sum_1^n d_i = \sum_1^n (f_i - g_i) \quad (6.11)$$

Dar $\sum_1^n d_i$=0, căci $\sum_1^n f_i = \sum_1^n g_i$.

De aceea se aleg pătratele acestor diferenţe şi se alcătuieşte parametrul x^2 al lui Pearson, astfel:

$$X^2 = \sum \frac{(fi-gi)^2}{gi} \quad (6.12)$$

Diferenţele dintre ele pot fi urmare fie a unei ipoteze false, fie a unei simple întâmplări. Pentru a putea hotărî, trebuie să ştim ce valori ale lui x^2 pot fi atribuite simplei întâmplări, adică să cunoaştem repartiţia parametrului care depinde de gradele de libertate.

Numărul gradelor de libertate este numărul frecvenţelor care într-o repartiţie pot fi alese arbitrar, celelalte rezultând din condiţiile impuse repartiţiei.

Tabelele x^2 ne dau probabilitatea de a întâlni prin simpla întâmplare, o valoare a lui x^2 egală sau mai mare cu cea găsită de noi.

Frecvenţele teoretice g_k au o repartiţie binomială, cu media n p_k,

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (6.13)$$

Pentru N - repartiţia devine asimptotic normală N (n p_k, $\sqrt{np_k q_k}$).

Notând:

$$Z_k = \frac{(f_k - n p_k)}{\sqrt{np_k}} \qquad (6.14)$$

Z_k sunt asimptotic normale, cu media zero şi satisfac legea de probabilitate Helmert - Pearson cu n-1 grade de libertate.

Având în vedere că $\sum f_k = n,\ \sum p_k = 1,$ rezultă:

$\sum_1^n z_k \sqrt{np_k} = 0$, deci există o relaţie de dependenţă între variabilele Z_k.

Se vor prezenta exemple concrete la dezbateri.

7. CERCETARE OPERAŢIONALĂ

Principalele capitole ale cercetării operaţionale sunt:

1. Programarea matematică (liniară, probleme de transport şi repartiţie, programare neliniară, în numere întregi, stohastică, discretă, parametrică);
2. Elemente de teoria aşteptării;
3. Teoria grafurilor (metoda drumului critic, drumuri optime);
4. Programare dinamică discretă (orizont finit);
5. Elemente de teoria stocurilor;
6. Programarea operativă a producţiei;
7. Teoria jocurilor;
8. Teoria reînnoirii echipamentelor;
9. Modelare prin simulare.

7.1. PROGRAMARE MATEMATICĂ [9], [21], [19]

În general problema se poate enunţa ca să se minimizeze (maximizeze o funcţie obiectiv (de exemplu profitul) în codiţiile respectării unei serii de restricţii, reprezentând cerinţe de disponibil de resurse, cerinte tehnice, tehnologice, etc., de forma:

Min.(max) F(x_1, x_2,...........,x_n) respectând

R_j(x_1, x_2,...........,x_n) < C_j j=1, m

După dezvoltarea soluţionării programelor de tip liniar prin anii 1950 de Danczig prin programul SIMPLEX, au fost elaborate o serie de tipuri de probleme pentru diverse necesităţi practice. Ulterior au fost dezvoltate şi alte tipuri de modele specifice cum ar fi: programare în numere întregi, programare pătrăţică, programe convexe, programare fracţionară, metode cu funcţii de penalizare, programe duale, programarea dinamică, programarea stohastică, metode fuzzy, modele multicriteriale, etc.

Întru-cât în ultima perioadă au fost dezvoltate soluţii generale pentru orice tipuri de funcţii neliniare, dintre tipurile de programare mai sus amintite considerăm mai importante programarea liniară în care atât funcţia obiectiv, cât şi restricţiile sunt funcţii liniare, (în special pentru tipurile de probleme specifice elaborate de necesităţi practice), pentru care există program de soluţionare pe calculator chiar în programul EXCEL componenta SOLVER, precum şi programarea dinamică, capabilă să asigure soluţii optime la decizii secvenţiale luate în etape succesive.

În cele ce urmează ne vom axa pe aceste două metode, pentru ca la urmă să prezentăm metoda generală pentru orice tip de program (liniar sau neliniar), respectiv vom prezenta formularea specifică fuzzy a modelelor.

7.1.1. PROGRAMAREA LINIARĂ [10], [21]

Conform celor mai sus arătate forma generală având funcţia obiectiv şi restricţiile expresii liniare obţinem:

Min.(max) ($C_1 x_1 + C_2 x_2 +, \ldots\ldots\ldots + C_n x_n$) respectând

$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}.x_n.) < C_1$

$a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}.x_n.) < C_m$ i =1, m $x_i \geq 0$

Mai concis scris matricial FORMA STANDARD:

Min. (max) f= (C.X) respectând:

A.X=B X≥0

Pentru soluţionare se comunică programului excel SOLVER poziţiile în tabelul excel al domeniilor matricilor A,B,C, faptul că se doreşte maxim sau minim.

De altfel se demonstrează că:

$$\text{Min } (f(x)) = - \text{ Max}(-f(x)) \tag{7.1}$$

Problemele tip specifice mai importante dezvoltate în decursul anilor trecuţi se referă la:

- Program de determinare a unui program optim de producţie (profit maxim) - industrie, contrucţii, resurse disponibile, material, manoperă, capacitate maşini, cost minim cu producţie minimă asigurată, încărcare minimă capacităţi de bază impsă;
- Program de repartizare a fabricării reperelor pe diverse maşini cu capacităţi limitate conform programului de lucru pe orizontul planificat (zi, lună, trimestru, an);
- Optimizarea structurii de producţie la o unitate agricolă (producţie de culturi, suprafeţe disponibile, bonitare de favorabilitate, rotaţie culturi, forţă de muncă, producţii minime pe culturi, venituri nete);
- Întocmirea unui meniu zilnic cu cost minim, care să asigure limita minimă de calorii dat, conţinutul de substanţe total din diverse alimente , bineînţeles dându-se preţurile unitare ale alimentelor;
- Problema variaţiei soluţiei când se modifică anumite date ale problemei modificând unii dintre coeficienţi (reoptimizări, parametrizări);
- Probleme de transport şi repartiţie cu cost minim (disponibil furnizori, necesar consumatori, distanţe între furnizori şi consumatori, costuri unitare de transport, cantităţi de transportat dela furnizori la consumatori cu cheltuieli total minime); metode matriciale ca: metoda colţului nord-vest, metoda minimului pe tabel, metoda diferenţei maxime, etc);

- Programarea lineară în numere întregi, etc.

De exemplu o problemă de stabilire a unui program optim de fabricaţie. Se cere determinarea cantităţilor (x_j) pe care să se execute din fiecare produs j astfel încât beneficiul să fie maxim.

Se cunosc resursele disponibile d_j (R_1, R_2,....., R_m) necesare pentru fabricarea produselor ($P_1, P_2, \dots \dots, P_n$). Se cunosc consumurile specifice de unităţi i necesare producerii unei unităţi de produs j: a_{ij}. Se cunoaşte deasemenea beneficiul unitar pe produsele j, (C_j).

Modelul va avea următoarea formă:

$$\text{Max } F = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (7.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_j \qquad i=1,2,\ldots..,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,2,\ldots..,n.$$

Exemplu numeric. Să considerăm problema determinării cantităţilor de produse cu maximizarea beneficiului cu restricţii privind disponibilitatea de materie primă şi ore maşini::

Variabile de decizie:

- X1= numărul de produse de tipul 1
- X2= numărul de produse de tipul 2

Funcţia obiectiv: beneficiul maxim

Max 11,1. x1 + 12,4. x2

Restricţii:

1. Materia primă disponibilă pe săptămână
   8 . x1+5 . x2 ≤ 15.000 kg
2. Ore maşini disponibile săptămânal la 2 maşini existente
   2 maşini x 5 zile x 480 min pe zi = 4800 min.
   4 . x1+6 . x2 ≤ 4800

X1, X2 ≥ 0 intregi

Procedeul de optimizare (prin programul excel SOLVER) v-a furniza cantităţile optime de produse x_j, nivelul de consum al resurselor d_j, precum şi valoarea beneficiului total, F ca soluţie optimă.

Pentru dimensiuni de programe cu număr de variabile, respectiv restricţii care depăşesc capacităţile excel, se v-a căuta pe piaţa internaţională softwere puternice.

7.1.2. PROBLEME DE TRANSPORT ŞI REPARTIŢIE

Modelele de transport pot fi rezolvate ca probleme de programare liniară, sau prin metode specifice (metoda colţului nord vest; metoda Steping-Stone, etc).

Forma generală a modelului:

Se cere găsirea unui plan optim de transport, în aşa fel încât ţinând seama de disponibilităţile furnizorilor şi de cerinţele beneficiarilor (consumatorilor) să se minimizeze cheltuielile totale de transport sau numărul de tone - km parcurşi.

Dacă avem *m* centre de distribuire (furnizori) ai unui produs (P) şi *n* centre de consum (consumatori) ai aceluiaşi produs (P), notăm:

a_i (i=1,2,....,m) = cantităţile din produsul P disponibile la furnizorii 1,2,....,m

x_{ij} (i=1,2,....,m; j=1,2,......,n) = cantităţile care se distribuie de la furnizorul i la consumatorul j.

c_{ij} (i=1,2,....,m; j=1,2,......,n) = preţul unitar al transportului produsului P de la furnizorul i la consumatorul j.

Elementele problemei de transport se pot sistematiza în tabelul următor, numit **matricea de transport**, tabelul 7.1:

Tabelul 7.1 Date iniţiale, aplicaţie metoda "transport şi repartiţie"

	Consumatori					
		C_1	C_2	C_j	C_n	Disponibil
Furnizori	F_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{1j} X_{1j}	C_{in} X_{1n}	a_1
	F_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	a_2
	F_i	C_{I1} X_{i1}	C_{I2} X_{i2}	C_{Ij} X_{ij}	C_{In} X_{3n}	a_i
	F_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{mj} X_{mj}	C_{mn} X_{mn}	a_m
	necesar	b_1	b_2	b_j	b_n	$\sum a_i >< \sum b_j$

Observaţii:

1. Dacă: $\sum a_i = \sum b_j$ avem o problemă de alocare echilibrată.
2. Dacă: $\sum a_i < \sum b_j$ sau $\sum a_i > \sum b_j$ avem o problemă de alocare neechilibrată şi se va evidenţia cantităţile care rămân în stoc la anumiţi furnizori (primul caz) şi beneficiarii care nu vor primi cantităţile necesare.
3. Dacă:

$a_i = 1$ i=1,2,…,m

$b_j = 1$ j=1,2,…,n

x_{ij} = 0 sau x_{ij} = 1 i=1,2,…,m; j=1,2,…,n

avem o problemă de repartizare. Într-o astfel de problemă, fiecare activitate necesită o singură resursă, iar fiecare nu poate fi atribuită decât unei singure activităţi. Resursele nu pot fi divizate între activităţi şi nici activităţile între resurse.

Dacă resursele pot fi divizate între activităţi, aceeaşi activitate poate fi executată cu diferite combinaţii de resurse; dacă atât activităţiile cât şi resursele se exprimă în unităţi de acelaşi fel, avem o **problemă de transport**, în caz contrar avem o problemă de alocare generală.

Pentru problemă de trasport în ipoteza că $\sum a\,i = \sum bj$ (celelalte cazuri se rezolvă prin reducere la acest caz) se construieşte un model matematic:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ I = 1, 2,…., m

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ j = 1, 2, …., n

$x_{ij} \geq 0$ i = 1, 2,...., m

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Funcţia obiectiv care se va minimiza:

$$\text{Min } F = \text{Min } [\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}] \qquad (7.3)$$

Se rezolvă problema de mai sus în două etape:

1. Determinarea unei soluţii iniţiale;
2. Determinarea soluţiei optime.

Tipurile de probleme care se încadrează în problema transporturilor:

1. Problema repartizării muncitorilor pe maşini;
2. Problema repartizării optime a sarcinilor pe maşini;
3. Problema repartizării a sarcinilor pe subunităţi (secţii, etc).

Soluţia iniţială se poate determina prin metoda colţului nord-vest. Se atribuie lui X_{11} valoarea min (a_1 ,b_1), apoi se înaintează pe linie dacă $a_1 < b_1$ sau pe coloana dacă $b_1 < a_1$, atribuindu-se (în acelaşi mod) valorile celorlalte variabile, până când se epuizează disponibilul.

Un exemplu concret este prezentat în tabelul 7.2:

Tabelul 7.2 Date iniţiale metodei transporturilor

I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	b_j
j=1	4	1	2	6	9	100
2	6	4	3	5	7	120
3	5	2	6	4	8	120
a_i	40	50	70	90	90	

3. Soluţia admisibilă este prezentată în tabelul 7.3:

Tabelul 7.3 Rezultatele metodei transporturilor

I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	b_j
j=1	40	50	10			100
2			60	60		120
3				30	90	120
a_i	40	50	70	90	90	

Citim soluţia de bază admisibilă: X_{11} = 40, X_{12} = 50, X_{13} =10, X_{23} = 60, X_{24} = 60, X_{34} =30, X_{35}= 90, X_{14} = X_{15} =X_{21} =X_{22} =X_{25} =X_{31} = X_{32} = X_{33} = 0.

Nu vom insista în a dezvolta algoritmii programării liniare, pe de o parte pe motivul că recent au fost dezvoltate algoritm puternici pentru orice program liniar sau neliniar, care va fi prezentat mai jos, pe de altă parte solutionarea inclusiv prin programul excel Solver nu necesită cunoaşterea algoritmului. Cu toate acestea vom face unele remarci referitor la modelele de programare liniară:

Având în vedere că atât funcţia scop cât şi relaţiile de restricţii sunt relaţii liniare, ele reprezintă nişte drepte în spaţiul n - dimensional. Se demonstrează că soluţia este îmtr-un colţ al poligonului din spaţiul n - dimensional.

Dacă sistemul de drepte formează un domeniu închis, soluţia este finită, dacă domeniul este deschis (infinit) nu există soluţie finită. De asemenea în cazul existenţei unor relaţii contradictorii (de exemplu x_1 > 3 şi x_1< 2) nu există soluţie din cauza domeniului vid. Există şi alte mesaje ale programului Solver, ele trebuie analizate de la caz la caz conform documentaţiei programului.

7.1.3. PROGRAMARE DINAMICĂ [10]

Metodele de programare dinamică se utilizează în rezolvarea a numeroase probleme de optimizare printre care mai importante sunt problemele de optimizare secvenţială (decizii în etape succesive).

Programarea dinamică se bazează pe principiul optimalităţii formulat de R. Bellman, prezentat mai jos.

Vom nota cu X_o, X_1,… … … . , X_n variabilele de stare:

d_1, d_2,............., d_n, variabilele de decizie;

D_1, D_2,............., D_n domeniile de admisibilitate ale variabilelor de decizie;

∂_1, ∂_2,............., ∂_n deciziile luate;

s_1, s_2,......., s_n etapele sau paşii procesului de luare a deciziilor.

Un şir format din N decizii ∂_1, ∂_2,........, ∂_n luate în N etape ale procesului se numeşte politică. Dacă N este finit, avem orozont finit, dacă N este infinit, avem orizont infinit. X_0 este starea iniţială şi X_n este starea finală a procesului.

Din starea X_0 aplicând decizia ∂_1 sistemul trece în starea X_1

$X_1 = s_1(X_0, d_1)$, $d_1 \in D_1$

Din starea X_{n-1} aplicând decizia ∂_n sistemul trece în starea X_n

$X_n = s_n(X_{n-1}, d_n)$, $d_n \in D_n$,

Deci în starea Xn avem:

$X_n = s_n(X_{n-1}, d_n) = s_n[s_{n-1}(X_{n-2}, d_{n-1}), d_n] = ...=$

$s_n(X_0; d_n, d_{n-1}, \dots\dots.., d_1)$

Avem:

Unde s_n este o transformare care rezultă prin aplicarea succesivă a etapelor $s_1, s_2, \dots.., s_n$. Pornind din X_0 spre X_n vorbim de o analiză prospectivă, şi, invers din stare X_n în starea X_{0n}x0 avem o analiză retrospectivă.

