UNA MIRADA ACTUAL AL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Héctor Lamas Rojas*
Academia Peruana de Psicología

Resumen

En la medida que el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes en la actualidad se encuentra en una situación crítica se considera necesario presentar en este artículo los criterios que se están manejando actualmente para comprender el proceso aprendizaje-enseñanza en esta área curricular y motivar que se generen alternativas creativas acordes con la realidad sociocultural, con las investigaciones y sistematizaciones correspondientes, para que pueda ser generalizada a la comunidad inmersa en la problemática en el aprendizaje de las matemáticas. Se concluye con un dossier sobre investigaciones en el área, que ilustran cómo se han abordado estos problemas en los últimos veinte años, publicadas por dos importantes revistas españolas.

Palabras clave: aprendizaje del cálculo y de las matemáticas, conocimiento matemático

A NOWADAYS VIEW ABOUT LEARNING MATHEMATICS

Abstract

According to the measure of learning mathematics in the students at this time is in a critical situation it is considered necessary to present in this article the criteria that is handling nowadays to understand the process learning - teaching in this curricular area and motivating to create original alternatives according to the sociocultural reality, to the investigations and corresponding systematizings, in order that it could be generalized to the immersed community in the problematics of learning mathematics. It is concluded That with a dossier of investigations in the area, which illustrate how these problems have been approached in the last

Correspondencia: * halamasrojas@yahoo.com

twenty years, published by two important Spanish magazines.

Key words: learning of calculation and mathematics, mathematical knowledge

UM OLHAR SOBRE A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Resumo

Na medida em que a aprendizagem da matemática em estudantes de hoje está em uma condição crítica é considerada necessária para apresentar neste artigo os critérios que estão dirigindo para compreender o processo de ensino-aprendizagem nesta área do currículo e motivar os que gerar alternativas criativas coerente com o contexto sociocultural, com relevantes de pesquisa e sistematização, de modo que podem ser generalizados para a comunidade imersa em problemas na aprendizagem da matemática. Conclui-se com um dossiê sobre a pesquisa na área, ilustrando como eles têm abordado estes problemas nos últimos 20 anos, publicado por duas das principais revistas espanholas.

Palavras-chave: aritmética e matemática, o conhecimento matemático

La enseñanza de las Matemáticas en las instituciones educativas ha sido y es motivo de preocupación tanto para padres como para los educadores y en todo tiempo se han presentado dificultades aun no salvadas por los especialistas. Sin embargo, desde tiempos muy remotos la matemática siempre ha estado presente, por ejemplo el hombre comenzó a contar, no se sabe en qué momento ni cómo, probablemente lo hizo con los dedos de la mano o haciendo marcas sencillas en las paredes de las cavernas y luego una larga evolución.

Las Matemáticas constituyen una *actividad de resolución* de situaciones problemáticas, son un *lenguaje simbólico* en el que se expresan las situaciones-problemas y las soluciones encontradas y constituyen un *sistema conceptual*, lógicamente organizado y socialmente compartido. En nuestro medio existe una crisis en el aprendizaje - enseñanza de las Matemáticas: Alto porcentaje de reprobados, alumnos que acreditan los cursos sin haber comprendido las nociones y procedimientos, y una actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas en la mayoría de los alumnos.

El documento *Informe de Seguimiento de la Educación para Todos en el Mundo 2008 "Educación para Todos en 2015 ¿Alcanzaremos la meta?", encargada por la UNESCO, señala que a nivel de América Latina (Burnett, 2007):*

- Se verifica que, a pesar de las importantes diferencias encontradas entre países, los resultados de aprendizaje de los estudiantes de educación primaria y educación secundaria de América Latina son globalmente poco satisfactorios. Diferentes evaluaciones nacionales han mostrado que una gran parte de los estudiantes de América Latina no alcanza el nivel de desempeño mínimo determinado para su grado.
- El desempeño educativo de la región está estancado, con mínimas variaciones en el tiempo que no parecen seguir una clara tendencia.
- Se puede afirmar que el nivel económico y de desarrollo de la región está directamente ligado con los resultados académicos de los alumnos de la misma, de tal forma que las zonas con un mayor índice de desarrollo son aquellas cuyos alumnos obtienen mejores resultados, y viceversa.

