

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Onde elettromagnetiche in mezzi continui, lineari, omogenei ed isotropi

Relatore:  
Prof. Roberto Zucchini

Presentata da:  
Alberto Pacini

Anno Accademico 2019/2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni di Maxwell e potenziali ritardati</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Sviluppo in multipoli dei potenziali</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Polarizzazione e magnetizzazione</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Equazioni di Maxwell nella materia</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Relazioni costitutive</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Onde elettromagnetiche in mezzi dispersivi</b>	<b>14</b>
6.1	Relazioni di Kramers-Krönig e causalità . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Modello fenomenologico per mezzi densi</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Onde elettromagnetiche in mezzi non dispersivi</b>	<b>20</b>
8.1	Dielettrici non dispersivi, velocità di fase e di gruppo . . . . .	20
8.2	Polarizzazione delle onde elettromagnetiche . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Analisi della riflettanza</b>	<b>23</b>
9.1	Relazioni di Snell-Cartesio . . . . .	23
9.2	Coefficienti di Fresnel e polarizzazione . . . . .	24
<b>10</b>	<b>Appendice</b>	<b>27</b>

## Sommario

In questa tesi viene discussa la propagazione delle onde elettromagnetiche nei continui in particolare nei mezzi lineari, omogenei, isotropi e dispersivi. Dal principio di causalità si derivano le relazioni di Kramers-Krönig che risultano quindi molto generali. Come applicazione della teoria sviluppata vengono inoltre ricavate le relazioni di Snell-Cartesio e le relazioni di Fresnel.

## Introduzione

In questa trattazione si discute la propagazione delle onde elettromagnetiche nella materia, all'inizio si tratteranno i concetti principali più generali, nel proseguo ci si specializzerà al caso di mezzi lineari, omogenei, isotropi e dispersivi.

Nel primo capitolo si introducono le equazioni di Maxwell per i campi elettrico ed induzione magnetica  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  nel vuoto, usando il sistema gaussiano cgs queste si scrivono:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

Si rappresenteranno i campi utilizzando opportuni potenziali scalare e vettore  $\Phi$  ed  $\mathbf{A}$  e tramite questi risolveremo le equazioni di Maxwell in piena generalità. Questo comporta l'integrazione della densità di carica e di corrente valutate a tempi ritardati.

Nel capitolo 2 tramite un'espansione rispetto al tempo ritardato, approssimeremo i potenziali con delle espressioni in cui gli effetti di ritardazione sono trascurati (regime di campo vicino). Questa approssimazione risulta valida per materia ordinaria non relativistica. L'obbiettivo dei capitoli 2 e 3 è quello di ricavare le equazioni di Maxwell nella materia in forma macroscopica partendo da quelle nel vuoto concepite in senso microscopico. La distinzione risulta fondamentale: le equazioni di Maxwell per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono applicate a distribuzioni di carica localizzata (microscopica) e sviluppando i due termini tramite armoniche sferiche si trovano tutti i termini di multipolo. Integrando sullo spazio questi contributi microscopici multipolari si arrivano a definire i campi di polarizzazione e magnetizzazione  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ . Quindi si introducono i campi ausiliari  $\mathbf{D}$  (spostamento elettrico) e  $\mathbf{H}$  (campo magnetico):

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\end{aligned}$$

che inglobano al loro interno i contributi delle cariche e correnti microscopiche (di cui non si ha controllo macroscopicamente).

Nel capitolo 4 questi campi sono sostituiti nelle equazioni di Maxwell nel vuoto (pensate ora macroscopicamente) arrivando così alle equazioni di Maxwell nella materia che esprimono la dipendenza spazio-temporale dei campi in funzione delle sole densità di carica e correnti libere (di cui si ha controllo):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{lib}} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_{\text{lib}}\end{aligned}$$

Queste equazioni non sono sufficienti per determinare tutti i campi incogniti che vi compaiono e per essere risolte necessitano della conoscenza di relazioni di tipo fenomenologico, dette relazioni costitutive, che descrivono il legame dei campi ausiliari con quello dei campi intrinseci  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

Le relazioni costitutive sono un argomento dell'elettrodinamica molto vasto e nel capitolo 5 si cerca di darne una descrizione qualitativa delineando le caratteristiche generali che si possono incontrare. Nel capitolo 6 si esamina in dettaglio la propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi lineari, omogenei, isotropi e dispersivi che hanno relazioni costitutive specifiche e si mostra come le costanti proprie del mezzo acquisiscano una dipendenza dalla frequenza e una componente immaginaria generalmente legata a fenomeni di assorbimento. Sempre nello stesso capitolo si parla delle relazioni di Kramers-Krönig che legano le parti reali ed immaginarie di queste costanti e discendono dal principio di causalità. Il fatto che il principio di causalità abbia una valenza universale implica che le relazioni di Kramers-Krönig siano molto generali e che siano applicabili anche in contesti differenti da quello dell'elettrodinamica.

Nel capitolo 7 si sviluppa un semplice modello fenomenologico per mezzi densi come esempio di mezzo dispersivo. Nel capitolo 8 si tratta il caso limite di mezzi non dispersivi in cui le costanti del mezzo risultano indipendenti dalla frequenza. Si approfitta di questo contesto semplificato per introdurre i concetti di velocità di fase e di gruppo di un pacchetto di onde ed il concetto molto importante di polarizzazione delle onde elettromagnetiche.

Il capitolo 9 è un'applicazione della teoria esposta sopra dove si ricavano le leggi di Snell-Cartésio:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta'_1 \\ n_1 \sin(\theta_1) &= n_2 \sin(\theta_2)\end{aligned}$$

esse risultano leggi fenomenologiche nell'ottica geometrica ma si ricavano qui come teoremi dell'ottica ondulatoria utilizzando le condizioni al contorno per i campi elettromagnetici. Sempre nel capitolo 9 si ricavano le relazioni di Fresnel con cui si descrive l'importante fenomeno della polarizzazione per riflessione.

# 1 Equazioni di Maxwell e potenziali ritardati

Partiremo direttamente dalle equazioni di Maxwell e le giustifichiamo semplicemente dicendo che una vasta classe di fenomeni sperimentali possono essere descritti da esse. Le equazioni in forma differenziale sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.4)$$

dove  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono il campo elettrico ed induzione magnetica,  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  sono la densità di carica e di corrente elettrica mentre  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Le 1.1-1.2 sono le equazioni di Maxwell senza sorgenti dette rispettivamente legge di Gauss per il campo magnetico e legge dell'induzione di Faraday-Neumann-Lenz, mentre le 1.3-1.4 sono le equazioni con le sorgenti dette legge di Gauss per il campo elettrico e legge di Ampere-Maxwell. Prendendo la divergenza della 1.4 e combinandola con la 1.3 otteniamo l'equazione di continuità della carica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.5)$$

che esprime la conservazione della carica elettrica.

Le equazioni di Maxwell senza sorgenti possono essere risolte automaticamente con l'introduzione di un potenziale scalare  $\Phi$  e di un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  legati ai campi dalle:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.7)$$

notiamo che le equazioni sopra non identificano univocamente i potenziali che rimangono determinati a meno di una trasformazione di gauge:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (1.9)$$

dove  $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$  è una funzione scalare arbitraria.

Sostituendo le espressioni 1.6-1.7 nelle equazioni di Maxwell con sorgenti, troviamo le equazioni che i potenziali devono soddisfare in presenza di cariche e correnti:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -4\pi\rho \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.11)$$

La scelta di un gauge ci permette di semplificare le equazioni sopra. Dato che siamo interessati alla propagazione per onde possiamo scegliere il gauge di Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

e le equazioni sopra si modificano:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -4\pi\rho \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.14)$$

Queste risultano equazioni delle onde inomogenee che insieme a 1.12 definiscono i potenziali  $\Phi$  e  $\mathbf{A}$ . La loro soluzione è data dai potenziali ritardati, come dimostrato in appendice, e si esprime come:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.16)$$

si può porre  $t_r = t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}$ , detto tempo ritardato.

Inserendo ora le equazioni sopra in 1.6-1.7 si ottengono le espressioni per i campi elettrici e magnetici generati da distribuzioni di cariche e correnti che generalizzano le relazioni di Coulomb e Biot-Savart:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \left[ \left( \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{x}', t_r)}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t_r)}{c^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (1.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \left[ \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t_r)}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \quad (1.18)$$

dette equazioni di Jefimenko.