Să notăm cu F($v_1(X_1, d_1)$,........,$v_n(X_n, d_n)$) - venitul (câştigul sau pierderea etc.) obţinut aplicând politica ∂_1, ∂_2,............., ∂_n, unde v_i (X_i, d_i) este venitul etapei i.

O politică $\partial_1', \partial_1', \partial_2', \dots\dots\dots, \partial_n'$ se numeşte optimă (în sensul maximizării) dacă:

$F(v_1(X_1, d_1^*),........,v_n(X_n, d_n^*)) = \max_{d_i \in D_i} F(v_1(X_1, d_1), \dots\dots.., v_n(X_n, d_n))$

$1 \leq i \leq N_i$ şi sunt îndeplinite condiţiile de (analiză prospectivă):

$X_n = s_n(X_{n-1}, d_{n-1})$, $d_{n-1} \in D_{n-1}$ $1 \leq n \leq N$

Principiul optimalităţii al lui Bellman

Fără a apela la demontraţii, enunţul principiului Bellman al optimalităţii se poate exprima simplu:

O politică optimă este formată din subpolitici optime.

Acesta însemnă că de şi decizia în etapa n este optimă, procesul în ansamblu este optim doar dacă toate deciziile din etapele anterioare 1, 2,..,n-1 au fost optime.

Altfel spus, în analiza prospectivă optimizăm etapa1, apoi etapa1 şi 2, apoi etapa 1,2 şi 3..., apoi în ultima etapă deşi optimizăm etapele 1,2,….n, procesul în ansamblu este optim, decât dacă toate subpoliticele anterioare au fost optime. Metoda se poate aplica atât la modele deterministe, cât şi la cele aleatoare. Din păcate nu toate problemele pot fi tratate în acest fel. Pentru a aplica metodele programării dinamice, trebuie ca evaluările (costurile) asociate deciziilor trebuie să fie aditive, iar modul în care s-a ajuns la o stare, nu trebuie să aibă influenţă asupra stărilor viitoare.

În unele probleme X_n nu este dat , ci numai domeniul său de definiţie, în alte cazuri pot fi atât X_0 şi X_n nefixaţi. Formulele de optimizare secvenţială pot fi extinse şi la funcţii cum ar fi **produsul de compoziţie în sensul lui Borel,** sau la cazuri cu decizii cu mai multe variabile pe fază. Există cazuri când variabilele sunt aleatoare şi în unele probleme pot forma un proces marcovian. Unul din avantajele metodelor de programare dinamică este de a nu se mărgini la cazul funcţiilor şi restricţiilor liniare.

Deciziile secvenţiale sunt utilizate inclusiv la arbori de decizii (vezi teoria deciziei).

7.1.4. SOLUŢIONAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NELINIARE [33], [34], [35]

Cunoscând posibilităţile cercetării operaţionale, în special metodele de optimizare fără restricţii, un sistem de relaţii neliniare poate fi soluţionat mai comod căutând soluţia unui sistem echivalent de tipul:

$$Fj\ (x_1, ..., x_i, ..., x_n) = 0 \quad (j = 1, ..., m)$$

sub forma

$$\min\left(\Phi = \sum_{j=1}^{m} F_j^2\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right)\right)$$

apelând la o metodă de optimizare fără restricţii cunoscută (de exemplu metoda simplexului n - dimensional).

Soluţionarea unui sistem de relaţii neliniare prin minimizarea unei funcţionale, **este o metodă generală de soluţionare a sistemelor neliniare de orice tip,** pe lângă generalitatea metodei ea este avantajoasă şi prin faptul că nu presupune condiţii între numărul relaţiilor şi numărul variabilelor, pot fi introduse variabile şi relaţii noi în model fără dificultate..

În literatură [31] se cunosc metode de înlocuire a unor relaţii diferenţiale neliniare cu seturi de relaţii liniare.

De exemplu: o ecuaţie diferenţială de ordin superior, de forma:

$x^{(n)}$ + f(x, x□, x□□□□□□□□□ □,.... $x^{(n-1)}$,t) = 0, poate fi adus la forma x = f(X,t), cu x vector de stare n-dimensional cu componentele $x_1,x_2,\ldots x_n$; f(x,t) vector de câmp cu componentele $f_1,f_2,\ldots f_{n,}$. , dacă se întroduc variabilele dependente $x_1,x_2,\ldots.x_n$ definite astfel:

$x\square_1 = x_2$ $\qquad$ $x\square_n = - f(x_1, x_2, x_3 .... x_{n-1}, x_n, t)$

$x\square_2 = x_3$

$x\square_{n-1} = x_n$

Se obţine deci, un sistem de ecuaţii abordabil cu metoda de soluţionare de mai sus.

Dacă includem în expresia funcţionalei funcţii obiectiv dorite de tip minim, putem obţine chiar **soluţii optime. Iată deci o metodă generală de soluţionare optimă chiar multicriterială a problemelor de optim neliniare (vezi cap. 7.8).** Combinând metoda cu principiul relaxării şi cu descrierea evoluţiei cu **serii dinamice noi de rapidă convergenţă**, putem soluţiona şi probleme de tip variaţional.

Minimizarea funcţionalei combinat cu metoda simplexului n-dimensional este recomandabilă, neexistând condiţii de continuitate şi derivabilitate, astfel în general sunt ocolite cazurile de minime locale. În anexă prezentăm un exemplu concret aplicând acestă metodă.

a.) APLICAŢII: SOLUŢIONAREA MODELULUI DE SISTEM COMPLET [33]

În cele ce urmează dezvoltăm metoda numerică din capitolul precedent, de rezolvare a unui sistem neliniar de ecuaţii:

Fie un sistem de ecuaţii neliniar:

$$F_j(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0 \quad \textbf{(}\boldsymbol{j}\textbf{=1, ..., }\boldsymbol{m}\textbf{)}$$

Construim problema echivalentă pentru calculul valorilor $x_1,...,x_n$, care asigură minimizarea funcţionalei:

$$\min\left(\Phi = \sum_{j=1}^{m} F_j^2(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\right)$$

unde funcţiile sunt date sub forma F_j de mai sus. Observăm că soluţia $x_1,...,x_n$ al sistemului F_j asigură în acelaş timp şi minimul funcţionalei, fiind adevărată şi reciproca. În aceste condiţii metoda soluţionării unui sistem de ecuaţii neliniar poate fi înlocuită cu problema minimizării unei funcţionale fără restricţii suplimentare.

Această ultimă problemă este mai generală şi mai uşoară utilizând una din cunoscutele metode de optimizare fără restricţii, de exemplu:

- metoda variaţiei unidimensionale;

- metoda Box;
- metoda Hooke-Jeeves (pattern search);
- metoda Rosenbrock;
- metode de tip gradient;
- metoda de tip Newton-Rapson;
- metode de contracţie, etc.

Metoda Box (în literatură cunoscut sub diverse denumiri: metoda Spandley sau Hex, sau metoda simplexului *n*-dimensional), nu presupune continuitatea, derivabilitate funcţiilor. În spaţiul *n*-dimensional construim o figură regulată cu *n*+1 vârfuri cu distanţe egale între ele numit simplex (de exemplu în spaţiul tridimensional un tetraedru, etc.).

Calculăm valoarea Φ în vîrfurile simplexului. Vârful aferent valorii celei mai mari, repetitiv înlocuim cu un vârf de sens opus, simetric, obţinând un nou simplex. Repetând metoda sărim vârfurile selectate anterior, la nevoie pentru precizie reducem dimensiunea laturii simplexului, obţinând vârful de valoare dorită. În literatură [14] sunt indicate expresiile de obţinere a vîrfurilor simplexului, de alegere a noului vârf.

Paşii soluţionării modelului sunt următoarele:

- Citim numărul variabilelor (n), mărimea iniţială a laturii simplexului n-dimensional (a), pragul de eroare (ε) pentru calculul lui Φ, numărul maxim de iteraţii (t);
- Construim vârfurile V_1, ..., V_i, ..., V_{n+1} a simplexului, astfel:

$$V_i = V_i\left(x_i^1, \ldots, x_i^j, \ldots, x_i^n\right) \tag{7.4}$$

Unde:

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}}\left(n - 1 + \sqrt{n+1}\right)$$

$$q = \frac{a}{n\sqrt{2}}\left(-1 + \sqrt{n+1}\right)$$

$$x_i^j = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \mathrm{i} = 1 \\ q & \text{dacă } \mathrm{j} + 1 \neq i,\ i > 1 \\ p & \text{dacă } \mathrm{j} + 1 = i,\ i > 1 \end{cases}$$

- Calculăm valoarea Φ în fiecare vârf al simplexului;

- Alegem valoarea cea mai mare (cea mai rea) a lui Φ în vârfurile simplexului, vârf care nu a fost selectat anterior şi reţinem valoarea acestuia (x_i^R);
- Calculăm noul vârf simetric în locul celei selectate pentru eliminare (aceasta va fi imaginea vârfului de eliminat în oglinda celorlalte vârfuri) utilizând relaţia (3, 4):

$$x_i^N = \left[\frac{2}{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^j - x_i^R\right)\right] - x_i^R \qquad (i=1,...n) \qquad (7.5)$$

- Repetăm algoritmul de la punctul 3 până când, se satisface condiţia de ieşire în una din vârfuri, $\Phi \leq \varepsilon$ sau numărul iteraţiilor a ajuns la valoarea t;
- Afişăm coordonatele punctului, valoarea Φ, numărul iteraţiilor, valorile ε, *t*, *a;*

Dacă aproximarea nu este acceptabilă, reducem mărimea laturii simplexului şi continuăm de la punctul 3 omiţând vârfurile deja selectate alegând un vârf mai puţin rău.

Nu există restricţii între numărul relaţiilor şi numărul variabilelor. Dacă problema are mai multe soluţii, în literatură, des se introduc funcţii scop suplimentare, obţinând soluţiii optime [31].

b.) SIMULARE NUMERICĂ [33]

În prezentare utilizăm rezultatele unei cercetării realizat cu sprijinul Universităţii Sapientia Cluj în anul 2004. Prefigurăm soluţionarea unei reţele electrice neliniare descris cu sistemul de relaţii:

$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y - 5 = 0 \\ 3x^3 + y^2 + x - 9 = 0 \end{cases}$$

Construim funcţia:

$$\begin{aligned} \Phi &= F_1^2(x,y) + F_2^2(x,y) = \\ &= \left[4x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y - 5\right]^2 + \left[3x^3 + y^2 + x - 9\right]^2 \end{aligned}$$

Pentru minimizarea funcţiei am utilizat metoda Box (a simpexului n-dimensional) pornind din punctul (0, 0) cu latura a egală cu 2, rezultatele parţiale fiind redate în tabelul 7.4:

Tabelul 7.4 Paşii simulării

Iteraţia	*X*	*Y*	Φ
	a = 2	*p* = 0,5174	*q* = 0,9314
1	0,0000	0,0000	106,000
2	0,5174	1,9314	617,781
3	1,9315	0,5174	48,840
4	–1,4140	1,4140	1488,000
5	1,9314	0,5174	617,781
	a = 2	*p* = 0,0965	*q* = 0,0258
1	0,5174	1,9314	48,840
2	0,6139	1,9572	672,117
3	0,5432	2,1279	48,140
4	0,4467	2,0021	60,460
5	0,6139	1,9572	37,680
6	0,6398	2,0538	36,137
7	0,7105	1,9831	26,774
8	0,7364	2,0797	24,699
9	0,8081	2,0090	16,475
10	0,8339	2,1056	14,277
11	0,9056	2,0349	7,711
12	0,9315	2,1316	5,924
13	1,0032	2,0609	1,712
14	1,0291	2,1578	1,023
15	1,1008	2,0871	0,227

La pornire am utilizat latura simplexului *a*=2, dar întru-cât valoarea funcţiei s-a repetat din vârful 5, a fost necesar continuarea din punctul 3 cu o latură mai mică (*a* = 0,1). După 15 iteraţii am obţinut soluţia *x* = 1,1008 şi *y* = 2,0871, care ar fi posibil de îmbunătăţit doar cu o latură şi mai mică.

Pentru verificare am obţinut minimul lui Φ cu pachetul de programe MATLAB (conform figurii 7.1). După 154 de iteraţii pe graficul alăturat se observă că punctul de mai sus este una din soluţiile problemei, soluţia computerizată fiind
x = 1,0831 şi y = 2,0260.

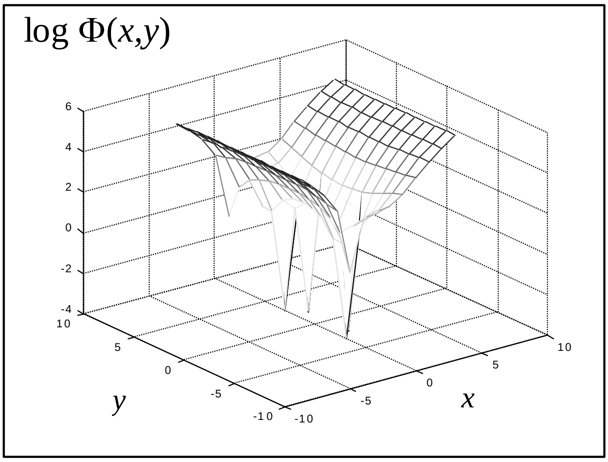

Figura 7.1 Reprezentarea grafică a funcţiei de optimizat

7.2. DECIZII MULTICRITERIALE [2]

Problema constă în alegerea celei mai bune variante luând în considerare o mulţime de variante:

V= $\{V_1, V_2, \ldots\ldots\ldots, V_m)$ şi o mulţime de criterii

C= $\{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots, C_n\}$

Se pune problema ordonării variantelor de la cea mai bună la cea mai slabă, în raport cu toate criteriile. O astfel de ordonare oferă şi cea mai bună variantă, adică variantă optimă.

Datele pentru o problemă multicriterială şi multiatribut pot fi aranjate într-un tabel, conform tabelului 7.5:

Au fost elaborate mai multe metode de evaluare, printre care amintim metoda vectorului propriu, metoda celei mai mici pătrate, metoda entropiei, metoda LINMAP, metoda dominaţiei, metoda maximin, metoda maximax, etc. Din 1965 un grup de cercetători francezi au elaborat metoda ELECTRE, care a fost dezvoltat ulterior cu mai multe variante.

Tabelul 7.5 Problemă multicriterială şi multiatribut

Variante/criterii	C_1	C_2	....	c_n
V_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
V_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}
....	....	....	....	....
V_m	a_{mi}	a_{m2}	....	a_{mn}
Coeficient de importanţă P	p_1	p_2	....	p_n

7.2.1. METODA ELECTRE I.

Să consideră o matrice a consecinţelor normalizată, conform tabelului 7.6:

Tabelul 7.6 Matrice a consecinţelor normalizată

Variante/criterii	C_1	C_2	....	c_n
V_1	r_{11}	r_{12}	....	r_{1n}
V_2	r_{21}	r_{22}	....	r_{2n}
....	....	....	....	....
V_m	r_{mi}	r_{m2}	....	r_{mn}
Coeficient de importanţă P	p_1	p_2	....	p_n

Pentru a compara variantele două câte două se întroduc indicatorii de concordanţă şi de discordanţă a câte două variante.

Indicatorii de concordanţă între V_k şi V_r - k, r =1,….m, care arată nivelul de depăşire a unei variante V_k de către o variantă V_r, se defineşte astfel:

$$C(V_k, V_r) = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 \cdot + \dots + p_n} \sum_{j}^{n} p_j \qquad (7.6)$$

$\sum_{j}^{n} p_j$ se face pentru acei indici j, pentru care $r_{kj} \geq r_{tj}$.

Indicatorul de discordanţă, care dă o informaţie despre modul în care varianta V_t este depăşită de varianta V_k, t,kЄ{1,....,m}, se defineşte astfel:

$\frac{1}{d} \max_j |r_{kj} - r_{jk}|$ maximul se ia pentru acei j pentru care $r_{kj} \leq r_{tj}$.

d(V_k, V_r)={0 dacă $r_{kj} > r_{tj}$ pentru orice j=1,….,n.

Pe mulţmea V se întroduce o relaţie în felul următor. Varianta V_k surclasează o variantă V_t, dacă C(V_k,V_t)$\geq$ p şi d(V_k,V_t)$\leq$q, unde p şi q sunt praguri cuprinse între 0 şi 1.