El Perú ocupa el último lugar de Latinoamérica en rendimiento escolar en Matemáticas. Las evaluaciones nacionales realizadas en el Perú (UMC y GRADE 2001a y 2001b) y las evaluaciones internacionales realizadas por la UNESCO (UMC y GRADE, 2001c) y la OCDE (PISA, 2003) han mostrado que, por lo general, el rendimiento de los estudiantes en Matemática y comunicación, es pobre en comparación con lo que debería ser, dado el currículo vigente o el rendimiento estudiantil en otros países. Por tanto, se constituye en una necesidad el ir ampliando y profundizando el conocimiento de las Matemáticas en la educación básica peruana, que contribuya a sustentar las intervenciones psicoeducativa, pedagógica y psicológica para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje de la mencionada área curricular.

La mayoría de escolares egresan del colegio sin haber adquirido habilidades básicas de cálculo mental, técnica operativa, razonamiento matemático ni geometría (Arias, 2005). Sin embargo, como observan Guevara et al., (2008), la evaluación del aprendizaje requiere dar cuenta de los niveles de eficiencia académica de los alumnos para analizar qué tanto se asemejan a los que logran normalmente los niños.

Ginsburg, Klein y Starkey (1998) llevaron a cabo una amplia revisión de los hallazgos de las investigaciones relacionadas con el desarrollo de las matemáticas. Exponen que son numerosas las evidencias de que los niños preescolares construyen un conjunto de conceptos matemáticos informales previos a la enseñanza formal en aritmética, y que una buena parte de dicho conocimiento informal está fundado en situaciones de solución de problemas con objetos concretos; los niños adquieren dichos conceptos a través de sus interacciones con el mundo físico y social (Sánchez, 2008).

Existe un amplio consenso acerca de que las matemáticas informales de los niños sirven de base para la educación formal de las matemáticas (Guevara *et al*., 2008). En condiciones normales, a los cuatro años de edad los niños comienzan a usar el conteo espontáneamente para la solución de problemas aritméticos, bajo una variedad de condiciones. En edad preescolar comprenden que agregar produce *más* y sustraer da como resultado *menos* y pueden realizar “operaciones” de suma y resta contando objetos y figuras de uno o dos conjuntos, así como resolver problemas que se les plantean verbalmente y cuyo resultado implica sumar y restar utilizando sus dedos; algunos niños demuestran incluso nociones de la división como repartición (Guevara et al., 2008).

También se han encontrado evidencias de que cuando los niños pobres ingresan a la escuela primaria, su conocimiento informal de matemáticas aún no se ha desarrollado al punto necesario para aprender el currículo escolar de matemáticas, y ello no es atribuible a la pobreza económica, sino a la pobreza cultural en que suelen ser criados (González, 2004; Reimers, 2000; citados por Guevara et al., 2008).

Por otro lado, considerando las matemáticas como un producto cultural, todas las culturas han desarrollado un lenguaje con el que comunicarse, pero sus símbolos, gramática, sintaxis y modos de escritura son bien diferentes entre muchas de ellas.

Para Bishop (1999), existen seis actividades sociales esenciales (contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar) que constituyen el fundamento para el desarrollo de las Matemáticas propias de cada cultura. Él considera que, si bien "todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas como respuesta a las *demandas* del entorno experimentadas a través de estas actividades" (Bishop, 1999, p.83), como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre culturas diferentes, han surgido las "Matemáticas", la disciplina internacionalizada que conocemos hoy y que tiene su principal foco de crecimiento en la tecnología.

Los dos primeros universales de Bishop son fundamentales, sin ellos los otros resultan prácticamente imposibles. *Contar* y *medir* han tenido y tienen una importancia capital. Los individuos de la gran mayoría de las culturas se han iniciado en las matemáticas aprendiendo a contar y medir usando partes de su propio cuerpo. De hecho, estos dos universales forman la pareja básica en la que encuentran cabida el número y la cantidad, ya sea discreta o continua. *Localizar* y *diseñar* se relacionan con la concepción del espacio y la geometría. *Jugar* y *explicar* remiten más a la comunicación y a la relación social. La explicación es esencial para saber el porqué de las cosas, para comunicar ideas y para justificarlas. Por tanto, estos seis universales pueden agruparse en tres parejas relacionadas con el entorno social (jugar, explicar), espacial (localizar, diseñar) e individual (contar, medir).