## 2 Sviluppo in multipoli dei potenziali

Consideriamo nuovamente le equazioni dei potenziali 1.15-1.16, possiamo svilupparle espandendo le densità di carica e di corrente rispetto al tempo:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \left[ \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\dot{\rho}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} + \dots \right] \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} + \dots \right] \quad (2.2)$$

Se ora supponiamo che la condizione di campo vicino sia soddisfatta:

$$|\rho(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots \gg \left| \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)^n \frac{\partial^n \rho}{\partial t^n}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots \quad (2.3)$$

$$|\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)| \gg \left| \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots \gg \left| \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)^n \frac{\partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n}(\mathbf{x}', t) \right| \gg \dots \quad (2.4)$$

ovvero il tempo di propagazione del campo dalla sorgente al punto di osservazione è molto più piccolo dei tempi di variazione della sorgente, allora si può scrivere:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.6)$$

Nel proseguo assumeremo questa forma per i potenziali nella materia ordinaria in quanto le condizioni sopra sono generalmente soddisfatte.

Supponiamo di avere una distribuzione continua di cariche e correnti localizzata in una regione  $V$  di spazio, allora nelle equazioni sopra la regione di integrazione è limitata al volume  $V$ . Per sviluppare in multipoli è necessario considerare l'espansione in armoniche sferiche del termine a denominatore:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.7)$$

in cui  $r_{<} = \min\{|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'|\}$  e  $r_{>} = \max\{|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'|\}$ .

Inserendo lo sviluppo nelle 2.5-2.6 e considerando un punto di osservazione fuori da  $V$  otteniamo:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm}(t) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{|\mathbf{x}|^{l+1}} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \mathbf{q}_{lm}(t) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{|\mathbf{x}|^{l+1}} \quad (2.9)$$

dove  $q_{lm}(t)$  e  $\mathbf{q}_{lm}(t)$  sono i momenti di multipolo elettrico e magnetico, rispettivamente dati da:

$$q_{lm}(t) = \int_V d^3x' |\mathbf{x}'|^l \rho(\mathbf{x}', t) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (2.10)$$

$$\mathbf{q}_{lm}(t) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' |\mathbf{x}'|^l \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (2.11)$$



Utilizzando le espressioni esplicite delle armoniche sferiche in componenti cartesiane e l'equazione di continuità, si trova espandendo per  $l = 0, 1$  e trascurando il termine di quadrupolo elettrico che compare nell'espressione del potenziale vettore:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[ \frac{q(t)}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \left[ \frac{\dot{\mathbf{p}}(t)}{|\mathbf{x}|} + \frac{c\mathbf{m}(t) \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \quad (2.13)$$

dove  $q$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{m}$  sono detti carica elettrica, dipolo elettrico e dipolo magnetico rispettivamente. La loro espressione esplicita è:

$$q(t) = \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{p}(t) = \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2c} \int_V d^3x [\mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.16)$$

Le equazioni 2.12-2.13 saranno considerate come relazioni microscopiche e quindi rappresentano i potenziali generati dalle distribuzioni di cariche e correnti all'interno di un volumetto macroscopicamente piccolo di materia, idealmente si può pensare a singoli atomi o molecole.

### 3 Polarizzazione e magnetizzazione

Per introdurre il concetto di polarizzazione si può pensare ad un mezzo costituito da molecole in cui ogni tipo di molecola ha un suo dipolo elettrico risultante  $\mathbf{p}_i$ . Trascurando tutti gli ordini di multipolo più elevati ed eventuali molecole ionizzate ( $q = 0$ ) definiamo il campo vettoriale polarizzazione:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i(t) \rangle \quad (3.1)$$

dove  $N_i$  è la densità delle molecole di tipo  $i$ -esimo nel volumetto centrato in  $\mathbf{x}$  e  $\langle \mathbf{p}_i(t) \rangle$  è il dipolo elettrico medio delle molecole di tipo  $i$ -esimo nel volumetto al tempo  $t$ .

Tenendo conto delle possibili cariche libere (espansione per  $l = 0$ ) si può scrivere, attraverso la 2.12, il potenziale in un punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$  generato da un volumetto infinitesimo di materiale  $dV$  localizzato nel punto  $\mathbf{x}'$ :

$$d\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \left( \frac{\rho_{lib}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}', t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) dV \quad (3.2)$$

Dalla 2.12 si scrive il potenziale generato dalla distribuzione continua di materia integrando su tutto il volume occupato dal continuo:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_V d^3x' \left( \frac{\rho_{lib}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}', t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \quad (3.3)$$

Ora notiamo che  $\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$  e con un'integrazione per parti si ottiene:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_V d^3x' \left( \frac{\rho_{lib}(\mathbf{x}', t) - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) + \oint_{\partial V} d^2\mathbf{x}' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.4)$$

Risulta quindi naturale associare la densità volumetrica e superficiale di carica di polarizzazione  $\rho_{pol}$ ,  $\sigma_{pol}$  nel modo seguente:

$$\rho_{pol}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

$$\sigma_{pol}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.6)$$

con  $\hat{\mathbf{n}}$  versore normale alla superficie su cui si considera  $\sigma_{pol}$ .

Nel limite in cui il volume  $V$  diventa grande possiamo trascurare il termine di bordo in 3.4 e confrontando con la relazione generale 2.5 si vede  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_{lib}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  che sostituita nella legge di Gauss per il campo elettrico fornisce la stessa legge nella materia polarizzata:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_{lib} \quad (3.7)$$

Dalla definizione di momento di dipolo elettrico si vede che esso è un vettore che congiunge il centro delle cariche negative con quello delle cariche positive, il vettore di polarizzazione allo stesso modo essendo una media macroscopica locale di dipoli. Perciò una divergenza non nulla implica che nel volumetto infinitesimo c'è più carica con lo stesso segno rispetto alla carica di segno opposto e quindi una densità di carica (di polarizzazione) non nulla.

Nel ricavare l'equazione sopra si sono trascurati tutti i momenti multipolari con  $l \geq 2$ , in generale si può tenerne conto con una trattazione analoga a quella svolta sopra ma in questo caso il vettore polarizzazione deve comprendere al suo interno tutti i contributi multipolari di cui si vuole tenere conto.

Introduciamo ora il campo vettoriale magnetizzazione  $\mathbf{M}$ , ragionando come nel caso della polarizzazione in 3.1 possiamo considerare un mezzo costituito da vari tipi di molecole i-esime ognuna con il suo momento di dipolo magnetico risultante e come prima trascuriamo tutti i termini multipolari superiori:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \sum_i N_i \langle \mathbf{m}_i(t) \rangle \quad (3.8)$$

Tenendo conto della corrente libera macroscopica si può scrivere, attraverso la 2.13, il potenziale vettore in un punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$  generato da un volumetto infinitesimo di materiale  $dV$  localizzato nel punto  $\mathbf{x}'$ :

$$d\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{c} \left( \frac{\mathbf{J}_{lib}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\mathbf{M}(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) dV \quad (3.9)$$

Integrando su tutto il volume occupato dal mezzo otteniamo quindi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \left( \frac{\mathbf{J}_{lib}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\mathbf{M}(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \quad (3.10)$$

Manipolando l'ultimo termine nell'integrale possiamo riscrivere il tutto come:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_V d^3x' \frac{\mathbf{J}_{lib}(\mathbf{x}', t) + \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t) + c\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}', t)}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \oint_{\partial V} \frac{c\mathbf{M}(\mathbf{x}', t) \times d^2\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Si può quindi definire, come nel caso della polarizzazione, una densità di corrente di magnetizzazione volumetrica e superficiale  $\mathbf{J}_m$ ,  $\mathbf{J}_{m,sup}$  ed una densità di corrente di polarizzazione  $\mathbf{J}_p$  che tiene conto della variazione temporale dei dipoli elettrici:

$$\mathbf{J}_m = c\nabla \times \mathbf{M} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{J}_{m,sup} = c\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (3.13)$$

Confrontando l'espressione trovata sopra per il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  con l'equazione 2.6 si trova:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}_{lib}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + c\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \quad (3.14)$$

Possiamo inserire l'espressione sopra per la densità di corrente nell'equazione di Ampere-Maxwell trovando:

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{lib} \quad (3.15)$$

## 4 Equazioni di Maxwell nella materia

Dalle relazioni 3.7-3.15 otteniamo le equazioni di Maxwell che descrivono il comportamento dei campi elettrici e magnetici nella materia:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{lib}} \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{lib}} \quad (4.4)$$

in cui  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{H}$  sono rispettivamente il campo spostamento elettrico ed induzione magnetica che inglobano al loro interno i contributi della polarizzazione  $\mathbf{P}$  e magnetizzazione  $\mathbf{M}$ .

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad (4.6)$$

In questo modo non si deve tenere in considerazione la complicata dipendenza spaziale dei campi microscopici nella materia.

Moltiplicando la 4.3 per  $\mathbf{E}$ , la 4.1 per  $\mathbf{H}$  sottraendo e usando  $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  si ottiene l'espressione:

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{lib}}) + \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) = 0 \quad (4.7)$$

che esprime la conservazione dell'energia.