În practică, se porneşte de la valorile p=1 şi q= 0 şi se micşorează valoarea lui p cu un pas stabilit de utilizator, iar cea a lui q se măreşte până când se obţine o variantă V^* care le surclasează pe toate celelalte, adică:

C(V_k,V_t)$\geq$ p şi d(V_k,V_t)$\leq$q, i = 1, 2, ...,n.

Surclasarea este cu atât mai puternică , cu cât p este mai apropiat de 1, iar q mai aproape de 0.

Se remarcă însă că metoda nu ţine seama în nici un fel de dependenţa sau independenţa criteriilor.

În ultimii ani au fost dezvoltate unele extensii ale decizilor multicriteriale:

- metoda entropiei;
- metoda LINMAP;
- metoda ONICESCU;
- diverse versiuni ale metodei ELECTRE;
- Metoda Saphier-Rusu, etc.

7.3. FENOMENE DE AŞTEPTARE [28], [19]

Natura aleatoare a fenomenelor reale face ca foarte des să apară aşteptări inevitabile între ele. Se impune ca necesar elaborarea unui program da aşteptare adecvat, care să fie cât mai convenabil din punct de vedere economic.

Un fenomen de aşteptare se caracterizează prin trei elemente principale:

1. Consumatorii care solicită serviciul;
2. Şirul de aşteptare sau coada care se formează în cazul în care consumatorii trebuie să aştepte;
3. Staţia de servire, a cărei menire este satisfacerea cererilor.

În prima etapă prin instrumente de calcul al probabilităţilor, statistică matematică, se poate aprecia tipul de repartiţie al sosirilor şi servirilor; în a doua etapă se încadrează fenomenul într-unul din modelele teoretice cunoscute, se determină indicatorii caracteritici ale fenomenului; iar în a treia etapă se determină criteriul după care se va lua decizia de îmbunătăţire.

Pentru alegerea modelului matematic, se studiază :

- Ritmul sosirii consumatorilor;

Pentru a putea face previziuni trebuie să cunoaştem legea de probabilitare a sosirilor.

- Numărul posturilor din staţia de servire;

Putem avea un singur post; un număr finit de posturi; un număr infinit de posturi.

- Disciplina şirului de aşteptare;

Se practică cel mai des una din disciplinele:

- primul sosit, primul servit;
- la întâmplare (de exemplu fabricaţia în bandă);
- cu preferinţe, etc.

- Ritmul de servire, poate fi: constant, variabil dar determinat şi aleator.

Ne interesează în special ultimul caz, şi în consecinţă, legea de probabilitate a servirilor. Capacitatea staţiei este determinată atunci când cunoaştem ritmul şi numărul posturilor de servire.

Procesul de aşteptare se descrie deci cu tripletul [f(x), h(x), S], f(x) şi h(x) reprezintă legile de probabilitate ale sosirilor şi respectiv servirilor, iar S este numărul posturilor de servire.

Cunoscând acest triplet, putem calcula durata aşteptării consomatorilor şi staţiei (pe un interval de timp). Dacă asociem acestor aşteptări costurile, obţinem funcţia economică pe care o putem minimiza, acţionând fie asupra ritmului de sosire, fie asupra capacităţii staţiei.

Problemele de aşteptare vor avea o formă uşor de rezolvat, dacă sosirile şi serviciul ascultă de legi de probabilitate simple.

Pentru multe din fenomenele de aşteptare, numărul de sosiri în unitate de timp, în sistemul de aşteptare, se probează a fi o distribuţie poissoniană, adică probabilitatea de a avea *n* sosiri într-un interval de timp t , notat cu $P_n(t)$ de forma:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \qquad (7.7)$$

(n=0,1,….) n= numărul unităţilor din sistem.

Unde:

λ reprezintă numărul mediu de sosiri în unitatea de timp. Sosirile sunt guvernate de o lege Poisson atunci când sunt independente între ele şi totodată independente de data observării.

Similar, probabilitatea de a avea *n* serviri în unitate de timp (0,t] poate fi de tip Poisson:

$$Q_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} \cdot e^{-\mu t} \qquad (7.8)$$

Unde:

μ este numărul mediu de serviri în unitatea de timp.

Dacă unităţile sosesc după un proces Poisson de parametru λ ($0<\lambda<\infty$) fluxul se numeşte aleator sau poissonian (M).

Dacă unităţile sosesc la intervale regulate de timp, fluxul se numeşte regulat sau determinat (D). Mai sunt utilizate des modele cu intrare după lege exponenţială negativă, lege de servire tip Erlang, sosiri poisson şi servire exponenţială, etc.

Cele mai des utilizate modele de aşteptare sunt:

- Sisteme de aşteptare cu o singură staţie:
  - Sistemul M,M,1 (intrare poissonian, ieşire poissonian, 1 staţie);
  - Sistemul M, E,1 (intrare poissonian, ieşire Erlang,1 staţie);
  - Sistemul E, E, 1;
  - Sisteme cu flux de intrare şi (sau) timp de servire determinat;
  - Sisteme M, G, 1 cu ieşire exponenţială (geometrică).

- Sisteme de aşteptare cu mai multe staţii:
  - Sistemul M, M, S $S < \infty$ S numărul staţiilor;
  - Sistemul M, M, S $S = \infty$;
  - Sistemul M, D, S cu servire constantă (deterministă);
  - Modele cu S staţii în serie.
- Sisteme cu restricţii;
- Modele cu intrări şi (sau) servicii în grup.

Se va prezenta un studiu de caz general, cu verificarea ipotezei legii de repartiţie.

Se prezintă mai jos cele mai uzuale formule pentru determinarea diverselor parametri ai procesului de aşteptare:

a.) MODELUL 1.

Ipoteze: sosiri şi serviri Poisson; staţie cu un singur post; număr mediu de sosiri în unitate de timp λ; număr mediu de serviri în unitate de timp μ.; regim staţionar:

1. Factor de serviciu $\varphi = \lambda/\mu$;
2. Probabilitatea de a fi *n* unităţi in sistem $p_n = \varphi^n (1-\varphi)$;
3. Probabilitatea de a nu avea aşteptare $p_0 = 1-\varphi$;
4. Numărul mediu de unităţi în sistem $\overline{n} = \varphi/(1-\varphi) = \lambda/(\mu - \lambda)$;
5. Numărul mediu de unităţi în şirul de aşteptare $\overline{v} = \varphi^2/(1-\varphi)$;

Timpul mediu de aşteptare a unei unităţi în şir $= \lambda/(\mu(\mu - \lambda))$.

Timpul mediu petrecut de o unitate în sistem (în aşteptare şi la servire)= $1/(\mu - \lambda)$.

Probabilitatea ca numărul unităţilor din sistem să fie mai mare ca k , = φ^{k+1} .

Probabilitatea ca timpul de aşteptare a unei unităţi în fir să fie mai mare ca un timp t, = $\varphi .\ e^{-(\mu-\lambda)t}$.

6. Numărul mediu de staţii neocupate $\overline{\rho} = 1-\varphi$.
7. Probabilitatea de a exista aşteptare $p(>0) = \varphi$.
8. Durata medie de aşteptare în şir $\overline{t} = \varphi/(\mu-\lambda) = 1/(\mu-\lambda) - 1/\mu$.

Rezolvarea practică a problemelor care se încadrează în modelul 1:

- se stabilesc λ şi μ şi se verifică validitatea ipotezei Poisson pentru sosiri şi serviri;
- se calculează durata medie de aşteptare a unui consumator cu formula nr. 7.8 de mai sus;
- cunoscând costul unitar (pe unitatea de timp) al aşteptării consumatorilor şi al aşteptării staţiei se caută să se determine acel ritm de sosire (λ) care minimizează costul global al sistemului; de obicei prin încercări.

b.) MODELUL 2

Ipoteze: sosiri Poisson, staţii de servire regim staţionar.

$\varphi^{*} = \varphi / S$

φ^{*} se numeşte factor de serviciu al sistemului , S numărul posturilor de serviciu. Se constată că $\varphi^{*} < 1$.

Numărul de unităţi din sistem este egal cu numărul de unităţi din şir la care se adaugă numărul de unităţi în curs de servire. Relaţiile cu care se calculează probabilitatea de nu avea aşteptări şi durata medie de aşteptare a unui consumator sunt:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\varphi^S}{S!\left(1-\frac{\varphi}{S}\right)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\varphi^n}{n!}} \qquad (7.9)$$

$$\tilde{t} = \frac{\varphi^S}{S.S!\left(1-\frac{\varphi}{S}\right)^2 . n} \cdot p_0 \qquad (7.10)$$

Ordinea calculelor este similară ca în modelul 1, pentru minimizarea cheltuielilor totale acţionând fie asupra ritmului de sosire, fie asupra capacităţii staţiei (numărul de posturi).

c.) METODE DE SIMULARE

- **Simulare tip joc**

Presupune un model matematic al realităţii, experimentarea costând în acordare unor valori arbitrare varibilelor din model, urmărindu-se efectul asupra uneia sau mai multor funcţii obiectiv.

- **Simulare MONTE CARLO**

Tehnica de simulare asociază unei probleme deterministe un model aleator şi, prin generarea unor variabile aleatoare legate funcţional de soluţie, se realizează experienţe pe model şi se furnizează informaţii despre soluţia problemei deterministe.

Foarte des formulele existente pentru distribuţiile matematice standard nu se potrivesc cu distribuţiile ritmurilor de sosire şi servire din problemele reale specifice. Complexitatea matematică creşte cu apariţia distribuţiilor nestandard şi cu cât problema se îndepărtează de cazul cu o singură staţie de servire. Aceste probleme mai complexe ale fenomenelor de aşteptare pot fi aproape întotdeuna tratate prin metoda simulării. Prezentăm în continuare elementele metodei de simulare MONTE CARLO. Etapele parcurse sunt:

1. Determinarea distribuţiei empirice prin observarea instantanee a fenomenului, trasarea curbei probabilităţilor cumulative (distribuţia frecvenţelor se converteşte în distribuţia frecvenţelor cumulative prin însumarea frecvenţelor mai mici sau egale cu cea observată: dacă de exemplu durata de execuţie a unei observaţii a fost de 0,25 min, pentru 3 observaţii şi 0,3 min pentru 2 observaţii, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0,25 & 0,3 \end{pmatrix}$, distribuţia cumulativă cu 5 observaţii va fi cu durata de 0,3 sau mai mici).
2. Selectarea unui eşantion de numere aleatoare uniform distribuite şi convertirea lor la o mulţime de numere aleatoare cu distribuţie cumulativă determinată prin observarea directă. Convertirea are loc rezultând o curbă cu F(x) cu distribuţie cumulativă (uniform distribuită) funcţie de valorile variabilei aleatoare X.
3. Alegerea unei metode de estimare care să ofere o precizie mai mare pentru acelaş volum al selecţiei sau reducerea numărului de observaţii pentru acelaşi grad de precizie –procedee denumite de micşorare a dispersiei.

Eşantionul pregătit conform punctelor 1-3, cu distribuţia dată poate fi folosit pentru simularea diferitelor stări viitoare ale sistemului.

Concluziile sunt aceleaşi ca şi când aceste numere ar fi furnizate direct din fenomenul studiat.

Gradul de eroare este evaluat şi conştient admis prin procedee de micşorare a dispersiei, când spunem “ concluziile sunt aceleaşi“. Tabele cu numere aleatoare uniform distribuite pot fi generate cu calculatoarele electronice, sau preluate din tabele tipărite din manuale de statistică. Se va pezenta un exemplu concret.

Să considerăm o staţie centralizată de preperare a betonului [19] şi coloana de autobasculante care transportă betonul la şantier. Avem de a face cu un şir de aşteptare. Staţia de beton este punctul de servire cu un singur post, iar basculantele sunt consumatorii care aşteaptă încărcarea. Putem admite că ritmul sosirilor este poissonian întru-cât se indeplinesc condiţiile: evenimentele sunt independente, şi ele nu depind de data observaţiei. Acelaş lucru se poate spune şi despre serviri.

Să presupunem că verificarea acestor două ipoteze, cu ajutorul testului $\chi 2$,

$\chi 2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-N_i')^2}{N_i'}$ < χ^2_{α} din tabele cu k – 2 grade de libertate,

N_i frecvențe, $\propto$ prag de semnificație ales (de exemplu 0,95)

Din datele prelucrate statistic rezultă durata medie de serviciu μ de 5 minute. Ne putem organiza astfel ca numărul basculantelor să asigure în medie sosiri λ la 6, 7 sau 8 minute. Costul aşteptării unei basculante este de 20 lei/oră, iar costul aşteptării staţiei este de 200 lei/oră; se cere determinarea soluţiei optime.

Ne încadrăm în modelul 1 de mai sus. Calculăm costul global al aşteptărilor în cele 3 cazuri posibile şi vom alege soluţia care conduce la cheltuieli minime.

Cu sosiri la 6 minute rezultă parametrii procesului:

λ= 1/6 sosiri /minut;

μ= 1/5 serviri/minut;

durata medie de aşteptare pentru un consumator

$\bar{t}_a$ = 1/(μ-λ) – 1/μ= 0,25 minute $\cong 0{,}5\ ore$

Numărul de sosiri pe zi va fi:

8 ore x 60 minute x (1/6) sosiri/min = 80 sosiri.

Numărul de ore necesare pentru a servi aceste sosiri:

(80 sosiri x 5 min)/60 min =6,66 ore.

Timpul pierdut de consumator va fi :

80 sosiri x 0,5 ore =40 ore,

iar timpul pierdut de staţie:

8 ore – 6,66 ore ,1,34 ore.

Costul aşteptării rezultă:

40 ore x 20 lei/oră + 1,34 ore x 200 lei/oră = 1068 lei.

Sosiri la 7 minute.

λ= 1/7 sosiri /minut

μ= 1/5 serviri/minut

durata medie de aşteptare va fi:

$\bar{t}_a$ = 1/(μ-λ) – 1/μ= 12,5 min

Numărul de sosiri pe zi va fi:

8 ore x 60 min x (1/7) sosiri/min ≅ 68 sosiri,

Iar numărul de ore necesar pentru a servi aceste sosiri:

(68 sosiri x 5 min)/60 min ≅ 5,66 ore.

Rezultă timpul pierdut de consumatori:

(68 sosiri x 12,5 min) / 60 min ≅ 14,16 ore,

Iar cel pierdut de staţie

8 ore – 5.66 ore = 2,34 ore.

Costul aşteptărilor se ridică la:

14,6 ore x 20 lei/oră + 2,34 ore x 200 lei/oră ≅ 751 lei

Similar făcând calculul pentru sosiri la 8 minute cu λ= 1/8 sosiri /minut

μ= 1/5 serviri/minut

$\bar{t}_a$ = 1/(μ-λ) – 1/μ=8,3 min

numărul de sosiri pe zi

8 ore x 60 min x (1/8) sosiri pe min = 60 sosiri,

Numărul de ore necesare servirii lor:

(60 sosiri x 5 min)/60 = 5 ore

Timpul pierdut de consumatori>

(60 sosiri x 8,3 min)/60 = 8,3 ore,

Iar cel pierdut de staţie :

8 ore – 5 ore = 3 ore

Costul total va fi:

8,3 ore x 20 lei/oră +3 ore x 200 lei/oră =766 lei

Comparând cele trei costuri globale (1068 lei, 751 lei, 766 lei) rezultă că soluţia sosirii autobasculantelor la 7 minute este cea mai economică.

Întrucât din datele statistice existente la staţie reiese că, în medie, o autobasculantă face 10 curse pe zi, rezultă numărul optim de maşini 68 sosiri/10 ≅ 7 autobasculante. Pentru sosiri la 6 minute ar fi necesari 8 autobasculante, iar pentru sosiri la 8 minute 6 autobasculante.

7.4. NOTIUNI DE TEORIA GRAFURILOR

Fie o mulţime numărabilă X şi o aplicaţie $\Gamma : X \rightarrow$ P (X). Cuplul (X, Γ) constituie un graf.

Un graf în care X este o mulţime finită poate fi reprezentat geometric prin puncte (vârfuri, noduri) şi segmente orientate (arce); nodurile reprezintă elementele mulţimii X = { x_1 ,x_2 ,….,x_n } iar arcele, săgeţiile de la x_i la x_j (x_i ,x_j) Є X. Notăm mulţimea lor U.