Los universales de Bishop proporcionan una primera respuesta a la cuestión de dónde localizar las Matemáticas. Puede haber matemáticas allí donde se lleve a cabo alguno de esas seis actividades. En contra de esta afirmación puede argumentarse que a menudo se realizan actividades en las que se actúa de forma mecánica e inconsciente. En efecto, es así, pero si se profundiza en el análisis hasta conocer cómo se ha aprendido a actuar mecánicamente y cómo se justifica el resultado que se obtiene, llegaremos hasta un punto en el que alguien sí que tuvo que ser consciente de lo que hacía y de porqué y cómo llegó a idear aquello que se aplica.

Según las estadísticas internacionales, hay una relación directa entre el desarrollo de los países y el rendimiento escolar: a mayor pobreza, menor rendimiento. Pero tampoco, se debe olvidar el hecho de que un gran número de niños pobres que se incorporan al sistema escolarizado presentan, como grupo, ejecuciones menos adecuadas que los niños de clases sociales media y alta, que por cierto se encuentra bastante documentado. Estos niños, según lo recuerdan Guevara et al., (2008), se encuentran en alto riesgo de fracaso escolar, especialmente durante los primeros años de primaria (DiLalla, Marcus, & Wright-Phillips, 2004; Leppänen, Niemi, Aunola & Nurmi, 2004). En diversos documentos (por ejemplo Foro Educativo, 2000, y World Bank, 1999) se ha sugerido, que además de la calidad, la educación peruana adolece de serios problemas en cuanto a equidad. Aludiendo a una serie de indicadores educativos (por ejemplo repetición, deserción y rendimiento en pruebas estandarizadas) que muestran peores resultados para los estudiantes más pobres (INEI, 1995). Estos indicadores no se dan solamente en individuos, sino que se concentran en grupos de estudiantes que asisten a centros educativos específicos (en otras palabras existe menor variabilidad entre el nivel socioeconómico de los estudiantes que asisten a un mismo centro educativo que entre los estudiantes que asisten a diferentes centros educativos) (Cueto et al., 2003).

Los estudiantes que proceden de

las familias de los niveles socioeconómicos más altos siguen obteniendo mejores resultados tanto en primaria como en secundaria en Matemática y en Comunicación Integral. Es decir, a mayor nivel socioeconómico, mejores resultados en las pruebas. Esta tendencia se reproduce de esa manera en escuelas públicas y privadas (Benavides, 2002). Por tanto, queda claro que los resultados educativos de los estudiantes que provienen de contextos más pobres son por lo general peor que el de sus pares que provienen de familias con mayores recursos (ver por ejemplo UMC & GRADE, 2000, para ver rendimiento escolar el INEI, 1995; para ver resultados en cuanto a repetición y deserción de acuerdo al contexto socioeconómico de los estudiantes).

Las matemáticas escolares debieran servir para comprender, interpretar la realidad y, consecuentemente, tomar decisiones (Blanco & Blanco, 2009). La educación matemática procura estimular la capacidad de abstracción, la precisión, el razonamiento lógico, el espíritu de análisis y de investigación y el espíritu crítico y científico de quien la estudia. De igual forma, la educación matemática permite el enriquecimiento cultural, pues ayuda en la comprensión de otras disciplinas para las cuales la matemática constituye un instrumento indispensable, dado que el desarrollo tecnológico, industrial y social actual exige la aplicación cotidiana de habilidades matemáticas.

Para el alumno o la alumna, la matemática constituye una herramienta para resolver problemas escolares y de la vida cotidiana, sin olvidar que esta sirve: (a) como herramienta de cálculo; (b) para lograr el desarrollo del pensamiento lógico, algorítmico y heurístico y (c) como lenguaje universal capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras asignaturas propias de su del nivel donde estudia. Así, la matemática es una herramienta de trabajo y, además es una disciplina fundamental en la formación de un estudiante exitoso. Por ello, se debe lograr que su enseñanza sea eficiente, para que el alumno y la alumna adquieran los aprendizajes que los conduzcan a un mejor desenvolvimiento académico y profesional, hoy en la escuela y mañana en el trabajo.