Il primo addendo è la densità di potenza del campo elettrico interagente con le correnti libere, il secondo rappresenta, generalmente, la derivata temporale della densità di energia del campo elettromagnetico nel mezzo mentre il terzo rappresenta il flusso uscente di densità di energia elettromagnetica, di solito associato alla propagazione per onde e viene definito tramite il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (4.8)$$

Le relazioni sopra sono del tutto generali e non dipendono dalla natura dei mezzi in quanto ricavate dalle equazioni di Maxwell.

Ad ogni modo le equazioni sopra non bastano per trovare i campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ . Per risolvere le equazioni 5.9 – 5.12 è quindi necessario conoscere le cosiddette relazioni costitutive che legano i campi fenomenologici  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  ad  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . In linea di principio si potrebbero ricavare le relazioni costitutive laddove sia nota la struttura microscopica del mezzo considerato utilizzando gli approcci della fisica della materia. Nel capitolo 7 si ricaveranno delle relazioni costitutive per un mezzo denso utilizzando un approccio classico a titolo di esempio. Spesso si preferiscono ricavare delle relazioni costitutive empiriche dato che queste dipendono dal mezzo considerato e dall'intensità e frequenza dei campi in gioco e possono essere molto complesse.

## 5 Relazioni costitutive

Il comportamento dei campi all'interno della materia è un argomento molto vasto della fisica e, per completezza, dovrebbe essere trattato utilizzando le teorie quantistiche della materia specialmente ad alte frequenze. Tuttavia una trattazione classica, con l'aggiunta di qualche risultato quantistico, può comunque dare buoni risultati e ottimi spunti qualitativi. Anzitutto occorre classificare i materiali per capire che tipo di modello utilizzare. La classificazione detta il tipo di relazioni costitutive che devono essere prese in considerazione. Queste sono relazioni che legano i campi fenomenologici ai campi ausiliari del tipo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (5.3)$$

Nel prosieguo considereremo materia complessivamente neutra  $\rho = 0$ , allora le relazioni costitutive possono essere:

1. Lineari:  $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$  dipendono linearmente da  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ;
2. Omogenee: le relazioni non dipendono dal punto  $\mathbf{x}$  nel mezzo;
3. Isotrope: le relazioni non dipendono dalla direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  nel mezzo;
4. Dispersive:  $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$  al tempo  $t$  dipendono dai campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  a tempi  $\leq t$ ;
5. Locali:  $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$  nel punto  $\mathbf{x}$  dipendono dai campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  in  $\mathbf{x}$ ;
6. Separabili:  $\mathbf{D}, \mathbf{J}$  dipendono solo da  $\mathbf{E}$  mentre  $\mathbf{H}$  dipende solo da  $\mathbf{B}$ ;

Queste sono proprietà che un generico campo  $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$  può o può non avere a seconda del mezzo considerato, dell'intensità e della frequenza dei campi. Ad esempio di solito si preferisce lavorare con la condizione di linearità ma per campi molto intensi questa condizione non è più verificata in generale. Oppure in mezzi poco densi può essere richiesta la località, ma questa non è in generale verificata per mezzi densi. A prima vista può sembrare che le proprietà di omogeneità e non località siano tra di loro incompatibili, per capire la differenza si supponga di avere un mezzo omogeneo  $O$  ed un mezzo disomogeneo  $D$ . Se i due mezzi sono immersi entrambi in un campo omogeneo,  $O$  risponde allo stesso modo in ogni punto mentre  $D$  lo fa in modo dipendente dalla posizione. Se però poniamo i due mezzi in un campo disomogeneo (come quello di un'onda elettromagnetica)  $O$  ha una risposta che dipende dalla posizione poiché il campo è disomogeneo, mentre  $D$  ha una risposta non omogenea poiché sia il campo sia le relazioni dipendono dalla posizione.

Possiamo dare degli esempi generali per capire meglio il tipo di relazioni costitutive.

Supponiamo che le relazioni rispettino la linearità, omogeneità, isotropia, non dispersività, località e separabilità e modificheremo solo una di queste condizioni alla volta. Consideriamo per semplicità solo le relazioni tra il campo elettrico e il campo di spostamento elettrico.

Un esempio di relazione non omogenea (2) si scrive:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

dove  $\epsilon(\mathbf{x})$  è una funzione reale del solo punto spaziale.

Una relazione non isotropa (3) è data, in componenti cartesiane:

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{ij} \mathbf{E}_j(\mathbf{x}, t) \quad (5.5)$$

dove  $\epsilon_{ij}$  è un tensore di rango 2 e nell'equazione si è usata la convenzione di Einstein sulla sommatoria. Una relazione dispersiva (4) si scrive:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \epsilon(t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') \quad (5.6)$$

in cui  $\epsilon(t)$  ha le dimensioni di una costante dielettrica per unità di tempo. Notiamo che analizzando l'espressione per campi statici si deve avere  $\int_0^\infty dt' \epsilon(t') = \epsilon_s$  dove  $\epsilon_s$  è la costante dielettrica statica del mezzo.

Una relazione non locale (5) è del tipo:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{E}(\mathbf{x}', t) \quad (5.7)$$

dove si trascurano gli effetti di ritardo come già spiegato nel primo capitolo.

Si noti che  $\epsilon(\mathbf{r})$  è una funzione che dipende solo dal vettore spostamento tra il punto di osservazione ed il punto in cui si considera il contributo del campo ne risulta quindi una omogeneità parziale nel senso che c'è disomogeneità solo se si considerano coppie di punti in direzioni diverse. Spesso nelle relazioni non locali si ha  $\epsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$  ed in questo caso si recupera anche la omogeneità nel senso sopra descritto. Notiamo che  $\epsilon(\mathbf{r})$  ha le dimensioni di una costante dielettrica per unità di volume. In particolare per campi omogenei si ottiene la relazione  $\int d^3x' \epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \epsilon_o$ .

Ovviamente le relazioni costitutive più generali possono presentare più casistiche contemporaneamente e quindi ci si aspetta in generale opportune combinazioni delle relazioni sopra descritte.

Nel prosieguo prenderemo in considerazione solo le relazioni costitutive più semplici. In particolare lavoreremo sempre con relazioni lineari ed è quindi possibile utilizzare le espansioni di Fourier per rappresentare i campi e le funzioni usate. Allora per un generico campo scalare le trasformate ed antitrasformate di Fourier nel tempo si leggono:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \phi_\omega(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \Leftrightarrow \phi_\omega(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \phi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} \quad (5.8)$$

Con l'espansione di Fourier precedente le equazioni di Maxwell si possono riscrivere, grazie alla loro linearità, come:

$$\nabla \times \mathbf{E}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_\omega = 0 \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\omega = 0 \quad (5.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_\omega + \frac{i\omega}{c} \mathbf{D}_\omega = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_\omega \quad (5.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_\omega = 4\pi \rho_\omega \quad (5.12)$$

dove i campi con i pedici in  $\omega$  sono le componenti di Fourier del campo e vediamo come le derivate temporali si sono trasformate in prodotti per  $i\omega$ .

## 6 Onde elettromagnetiche in mezzi dispersivi

Vediamo subito che in questo caso le relazioni costitutive 5.6 indicano che in generale i coefficienti del mezzo dipendono dalla frequenza, questo suggerisce di utilizzare subito le espansioni di Fourier. Ricordiamo che l'espansione in coefficienti di Fourier è possibile perchè le relazioni costitutive per mezzi dispersivi sono lineari e sono date dalle convoluzioni:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') \quad (6.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \mu(t') \mathbf{H}(\mathbf{x}, t - t') \quad (6.2)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \sigma(t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') \quad (6.3)$$

e le trasformate di Fourier trasformano le convoluzioni di funzioni in prodotti tra le componenti di Fourier ovvero:

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon_\omega \mathbf{E}_\omega \quad (6.4)$$

$$\mathbf{B}_\omega = \mu_\omega \mathbf{H}_\omega \quad (6.5)$$

$$\mathbf{J}_\omega = \sigma_\omega \mathbf{E}_\omega \quad (6.6)$$

Combinando le equazioni di Maxwell monocromatiche e applicando qualche identità vettoriale si trovano le equazioni delle onde dispersive o equazioni di Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mu_\omega \left( \varepsilon_\omega + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_\omega \right) \mathbf{E}_\omega = 0 \quad (6.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mu_\omega \left( \varepsilon_\omega + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_\omega \right) \mathbf{H}_\omega = 0 \quad (6.8)$$

La densità di carica libera è posta nulla in quanto si suppone che il mezzo sia neutro.

Se si pone  $\epsilon_\omega = \varepsilon_\omega + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_\omega$  e  $k_\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu_\omega \epsilon_\omega$  le equazioni diventano le equazioni di Helmholtz date da:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\omega + k_\omega^2 \mathbf{E}_\omega = 0 \quad (6.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_\omega + k_\omega^2 \mathbf{H}_\omega = 0 \quad (6.10)$$

dove  $k_\omega$  è il numero d'onda complesso e la relazione che lo lega alla frequenza è detta relazione di dispersione:

$$k_\omega^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mu_\omega \left( \varepsilon_\omega + \frac{4\pi}{\omega} \sigma_\omega i \right) \quad (6.11)$$

dove ricordiamo che  $\mu_\omega$ ,  $\varepsilon_\omega$ ,  $\sigma_\omega$  sono funzioni complesse della frequenza.