În reprezentarea geometrică a grafului nu are nici o importanţă poziţia nodurilor şi lungimea arcelor.

Un arc de forma (x_i ,x_i) se numeşte buclă. Pentru arcul (x_i ,x_j) vârful x_i , se numeşte extremitatea iniţială (originea) iar x_j extremitatea terminală.

Graful (X, Γ) se numeşte simetric dacă odată cu relaţia (x_i ,x_j) Є Γ are loc şi relaţia (x_j ,x_i) Є Γ.

Graful (X, Γ) se numeşte antisimetric dacă pentru (x_i ,x_j) Є Γ , (x_j ,x_i) ∋ Γ.

Succesiunea de arce u_1 , u_2 ,........, u_k în care extremitatea terminală a fiecărui u_k coincide cu extremitatea iniţială a arcului u_{k+1} se numeşte drum.

Un drum care nu trece de două ori prin acelaşi arc se numeşte drum simplu.

Dumul care nu trece de două ori prin acelaşi vârf se numeşte drum elementar. Un drum elementar care conţine toate vârfurile grafului se numeşte drum hamiltonian.

Un circuit este un drum finit închis.

Circuitul elementar este un drum elementar închis.

Circuitul hamiltonian este un drum hamiltonian închis.

Graf tare conex este graful în care pentru orice vârfuri x_i ,x_j ($i \neq j$), există un drum de la x_i la x_j .

Un graf este orientat dacă are nodurile unite prin arce.

Un graf este neorientat dacă are nodurile unite prin muchii.

Cuplul a două vârfuri x_i şi x_j astfel încât (x_i ,x_j) Є U şi/sau (x_J ,x_I) Є U ($i \neq j$) se numeşte muchie între vârfurile x_i şi x_j .

Graful parţial al unui graf G este graful obţinut prin suprimarea unor arce ale lui G dar prin menţinerea tuturor nodurilor.

O succesiune de muchii m_1 ,$m_{2,}$ ....,m_k ,......m_1 în care pentru fiecare muchie m_k o extremitate *a* să coincidă cu o extremitate a muchiei m_{k-1} iar celalaltă extremitate a sa cu o extremitate a muchiei m_{k+1} se numeşte lanţ.

Un lanţ finit care pleacă dintr-un vârf şi revine în acelaş vârf se numeşte ciclu.

Un graf se numeşte conex dacă pentru orice vârfuri diferite x_i şi x_j există un lanţ care le uneşte.

Un graf conex şi fără cicluri se numeşte arbore.

Reprezentarea geometrică a grafelor este folosită în numeroase probleme practice pentru a figura circuite electrice, organigrame, succesiuni de activităţi, reţele de comunicaţii, etc.

Teoria grafelor, făcând abstracţie de sensul concret al grafelor, studiază proprietăţile generale ale acestora, proprietăţi care odată stabilite au numeroase aplicaţii în practica tehnico-economico-ştiinţifică.

7.4.1. METODA DRUMULUI CRITIC [12], [19]

Analiza drumului critic are ca obiect conducerea realizării unui proiect sau a unei acţiuni complexe în vederea obţinerii unei eficienţe economice maxime.

Un proiect este o mulţime de activităţi înzestrată cu o relaţie de ordine numită relaţie de precedenţă directă. Procesul tehnologic impune ordinea de execuţie a activităţilor, deci relaţia de precedenţă.

Prin activitate se înţelege o parte a proiectului care poate utiliza timp şi eventual resurse (ex.: montarea unui ansamblu).

Grafele utilizate în metoda drumului critic trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

- Să aibă un singur nod iniţial şi un singur nod final;
- Să nu conţină nici un circuit;
- Să fie ponderat (fiecărui arc să i se poată ataşa o valoare reală).

Pentru reprezentarea prin grafe există două posibilităţi:

1. Metoda americană (PERT) cu grafe în care:
   - Nodurile reprezintă evenimente;
   - Arcele reprezintă activităţi (care duc la realizarea evenimentelor).
2. Metoda franceză (a potenţialelor MPM) în care:
   - Nodurile reprezintă activităţi;
   - Arcele reprezintă restricţii, resurse.

Metoda franceză nu cere reprezentarea obligatorie a problemei sub forma a unui graf, ci sub forma unui tabel, ceea ce uşurează abordarea pe calculator a soluţionării.

Durata realizării unui proiect reprezentat prin metoda americană printr-un graf care îndeplineşte condiţiile (1) este egală cu suma duratelor de execuţie ale activităţiilor situate pe **drumul cel mai nefavorabil** care uneşte vârful (evenimentul) iniţial cu vârful (evenimentul) final din graful G.

Acest drum care este, evident un drum de lungime maximă în graful G se numeşte drum critic. Drumul critic poate să nu fie unic. Durata proiectului calculată cu lungimea drumului critic este cea mai scurtă în condiţiile tehnologice considerate, întrucât nu este posibilă executarea procesului într-un timp mai scurt în condiţiile date.

Evenimentele drumului critic se numesc evenimente critice iar activităţile drumului critic se numesc activităţi critice.

Execuţia activităţilor critice în timpul stabilit iniţial este obligatorie, altfel timpul de execuţie total al lucrării se măreşte.

Pentru a reprezenta structura unui proiect , figura 7.2 (de exemplu o investiţie industrială) există următoarele posibilităţi:

- **Reprezentare tabelară**, în care se dau pentru fiecare activitate toate activităţiile imediat precedente cu duratele lor, tabelul 7.7;
- **Reprezentarea prin reţele activităţi-nod,** conform figurii 7.3 Cu activităţi pe noduri etichetate de forma

1	2	3
4	5	6

1 - termen minim de începere a activităţii;
2 - denumirea activităţii;
3 - termen minim1 de terminare a activităţii;
4 - termen maxim de începere a activităţii;
5 - d urata activităţii;
6 - termen maxim de terminare a activităţii.

Arcele aici reprezintă restricţiile între activităţi (succesiunea, etc.)
Reprezentarea prin reţele activitate – arc.

Nodurile reprezintă evenimente etichetate de forma [a,b], a-termen început ; b-termen sfârşit, iar arcele orientate reprezintă succesiune de activităţi cu duratele lor. Termenul de început este cel mai mare dintre (termenul de sfârşit al activităţii incidente + durata activităţii precedente respective).

Pentru a permite o reprezentare grafică a tuturor cazurilor de precedenţă se pot utiliza **activităţi fictive** care nu se găsesc în tabelul de activităţi (cu durata zero). Deasemenea se pot întroduce la nevoie evenimente şi chiar operaţii fictive la operaţii paralele, etc.

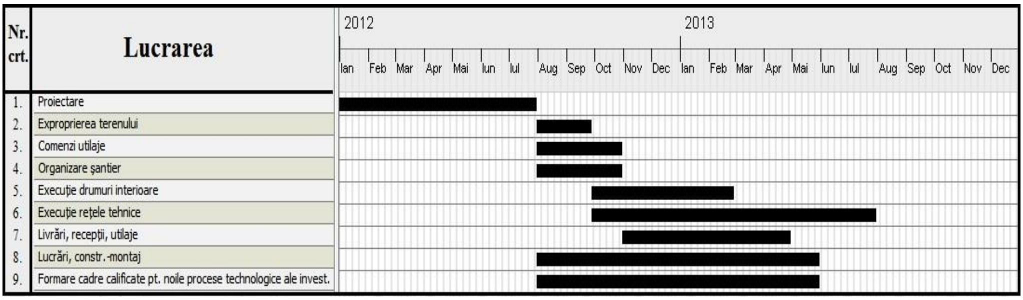

Figura 7.2 Grafic GANT

Tabelul 7.7 Activităţile proiectului

Nr. crt.	Denumirea activităţii şi prescurtarea sa	Activităţi imediat precedente	Durata (luni)
1	Proiectare (P)	-	7
2	Exproprierea terenului (E)	P	2
3	Comenzi utilaje (C,U)	P	3
4	Organizarea şantier – etapa 1 (O.S $_1$)	P	1
5	Formare cadre calificate (F)	P	10
6	Execuţie drumuri interioare – etapa 1 (D_1)	E; O.S_1	2
7	Execuţie reţele tehnice – etapa 1 (R_1)	E; O.S_1	5
8	Livrări, recepţii utilaje (L.U)	CU	6
9	Lucrări construcţii-montaje – etapa 1 (C_1)	E; O.S_1	4
10	Organizarea şantier – etapa 2 (O.S_2)	O.S_1	2
11	Execuţie drumuri interioare – etapa 2 (D_2)	D_1; O.S_2; R_1	3
12	Execuţie reţele tehnice – etapa 2 (R_2)	R_1	5
13	Lucrări construcţii-montaje – etapa 2 (C_2)	L.U.; C_1; R_1	10

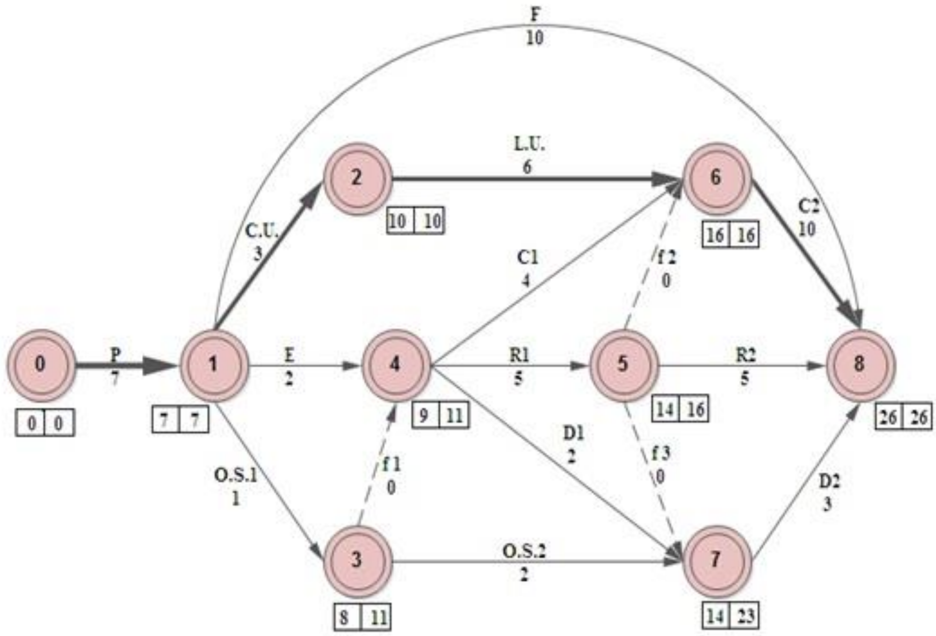

Figura 7.3 Reprezentarea grafica a activitatilor

7.4.2. CALCULUL DRUMULUI CRITIC

După definirea grafului reţea al programului, se pune problema calculului duratei totale al programului.

Această durată nu poate fi inferioară sumei duratelor luaţi pe drumul cel mai defavorabil (drum critic). Orice graf conex şi fără circuite are cel puţin un drum critic.

Arcele aflate pe drumul critic se numesc arce critice.

Corespunzător se definesc operaţiile critice şi necritice. Întârzierea operaţiilor critice duce la întârzierea întregului program, motiv pentru care în analiză se pune accent deosebit pe aceste operaţii critice. Operaţiile necritice admit unele întârzieri în ceea ce priveşte momentul începerii lor.

La oricare vârf (eveniment) al grafului se poate asocia un interval de fluctuaţie (marjă de timp) delimitat de:

- $T^-(i)$ = data minimă de început;
- $T^+(i)$ = data maximă de terminat.

Ţinând cont de acest interval de fluctuaţie pentru orice operaţie (i,j) avem:

- $T^-(i) + D(i,j)$ = sfârşitul cel mai devreme;
- $T^+(j) - D(i,j)$ = începutul cel mai târziu.

Putem asocia fiecărui arc (I,j) al grafului reţea al programului diferite marje (rezerve) de timp ţinând cont de intervalele de fluctuaţie al evenimentelor care îl determină şi de durata operaţiei respective:

- Marja liberă:

$$M(L) = T^-(j) - T^-(i) - D(i,j) \tag{7.11}$$

- Marja totală:

$$M(T) = T^+(j) - T^+(i) - D(i,j) \tag{7.12}$$

- Marja de siguranţă:

$$M(S) = T^-(j) - T^+(i) - D(i,j) \tag{7.13}$$

Câteva observaţii asupra vârfurilor şi arcelor critice:

- Dacă cele 3 marje ale unui arc sunt nule, atunci arcul uneşte 2 puncte critice;
- Două puncte critice pot fi legate printr-un arc necrotic;
- Oricare arc critic are marja de siguranţă nulă şi aparţine unui drum critic;
- Orice drum care uneşte vârfuri critice prin arce critice face parte dintr-un drum critic.

Drumul care trece numai prin arce cu marjă liberă nulă şi ajunge într-un punct critic, trece numai prin prin puncte critice, deci:

- ✓ Arcele unui astfel de drum au toate marjele nule;
- ✓ Dacă un graf conex şi fără circuite are o singură intrare şi o singură ieşire, atunci orice drum care uneşte intrarea cu ieşirea numai prin arce cu marjă liberă nulă, este drum critic.

Vârfurile şi arcele critice caracterizează programul între limitele rigid şi elastic:

- ✓ Un program cu toate vârfurile şi toate arcele critice este complet rigid (toate drumurile sunt critice);
- ✓ Programul cel mai elastic este cel al cărui graf admite un singur drum critic de lungime minimă.

Pentru calculul şi căutarea diverselor tipuri de drumuri, teoria grafelor pune la dispoziţia utilizatorilor diferiţi algoritmi, cei mai cunoscuţi fiind: algoritmul lui Ford, Belman-Kalaba, Kaufmann-Desbazeile, Y. Chen, Ford-Fulkerson, etc.

EXEMPLUL 1.

Ne propunem să determinăm momentele de începere cele mai devreme, momentele de terminare cele mai târzii, marjele, drumul critic pentru graful orientat dat prin tabelul PERT, 7.8:

Tabelul 7.8 Activităţile proiectului

Evenimentul I	Activităţi incidente	Durata D	$T^-(i)$	$T^+(i)$	M(L)	M(T)	M(S)
0	-		0	0			
1	0-1	41	41	41	0	0	0
2	1-2	4	45	49	0	4	0
3	1-3	8	49	49	0	0	0
4	2-4	0	49	49	4	0	0
	3-4	0	49	49	49	49	0
5	1-5	6	47	71	0	24	0
6	4-6	22	71	71	0	0	0
7	6-7	0	71	71	0	0	0
	5-7	0	71	71	24	71	0
8	7-8	6	77	77	0	0	0
9	8-9	4	81	81	0	0	0
10	9-10	5	86	86	0	0	0

$T^-(0)= 0;$

$T^-(j)= \max (T^-(i) + D(i,j));$

$T^-(1)= 41;$

$T^-(2)=41+4=45;$

$T^-(3)= T^-(1) +D(1,3)=41+8=49;$

$T^-(4)= \max ((T^-(2) + D (2,4));(T^-(3) + D (3,4))=\max (45+0; 49+0)=49;$

$T^-(5)= T^-(1) + D (1,5)= 41+6=47;$

$T^-(6)= T^-(4) + D (4,6)=49+22=71;$

$T^-(7)= \max ((T^-(6) + D (6,7)); T^-(5) + D (5,7))= \max (71+0; 47+0)= 71;$

$T^-(8)= T^-(7) + D (7,8)=71+6=77;$

$T^-(9)= T^-(8) + D (8,9)=77+4=81;$

$T^-(10)= T^-(9) + D (9,10)=81+5=86.$

Aceste valori se înscriu în tabel. Deci durata proiectului este egal cu 86.

Similar se calculează şi momentele de terminare cele mai târzii, parcurgând graful în sens invers:

$T^+(10)= 86;$
$T^+(j)= \min(T^+(i) - D(i,j));$
$T^+(9)=86-5=81;$
$T^+(8)=81-4=77;$
$T^+(7)=77-6=71;$
$T^+(6)=71-0=71;$
$T^+(4)=71-22=49;$
$T^+(3)=49-0=49;$
$T^+(2)=49-0=49;$
$T^+(5)=71-0=71;$
$T^+(1)=\min(T^+(2)– D(1,2); T^+(3)– D(1,3);$
$T^+(5)– D(1,5))=\min(49-4; 49-8;71-6)=41;$
$T^+(0)=41-41=0.$
Se calculează marjele conform relaţiilor de mai sus.