Las interrogantes que se encuentran flotando en los contextos relacionados con la enseñanza son ¿Qué se entiende, hoy en día, por Matemática?, ¿cuáles son las actividades fundamentales que están vinculadas con la Educación Matemática?, ¿por qué es importante el aprendizaje de la matemática para el desarrollo de una persona?, ¿por qué es importante la matemática en nuestra vida?, ¿por qué es tan dificultoso entenderla o enseñarla?, ¿cuál es la mejor forma de enseñar matemática?; entre otros cuestionamientos.

En este sentido, este artículo intenta ser una aportación que posibilite la realización de las distintas actividades matemáticas y mejore la comprensión de la misma, con lo cual se espera ayudar tanto a profesores como a alumnos a que obtengan una opción estratégica más fructífera y adecuada a las necesidades actuales, además de estrechar la brecha entre la teoría y la práctica en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje, con la mejora de las prácticas educativas.

A continuación se analizan algunos aspectos sobre el número, las operaciones básicas de cálculo, símbolos, formas de expresión y comprensión, sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, una mirada sobre las actitudes, planteamientos actuales como: estrategias cognitivas, metacognitivas, resolución de problemas, entre otros.

El número y las operaciones de cálculo

Según la matemática moderna, el número es una propiedad de un conjunto; nace de la correspondencia, término a término, entre dos conjuntos. Implica un orden y una sucesión. Los números, la aritmética, señalan Godino, Font Moll, Wilhelmi y Arrieche (2009), es la respuesta social al problema de comunicar el tamaño o numerosidad de los conjuntos, de ordenar una colección de objetos y de analizar procesos iterativos-recurrentes. Según Piaget (1970, 1972), la construcción de los números se efectúa en estrecha relación con la de las seriaciones y de las inclusiones de clases. Seriación, inclusión de clase, correspondencia término a término, son estructuras complejas nacidas de operaciones concretas. Las estructuras se esbozan progresivamente siguiendo los distintos niveles preoperacionales y operacionales. La construcción del número se establece con las operaciones lógicas. Al nivel pre-lógico corresponde un período pre-numérico. Las operaciones lógicas y aritméticas forman un único sistema total y psicológicamente natural. El número es solidario de una estructura operacional de conjunto. Para que pueda adquirir el número el niño debe haber alcanzado el estadio de las operaciones concretas. Para poder hablar de números operacionales, es necesario que esté constituida la noción de constancia de número. La conservación es una condición necesaria a toda actividad lógico-matemática. El número no es inteligible más que en la medida en que permanece idéntico a sí mismo; esto es la constancia del número.

Las nociones de conservación constituyen unos índices psicológicos del coronamiento de una estructura operacional. Solamente una vez adquirida la reversibilidad, el niño puede concebir la conservación de una cantidad o de un conjunto, cuando modifica su disposición espacial. En el niño pequeño la evaluación numérica permanecerá durante mucho tiempo ligada a la disposición espacial de los elementos. Si se distancian entre sí los elementos de una de dos hileras situadas, inicialmente, de manera que no se correspondan ópticamente, el sujeto dejará de admitir su equivalencia numérica.

Dos condiciones psicológicas son indispensables para la comprensión y asimilación de este concepto de número: la conservación del todo y la seriación de los elementos (Garrido & Grau, 2001; Piaget & Szemunska, 1996; Piaget, 1965). Estas condiciones no se dan hasta los seis y medio - siete años:

(1) Se da la conservación cuando el niño adquiere la certeza de que el todo es un conjunto de partes que pueden distribuirse como se quiera. La relación de las partes con el todo es una relación lógica constitutiva de dicha conservación;

(2) La segunda condición requerida es la ordenación de una serie. El número se construye en la medida en que los elementos de la serie son concebidos a la vez

como "equivalentes y no equivalentes"; equivalentes, es decir, pudiendo ser agrupados en una misma clase, caracterizada por un número cardinal (es la igualdad en la cantidad de grupos de objetos diferentes, independientemente de su naturaleza); no equivalentes, es decir, pudiendo ser seriados, siendo cada término de la serie semejante a los demás y diferente por el lugar que ocupe en dicha serie. Para un niño, la posibilidad de considerar que una cantidad es simultáneamente superior a una primera e inferior a una segunda, corresponde a una etapa importante en el desarrollo de la lógica.

Cuando el niño es capaz de comparar dos cantidades, cuando ha adquirido la noción de conservación y de seriación, entonces puede abordar la numeración.