La soluzione generale delle equazioni di Helmholtz è data da:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) = \int_S d^4 u \tilde{\mathbf{E}}_0(\omega, \mathbf{u}) e^{ik_\omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} \quad (6.12)$$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{x}) = \int_S d^4 u \tilde{\mathbf{H}}_0(\omega, \mathbf{u}) e^{ik_\omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} \quad (6.13)$$

dove  $S = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \mid \mathbf{u}^2 = 1\}$  ed  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  e  $\tilde{\mathbf{H}}_0$  sono funzioni vettoriali complesse della frequenza e di  $\mathbf{u}$ .

Scomponendo il vettore complesso nella sua parte reale ed immaginaria  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + i\mathbf{u}''$  la condizione che identifica l'ipersuperficie complessa  $S$  si può scrivere come:

$$u'^2 - u''^2 = 1 \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'' = 0 \quad (6.15)$$

Si può considerare la soluzione particolare di onda piana monocromatica non omogenea in cui le funzioni  $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{u})$  sono date da:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{u}) = \pi\delta(\omega - \omega_0)\delta_S(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\mathbf{e}_0 + \pi\delta(\omega + \omega_0)\delta_S(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0^*)\mathbf{e}_0^* \quad (6.16)$$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{u}) = \pi\delta(\omega - \omega_0)\delta_S(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\mathbf{h}_0 + \pi\delta(\omega + \omega_0)\delta_S(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0^*)\mathbf{h}_0^* \quad (6.17)$$

Sostituendo le funzioni sopra in 6.14-6.13 e poi nelle equazioni di Maxwell monocromatiche 5.9-5.12, si ottengono le relazioni:

$$\mathbf{h}_0 = \left(\frac{\epsilon_\omega}{\mu_\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{e}_0) \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{h}_0 = 0 \quad (6.19)$$

$$\mathbf{e}_0 = \left(\frac{\mu_\omega}{\epsilon_\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{h}_0 \times \mathbf{u}_0) \quad (6.20)$$

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \quad (6.21)$$

Con un po' di passaggi e scegliendo la convenzione  $\text{Im}(k_\omega) \geq 0$  otteniamo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\mathbf{e}_0 \exp[i(k_\omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)]\} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\left\{\left(\frac{\epsilon_\omega}{\mu_\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_0 \times \mathbf{e}_0 \exp[i(k_\omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)]\right\} \quad (6.23)$$

che sono i campi elettrico e magnetico dell'onda non omogenea.

Considerando che spesso  $\mu_\omega \simeq 1$ , le equazioni sopra possono essere riscritte:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e^{-\mathbf{k}''_\omega \cdot \mathbf{x}} \text{Re}\{\mathbf{e}_0 \exp[i(\mathbf{k}'_\omega \cdot \mathbf{x} - \omega t)]\} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{\omega} e^{-\mathbf{k}''_\omega \cdot \mathbf{x}} \text{Re}\{\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{e}_0 \exp[i(\mathbf{k}'_\omega \cdot \mathbf{x} - \omega t)]\} \quad (6.25)$$

dove  $\mathbf{k}_\omega = k_\omega \mathbf{u} = \mathbf{k}'_\omega + i\mathbf{k}''_\omega$ .

Dalle equazioni precedenti si può vedere che l'onda non omogenea ha la massima attenuazione lungo  $\mathbf{k}''_\omega$  mentre la direzione di propagazione è lungo  $\mathbf{k}'_\omega$ . Nell'onda omogenea invece le due direzioni coincidono perché  $\text{Im}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'' = 0$ .

La soluzione generale si può costruire con un'opportuna combinazione nel modo seguente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{u}) e^{ik_\omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \right) d^4 u \quad (6.26)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{H}}_\omega(\mathbf{u}) e^{ik_\omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \right) d^4 u \quad (6.27)$$

dove l'integrazione sulle frequenze costruisce il pacchetto d'onda e l'integrazione sulla sfera complessa costruisce le direzioni di propagazione e di attenuazione.



## 6.1 Relazioni di Kramers-Krönig e causalità

Riprendiamo le relazioni costitutive per mezzi dispersivi:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') \quad (6.28)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \sigma(t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') \quad (6.29)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty dt' \mu(t') \mathbf{H}(\mathbf{x}, t - t') \quad (6.30)$$

ci si accorge che queste sono convoluzioni rispetto alla variabile temporale, prendendo le componenti di Fourier queste sono trasformate in prodotti e diventano:

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon_\omega \mathbf{E}_\omega \quad (6.31)$$

$$\mathbf{J}_\omega = \sigma_\omega \mathbf{E}_\omega \quad (6.32)$$

$$\mathbf{B}_\omega = \mu_\omega \mathbf{H}_\omega \quad (6.33)$$

dove per ognuno dei coefficienti vale la relazione:

$$\beta_\omega = \int_0^\infty dt \beta(t) e^{i\omega t} \quad (6.34)$$

Il fatto che l'integrazione sopra inizi a  $t = 0$  è dovuto alla causalità e questo comporta proprietà specifiche. Consideriamo la funzione complessa di variabile complessa:

$$\beta(\omega) = \int_0^\infty dt \beta(t) e^{i\omega t} \quad (6.35)$$

essa risulta analitica in tutto il semipiano superiore  $\text{Im } \omega > 0$  e soddisfa il lemma del grande cerchio. Allora possiamo utilizzare la prima proprietà per esprimere la funzione nel semipiano superiore grazie alla rappresentazione integrale di Cauchy ottenendo:

$$\beta(\omega) = \oint_{C_\infty} d\omega' \frac{\beta(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (6.36)$$

Ora per il lemma del grande cerchio il contributo all'infinito sulla corona circolare è nullo e perciò si ottiene:

$$\beta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\beta(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (6.37)$$

Se ci limitiamo solamente a frequenze reali notiamo che l'integrale deve essere valutato modificando il percorso d'integrazione per evitare il polo semplice nel caso in cui  $\beta(\omega) \neq 0$  in quel punto.

Per valutare l'integrale allora si può fare uso del teorema di Sokhotski-Plemelj e si ottiene:

$$\beta(\omega) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\beta(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (6.38)$$

Esplicitando le parti reali ed immaginarie di  $\beta$  si ottengono le relazioni di Kramers-Kronig:

$$\text{Re } \beta(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } \beta(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (6.39)$$

$$\text{Im } \beta(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Re } \beta(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (6.40)$$

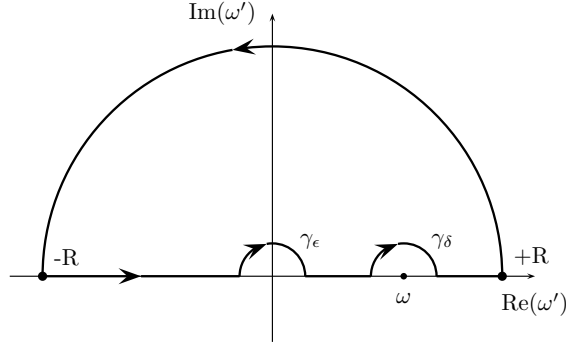


Figura 1: Cammino d'integrazione nel piano complesso per il calcolo di  $\chi$  per mezzi conduttori. Per mezzi isolanti la deviazione intorno all'origine può essere evitata.

Queste sono relazioni molto importanti che permettono di conoscere la parte reale di una grandezza se si conosce la parte immaginaria o viceversa. Può succedere che risulti semplice sperimentalmente misurare il valore di una prima componente complessa mentre potrebbe essere complicato misurare la seconda componente. Utilizzando le relazioni di Kramers-Krönig è possibile acquisire la conoscenza della seconda nota la prima.

Queste relazioni dipendono dal fatto che l'integrale di Fourier che definisce  $\beta_\omega$  non dipende da tempi negativi, che è una diretta conseguenza della causalità e fa sì che queste relazioni siano molto generali. Dalla forma di  $\beta(\omega)$  si ricavano altre proprietà assolutamente generali come ad esempio:

$$\beta(-\omega^*) = \beta^*(\omega) \quad (6.41)$$

che può essere esplicitata per la parte reale ed immaginaria e ci dice che per  $\omega$  immaginario puro  $\beta(\omega)$  è reale, mentre per  $\omega$  reale abbiamo:

$$Re\beta(\omega) = Re\beta(-\omega) \quad (6.42)$$

$$Im\beta(\omega) = -Im\beta(-\omega) \quad (6.43)$$

ovvero la parte reale è una funzione pari della frequenza e la parte immaginaria è una funzione dispari. Ora consideriamo le relazioni di Kramers-Krönig per dielettrici e conduttori. Anzitutto ricordiamo che

$$\epsilon_\omega = 1 + 4\pi\chi_\omega \quad (6.44)$$

rappresenta la permittività dielettrica generalizzata che coincide con la permittività dielettrica per i dielettrici ma ha un contributo aggiuntivo nel caso dei conduttori.