Dumul critic trece prin evenimentele pentru care $T^-(i)= T^+(i)$, adică evenimentele: 0-1-3-4-6-7-8-9-10.

Pentru reprezentarea încadrării în timp a activităţilor, a necesarului de resurse aferente diverselor perioade, etc. se utilizează aşa numitele grafice GANT.

Ultimele versiuni ale programului Excel pe calculatorul electronic, permite elaborarea diverselor variante de grafice GANT.

Ca o fază terminală a metodelor de analiză ADC (analiza drumului critic) uneori se utilizează proceduri de nivelare a resurselor. Operaţia de nivelare este necesară pentru că în practică nu se admite fluctuaţii mari de resurse pe perioade scurte (de exemplu prima perioadă necesită o mare intensitate de forţă de muncă, după care există un gol de utilizare, urmând ca apoi din nou să există o cerere importantă).

Pentru nivelarea resurselor se utilizează diverşi algoritmi de apreciere a unor profile (grafice) de încărcare. Metodele curente utilizează formule de distorsiune din teoria reţelelor electrice, sau metode clasice cum ar fi minimul sumelor pătratelor încărcărilor pe perioade, etc.

7.4.3. RUTE OPTIMALE ÎN REŢELE FĂRĂ CIRCUITE

Algoritm pentru determinarea drumului hamiltonian într-un graf orientat şi fără circuite (Y.Chen):

Construim o matrice C a grafului cu elementele c_{ij} astfel că:

$c_{ij} = 1$ dacă există arcul (x_i, x_j);
$c_{ij} = 0$ în caz contrar.

Construim o matrice T terminală din C (Y.Chen):

i) Fie $c_{1i}, c_{1j}, \ldots, c_{1m}$ elementele diferite de zero din linia întâia a lui C:
Adunăm boolean liniile i, j, ...,m la prima linie

ii) Presupunem că au apărut alte elemente diferite de zero în linia întâia, generate de operaţia de la pasul precedent, fie acestea $c'_{1p}, c'_{1q}, \ldots, c'_{1r}$
Adunăm boolean liniile p, q, ...,r la prima linie.

iii) Repetăm pasul ii), până când nu mai putem genera alte elemente diferite de zero pe linia întâia.

iv) Procedeul descris trebuie repetat pentru fiecare linie din C. Matricea obţinută este matricea T.

Determinarea drumului Hamiltonian:

i) Construim matricea conexă terminală T conform celor descrise mai sus.

ii) Dacă toate elementele de pe diagonala principală a matricei T sunt nule (graful nu are circuite) şi numărul elementelor diferite de zero din T este (n.(n-1))/2.
graful conţine un drum hamiltonian.

iii) Calculăm puterile de atingere ale vârfurilor grafului numărând elementele egale cu unu de pe liniile corespunzătoare din matricea T. Aşezând vârfurile grafului în ordinea descrescătoare a puterilor de atingere, obţinem drumul hamiltonian.

Exemple de probleme tip de aplicare a teoriei grafelor:

1. Alegerea traseului de lungime minimă pentru transportul între două puncte cu diverse căi de comunicaţii şi distanţe date. Problema tipică se numeşte **determinarea drumului de lungime minimă.**

2. Aprovizionarea dintr-un punt x_1 a unor puncte de desfacere $x_2, x_3, \ldots, x_n$ date trecând pe la fiecare o singură dată şi apoi revenind la punctul de plecare. Arterele de circulaţie au sensuri unice cu distanţele date. Se pune problema unei ordini de aprovizionare avantajoase, cu distanţa totală minimă. Soluţia constă în determinarea **circuitului hamiltonian minim** şi tipul de problemă se numeşte şi **problema comis-voiajorului**.

3. Într-o problemă de transport avem expeditorii S_1 ,S_2 şi destinatarii F_1 ,F_2 ,F_3 . Se cunosc cantităţile disponibile şi cele necesare, dar în loc de preţuri (ca la problemele de transport) se dau capacităţile limitate de transport pe rute. Se pune problema să maximizăm cantitatea ce se livrează cu respectarea limitărilor de capacitate pe fiecare rută. Acest tip de problemă este numită în teoria grafelor **problemă de flux în reţea**, existând algoritmi adecvaţi pentru găsirea soluţiei optime (de exemplu algoritmul Ford-Fulkerson, etc)..

Pentru realizarea unui proiect compus din activităţi care consumă resurse materiale, umane şi/sau băneşti există două mari grupe de probleme tip în legătură cu resursele:

4. **Nivelarea resurselor**: să se obţină o programare a activităţilor într-o perioadă de timp T pentru care profilul resurselor necesare (aferent tuturor activităţilor care au loc în perioada dată) Z_l (t), t=1,2,……,T se menţine pe cât posibil la o valoare constant (de exemplu nu este acceptabil ca numărul angajaţilor să se schimbe zilnic în mod esenţial).

5. **Alocarea resurselor**: să se obţină o programare a activităţilor proiectului pentru care profilul resurselor Z_l (t) nu depăşeşte profilul resurselor disponibile D_l (t), [Z_l (t) $\leq$ D_l (t), t=0,1,......] astfel ca durata totală de execuţie a proiectului să fie minimă.

6. După realizarea calculaţiilor în timp, se poate trece la o reoptimizare în domeniul costurilor, modificând intensitatea acestora la activităţile necritice cu scopul obţinerii unor costuri totale minime. La reoptimizări se poate pune problema:

1. Reducerii duratei (de exemplu prin suplimentare de resurse) pentru a grăbi unele venituri;
2. Reducerea costului cu reducerea acumulărilor.

   De obicei se elaborează mai multe variante cu toţi factorii :durată, cost, repartizare resurse.

Pentru grafuri cu circuite drumurile hamiltoniene se pot obţine cu algoritmul lui Foulkes.

Pentru aplicaţii concrete de drumuri critice poate fi utilizată inclusiv produsul software **MICROSOFT PROJECT.**

7.5. ELEMENTE DE TEORIA STOCURILOR [10], [19]

Acumularea unor bunuri în scopul satisfacerii cerilor viitoare este caracteristică a mai multor procese, pe care le vom numi **procese de stocare.**

Din punt de vedere a producţiei, stocurile pot fi de trei feluri: - stoc în amonte (materii prime, material,etc.) necesare alimentării producţiei; - stoc în naval de produse finite destinate pieţei; - stoc interoperaţional pentru asigurarea funcţionării continue a unor linii de fabricaţie.

Caracteristicile specifice mai importante ale unui proces de stocare:

- O cerere de anumite articole este determinată de capacitatea de producţie şi de volumul livrărilor, etc;
- Cantitatea de stoc care se consumă şi se aprovizionează continuu sau la anumite perioade de timp;
- Cheltuieli privind aprovizionarea, stocarea, precum şi penalizările ce decurg datorită resursei de stoc ale articolelor.

Gestiunea stocurilor are ca scop elaborarea unei politici optime de aprovizionare având în vedere caracteristicile sistemului de stocuri, loturi de aprovizionat, perioadele de reaprovizionare, controlul stocului, etc. Pentru astfel de sisteme există ecuaţii de balanţă care leagă între ele stocurile la momentele t şi t_1, (t_1>t).

Stocul la momentul t_1 va fi în funcţie de stocul la momentul t, cantitatea întrodusă în stoc S în intervalul de la t la t_1 şi desfacerea D:

$$I_{t1} = I_t + S - D \qquad (7.14)$$

De obicei se cere ca această cantitate să fie pozitivă se impune deci ca intrarea în stoc S să asigure ca nici un moment cererea să nu depăşescă, cantitatea existentă în stoc. În modelele de teoria stocurilor variabila controlabilă este cantitatea întrodusă în stoc, S.

Vom căuta să determinăm cât mai bine voloarea lui S şi momentele când trebuie făcută aprovizionarea. Uneori avem posibilitatea să controlăm desfacerea D sau măcar unele din caracteristicile ei, alteori putem controla anumiţi parametrii aleatori legaţi de cerere.

Îm funcţie de situaţie, este satisfăcător un model de stocuri sau unul stohastic. Modelele de stocuri mai des utilizate pot fi:

- Modele deterministe sau aleatoare;

- Modele cu cerere continuă sau discretă;
- Modele cu o singură staţie (stocarea unui singur produs sau materie primă) sau cu mai multe staţii (stocarea mai multor produse sau materii prime);
- Modele dinamice sau statice;
- Model de stoc cu preţuri de achiziţie sau cheltuieli de producţie fixe sau variabile;
- Modele stohastice.

Se pune problema determinării mărimii lotului $Q(t_i)$ şi a ciclului de reaprovizionare T_i. În momentul $T_0 - L_0$, când stocul atinge o valoare critică P numită nivel de reaprovizionare sau punct de comandă.

Momentul lansării comenzii este momentul când stocul scade la valoarea nivelului de reaprovizionare P. Uneori se consideră un stoc minim de siguranţă S_{sig} pe care trebuie să o atingă stocul şi care se păstrează pentru cazuri extreme.

Valoarea critică P este dată de relaţia:

$$P = S_{sig} + D_z.L \tag{7.15}$$

cu S_{sig} stocul de siguranţă în unităti naturale, D_z cererea medie zilnică, L intervalul de livrare.

Politica de reaprovizionare constă în stabilirea comenzilor de reaprovizionare, a ciclurilor de reaprovizionare şi a intervalelor de livrare în condiţiile unor restricţii.

Când aceste elemente sunt determinate prin optimizarea unei funcţii economice (de exemplu minimizarea costurilor pe un interval dat) spunem că politica de reaprovizionare este optimă. Lotul de aprovizionare $q(t_i)$ poate fi cunoscut exact în fiecare moment t_i (cazul determinist), sau numai ca probabilitate de realizare (cazul aleator).

În continuare se v-a da un exemplu cu un proces cu perioade egale şi cerere constantă [10]:

Se fac următoarele ipoteze:

se cunoaşte cererea totală N şi rata stocării ξ. Nu se admite lipsă de stoc şi stocul de siguranţă este zero.

Costurile de lansare c_l şi de stocare c_s sunt cunoscute. Stocul mediu este q/2 şi pe perioada de reaprovizionare T cheltuielile de stocare se evaluează la $c_s .T_q/2$. Punctul de comandă este egal cu zero.

Întrucât N/q = ξ/T, costul total al gestiunii pe perioada T va fi dat de relaţia:

$$C(q) = \left(C_1 + \frac{1}{2}qT * C_S\right)\frac{N}{q} = \frac{N * C_1}{q} + \frac{q}{2} * C_S * \xi \qquad (7.16)$$

Impunând condiţia de minim C' (q) = 0 obţinem lotul optim de aprovizionare (q*), formula lui Wilson:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 * C_1 * N}{C_S * \xi}} \qquad (7.17)$$

Iar perioada de reaprovizionare şi costul total al politicii optime rezultă:

$$T = \sqrt{\frac{2 * \xi * C_1}{N * C_S}} \qquad (7.18)$$

şi $C(q^*) = \sqrt{2N\xi C_1 C_S}$ (7.19)

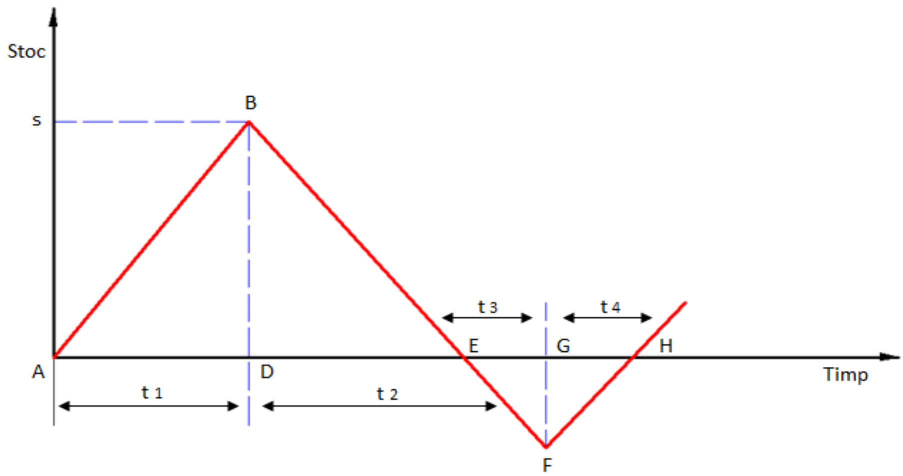

Figura 7.4 Model determinist pentru un singur produs si un singur nivel

Probleme stohastice

Adeseori nu se cunoaşte exact cerea şi este necesar asigurarea unui stoc tampon. În aceste cazuri se lucrează cu cerere ca valoare medie, estimată după intensitatea medie a cererii şi a mărimii intervalului de timp de decalaj între momentul de comandă şi momentul sosirii în stoc.

Strategiile cu examinarea continuă a stocului şi lansarea comenzii de reaprovizionare, de volum constant, când se atinge un nivel determinat, se numesc strategii S-s (sau strategii cu două containere). Deci comanda are loc când stocul scade sub nivelul s, cu o cantitate care împreună cu cea existentă, aduce stocul la nivelul S.

Există o anumită dificultate de a determina pe s, pentru a acoperi cererea până la intrarea în stoc a noilor cantităţi. De asemenea se cunosc modele stohastice cu cost de penurie sau cu probabilitate de penurie. Procedura este de a formula expresia costului total, care apoi se optimizează (se minimizează).

7.6. TEORIA JOCURILOR [6], [32], [38]

Teoria jocurilor se ocupă cu studiul cazurilor de echilibru a situaţiilor conflictuale. Conflictul se numeşte joc, iar participanţii sunt jucătorii. Dacă soluţiile jocului sunt influenţate de decizii umane, vorbim de jocuri strategice.

Strategia pentru un jucător este un plan de comportament referitor la toate situaţiile posibile ale jocului. Jocul se numeşte finit dacă participanţii la joc sunt în număr finit, numărul de paşi până la terminarea jocului este finit, şi alegerile jucătorilor au loc dintr-o mulţime finită de posibilităţi.

Cele mai frecvente jocuri sunt jocurile finite de două persoane. Fie A şi B cei doi jucători, şi X, respectiv Y mulţimea strategiilor jucătorilor. Funcţiile de câştig H_A (x,y), şi H_B (x,y) se definesc atfel: jucătorul A utilizând strategia x∈ X faţă de B, câştigă o sumă de H_A (x,y), dacă jucătorul B alge strategia y, respectiv jucătorul B aplicând strategia y ∈ Y faţă de A, la finele jocului câştigă suma de H_B (x,y), dacă jucătorul A a ales strategia x. Jocul se numeşte cu sumă nulă dacă H_A (x,y)=H_B (x,y).

Cel mai simplu model de teoria jocurilor este jocul matricial de două persoane cu sumă nulă. Fie A = (a_{ij}) o matrice de dimensiune m x n, unde m, respectiv n reprezintă numărul strategiilor jucătorilor A respectiv B, şi a_{ij} este câştigul jucătorului A, respectiv pierderea jucătorului B, dacă A joacă strategia i şi B joacă strategia j. În general punctul unei funcţii de două variabile F(x,y) pentru care se satisface condiţia:

$$F(x,y_0) \leq F(x_0, y_0) \leq F(x_0, y)$$

pentru orice x∈ X şi y∈ Y, se numeşte punct şa al funcţiei. În cazul matricii A, dacă are punct şa, şi aceasta este (i_0, j_0), atunci este satisfăcută relaţia $a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j \; a_{ij} = \min_j \max_i \; a_{ij}$, care totodată este şi perechea de strategie optimă.

Elementele minime pe linie, care sunt şi maxime pe coloană, sunt puncte şa, ele sunt perechi de strategii optime echivale între ele. Alegerea unei linii sau coloane oarecare se numeşte strategie pură. Prin strategie mixtă înţelegem o distribuţie de probabilitate pe mulţimea strategiilor pure.