Si se estudia la función del cálculo en sí misma, puede constatarse que se establece progresivamente en correlación con los diversos elementos que la componen: el elemento fásico en su soporte verbal y lógico abstracto; el elemento de referencia gnósico que representan los dedos en la acción de contar; el elemento cinestésico en las acciones de añadir y sustraer; el elemento espacial en la ordenación de las cifras escritas y leídas; los elementos más específicos del cálculo que corresponden a la elaboración del número simple y complejo y a las operaciones que de él puedan deducirse.

La operatividad del cálculo se desarrolla con el pensamiento lógico. Supone la descomposición de un número en sus partes. Las operaciones abstractas de cálculo mental no son posibles más que a través del pensamiento lógico operacional, en el que se da la conservación de conjuntos y la noción de reversibilidad de las operaciones.

El estudio del desarrollo de la función del número en el niño muestra que el sistema de cálculo, a partir de unas nociones concretas perceptivas de las primeras unidades, se desarrolla en relación con la función operacional lógica de la inteligencia. Sin embargo, existen ciertas características de análisis, de síntesis, de seriación, de constancia y evaluación de cantidades, que le son inherentes.

La elaboración de la noción de número y de las operaciones de cálculo se lleva a cabo progresivamente desde los primeros años de vida. Se observa que, hasta los cinco años, se desarrolla una primera etapa en la que el niño concibe concretamente los primeros números: el niño verifica la correspondencia entre dos objetos a los 3 años, entre tres a los cuatro y entre cuatro a los cinco años y medio.

Hasta dicha edad, el niño tiene la noción de la correspondencia de algunas unidades, concepción concreta e intuitiva ligada a la percepción de los objetos. Hacia la edad de seis años, de forma concomitante con el pensamiento lógico, se desarrolla la posibilidad de realizar operaciones; operatividad independiente de la percepción y de la movilidad de su composición. Aunque el elemento espacial constructivo lo impregne, no obstante, para poder calcular, es preciso poder hacer abstracción de la configuración espacial pura.

La escritura de los números provocará otras dificultades psicológicas. Para que, después de adquirir una palabra que representa una cantidad, el niño sea capaz de traducir mediante un signo particular dicha cantidad, es necesario que la función simbólica esté ya suficientemente desarrollada.

Cuando se ha llegado al conocimiento de las cifras y se empiezan a realizar las primeras operaciones, es necesario esforzarse en comprender su significado. Al principio, la operación debe ser la configuración escrita de la acción de las manos y de la cabeza; la solución de la pizarra sólo es el resumen de dicha acción.

Una operación es una "acción interiorizada", es decir, un proceso mediante el cual se realiza mentalmente una manipulación difícil de realizar de forma real. El niño se halla en presencia de una abreviación impresionante, puesto que la acción concreta, viva, consistente en manipular los objetos se realiza ahora mediante algunos signos que separan los datos numéricos: [+ , - , = , :].

El niño que toma unas bolas, las mira, las reparte, vive una acción duradera. Todo esto se traducirá en una operación aritmética, en algo que no existe en absoluto: 5 - 2 = 3 por ejemplo.

La operación consiste en representar simbólicamente estados y acciones que se suceden en el tiempo. El niño debe poseer esta estructura en tres tiempos: antes- lo que se ha realizado- después y sus expresiones lingüísticas.

Es necesario que el niño comprenda que las operaciones se realizan con los números, pero que éstos no tienen significado sino es en relación con el conjunto al que pertenecen. Por ejemplo, calcular el número de animales (caballos y vacas) que hay en una granja. No se trata de hacer la suma de vacas y de caballos, sino de reunir ambos conjuntos, el de las vacas y el de los caballos, en uno sólo, el de los animales. La transformación no es únicamente de orden verbal. Supone un proceso psicológico avanzado en el dominio de las clasificaciones, puesto que vacas y caballos deben ser considerados como pertenecientes a dos clases de equivalencia determinada, dos clases que pueden inscribirse dentro de otra clase más general, la de los animales.