Consideriamo le relazioni di Kramers-Krönig per la suscettibilità  $\chi$  nel caso dei conduttori, allora le relazioni sopra devono essere modificate in quanto siamo in presenza di un polo semplice dato che  $\sigma_{\omega=0} = \sigma_{dc} \neq 0$ .

Rimandando all'appendice per la dimostrazione si trova che:

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \chi_2(\omega') - \sigma_{dc}}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (6.45)$$

$$\chi_2(\omega) = \frac{\sigma_{dc}}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (6.46)$$

Inoltre ponendo  $\sigma_{dc} = 0$  si recupera il risultato nel caso di mezzi non conduttori.

## 7 Modello fenomenologico per mezzi densi

Supponiamo di considerare un mezzo denso (ad esempio un solido), lineare, omogeneo ed isotropo e per semplicità considereremo trascurabile sia la forza magnetica sia il momento di dipolo elettrico dovuto al nucleo degli atomi. Inoltre supporremo che esistano solamente due tipi di elettroni negli atomi: gli elettroni legati e quelli liberi (o di conduzione). Supporremo inoltre che la lunghezza d'onda del campo applicato sia molto più grande delle dimensioni atomiche così da trascurare la variazione spaziale del campo. Se  $\mathbf{x}$  è la posizione di un elettrone legato rispetto al suo atomo e  $\mathbf{y}$  è la posizione di un elettrone libero dello stesso atomo, le equazioni di Newton nei due casi si scrivono:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -m\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} - m\omega_0^2 \mathbf{x} - e\mathbf{E}_{loc} \quad (7.1)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = -m\gamma_0 \frac{d\mathbf{y}}{dt} - e\mathbf{E}_{loc} \quad (7.2)$$

$\gamma$  può essere inteso come un parametro che quantifica lo smorzamento radiativo per cariche oscillanti ed ha le dimensioni di una frequenza,  $\omega_0$  è la frequenza caratteristica dell'elettrone legato (unica per semplicità),  $\gamma_0$  può essere intesa come la frequenza media degli urti subiti dall'elettrone libero (ci si aspetta quindi una dipendenza dalle variabili termodinamiche) mentre  $\mathbf{E}_{loc}$  è il campo elettrico locale che, in un materiale denso, è in generale differente dal campo applicato. Valutiamo ora proprio il campo locale, questo può essere inteso come la combinazione lineare del campo esterno applicato  $\mathbf{E}$ , del campo prodotto dalla polarizzazione del mezzo nel punto considerato  $\mathbf{E}_{int}$ , meno il campo prodotto dai dipoli nel punto stesso  $\langle \mathbf{E}_{at} \rangle$  rispetto ai quali si calcola il campo locale (come sempre consideriamo il punto come un volumetto macroscopicamente piccolo ma microscopicamente grande), ovvero:

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{int} - \langle \mathbf{E}_{at} \rangle \quad (7.3)$$

Il termine  $\langle \mathbf{E}_{at} \rangle$  può essere valutato come il campo elettrico medio generato dai dipoli ed in appendice si dimostra che vale:

$$\langle \mathbf{E}_{at} \rangle = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3x \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \quad (7.4)$$

dove  $\mathbf{P}$  è il vettore polarizzazione nel punto considerato.

Per un mezzo omogeneo ed isotropo si può considerare  $\mathbf{E}_{int} \simeq 0$  e quindi otteniamo  $\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$ . Adesso possiamo dare una interpretazione in termini della dinamica microscopica al vettore di polarizzazione e al vettore densità di corrente:

$$\mathbf{P} = N(Z - f_0)\mathbf{p} = -eN(Z - f_0)\mathbf{x} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{J} = -eNf_0 \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (7.6)$$

dove  $N$  è la densità di atomi,  $Z$  è il numero atomico ed  $f_0$  rappresenta il numero di elettroni liberi per atomo.

Considerando le componenti di Fourier le equazioni sopra implicano:

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{P}}{eN(Z - f_0)} \rightarrow \mathbf{x}_\omega = -\frac{\mathbf{P}_\omega}{eN(Z - f_0)} \quad (7.7)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\mathbf{J}}{eNf_0} \rightarrow \mathbf{y}_\omega = -\frac{i\mathbf{J}_\omega}{eNf_0\omega} \quad (7.8)$$

Sviluppando l'equazione del moto degli elettroni legati con Fourier e sostituendo le espressioni trovate sopra, con un po' di passaggi algebrici troviamo:

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{N\gamma_{at}}{\left(1 - \frac{\omega^2 + i\gamma\omega}{\omega_0^2}\right) - \frac{4\pi}{3}N\gamma_{at}} \mathbf{E}_\omega \quad (7.9)$$

che per  $\omega = 0$  si riduce al caso statico in accordo con l'equazione di Clausius-Mossotti:

$$\mathbf{P}_{stat} = \frac{N\gamma_{at}}{1 - \frac{4\pi}{3}N\gamma_{at}} \mathbf{E}_{stat} \quad (7.10)$$

dove si è definita la polarizzabilità atomica come  $\gamma_{at} = \frac{(Z-f_0)e^2}{m\omega_0^2}$ .

Analogamente lavorando sull'equazione del moto per gli elettroni liberi ed usando l'equazione 7.9 troviamo l'analogia relazione per  $\mathbf{J}_\omega$ :

$$\mathbf{J}_\omega = \frac{Nf_0e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \left( 1 + \frac{\frac{4\pi}{3}N\gamma_{at}}{\left(1 - \frac{\omega^2 + i\gamma\omega}{\omega_0^2}\right) - \frac{4\pi}{3}N\gamma_{at}} \right) \mathbf{E}_\omega \quad (7.11)$$

che nel caso statico risulta, in accordo alla legge di Ohm:

$$\mathbf{J}_{stat} = \frac{Nf_0e^2}{m\gamma_0\left(1 - \frac{4\pi}{3}N\gamma_{at}\right)} \mathbf{E}_{stat} \quad (7.12)$$

## 8 Onde elettromagnetiche in mezzi non dispersivi

I mezzi non dispersivi rientrano come caso particolare della trattazione precedente, in questo caso le relazioni costitutive si scrivono:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (8.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (8.3)$$

dove  $\epsilon, \sigma, \mu$  sono costanti.

Queste possono essere sostituite immediatamente nelle equazioni di Maxwell 4.1–4.4 e prendendo il rotore della prima e della terza si possono ottenere le equazioni delle onde:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + 4\pi \frac{\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + 4\pi \frac{\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.5)$$

Queste differiscono dalle generiche equazioni delle onde di d'Alambert per la presenza del termine diffusivo dato dalla derivata prima rispetto al tempo. Inoltre questo termine diffusivo dipende in modo cruciale dalla conducibilità elettrica del mezzo e per dielettrici si recuperano le equazioni di d'Alambert.

Nel prosieguo tratteremo esempi di mezzi non dispersivi e utilizzeremo le equazioni del capitolo precedente con le opportune modifiche.

### 8.1 Dielettrici non dispersivi, velocità di fase e di gruppo

Come primo caso particolare dell'analisi precedente si può considerare un dielettrico non dispersivo ovvero che soddisfa  $\sigma = 0$  e  $\epsilon, \mu$  sono costanti e quindi indipendenti dalla frequenza. In questo caso la relazione di dispersione diventa:

$$k_\omega = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon} \quad (8.6)$$

Di solito, anche per frequenze non troppo grandi, la permeabilità magnetica del mezzo  $\mu \simeq 1$  allora possiamo scrivere:

$$\omega = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} k = \pm \frac{c}{n} k \quad (8.7)$$

Questa è la relazione di dispersione più semplice possibile e si è definito  $n = \sqrt{\epsilon}$  detto indice di rifrazione del mezzo e ora  $k_\omega$  è un numero reale.

Possiamo ulteriormente restringere il tipo di onda in considerazione supponendo che l'onda si propaghi solamente lungo la direzione data da  $\hat{\mathbf{u}}_0$  e che il risultato dell'integrazione nella sfera unitaria si possa scrivere come  $\mathbf{E}_\omega e^{ik_\omega \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x}}$  con le ampiezze indipendenti dalla direzione. Se analizziamo solo una componente cartesiana per volta, la relazione sopra diventa:

$$E(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} E_k e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} dk \quad (8.8)$$

Ora si vede che l'integrale sopra è di fatto una sovrapposizione lineare di un'infinità di onde monocromatiche  $E_k e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)}$  piane i cui piani di uguale fase si spostano con velocità data da:

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k} \quad (8.9)$$

detta velocità di fase.