Fie $x' = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$, $x_i \geq 0$, i = 1,m, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ strategia mixtă a jucătorului A, şi $y' = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$, $y_j \geq 0$, j = 1,n, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ strategia mixtă a jucătorului B. Valoarea câştigului aşteptat va fi:

$$H(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \; a_{ij} \; y_j = x' H y. \qquad (7.20)$$

Se demonstrează că oricare joc matriceal are strategie optimă pe mulţimea strategiilor mixte.

Se spune că (x_0, y_0) este optim, dacă $\max_x \min_y x' H y = \min_y \max_x \; x' H y = x'_0 H \; y_0 = v$, numit şi valoarea jocului. Pentru definirea şi rezolvarea strategiilor mixte se utilizează următorul model de programare liniară:

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, x_i \geq 1$ j=1,n;

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, y_j \leq 1$ j=1,n;

$x_i \geq 0$ i=1,m

$y_j \geq 0$ j=1,n

$\sum_{i=1}^{m} x_i = z$

$\sum_{j=1}^{n} y_j = w$

z→ min   w→max.

Fie x soluţia optimă a problemei primare, şi y soluţia problemei duale (când z=w). Strategiile mixte optimale vor fi:

pentru jucatorul A:

$x_1^* = x_1 / z$; $x_2^* = x_2 / z$; ……., $x_m^* = x_m / z$

pentru jucatorul B:

$y_1^* = y_1 / w$; $y_2^* = y_2 / w$; ……., $y_n^* = y_n / w$

rezultatul jocului fiind:

v = $x^{*'} H y^* = 1/z$.

În jocul de două sau mai multe persone (numite jucători) fiecare jucător alege o decizie în care rezultatul este determinat de ansamblul deciziilor alese.

Se presupune că:

Există *n* persoane care iau decizii, n ≥ 2.

Dacă n=2, vorbim de un joc de două persoane;
dacă n > 2, vorbim de un joc de *n* persoane.

Există un ansamblu de reguli, cunoscute de jucători care precizează ce moduri de acţiune pot fi alese (adică ce partide pot fi realizate);

Este precizată o mulţime de stări finale cu care jocul se termină (de exemplu câştig, pierdere sau egalitate);
Câştigurile asociate fiecărei stări finale sunt cunoscute de jucători înaintea încetării jocului;

Din păcate numai o parte a situaţiilor competitive pot fi modelate ca jocuri, deoarece adeseori în realitate nu sunt satisfăcute condiţiile 2, 3, şi 4.

Teoria jocurilor urmăreşte determinarea strategiilor care maximizează sau minimizează o anumită funcţie obiectiv (funcţie a câştigurilor).

Dacă o strategie este mai bună decât celelalte strategii indiferent de alegerea celorlalţi spunem că ea este o strategie dominantă.

Pentru un joc necooperativ să notăm cu n numărul jucătorilor, cu $S_1, S_2, \ldots, S_N$ mulţimea strategiilor unor jucători şi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funcţiile lor de plată.
Funcţia φ_k ($1 \leq k \leq n$) este definită pe domeniul produs al mulţimilor strategiilor $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ cu valori într-o submulţime a numerelor reale. Jocul astfel definit poate fi simbolizat prin $\Gamma = (n; S_1, S_2, \ldots, S_N; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$

În acest mod am definit o problemă specială multi-obiectiv, unde presupunem partiţionarea vectorului de decizii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; în cazul $k=1,2,\ldots,n$ strategiile x_k pot parcurge în mod independent mulţimea strategiilor S_k, valoarea funcţiei obiectiv $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ semnifică câştigul aferent decidentului aferent deciziei x_k. Funcţie de dimensiunea mulţimii S_k, x_k poate fi scalar sau vector.

Un joc cu sumă nulă este un joc în care pierderile unui jucător (sau jucători) reprezintă un câştig echivalent pentru celălalt jucător (sau mulţimea de jucători).

De exemplu, într-un joc de două persoane cu sumă nulă (tabelul 7.9) câştigurile pot fi prezentate printr-o matrice care indică câştigurile lui A; câştigurile jucătorului B sunt elementele aceleiaşi matrice, luate cu semn schimbat.

Tabelul 7.9 Joc cu sumă nulă

		Jucătorul B		
Jucătorul A		1	2	Câştigul lui A
	1	1	3	
	2	2	4	

Dacă ambii jucători aleg decizia 1, atunci, A câştigă o unitate şi B pierde o unitate, etc.

Într-un joc cu sumă nenulă (tabelul 7.10) plăţile sunt făcute de o a treia parte (de exemplu “casa”). Un astfel de table este de exemplu:

Tabelul 7.10 Joc cu sumă nenulă

		Jucătorul B	
Jucătorul A		1	2
	1	1, 1	-5, 5
	2	5, - 5	-1, -1

Soluţia unui joc corespunde cerinţei determinării celei mai bune strategii pentru fiecare jucător, în raport cu o funcţie obiectiv specificată. Funcţia obiectiv depinde de cunoştinţele anterioare ale jucătorilor asupra alegerilor efectuate de ceilalţi parteneri.

Dacă fiecare jucător cunoaşte exact ce va face celălalt, atunci avem o situaţie deterministă în care se maximizează utilitatea. Dacă se cunosc probabilităţile diverselor decizii, se va maximiza valoarea medie a utilităţii.

Dacă aceste probabilităţi nu sunt cunoscute, avem o situaţie de incertitudine, pentru care au fost propuse diverse funcţii obiectiv; cele mai importante au fost deja prezentate: criteriul minimax (şi maximin), minimax generalizat, criteriul regretului, etc.

Cele mai simple probleme de teoria jocurilor pot fi reformulate ca probleme de programare liniară.

În jocurile cu sumă zero, soluţia minimax este aceeaşi cu echilibrul Nash.

Numim strategie optimala acea strategie care maximizează câstigul jucatorului i, indiferent de strategiile alese de ceilalţi jucatori.

Echilibrul Nash (care a preluat numele creatorului sau, John Nash) este o multime de strategii (s1*, s2*, ..., sn*) pentru care toate utilităţile tuturor jucătorilor sunt egale.

Clasificare a jocurilor în raport cu diverse criterii:

a) în raport cu modul în care comunică jucatori între ei avem:
- ✓ jocuri cooperative;
- ✓ jocuri necooperative, finite, concave, etc..

Jocurile cooperative sunt acele jocuri în care jucătorii comunică liber între ei înainte de luarea deciziilor şi pot face promisiuni (care vor fi respectate) înainte de alegerea strategiilor.

Jocurile necooperative sunt jocurile în care jucatorii nu comunică între ei înainte de luarea deciziilor.

b) în raport cu desfăşurarea în timp a jocurilor:
- ✓ jocuri statice;
- ✓ jocuri dinamice.

Jocul static este acel joc în care deciziile jucătorilor se iau simultan, după care jocul ia sfârşit.

Jocul dinamic este acel joc în care deciziile jucătorilor sunt secvenţiale, adică evoluează în timp.

c) în raport cu natura informaţiei:
- ✓ jocuri în informaţie completă de ex. metode de programare multi-obiectiv;
- ✓ jocuri în informaţie incompletă;

Jocul în informaţie completă este acel joc în care toţi jucători cunosc numărul celorlalţi jucători, strategiile fiecăruia, funcţiile de câstig ale fiecăruia, precum şi regulile jocului.

Jocul în informaţie incompletă este jocul în care cel puţin unul dintre jucători nu cunoaşte una sau mai multe funcţii de câstig ale celorlalţi jucători, restul elementelor (numărul celorlalţi jucători, strategiile fiecăruia şi regulile jocului) fiind cunoscute.

d) în cazul jocurilor dinamice, în raport cu tipul informaţiei:
- ✓ jocuri în informaţie perfectă;
- ✓ jocuri în informaţie imperfectă.

Jocul dinamic în informaţie perfectă este jocul dinamic în care fiecare dintre jucători cunoaşte regulile, numărul jucătorilor, strategiile acestora, precum şi evoluţia în timp a jocului (istoria jocului).

Jocul dinamic în informaţie imperfectă este jocul dinamic în care măcar unul dintre jucători nu cunoaşte istoria jocului, cunoscând celelalte elemente.

e) în raport cu structura caştigurilor:
- ✓ jocuri de sumă nulă;
- ✓ jocuri de sumă nenulă.

Jocul de suma nulă este acel joc în care suma caştigurilor este zero.

Jocul de sumă nenulă este jocul în care suma caştigurilor este diferită de zero.

f) în raport cu numărul de jucători:
- ✓ jocuri cu doi jucători;
- ✓ jocuri multipersoană;
- ✓ jocuri contra naturii.

Exista patru clase de jocuri mai importante: jocuri statice în informaţie completă, jocuri dinamice în informaţie completă, jocuri statice în informaţie incompletă şi jocuri dinamice în informaţie incompletă.

Corespunzător celor patru clase de jocuri, există patru tipuri de echilibre în jocuri: echilibrul Nash, echilibrul perfect în subjoc, echilibrul Bayesian, echilibrul Bayesian perfect.

Problema negocierilor

În cazul jocurilor în care este permisă cooperarea între cei 2 jucători, pot fi încheiate acorduri cu obligaţii reciproce, este permisă corelarea strategiilor mixte, utilitatea poate fi transferată între jucători (nu totdeuna liniar). Alegînd pentru fiecare jucător o funcţie de utilitate cu admiterea sttrategiilor mixte corelate, se caută punctul de echilibru satisfăcător pentru ambii jucători. Cât de mult va accepta un jucător să dea celuilalt şi cât de puţin va accepta ca preţ al cooperării sale ?. Există totuşi un minim al câştigului acceptat de un jucător, câştigul pe care îl poate obţine independent. Aceasta este valoarea maximin a jocului, corespunzător jucătorului considerat. Rezultatul depinde de personabilitatea şi abilitatea de negociere a fiecărei jucător. John Nash a stabilit următoarele axiome considerate ca şi condiţii rezonabile:

1. raţionalitatea individual
2. admisibilitate
3. optimalitate Pareto
4. independenţa faţă de alternativele nesemnificative
5. invarianţa faţă de transformări liniare
6. simetrie

Axiomele 1-3 sunt logice nu necesită justificare.

Se demonstrează că nu mai sunt necesare alte axiome suplimentare, deoarece **există teorema:**: Există o funcţie φ unică, definită pentru orice problemă de negociere în care există strategii dominante, care satisface condiţiile 1-6. Teorema arată deci că sistemul de axiome ale lui Nash garantează existenţa unei soluţii unice, numită **soluţia Nash.** Această teorie arată deci, pe scurt, că utilitatea suplimentară obţinută prin cooperare trebuie să fie repartizată între cei doi jucători în părţi, al căror raport este egal cu rata (raportul) de transfer al utilităţii între jucători. Deoarece utilitatea nu se transferă liniar, este posibil să existe un singur punct în care utilitatea să fie transferabilă la această rată. În cazul simplu al transferabilităţii liniare (o unitate din utilitatea jucătorului I, este transferată lui II, măreşte utilitatea acestuia exact cu o unitate). În acest caz S conţine toate punctele (u,v) cu proprietatea că u≥ u*, v≥v* si u+v≤ k (k fiind utilitatea maximă posibilă pe care cei doi jucători o pot obţine împreună). Soluţia lui Nash corespunzătoare va fi ($\bar{u}, \bar{v}$), unde:

$$\bar{u} = (u^* - v^* + k)/2$$

$$\bar{v} = (v^* - u^* + k)/2$$

Se observă că $\bar{u} + \bar{v} = k$ si $\bar{u} - \bar{v} = u^* - v^*$ (variabilele notate cu * corespund valorilor maximin celor doi jucători).

Pentru cazul mai general al existenţei ameninţărilor Nash sugerează o schemă de negocieri în trei paşi:

1. jucătorul I îşi allege o strategie de ameninţare x
2. jucătorul II, fără a cunoaşte x, alege o strategie de ameninţare y.
3. cei doi jucători negociază, luînd ca bază de plecare strategiile de ameninţare. Dacă se ajunge la un accord, atunci acest accord se aplică cu câştigurile corespunzătoare. Dacă nu există accord, ei vor folosi strategiile de ameninţare x şi y alese, cu câştigurile în conseciinţă.

Clasic se susţinea că în problemele de negociere nu există o soluţie determinată, nu se poate afirma despre soluţia unei astfel de probleme decât că (presupunând că părţile sunt agenţi raţionali) nici una dintre părţi nu va accepta o înţelegere care să îi ofere mai puţin decât ar fi obţinut în absenţa înţelegerii şi că părţile nu vor încheia o anumită înţelegere atâta timp cât este disponibilă o altă înţelegere prin care una dintre părţi ar obţine mai mult fără a diminua din cât obţine cealaltă. Cu alte cuvinte, soluţia se afla pe curba de optimalitate Paretto[1] , dar nu puteam specifica punctul în care se v-a încheia înţelegerea, acesta depinzând de “psihologia jucătorilor”.

Pentru jocurile care posedă strategii dominante se poate aplica echilibrul Nash. În cazul deciziilor secvenţiale se poate aplica arbor de decizii.

Soluţia Nash

Vom considera două persoane, R (*Rich*) şi P (*Poor*), una foarte bogată şi alta săracă, care trebuie să împartă suma de 100$. Ei pot împărţi această sumă în orice mod doresc, numai că trebuie să hotărească împreună cum vor face acest lucru. Dacă nu reuşesc să ajungă la o înţelegere (prin negociere), atunci nici unul dintre ei nu va primi nimic din această sumă.

Faptul că soluţia trebuie să se afle pe curba de optimalitate Pareto (şi nu în interiorul ei) reprezintă faptul că întreaga sumă va fi împărţită (nu se vor împărţi doar 90$, sau o altă sumă mai mică decât 100$). Deasemenea, soluţia nu se poate afla în exteriorul frontierei Pareto, deoarece acest lucru ar însemna depăşirea sumei de 100$, după cum se poate observa în grafic.

Însă mai departe de atât nu putem merge în ceea ce priveşte modul de împărţire. Ştim doar că soluţia se află pe curba de optimalitate Pareto, şi nu în interiorul acesteia. Pentru a putea spune mai multe despre soluţia care se va obţine, se introduce în discuţie un aspect suplimentar: valoarea asociată de fiecare jucător în fiecare dintre soluţiile posibile.

În acest fel se va putea identifica printr-un calcul matematic punctul în care cei doi vor cădea de acord. Acest punct reprezintă soluţia Nash.

Utilitatea medie

Vom considera unitatea de măsurare a utilităţii ca fiind utilitatea obţinută în cazul în care jucătorul în cauză primeşte întreaga sumă, iar utilitatea medie, aceea asociată punctului în care jucătorul este indiferent între a primi cu siguranţă suma din punctul respectiv sau o şansă egală de a primi totul sau nimic. Acest punct în care jucătorul este indiferent între a obţine cu siguranţă suma respectivă sau a risca să obţină totul sau nimic este punctul de interes. Sub acest punct jucătorul este dispus să rişte în negociere.

În cazul celor doi care au de împărţit 100$, utilitatea medie se obţine la o sumă diferită. Dacă pentru cel bogat, R, se obţine, aşa cum este de aşteptat, la 50$, acest lucru însemnând că îi este indiferent între a obţine cu siguranţă 50$ şi a avea o şansă egală de a obţine 100$ sau 0 (a se renunţa la înţelegere), pentru P nu se întâmplă la fel. Pentru P la suma de 15$ se atinge utilitatea medie, adică lui P îi este indiferent dacă obţine sigur 15$ sau are o şansă egală de a primi 100 sau nimic.

Punctul în care se vor înţelege va fi, conform acestui model, cel în care **produsul** utilităţilor celor doi este maxim, mai exact cel în care utilitatea medie este atât pentru R cât şi pentru P de 0.7, adică R primeşte 70$ iar P primeşte 30$. Putem observa acest lucru dacă privim în tabelul 7.11, în care este reprezentată variaţia utilităţii în funcţie de sumă pentru fiecare jucător.