Las operaciones no se comprenden sino se realizan. La adición es esencialmente una operación de reunión; la substracción se caracteriza por su complejidad, sirve para calcular una resta, una comparación, la parte desconocida de una suma de la cual conocemos una parte. La multiplicación, es una adición abreviada de números iguales; la división corresponde a dos acciones diferentes: partición (tengo ocho manzanas, he hecho dos partes; tengo cuatro manzanas en cada parte); distribución (tenía ocho manzanas, he hecho grupos de a cuatro, tengo dos grupos). El niño debe ser capaz, dada una acción concreta simple, de traducirla en términos de operación aritmética. Inversamente, ante una operación aritmética, el niño ha de poder indicar una acción concreta simple que responda a dicha fórmula. Esto se llama comprensión de las operaciones.

El mecanismo de las operaciones implica la noción de espacio y de orientación. El niño debe aprender a alinear las cifras y a colocar unas en relación con las otras.

El conocimiento de las tablas de adición y multiplicación debe ser el resultado simultáneo de un aprendizaje sistemático y de un trabajo de reflexión sobre la estructura del sistema decimal (un convenio, por el cual los objetos se separan en unidades y decenas). La memorización permite aproximaciones y por ende una mejor comprensión.

El factor principal de la reversibilidad de las operaciones es la formación de operaciones mentales. Las operaciones son acciones reversibles. Cada operación de reunión supone de inmediato la operación de separación. Por consiguiente, debe enseñarse la sustracción como lo inverso de la adición, la división como lo inverso de la multiplicación. Así, debe medirse el grado de asimilación de la sustracción como criterio de comprensión de la adición. De idéntica forma, la multiplicación no será verdaderamente asimilada si la división no ha sido comprendida.

Una vez analizado sobre el número, la secuencia de aprendizaje del las operaciones básicas de cálculo, pasamos a considerar la resolución de problemas, todo lo anterior sintetizado en una situación problema.

Enseñanza – aprendizaje de las matemáticas

Una educación matemática de calidad debe proporcionar a los estudiantes las herramientas que les permitan actuar en una variedad de situaciones de la vida diaria. Hoy, el foco de la enseñanza está puesto en la motivación y gestión del conocimiento y en que el estudiante desarrolle la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar y comprender el mundo real. Es decir, ha dejado de estar centrada en el aprendizaje de algoritmos y procedimientos de cálculo, o en el uso de la resolución de problemas sólo como elemento de control de lo aprendido (Bronzina, Chemello & Agrasar, 2009).

La tendencia actual es a desarrollar en la sala de clase las habilidades para pensar y aprender, en la medida que en la actualidad las habilidades de pensamiento son más críticas que nunca. Es una necesidad el dar mayor énfasis al aprendizaje innovador que al aprendizaje de mantenimiento (Botkin, Elmandjra & Maltza, 1979 citados por Arancibia, Herrera & Strasser, 1999).

El aprendizaje de mantenimiento se refiere a la adquisición de perspectivas, métodos y reglas fijas para tratar con situaciones conocidas y recurrentes; es el tipo de aprendizaje diseñado para mantener un sistema ya existente como el nuestro o un modo de vida ya establecido. Aunque, este tipo de aprendizaje ha sido y seguirá siendo indispensable, no es suficiente. Según Segura y Chacón, la enseñanza tradicional no proporciona al alumno o alumna herramientas para indagar, analizar y discernir la información. Para estas autoras, "*los conocimientos impartidos son más bien automatizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse por distintas vías*" (Segura & Chacón, 1996, p.29).

El aprendizaje innovador cuestiona los supuestos, y busca nuevas perspectivas. Es imperativa su implementación, si se acepta la idea de que un desafío fundamental para la educación de hoy es preparar a la gente para anticipar el cambio de dar forma al futuro. Para ello se hace evidente la necesidad de una mejor comprensión de cómo enseñar habilidades para pensar. Asimismo, Coll, Pozo, Sarabia y Valls (1992) afirman que la importancia del aprendizaje está en que el alumnado construya significados y atribuya sentido a lo que aprende; pues para un ingeniero o ingeniera, no basta adquirir conocimiento matemático, es determinante comprenderlo y aplicarlo.

En los últimos años la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han sido objeto de numerosos estudios, propuestas y debates (Whimbey & Lochhead, 1993; Brissiaud, 1993; Macnab & Cummine 1992), sin embargo, existe una creciente preocupación, sobre todo ante el hecho de que la mayoría de personas no alcancen el nivel de "alfabetización funcional" mínimo en matemáticas para desenvolverse en una sociedad moderna.