Questa velocità non ha senso fisico in quanto onde perfettamente monocromatiche non esistono, si può però cercare di esprimere una velocità per pacchetti d'onde (ovvero sovrapposizioni lineari di onde monocromatiche) quando questi sono formati da una distribuzione di frequenze o vettori d'onda  $k$  non troppo grande. Se si suppone quindi che l'ampiezza  $E_k$  in 8.8 sia molto piccata per un valore specifico  $k_0$  e tende a zero rapidamente al di fuori di un piccolo intervallo centrato in  $k_0$  si può espandere la fase nell'integrale:

$$E(\mathbf{x}, t) \simeq \text{Re} \left( e^{i(k_0 \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{+\infty} E_k e^{ik(\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{d\omega}{dk}(k_0)t)} dk \right) \quad (8.10)$$

Ora notiamo che se in 8.8 poniamo  $t = 0$  per confronto troviamo che l'equazione sopra esprime  $\tilde{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{d\omega}{dk}(k_0)t, 0)$  e quindi possiamo riscriverla come:

$$E(\mathbf{x}, t) \simeq \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{d\omega}{dk}(k_0)t, 0\right) e^{i(k_0 \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k_0)t)} \right] \quad (8.11)$$

che rappresenta un'onda monocromatica con vettore d'onda  $k_0$  ma modulata da un'ampiezza uguale a quella dell'onda al tempo iniziale che si sposta però lungo la direzione  $\hat{\mathbf{u}}_0$  con velocità:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0) \quad (8.12)$$

detta velocità di gruppo.

Notiamo che la velocità di fase e di gruppo coincidono solo per relazioni di dispersione lineari ed omogenee. Questo tipo di relazioni è verificato nei mezzi non dispersivi ma non lo è, in generale, in mezzi dispersivi. Nei mezzi dispersivi infatti si ha che ogni frequenza ha in generale una velocità di fase differente e questo provoca lo sparpagliamento del pacchetto.

## 8.2 Polarizzazione delle onde elettromagnetiche

Consideriamo un'onda monocromatica piana del tipo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 E e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} \quad (8.13)$$

il versore  $\hat{\mathbf{e}}_1$  indica la direzione di oscillazione del campo elettrico, detta direzione di polarizzazione. In questo caso il vettore di polarizzazione è fissato nello spazio e la polarizzazione è detta lineare. Supponiamo di avere due onde monocromatiche con differenti polarizzazioni allora il campo d'onda risultante sarà:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2) e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} \quad (8.14)$$

In generale le ampiezze  $E_1, E_2$  sono numeri complessi e questo implica che possiamo costruire combinazioni lineari complesse dei vettori di polarizzazione. Se come caso particolare abbiamo ampiezze reali, il campo d'onda risultante sarà polarizzato linearmente lungo la direzione individuata dalla combinazione lineare  $\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2$ . Se invece le ampiezze sono complesse esse conterranno una fase  $\phi_1, \phi_2$  ed in generale avremo uno stato di polarizzazione ellittica.

Infatti si può scrivere scegliendo opportunamente l'origine spazio-temporale per annullare una delle due fasi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 e^{i\Delta\phi} E_2) e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} \quad (8.15)$$

dove  $\Delta\phi$  è la differenza tra le due fasi.

Se  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$  allora il campo d'onda diventa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2 E_2) e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} \quad (8.16)$$

e se prendiamo la parte reale che rappresenta fisicamente il campo elettrico otterremo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)_{\mp} = \hat{\mathbf{e}}_1 E_1 \cos(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t) \mp \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 \sin(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t) \quad (8.17)$$

questi due campi rappresentano rispettivamente un campo elettrico che ruota in senso antiorario ed orario, guardando nel verso di propagazione dell'onda.

Essi vengono anche detti stati di polarizzazione sinistrosi e destrosi oppure, a seguito del fatto che un'onda con polarizzazione circolare trasporta momento angolare, onde ad elicità positiva e negativa. Se scegliamo  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  e  $\hat{\mathbf{u}}_0$  in modo tale che formino una terna ortogonale sinistrosa si possono definire:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) \quad (8.18)$$

che rappresentano stati di polarizzazione circolare ad elicità positiva e negativa rispettivamente e possono essere utilizzati come base per costruire qualsiasi stato di polarizzazione.

Infatti le due combinazioni:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\mathbf{e}}_+ E_+ + \hat{\mathbf{e}}_- E_-) e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} \quad (8.19)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2) e^{i(k\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} \quad (8.20)$$

rappresentano lo stesso stato di polarizzazione se i coefficienti (complessi) soddisfano:

$$E_1 = \frac{E_+ + E_-}{\sqrt{2}} \quad (8.21)$$

$$E_2 = i \frac{E_+ - E_-}{\sqrt{2}} \quad (8.22)$$

## 9 Analisi della riflettanza

### 9.1 Relazioni di Snell-Cartesio

Supponiamo di avere una superficie di contatto tra due mezzi con caratteristiche elettromagnetiche distinte e per semplicità che siano non assorbenti.

In appendice si ricavano le condizioni di raccordo dei campi sulla superficie dalle equazioni di Maxwell:

$$\mathbf{D}_{n2} - \mathbf{D}_{n1} = 4\pi\sigma \quad (9.1)$$

$$\mathbf{B}_{n2} - \mathbf{B}_{n1} = 0 \quad (9.2)$$

$$\mathbf{E}_{t2} - \mathbf{E}_{t1} = 0 \quad (9.3)$$

$$\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{sup} \quad (9.4)$$

dove  $\sigma$  e  $\mathbf{J}_{sup}$  sono le densità superficiali di carica e di corrente elettrica. Consideriamo ora un campo d'onda piano e monocromatico sui due mezzi, in generale possiamo scrivere:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = E_1' Re[\mathbf{e}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \psi_1)}] \quad (9.5)$$

$$\mathbf{E}_1'(\mathbf{x}, t) = E_1' Re[\mathbf{e}_1' e^{i(\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{x} - \omega_1' t + \psi_1')}] \quad (9.6)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t) = E_2 Re[\mathbf{e}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t + \psi_2)}] \quad (9.7)$$

dove la permittività elettrica e magnetica dei mezzi dipende dalla frequenza (sono le componenti di Fourier) e quindi anche i vettori d'onda.

Questi campi devono soddisfare le condizioni di raccordo in ogni punto  $\mathbf{x}$  sulla superficie di separazione e per ogni istante di tempo  $t$ . Imponendo le condizioni di raccordo alla forma dei campi si ottiene che queste possono essere soddisfatte solo se gli argomenti delle funzioni esponenziali sono uguali:

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \psi_1 = \mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{x} - \omega_1' t + \psi_1' = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t + \psi_2 \quad (9.8)$$

Se scegliamo l'origine delle coordinate nel piano di separazione con versore tangente  $\hat{\mathbf{n}}$ , abbiamo che la relazione sopra impone (per  $\mathbf{x} = 0$ ):

$$\omega_1 = \omega_1' = \omega_2 \quad (9.9)$$

ovvero la frequenza dell'onda riflessa e rifratta coincide con quella dell'onda incidente. Questo permette di semplificare l'equazione da cui otteniamo:

$$(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1') \cdot \mathbf{x} = \psi_1' - \psi_1 = cost. \quad (9.10)$$

$$(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} = \psi_2 - \psi_1 = cost. \quad (9.11)$$

dove  $\mathbf{x}$  è un punto qualsiasi appartenente al piano di separazione.

Ma questo implica che  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1'$  e  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  sono vettori paralleli ad  $\hat{\mathbf{n}}$  ed in particolare che:

$$\mathbf{k}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}_1' \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (9.12)$$

ovvero  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_1'$ ,  $\mathbf{k}_2$  ed  $\hat{\mathbf{n}}$  sono complanari.

Introduciamo gli angoli tra  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_1'$ ,  $\mathbf{k}_2$  ed  $\hat{\mathbf{n}}$  con  $\theta_i$ ,  $\theta_r$ ,  $\theta_t$  rispettivamente angolo di incidenza, riflessione e trasmissione così come mostrato in Fig.2.



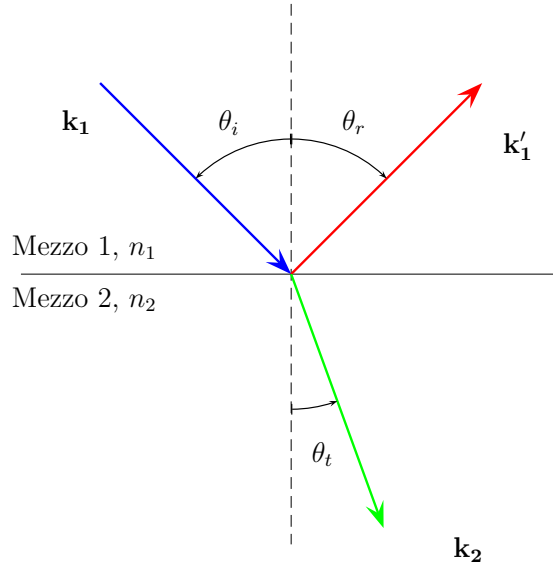


Figura 2: Piano d'incidenza per l'onda incidente, riflessa e rifratta all'interfaccia tra due mezzi con differenti proprietà ottiche.