Tabelul 7.11 Utilităţile jucătorilor

Bogat (R)		Sarac (P)	
Bani ($)	Utilitate	Bani ($)	Utilitate
100	1,0	0	0,0
90	0,9	10	0,4
85	0,85	15	0,5
80	0,8	20	0,6
70	0,7	30	0,7
60	0,6	40	0,78
50	0,5	50	0,85
40	0,4	60	0,91
30	0,3	70	0,96
20	0,2	80	0,98
10	0,1	90	0,99
0	0,0	100	1,0

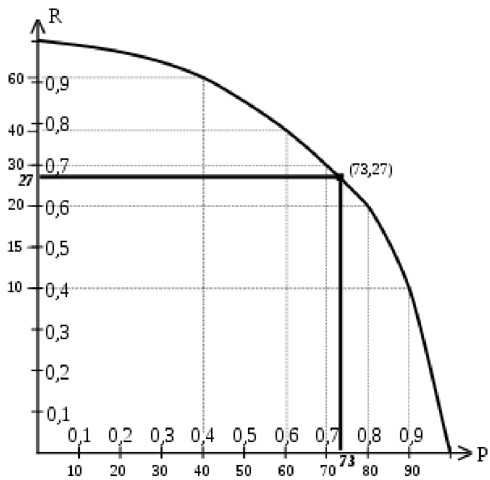

Figura 7.5 Graficul soluţiei

Ilustrarea grafică a soluţiei Nash. Pe axa orizontală este reprezentată utilitatea lui P pentru fiecare sumă de bani, iar pe cea verticală utilitatea lui R pentru fiecare sumă.

Linia curbă reprezintă frontiera Paretto. Maximul de utilitate se obţine în punctul în care utilitatea fiecăruia este de 0.7 (punctul 70, 30 în bani, în favoarea lui R - conform figurei 7.5). Mai mult chiar, punctul de maxim efectiv se obţine la 73/27 în favoarea lui R, consideră soluţia oferită de Nash.

Metoda „prizonierilor" [6], [32], [38]

Doi „prizonieri" sunt bănuiți că au săvârşit o infracţiune. Pedeapsa maximă pentru această infracţiune este de şase ani. Celor doi „prizonieri" li se face o propunere pe care cei doi o cunosc. Dacă unul dintre ei mărturisește şi astfel îşi împovărează partenerul, atunci scapă nepedepsit – celălalt trebuie să ispășească o pedeapsă de cinci ani.

Dacă cei doi decid să nu mărturisească, rămân doar dovezi prezumptive care le vor aduce o pedeapsă de trei ani. Dacă amândoi mărturisesc, pe fiecare îl aşteaptă o pedeapsă de cinci ani. „Prizonierii" sunt chestionați separat unul de celălalt, astfel încât nici unul dintre ei nu va cunoaşte nici înainte şi nici după chestionare intenţia celuilalt.

Această dilemă poate fi numită paradox, deoarece decizia „prizonierilor" luată individual și conștient (aceea de a mărturisi) şi decizia colectivă (aceea de a tăinui) sunt divergente.

În cazul acesta matricea recompenselor va arăta conform tabelului 7.11:

Tabelul 7.11 Matricea recompenselor

Prizonieri	B tăinuieşte	B mărturiseşte
A tăinuieşte	A:−2 / B:−2	A:−5 / B:0
A mărturiseşte	A:0 / B:−5	A:−4 / B:−4

Rezultate posibile:

Conform deciziilor luate de fiecare „prizonier" în parte, există patru rezultate posibile, care sunt prezentate în tabelul 7.12:

Tabelul 7.12 Rezultatele posibile

Nr. Crt	Pedeapsă/ani	Denumire	Semnificaţie
1	0	*Temptation*	Recompensă pentru tradare unilateral (libertate)
2	3	*Reward*	Recompensă pentru cooperarea lui A cu B (doar pedeapsă de trei ani)
3	5	*Punishment*	Pedeapsă pentru trădare bilateral (cinci ani de pedeapsă)
4	6	*Sucker's payoff*	Pedeapsă pentru înşelarea încrederii

Cele patru modalități de combinare existente nu depind numai de propria decizie, ci şi de deciziile complicilor (interdependență comportamentală).

În mod individual, pare să fie pentru fiecare avantajos să coopereze. “Prizonierul” se gândeşte astfel: *Dacă celălalt cooperează, îmi pot reduce pedeapsa la cinci ani, dacă cooperez şi eu*; însă dacă celălalt tăinuieşte faptele săvârşite: *pot să-mi reduc pedeapsa de la trei ani la zero prin declaraţia mea! Deci trebuie să mărturisesc faptele orice s-ar întâmpla!* Decizia de a mărturisi faptele săvârşite nu depinde de comportamentul celuilalt şi pare să fie întotdeauna avantajos să mărturisească. O astfel de strategie care este aleasă fără a ţine cont de decizia oponentului este denumită strategie dominantă.

Cum arată şi matricea, cei doi “prizonieri” ar fi totuşi mai avantajaţi dacă amândoi s-ar decide să tăinuiască faptele. Atunci ar primi fiecare doar câte doi ani de detenţie. Locul de desfăşurare a jocului împiedică înţelegerea dintre cei doi “prizonieri” şi provoacă astfel o trădare unilaterală prin care trădătorul speră să obţină pentru sine cel mai bun rezultat *achitarea* (dacă celălalt “prizonier” tăinuieşte faptele) sau să primească o pedeapsă de cinci ani în loc de şase (dacă celălalt “prizonier” mărturiseşte). Dacă amândoi fac acest lucru, îşi înrăutăţesc astfel şi individual situaţia, deoarece acum fiecare primeşte câte cinci ani în loc de câte trei ani.

Metoda “prizonierului” constă din această divergenţă a strategiilor posibile. Presupusa analiză progresivă, raţională a situaţiei induce pe cei doi “prizonieri” la mărturisire, ceea ce conduce la un rezultat prost (alocare care nu este optimă). Rezultatul mai bun ar fi atins prin cooperare, însă acesta este susceptibil de trădarea încrederii. Jucătorii raţionali se întâlnesc într-un punct care în acest caz este denumit echilibru Nash pareto-ineficient.

Jocul unic

Conform analizei clasice a jocului, în metoda “prizonierului” jucată o singură dată, singura strategie raţională pentru individul interesat de binele propriu este aceea de a nu coopera cu celălalt “prizonier”, ci să mărturisească şi astfel să-l trădeze pe celălalt. Prin decizia sa “prizonierul” nu poate influenţa comportamentul celuilalt “prizonier” şi independent de decizia luată de celălalt se plasează într-o poziţie mai bună dacă nu cooperează (mărturiseşte). Această analiză condiţionează faptul că jucătorii se întâlnesc o singură dată, iar hotărârile lor nu pot influenţa interacţiunile de mai târziu. Deoarece este vorba despre o dilemă autentică, din această analiză nu reiese nici o instrucţiune clară (concluzie prescriptivă) pentru interacţiuni reale corespunzătoare unei dileme a “prizonierului”.

Într-un joc unic trebuie precizat că este indiferent dacă cele două părţi s-au înţeles între ele. Situaţia rămâne la fel după o eventuală discuţie!

Jocul repetat (finit)

Situaţia se schimbă, dacă jocul este jucat în mai multe runde (aşa numitele turnee iterate). În acest caz o înşelare a încrederii este răzbunată în jocul următor sau într-un joc de mai târziu, iar cooperarea este răsplătită.

Numărul rundelor nu trebuie să fie cunoscut dinainte, ci trebuie să fie necunoscut. În caz contrar s-ar putea ca pentru strategii de fapt cooperante să fie profitabil ca în ultima rundă să intervină trădarea, deoarece pentru aceasta nu mai este posibilă o recompensă. Astfel, penultima rundă devine ultima, pentru care rezultă din nou aceeaşi situaţie. Din aceasta reiese o soluțe neoptimă. Problema ultimei runde se aplanează dacă jocul este jucat ca un - presupus sau actual - turneu nesfârşit.

Cât de benefică este o anumită strategie într-un astfel de turneu, depinde întotdeauna de strategiile concurente pe care aceasta le influenţează şi nu poate fi declarată în mod absolut.

Jocul infinit

Jocul se repetă, fără ca jucătorii să ştie când va avea loc ultima rundă. Dacă jucătorii se află în această dilemă, atunci poate exista o lipsă de cooperare în jocul următor. Faptul de a nu coopera nu este răsplătit (în mod inevitabil), deoarece pentru trădare (în mod direct) se va primi pedeapsă în jocul următor, în timp ce cooperarea este răsplătită (în mod constant). *Tit-for-tat* (*Ochi pentru ochi*) înseamnă pedeapsă pentru trădare în perioada următoare. În acest caz se vorbeşte despre încredere calculată.

Politologul american Axelrod R. [6] a organizat la începutul anilor '80 un concurs pe calculator, pe tema dilemei “prizonierului” repetată. El făcea ca programele de calculator să concureze între ele pe baza a diferite strategii. Cea mai de succes strategie şi în același timp una dintre cele mai uşoare a fost *Strategia ochi pentru ochi*, dezvoltată de Rapoport A. [32]. Aceasta însemna cooperare (*renunţare la trădare*), atâta timp cât şi celălalt cooperează. Dacă celălalt încerca să-şi creeze un avantaj (*trădare*), atunci şi cealaltă parte trăda.

Competiţii dinamico-evolutive

O dezvoltare a jocului pe mai multe runde este jocul pe mai multe generaţii. Dacă toate strategiile apar în mai multe runde unele împotriva celorlalte şi una împotriva celeilalte, rezultatele obţinute vor fi numărate împreună, pentru fiecare strategie. Pentru o rundă următoare, strategiile de succes le înlocuiesc pe cele cu mai puţin succes. Strategia cea mai de succes apare cu o densitate mai mare în generaţia următoare, Și această variantă a competiţiei a fost implementată de Axelrod [6].

Strategiile care au tendinţa de a înşela, au obţinut aici la început rezultate relativ bune – atâta timp cât au venit în contact cu alte strategii care aveau tendinţa de a coopera lăsându-se exploatate. Dacă strategiile înşelătoare sunt de succes, atunci strategiile cooperative se vor rări de la o generație la alta – strategiile înşelătoare reuşind să anuleze chiar şi fundamentul succesului. Dacă două strategii înşelătoare se întâlnesc, se obţin rezultate mai proaste decât în cazul în care s-ar întâlni două strategii cooperante. Strategiile înşelătoare se pot dezvolta doar prin exploatarea partenerilor de joc. Pe de altă parte, strategiile cooperante se dezvoltă cel mai bine, dacă vin în contact unele cu altele.

O minoritate de strategii cooperante, cum ar fi *Tit-for-tat* (ochi pentru ochi) poate pretinde astfel a se afla chiar într-o majoritate de strategii înşelătoare. Astfel de strategii care se pot stabili prin generaţii şi care sunt rezistente invaziilor altor strategii se numesc strategii evolutive stabile.

Strategia *Tit-for-tat* a putut fi întrecută în anul 2004 de o strategie nouă, propusă de Universitatea Southampton şi care în cazul unei întâlniri faţă în faţă şi după un schimb iniţial recurge la două roluri de exploatator şi respectiv de victimă, pentru a permite exploatatorului o poziţie de conducere (master-and-servant). În acest caz este necesară o anumită marime critică, şi anume strategia *master-and-servant* nu poate fi stabilită dintr-o populaţie incipientă. Deoarece partenerii de joc comunică codat despre comportamenul lor de început, există obiecţia că strategia *master-and-servant* încalcă regulile jocului, despre care partenerii de joc sunt chestionaţi izolaţi unii de ceilalţi. Strategia aminteşte de populaţiile de insecte unde insectele lucrătoare renunţă total la reproducţie şi îşi dedică forţa de muncă pentru bunăstarea reginei prolifice.

Condiţiile necesare răspândirii strategiilor cooperative sunt:

a) se joacă în mai multe runde;

b) jucătorii se pot recunoaşte între ei de la o rundă la alta, pentru ca în caz de nevoie să poată fi recompensaţi;

c) nu se ştie când se vor întâlni jucătorii pentru ultima oară.

Strategii posibile

Pentru metoda „prizonierului” jucată în mai multe runde există mai multe strategii diferite. Pentru anumite strategii s-au încetăţenit anumite nume, conform tabelului 7.13:

Tabelului 7.13 Strategii posibile

Nr. crt.	Strategie	Descrierea strategiei
1	**tit-for-tat** (ochi pentru ochi)	Cooperează în prima rundă şi copiază în runda următoare mutarea anterioară a partenerului de joc. Această strategie este în principiu deschisă înspre cooperare, practicând însă despăgubire în caz de trădare. Pentru încă o cooperare a partenerului de joc nu este neiertătoare, ci reacţionează cooperând.
2	**mistrust** (neîncredere)	Trădează în prima rundă şi copiază în rundele următoare (ca şi ochi pentru ochi) mutarea anterioară a partenerului de joc. Nu este

		deschisă înspre cooperare.
3	**spite** (ciudă)	Cooperează până când partenerul de joc trădează primul. Mai apoi trădează tot timpul. Cooperează până la primul semn de înşelare a încrederii. Este foarte răzbunătoare.
4	**pavlov**	Cooperează în prima rundă şi trădează, dacă mutarea partenerului de joc a fost diferită de propria mutare. Cooperează, dacă în runda precedentă ambii jucători au cooperat sau ambii au trădat. Aceasta conduce la o schimbare a comportamentului, dacă câştigul din runda precedentă a fost mic, însă conduce la menţinerea comportamentului, dacă câştigul a fost mare.
5	**gradual** (gradual)	Cooperează până când partenerul de joc trădează primul. Trădează o singură dată şi cooperează de două ori. Dacă partenerul de joc trădează încă o dată după această secvență, atunci el trădează strategia graduală de două ori şi cooperează de două ori. Dacă partenerul de joc trădează încă o dată, atunci el trădează strategia de trei ori şi cooperează de două ori. Această strategie cooperează strict, pedepseşte însă orice încercare de exploatare cu mai multă intransigenţă.
6	**prober** (probant)	joacă primele trei mutări *cooperare, trădare, trădare* şi trădează mai departe, dacă oponentul a cooperat la a doua şi la a treia mutare, joacă de altfel tit-for-tat. Testează dacă partenerul de joc este exclus fără răzbunare. Exclude partenerii de joc nerăzbunători. Se adaptează însă la răzbunare.
7	**master-and-servant** (**„**Domn şi servitor” sau şi „Strategie Southampton”)	Joacă în timpul primelor cinci până la zece runde un comportament codat, servind recunoaşterii. Strategia se asigură dacă partenerii de joc acţionează după modelul Master-and-servant. Dacă este cazul, partenerul de joc devine exploatator, cel care trădează întotdeauna, celălalt devine excepţie, cel care cooperează necondiţionat. Dacă partenerul de

		joc nu se conformează strategiei master-and-servant, atunci se trădează, în dauna combatanţilor ce iau parte la competiţie. Această strategie conduce la faptul că o parte dintre jucătorii ce iau parte la ea fac un lucru bun, deoarece ei primesc în mod neobişnuit numărul maxim posibil de puncte pentru o trădare unilaterală. Partea exploatată a jucătorilor strategiei Master-and-servant „dispare“, ceea ce se compensează prin succesiunea părţii de suces.
8	**always defect** (trădează întotdeauna)	Trădează întotdeauna, indiferent de ce face partenerul de joc.
9	**always cooperate** (cooperează întotdeauna)	Cooperează întotdeauna, indiferent de ce face partenerul de joc.
10	**random** (aleator)	Trădează sau cooperează pe baza unei hotărâri aleatorii 50:50.
11	**Per kind** (periodic sau amical)	Joacă periodic seria *cooperează/ cooperează/ trădează*. Această strategie încearcă să-l pună pe jucător în siguranţă printr-o dublă cooperare, pentru a-l exclude o singură dată.
12	**per nasty** (periodic şi neamical)	Joacă periodic seria *trădează/ trădează/ cooperează*.
13	**go by majority** (decide conform majorităţii)	Cooperează în prima rundă şi joacă apoi mutarea cea mai utilizată de către partenerul de joc. În caz de egalitate se cooperează.

Strategia optimă

Singura strategie tit-for-tat simplă, însă foarte eficientă şi de succes pe termen lung prezintă totuşi desfigurări, deoarece amândoi jucătorii se pot bloca într-o confruntare de durată, dacă după o anumită perioadă amândoi jucătorii aleg pe termen lung această strategie denumită Vendetta (ital.: răzbunare).

Un alt exemplu cunoscut în literatură este **bătălia sexelor**.