Prendendo il modulo della 9.12 si trovano immediatamente le relazioni di Snell-Cartesio ricavate qui come teorema:

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (9.13)$$

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (9.14)$$

dove si è usato il fatto che  $n = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\mu\epsilon}$  e che  $k_1 = k'_1$ .

Ricordiamo che in generale  $n_1, n_2$  sono gli indici di rifrazione dei due mezzi che dipendono dalla frequenza dei campi incidenti. Possiamo inoltre prevedere il fenomeno della riflessione totale utilizzando la 9.14, infatti abbiamo che:

$$\sin(\theta_1) \leq \frac{n_2}{n_1} \quad (9.15)$$

essendo il seno di un angolo limitato da 1.

Allora se  $n_2 \leq n_1$  esiste un angolo di incidenza massimo detto angolo limite in cui il raggio rifratto è parallelo alla superficie di separazione tra i due mezzi:

$$\theta_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (9.16)$$

se  $\theta_i > \theta_{lim}$  l'onda viene completamente riflessa e non esiste l'onda rifratta: c'è il fenomeno della riflessione totale.

## 9.2 Coefficienti di Fresnel e polarizzazione

Nelle stesse ipotesi di prima analizziamo ora cosa succede alla polarizzazione di un'onda elettromagnetica all'interfaccia tra i due mezzi. Applicando le condizioni di raccordo 9.1-9.3 ai campi troviamo che le onde riflesse e rifratte mantengono la stessa polarizzazione dell'onda incidente. Infatti supponiamo che l'onda incidente sia polarizzata lungo il piano d'incidenza ma che, per assurdo, l'onda riflessa e

rifratta abbiano una polarizzazione differente allora la 9.1 e la 9.3 danno:

$$E'_{1\perp} = E_{2\perp} \quad (9.17)$$

$$n_1 E'_{1\perp} = n_2 E_{2\perp} \quad (9.18)$$

dove  $E_{\perp}$  è la componente perpendicolare al piano d'incidenza e si sono usate le equazioni di Maxwell monocromatiche 5.9 e le relazioni costitutive per legare i campi  $\mathbf{H}$  ed  $\mathbf{E}$  con la relazione  $n = \frac{ck}{\omega}$ . Chiaramente le equazioni sono incompatibili e questo implica che una polarizzazione parallela al piano di incidenza rimane dello stesso tipo anche nelle onde riflessa e rifratta. In maniera analoga si dimostra anche nel caso di polarizzazione perpendicolare al piano d'incidenza.

Adesso possiamo ricavare i coefficienti di Fresnel considerando i due tipi di polarizzazione possibili: polarizzazione parallela  $\parallel$  al piano d'incidenza (caso a) e polarizzazione perpendicolare  $\perp$  al piano d'incidenza (caso b).

Iniziamo dal caso a, le condizioni di raccordo per le componenti tangenti dei campi si possono riscrivere come:

$$(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (9.19)$$

$$(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}'_1) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (9.20)$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore del piano di separazione.

Utilizzando la 5.9 e il fatto che siamo nel caso a queste diventano equazioni scalari per le ampiezze complesse dei campi d'onda del tipo:

$$(E_1 + E'_1) \cos(\theta_i) = E_2 \cos(\theta_t) \quad (9.21)$$

$$(E_1 - E'_1)n_1 = E_2 n_2 \quad (9.22)$$

risolvendo il sistema per i rapporti si ottengono i coefficienti di Fresnel nel caso di polarizzazione parallela:

$$r_{\parallel} = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{n_1 \cos(\theta_t) - n_2 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)} \quad (9.23)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)} \quad (9.24)$$

Procedendo in maniera analoga anche per il caso b si trovano i coefficienti di Fresnel nel caso di polarizzazione perpendicolare al piano d'incidenza:

$$r_{\perp} = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \quad (9.25)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \quad (9.26)$$

Chiaramente uno stato di polarizzazione arbitraria può sempre essere decomposto come  $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}_{\parallel} + \beta \mathbf{E}_{\perp}$  e può quindi essere studiato utilizzando entrambi i tipi di coefficienti di Fresnel.

Prima di tutto notiamo che l'onda riflessa è in fase con quella incidente se  $n_1 \cos \theta_t > n_2 \cos \theta_i$  (polarizzazione  $\parallel$ ) o se  $n_1 \cos \theta_i > n_2 \cos \theta_t$  (polarizzazione  $\perp$ ), mentre risulta sfasata di  $\pi$  in caso opposto. L'onda trasmessa invece è sempre in fase con l'onda incidente.

Inoltre applicando qualche identità trigonometrica e la legge di Snell 9.14 possiamo riscrivere i coeffi-

cienti di riflessione per entrambe le polarizzazioni come:

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \quad (9.27)$$

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \quad (9.28)$$

Ovviamente se  $\theta_t = \theta_i$  le ampiezze di riflessione sono nulle in quanto siamo nello stesso mezzo e non è presente riflessione, mentre se  $\theta_t + \theta_i = \frac{\pi}{2}$  cioè l'angolo di incidenza e trasmissione sono complementari non è presente la polarizzazione parallela nell'onda riflessa. Questo succede per uno specifico angolo di incidenza detto angolo di Brewster e risulta utilizzando la 9.14 che:

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (9.29)$$

Questo fenomeno prende il nome di polarizzazione per riflessione ed è utilizzato per ottenere luce altamente polarizzata nei fasci laser.

Il fenomeno ha una spiegazione microscopica nel modello ad oscillatori in quanto un oscillatore non irradia radiazione em lungo la direzione di oscillazione che, all'angolo di Brewster, coincide proprio con la direzione dell'onda riflessa.

## 10 Appendice

### Soluzione per i potenziali

Per prima cosa dimostriamo che una possibile rappresentazione della delta di Dirac tridimensionale è data da:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta(\mathbf{x}) \quad (10.1)$$

infatti calcolando in modo ordinario il laplaciano per  $\mathbf{x} \neq 0$  si trova che questo è nullo. Per le proprietà della delta dobbiamo dimostrare che:

$$\int d^3x f(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} \propto f(0)$$

per qualsiasi funzione di prova  $f$  sufficientemente regolare. Valutiamo allora:

$$\begin{aligned} \int d^3x f(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon} d^3x f(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus S_\epsilon} d^3x f(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon} d^3x \nabla \cdot (f(\mathbf{x}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|}) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon} d^3x \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial S_\epsilon} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left( -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\epsilon^2} \right) f(\mathbf{x}) \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon} d^3x \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{r^2} \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial S_\epsilon} f(\epsilon, \theta, \phi) d\Omega = - \oint_{\partial S_\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon, \theta, \phi) d\Omega \\ &= -4\pi f(0) \end{aligned}$$

dove  $S_\epsilon$  è una sfera centrata nell'origine con raggio  $\epsilon$ . Nella prima riga si è usata l'additività dell'operazione di integrale, nella seconda si è usato il fatto che  $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} = 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus S_\epsilon$  e un'identità per il laplaciano, nella terza si è usato il teorema della divergenza e l'espressione in coordinate sferiche per il prodotto scalare dei due gradienti, nella quarta la regolarità di  $f$  per annullare il limite dell'integrale di volume e si è portato il limite sotto integrale poiché si ha convergenza uniforme per la regolarità di  $f$  e l'insieme di integrazione è limitato, infine nella quinta si è usata la regolarità di  $f$ .

Utilizzando il risultato precedente è facile verificare che la soluzione per la generica equazione:

$$\nabla^2 g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -4\pi q \quad (10.2)$$

è data proprio da:

$$g(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{q(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (10.3)$$

## Relazione di Kramers-Krönig per mezzi conduttori

Partiamo dalla relazione:

$$\oint_{C'_\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = 0 \quad (10.4)$$

dove questa volta il percorso d'integrazione passa arbitrariamente vicino all'origine tramite una semicirconfenza positiva nel piano superiore come mostrato in Fig.1 per evitare la singolarità. Il contributo sull'arco all'infinito si annulla in quanto la funzione integranda soddisfa il lemma del grande cerchio, per quanto riguarda i contributi dovuti alle integrazioni sulle semicirconferenze nei due poli possiamo espandere la funzione integranda come:

$$\frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = -\frac{i\sigma_{dc}}{\omega\omega'} - \frac{b}{\omega} - \frac{i\sigma_{dc}}{\omega^2} + O(\omega')$$

quando  $\omega'$  è vicino a 0.