7.7. MODELE DE SERII TEMPORARE [27], [33]

Aproximarea funcţiilor de evoluţie prin polinoame a fost dezbătută în capitolul de mai sus. Teoria celei mai bune aproximaţii, aplicabil în special funcţiilor deterministe.

În cazul seriilor temporare statistice se pune deasemenea problema determinării coeficienţilor polinomului aproximator al proceselor stohastice. Experienţa practică arată că aceste expresii pot fi descrise cu modele liniare sau exponenţiale. Uneori asemenea modele prin diferenţiere pot fi făcute staţionare. Aceste serii temporare se numesc serii temporare integrate de ordinul d, I(d), dacă seria de ordin d-1 este nestaţionar, dar seria de ordin d devine staţionar.

Asemenea modele au fost tratate pe larg prima dată de Box-Jenskins [1970], şi au fost dezvoltate ulterior, respectiv completate cu alte rezultate, cum ar fi asocierea cu filtre Kalman, etc.

Procesul stochastic se numeşte staţionar autocovariant dacă media în timp este constant, depinde doar de distanţa observaţiilor măsurate în timp.

Precesele economice rar pot fi considerate staţionare, cu medie constantă. Multe serii temporare macro-economice – sau logaritmii lor – au seria nestaţionară, dar seria integrată de ordinul 1 sau 2 devine staţionară.

Box – Jenkins consideră criteriul de bază al alegerii modelelor coeficienţii de autocorelaţie şi coeficienţii de autocorelaţie parţială a seriei temporare. Estimarea coeficientului de autocorelaţie de ordinul k (notînd cu $\overline{y}$ media lui y_t):

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}\left(y_t-\overline{y}\right)\left(y_{t+k}-\overline{y}\right)}{\sum_{t=1}^{T-k}\left(y_t-\overline{y}\right)^2} \qquad (7.21)$$

Modelul poate fi mai complicat dacă este afectat de sezonalitate. Pentru compensarea fenomenelor de sezonalitate sau a fluctuaţiilor aleatoare se foloseşte cel mai des metoda mediei mobile, prin care se obţine o serie nouă mai uşor de urmărit. De xemplu pentru o serie temporală x1, x2, ...,xn se calculează media mobilă aferentă unui număr fixat de termeni. Pentru o medie mobilă de trei termeni se calculează (x1+x2+x3)/3, (x2+x3+x4)/3, (x3+x4+x5)/3, etc. Analitic pentru un process stochastic, media mobilă a unei realizări xi oarecare se exprimă prin expresia:

$\overline{x}_n = \frac{1}{\Delta s} \int_{s}^{s+\Delta s} x dt_i$ unde Δs este o cantitate arbitrar aleasă şi fixată. Succesul utilizării mediei mobile depinde de alegerea corectă a numărului de termeni . Este necesar ca numărul de termeni ai mediei mobile să fie identică cu numărul termenilor aparţinând unui ciclu, sau cu un multiplu întreg al acestuia.

Rezultate mai recente [33] permit şi alte feluri de abordări. Dacă se cunosc trei puncte consecutive luate la intervale de timp egale, se poate determina al patrulea punct cu aceiaşi lege de evoluţie (fără a cunoaşte legea propriu-zisă) după relaţia:

$$x_{k+1} = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2}) / [(x_{k-1} - x_{k-2})^* k] \qquad (7.22)$$

Coeficientul k este coeficientul de curbură a evoluţiei, el se poate determina din relaţia de mai sus din 4 puncte consecutive luate la intervale de timp egale.

Pentru sisteme liniare k=1.

Relaţia de mai sus poate fi folosită şi pentru determinarea valorilor viitoare ale evoluţiei pentru o curbură dată (dorită).

În faza de urmărire conform relaţiei de mai sus putem verifica dacă traiectoria păstrează curbura anterioară, sau sistemul trebuie recalibrat la o nouă curbură.

7.8. CONCEPTUL DE CONDUCERE OPTIMALĂ [33], [37]

Metodele clasice de rezolvare a problemelor de optimizare pornesc de la algoritmul Euler-Lagrange de rezolvare a problemelor variaţionale. Calculul variaţional ne permite să găsim condiţiile pentru o valoare minimă sau maximă a unei funcţii continue. Cantitatea de maximizat sau de minimizat, se numeşte funcţională (asociază un număr real, fiecărei funcţii sau curbe aparţinînd unei anumite clase). Pentru a studia sistemele de conducere optimală în care există restricţii privind intrările de tip comandă se utilizează principiul maximului.

Acest principiu înlocuieşte condiţiile de anulare a derivatei hamiltonianului în raport cu variabila de comandă, cu condiţia ca, valoarea comenzii u în timp ce rămâne în regiunea admisibilă, să facă Hamiltonianul H să ia cea mai mare valoare posibilă realizabilă cu comenzile admisibile în acest moment.

Ultimele dezvoltări teoretice [33], (vezi cap. 7.1.4. a prezentului volum) arată că pentru sisteme definite cu sisteme de ecuaţii neliniare $F_1, \ldots, F_n$, pentru a asigura comportarea optimală a sistemului în raport cu sistemul de obiective dat de ecuaţiile deasemenea neliniare $H_1, \ldots, H_m$, este suficientă minimizarea unei funcţionale de forma:

$$\text{Min } [G=\sum_{1}^{n} F_i^2 + \sum_{1}^{m} H_j^2] \tag{7.23}$$

prezentînd inclusiv o metodă generala de soluţionare de minimizare.

7.9. VALABILITATEA RELAŢIILOR DE APROXIMARE [33]

Se subliniază că sistemele trebuie descrise cu un număr suficient de relaţii (la sisteme cu autoorganizare inclusiv cu relaţii neliniare), modelele care nu includ stări de echilibru nu vor sugera soluţii foarte generale. Astfel amintim modelele tip ale teoriei catastrofelor (fara stari de echilibru), chiar cunoscutele relaţii de incertitudine din fizică (număr insuficient de relaţii), care pot fi considerate ca sfărmături de sisteme complete [33], ele putând furniza de cele mai multe ori doar soluţii locale.

Foarte des în studiul anumitor sisteme se dezvoltă anumite funcţii în serie în jurul unui punct , reţinând doar primii termeni, modele care apoi se consideră general valabile pentru întreg sistemul, chiar şi la punte de evoluţie îndepărtate. Să ne reamintim doar că inclusiv modelele teoriei relativităţii au fost limitate la ecuaţii de ordinul doi funcţie de timp.

Dacă dorim să studiem puncte îndepărtate aceste modele pot fi neconcludente.

În studiul sistemelor complete [33] în care se includ inclusiv efectele mediului exterior, s-a constatat că lipsa unor relaţii de interacţiune din model poate să genereze efecte similare cu existenţa unui eter în sistem (suma totală a vitezelor în sistem nu este egal cu zero)

Cel mai simplu sistem complet este de exemplu lumina albă, care are componente de aceeaşi viteză, caracterizat de omogenitate, sincronism şi armonie, deci fără interacţiuni contradictorii (nearmonice).

În sistemele cu multe componente entropia caracterizează măsura dezordinii. Sistemele individuale după principiul II al termodinamicii î-şi măresc entropia. La sisteme deschise entropia poate fi limitată prin interacţiunea cu mediul. Se poate imagina un sistem complet limită cu entropie maximală şi energie minimală, cu componente cu proprietăţi omogene, echiprobabile în care rolurile componentelor pot fi intrechimbate periodic, în care interacţiunile nu mai produc modificări structurale. Creşterea entropiei în sistemele naturale poate fi concepută că are loc prin evoluţia spre asemenea sisteme complete (la care se stabilizează entropia), caracterizate prin componente independente sau echiprobabile aflate într-o stare de energie minimă (nu se consumă energie pentru modificări structurale).

Dacă se acceptă (similar unui sistem de variabile independente într-un sistem cartezian) că, asemenea sisteme desrise prin sisteme de ecuaţii cu componente independente sau echiprobabile pot fi modelate cu o expresie de hipervolum de forma

$V = k.\prod x_j$

Variaţia relativă a hipervolumului în acest caz va fi:

$$\omega(V) = dV/V = \sum_{i=1}^{n}(dx_i / x_i) = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i) \qquad (7.24)$$

Pe de altă parte, pentru un sistem de ecuaţii neliniare F1....Fm oarecare se obţine un hipervolum de forma:

$V = K.\prod F_j$ respectiv, prin diferenţiere şi însumare

$$\Omega(V) = dV/V = \sum_{j=1}^{m}(dF_j / F_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i (dx_i / x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i \qquad (7.25)$$

Comparând expresiile variaţiilor relative $\Omega(V)$ faţă de starea relaxată $\omega(V)$ (independenţă/echiprobabilitate) constatăm că pentru sisteme complete ajunse la relaxare este necesar ca, coeficienţii a_i să fie egali intre ei, sau fiecare să fie egal cu unitatea, iar pentru sistemul de ecuaţii dat rezultă:

$$a_i = x_i \sum_j (1/Fj).(\partial F_j / \partial x_i) \qquad (7.26)$$

Practic se arată în bibliografia [33] că ecuaţiile de evoluţie neliniare prin transformări elementare pot fi aduse la forma Ω (V), din care pot fi explicitate expresiile a_i. Egalând aceşti coeficienţi între ei, se obţin relaţii care definesc starea finală relaxată, rezultând cordonatele stării de relaxare, periodicitatea aferentă, etc.

Astfel se obţin informaţii asupra direcţiilor, stărilor de evoluţie îndepărtate. Chiar dacă nu ne interesează starea finală de relaxare a sistemelor, direcţiile asimptotice furnizate de metoda relaxării pot fi utile.
Sistemul complet (care cuprinde inclusiv relaţiile de interacţiune cu mediul exterior) are o evoluţie în sensul creşterii entropiei tinzând către o stare relaxată cu comportare de tip fluid cu entropie constantă, în care acţiunile nu mai produc modificări structurale, componentele stabile sunt independente/echiprobabile. Aceste stări pot fi determinate cu metoda relaxării de mai sus. Sistemele ajunse la asemenea stare (dacă se mai pot numi sisteme) pot să ne apară invizibile, nu comunică cu mediul.

Putem să ne întrebăm dacă un asemenea sistem nu are proprietăţi similare cu aşanumitul eter din fizica clasică. Ba chiar mai mult pot exista sisteme care facilitează/accelerează propagarea componentelor, similar cu componentele luminii albe în care culorile se sprijină unele pe altele în propagare, deasemenea constatăm existenţa stărilor de supraconductibilitate chiar la solide.

Un exemplu de relaxare: legea de dilatare clasică a gazelor are un punct de relaxare la $V= 2.V_0$

$V=V_0(1+\gamma.\Delta t)$

$V- V_0 / V_0= \gamma.\Delta t \quad \rightarrow \quad \gamma.\Delta t = 1 \quad \rightarrow \quad V= 2.V_0$

În bibliografia [33] sunt date şi alte exemple de relaxare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ackoff, R.L., Sasieni, M.W., *Bazele cercetării operaţionale*, Editura Tehnică Bucureşti, 1975.

[2] Andraşiu, M., *Metode de decizii multicriteriale*, Editura tehnică Bucureşti, 1986.

[3] Anosov, D.V., Arnold V.I., *Dynamical Systems I.,* Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, London, Paris, Tokio. 1988.

[4] Arnold, V.I., Novikov, S.P., *Dynamical Systems IV. Symplectic Geometry and its Applications,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1990.

[5] Arnold, V.I., *Dynamical Systems III (Mathematical Aspects of Classical and Celstial Mechanics)*, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.

[6] Axelrod, R., *Die Evolution der Kooperation*, Oldenbourg Verlag, ISBN 3-486-53995-7, 2000.

[7] Bana, I., *Az SSADM rendszerfejlesztesi modszertan LSI Oktatokozpont*, Budapest, 2000.

[8] Belea, C., *Teoria sistemelor. Sisteme neliniare,* Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1985.

[9] Beltrami, E., *Mathematics for Dynamic Modeling,* Academic Press, INC. Boston, Orlando, San Diego, New York, Austin, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1999.

[10] Boldur-Lăţescu, Gh., *Analiza sistemelor complexe,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică Bucureşti, 1982.
[11] Boldur, Gh., Vrănceanu Gh., *Probleme de cercetare operaţională*, Editura Tehnică Bucureşti, 1978.
[12] Boldur, Gh., *Fundamentarea complexă a procesului decizional economic*, Editura Ştiinţifică Bucureşti, 1973.
[13] Bourceanu, G., Grosu, I., Beldie, C., *Evoluţie şi autoorganizare în sisteme departe de echilibru,* Editura Tehnică Bucureşti, 1989.
[14] Curievici, I., *Optimizări în industria chimică,* Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1980.
[15] Dobay, P., *Vallalati informacio-menedzsment,* Nemzeti Tankonynvkiado Budapest, ISBN 963 19 4265 1, 1997.
[16] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 2001.
[17] Ionescu, H., *Probleme ale cercetării operaţionale*, Editura Didactică şi Tehnică, Bucureşti, 1972.
[18] Ionescu, V., Varga A., *Teoria sistemelor,* Editura ALL Bucureşti, 1994.
[19] Ioseph, M., *Utilizarea modelelor matematice în realizarea sistemelor informatice,* Vol 1, ICCI Bucureşti, 1981.
[20] Ioseph, M., *Utilizarea modelelor matematice în realizarea sistemelor informatice,* Vol 2, ICCI Bucureşti, 1981.
[21] John, A.L., *Applied Management Science, Modelling, Spreadsheet Analisys, and Comunication for Decizion Making*, John Wiley & Sons. Inc. ISBN 978-0-421-39190-1, Copyright 2002.
[22] Kazai, Zs., *A rendszerfejlesztes modszertana, objekum orientalt modellezes es tervezes*, Gabor Denes Foiskola, Budapest, 2001.
[23] Kazai, Zs., *Informatikai rendszerek tervezese, szervezese, es uzemeltetese*, Gabor Denes Foiskola, Budapest, 2001.
[24] Kazai, Zs., *A rendszerfejlesztes modszertana*, Gabor Denes Foiskola, Budapest, 2006.
[25] Kalman, R.E., Falb, P.L., Arbib, M.A., *Teoria sistemelor dinamice,* Editura Tehnică Bucureşti, 1975.
[26] Kovacs, A., *Informatikai rendszerek tervezese, szervezese*, Gabor Denes Foiskola, Budapest, 2000.
[27] Korosi, G., *Gyakorlati okonometria*, Kozgazdasagi es jogi konyvkiado Budapest, ISBN 963 222 146 X, 1990.

[28] Mihoc, Gh., Ciuciu, G., *Modele matematice ale aşteptării*, Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1973.
[29] Noszkai, E., *Informatikai es rendszerszervezesi alapismeretek*, Muzsak Kiado, Budapest, ISBN 963 564 543 0, 1994.
[30] Pierce, R.G., *Solution Methods for Nonlinear Models,* University of Surrey, 1997.
[31] Radu, P.V., Ion, V.S., *Sisteme Dinamice*, Curs Institutul Politehnic din Bucuresti, 1993.
[32] Rapoport, A., Chammah, A.M., *Prisoner's dilemma: a study in conflict and cooperation*, University of Michigan Press, 1965.
[33] Szel, A., *Teoria variaţiei în studiul sistemelor*, edited by EMT Cluj-Napoca, ISBN 978-973-7840-18-9, 2010.
[34] Szel, A., *Principle and Models for System Evolution*, edited by EMT Cluj-Napoca International Technical Review, page 35- 44, ISSN 1454-0746, Vol 45/2009.
[35] Szel, A., Principle *and Models for System Evolution*, edited by Hungarian Technical Society of Transylvania International Conference of Computer Science and Energetic-Electrical Engineering-Oradea, pp. 174-179, ISSN 1842-4546, 2007.
[36] Tacu, A.P., Vancea, R., Holban, Ş., Burciu, A., *Inteligenţa artificială. Teorie şi aplicaţii în economie*, Editura economică, Bucureşti, 1998.
[37] Zadeh, L.A., Polak, E., *Teoria sistemelor*, Editura tehnica, Bucuresti, 1972.
[38] Winfried, E., Klaus, M., *Fatale Logik: Egoismus oder Kooperation in der Computersimulation*, c't 6/1991.