Mentre per  $\omega'$  vicino a  $\omega$  espandendo si ottiene:

$$\frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \frac{\chi(\omega)}{\omega' - \omega} + \chi'(\omega) + O(\omega' - \omega)$$

Valutando gli integrali sulle semicirconferenze attorno ai poli nel limite in cui i raggi delle semicirconferenze vanno a zero si ottiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon(0)} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\frac{\pi\sigma_{dc}}{\omega} \quad (10.5)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta(\omega)} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -i\pi\chi(\omega) \quad (10.6)$$

Perciò si ottiene un'espressione per  $\chi(\omega)$  che contiene due parti principali, in 0 ed in  $\omega$ :

$$\chi(\omega) = \frac{i\sigma_{dc}}{\omega} + \lim_{\epsilon; \delta \rightarrow 0} \frac{1}{i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\epsilon}^{\omega - \delta} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \delta}^{+\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right\}$$

Se riusciamo a togliere il polo in zero si può ridurre la parte principale rispetto all'origine ad un integrale semplice, si trova con un po' di passaggi che:

$$\lim_{\epsilon; \delta \rightarrow 0} \int d\omega' \frac{1}{\omega'(\omega' - \omega)} = 0 \quad (10.7)$$

Allora se aggiungiamo questo membro opportunamente riscritto all'equazione sopra possiamo eliminare il polo nell'origine ed otteniamo il risultato con una sola parte principale in  $\omega$ :

$$\chi(\omega) = \frac{i\sigma_{dc}}{\omega} + \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\omega') - \frac{i\sigma_{dc}}{\omega'}}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Questa è la suscettibilità elettrica nel caso di un mezzo conduttore, cioè che ha una conducibilità statica  $\sigma_{dc}$  non trascurabile.

Scrivendo  $\text{Re } \chi(\omega) = \chi_1(\omega)$  e  $\text{Im } \chi(\omega) = \chi_2(\omega)$  ed utilizzando le proprietà di simmetria di queste funzioni otteniamo:

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \chi_2(\omega') - \sigma_{dc}}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (10.8)$$

$$\chi_2(\omega) = \frac{\sigma_{dc}}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (10.9)$$

che è la forma comunemente usata delle relazioni poiché fa riferimento solo a frequenze positive.

## Condizioni di raccordo per campi elettromagnetici

Ricordiamo le equazioni di Maxwell nella materia 4.1-4.4, risolvendole all'interfaccia tra due mezzi distinti si ricavano delle condizioni di raccordo per i campi. Supporremo che i campi non abbiano singolarità di alcun tipo. Considerando le equazioni per i campi di divergenza in forma integrale su un cilindretto di lato  $h$  e area di base  $S$  normale alla superficie di separazione tra i mezzi otteniamo:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi \int_V \rho dV$$

dove si è utilizzato il teorema della divergenza per trasformare l'integrale di volume in un integrale di flusso. Nel limite in cui  $h, S \rightarrow 0$  l'equazione sopra può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} (D_{2,n} - D_{1,n})S &= 4\pi \int_V \sigma_{sup} \chi_{\Sigma} dV \\ &= 4\pi \int_{\Sigma} \sigma_{sup} d\Sigma = 4\pi \sigma_{sup} S \end{aligned}$$

dove  $\Sigma$  è la superficie di separazione tra i due mezzi dentro al cilindretto,  $\chi_{\Sigma}$  è la funzione caratteristica di questo insieme mentre  $\sigma_{sup}$  è la densità di carica superficiale. Nella prima riga si considera che il flusso sulle pareti laterali del cilindro è un infinitesimo di ordine superiore dato che il campo non è singolare, mentre il termine di sorgente da contributi solo se la densità di carica volumetrica è singolare sulla superficie di separazione che è equivalente alla presenza di densità di carica superficiale. In definitiva otteniamo:

$$D_{2,n} - D_{1,n} = [D_n] = 4\pi \sigma_{sup} \quad (10.10)$$

Analogamente otteniamo la condizione di raccordo per le componenti normali di  $\mathbf{B}$ :

$$B_{2,n} - B_{1,n} = [B_n] = 0 \quad (10.11)$$

Per scrivere le condizioni di raccordo delle componenti tangenziali utilizziamo le equazioni di Maxwell con i rotori e consideriamo un cammino rettangolare con lati  $l$  paralleli alla superficie di separazione, lati  $h$  perpendicolari e area  $S = lh$ . Allora prendendo il flusso attraverso  $S$  ed utilizzando il teorema di Stokes otteniamo:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Nel limite  $l, h \rightarrow 0$  teniamo solo i termini all'ordine più basso e consideriamo, come prima, che i campi non sono singolari mentre in generale  $\mathbf{J}$  può avere singolarità sulla superficie che implicano la presenza di densità di carica superficiale  $\mathbf{J}_{sup}$ :

$$H_{2,t} - H_{1,t} = [H_t] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{sup} \quad (10.12)$$

Analogamente per  $\mathbf{E}$  otteniamo:

$$E_{2,t} - E_{1,t} = [E_t] = 0 \quad (10.13)$$

## Calcolo del campo medio

Introduciamo prima le armoniche sferiche, in particolare ricordiamo le relazioni più importanti per queste funzioni ed esplicitiamole per  $l = 1$  :

$$\oint d\Omega Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (10.14)$$

$$Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l-m} \quad (10.15)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (10.16)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (10.17)$$

$$Y_{1+1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\cos \phi + i \sin \phi) \cos \theta \quad (10.18)$$

Utilizzando le relazioni sopra è facile verificare che le componenti cartesiane del versore normale alla sfera unitaria possono scriversi in termini delle armoniche sferiche come:

$$\sin \theta \cos \phi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1}^* - Y_{1+1}^*) \quad (10.19)$$

$$\sin \theta \sin \phi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1+1}^* + Y_{1-1}^*) \quad (10.20)$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}^* \quad (10.21)$$

Siamo ora pronti per la dimostrazione del risultato:

$$\frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3x \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$$

Prima di tutto ricordiamo che, nel limite non relativistico, il campo  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  allora possiamo scrivere:

$$\int_{r < R} d^3x \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \int_{r < R} d^3x \nabla\Phi(\mathbf{x}) = -R^2 \oint_{r=R} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} d\Omega$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore normale alla sfera di raggio  $R$  e la seconda uguaglianza deriva dal teorema della divergenza applicato al campo tensoriale  $V_{ij} = \Phi\delta_{ij}$ , dato che  $\nabla \cdot \vec{V}_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ . Esplicitando  $\Phi(\mathbf{x})$  in termini delle sorgenti e scambiando l'ordine d'integrazione otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{r < R} d^3x \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -R^2 \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \oint_{r=R} d\Omega \frac{\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}'|} \\ &= -R^2 \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \oint_{r=R} d\Omega \frac{\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}'|} \\ &= -R^2 \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

dove abbiamo esplicitato le componenti cartesiane del versore normale alla superficie sferica nella seconda uguaglianza mentre nella terza si sono usate le espansioni in armoniche sferiche di tutti i termini del secondo integrale insieme alle proprietà delle armoniche sferiche esplicitate sopra.

Notiamo che  $r_{>} = \max\{R, |\mathbf{x}'|\}$  e analogamente per  $r_{<}$ . Nel nostro caso le sorgenti che contribuiscono

al campo sono dentro la regione sferica perciò  $R > |\mathbf{x}'|$  e quindi l'ultimo integrale diventa:

$$-\frac{4\pi}{3} \int_{|\mathbf{x}'| < R} d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$$

dove si è usata la definizione di momento di dipolo elettrico per una distribuzione di carica. Ricordando ora che dalla definizione del campo polarizzazione vale  $\mathbf{P} \frac{4\pi R^3}{3} = \mathbf{p}$  si arriva al risultato cercato.



## Riferimenti bibliografici

- [1] Jackson, J. D. (1999). Classical Electrodynamics (3 ed.). Wiley. ISBN 0-471-30932-X.
- [2] Focardi, S.;Massa, I.;Uguzzoni, A. (2010). Fisica Generale Onde e Ottica (2 ed.). CEA. ISBN 978-88-08-18149-7.
- [3] Feynman, Richard P. (2005). The Feynman Lectures on Physics 2 (2 ed.). Addison-Wesley. ISBN 978-0-8053-9065-0.
- [4] Landau, L. D.;Lifshitz, E. M.; Pitaevskii, L. P. (1984). Electrodynamics of Continuous Media Vol.8 (2 ed.). Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-7506-2634-7.
- [5] Born, M.;Wolf E. (1999). Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (7 ed.). Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-64222-4.
- [6] Eringen, A. C.;Maugin, G. A. (1990). Electrodynamics of Continua I Foundations and Solid Media. Springer-Verlag. ISBN 978-1-4612-3226-1
- [7] Zucchini, R. Unpublished notes on electrodynamics. Dipartimento di Fisica, Università di Bologna.
- [8] Steck, D. A. Notes on classical and modern optics. Department of physics, University of Oregon.