Según Kitcher (1988), el desarrollo del conocimiento matemático viene apoyado por una cierta práctica que posee varios componentes: un lenguaje, un conjunto de proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo determinado, un conjunto de cuestiones importantes sobre problemas no resueltos, un conjunto de formas de razonamiento y un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas.

Además, las conclusiones de los mismos permiten establecer algunos criterios generales para la enseñanza de las matemáticas que responden, en lo esencial, a los establecidos por Onrubia, Rochera y Barberá (2004, citados por Serrano, 2008):

1) Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas mediante actividades que sean significativas para los alumnos y donde el alumno pueda atribuir sentido a su aprendizaje.
2) Orientar el aprendizaje del alumno hacia la resolución de problemas, dejando los ejercicios como actividad secundaria para la consolidación de algunas destrezas.
3) Conectar el pensamiento narrativo y paradigmático de los alumnos:
   a) Vinculando el lenguaje matemático con su significado referencial.
   b) Activando el conocimiento matemático previo de los alumnos, tanto formal, como informal.
4) Evitar la generación de lagunas cognitivas:
   a) Avanzando de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de generalización y abstracción.
   b) Secuenciando adecuadamente los contenidos matemáticos.
   c) Conectando los conocimientos declarativo, procedimental y condicional.

5) Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas.

6) Basar la organización del aula en la cooperación y la interactividad, posibilitando el logro de objetivos, tanto individuales, como grupales.

Factores mediadores en la clase de matemáticas. Hay diferentes formas de abordar el contenido matemático, teniendo en cuenta que la enseñanza de la matemática debe ser un constante equilibrio entre la matemática formativa y la matemática informativa (Santaló, 1990). La elección del método o forma educativa debería partir del conocimiento de cada uno de los factores implicados en el aprendizaje, para que el éxito en la formación matemática sea posible.

Una clasificación de estos factores nos la da Ponte et al., (1997) en cuatro grandes bloques: a) El tipo de tarea, b) Las características del alumno, c) El contexto escolar y social, y d) El profesor.

El *tipo de tarea* es uno de los factores principales porque está relacionado con los objetivos (es su manifestación). A la hora de planificar la clase hemos de tener en cuenta: su carácter abstracto o concreto, la posibilidad de manipulación, los conocimientos previos necesarios, su simplicidad o dificultad para los estudiantes, la relación con otras materias, etc. No podemos considerar del mismo modo clases en las que se propone resolver ejercicios, que aquellas en que se propone que lleven a cabo una investigación, o de otras en que se promueve una discusión colectiva, o finalmente, aquellas en las que no se encomienda a los alumnos ninguna labor (Ponte et al., 1997).

Las *características del alumno* en sus dos formas, como sujeto individual y como miembro del grupo. No se trata de recoger toda la información de cada uno de los alumnos, puede resultar una tarea laboriosa e innecesaria, sólo de aquellas características relacionadas con el aprendizaje matemático y las tareas planificadas; es, precisamente lo que va a permitirnos adaptar la enseñanza a sus necesidades.

El *contexto escolar* y social en que se desarrolla el aprendizaje es una información de carácter complementario, pocas veces susceptible de modificaciones pero interesante en cuanto a conocer situaciones puntuales de los alumnos que puedan afectar al día a día en el aula y sobre todo de los recursos, personales y materiales, disponibles para la adaptación.

Y *el profesor*, sus características personales, su método de enseñanza, su estilo docente, su actitud hacia la diversidad, su experiencia profesional o, su competencia profesional, median en el aprendizaje del alumno.

Desde esta perspectiva, se debe convertir al alumnado en profesionales creativos, con capacidad de raciocinio, sentido crítico, intuición y recursos matemáticos que les puedan ser útiles. Por lo tanto, el profesorado está obligado a buscar herramientas que permitan la utilización de tecnologías para crear y proporcionar un ambiente de trabajo dinámico e interactivo. Herramientas, que permitan cambiar las metodologías de trabajo para la enseñanza y el aprendizaje, desarrollar habilidades del pensamiento propias del área de matemática y mejorar el aprendizaje en los alumnos y las alumnas.

Consideramos que la generación de nuevos modelos mentales, principios pedagógicos y modelos de enseñanza de las matemáticas deben involucrar (Moya, 2005): ***aprendizajes colectivos*** que tengan en cuenta el control del proceso global del conocimiento en educación matemática y su utilización práctica; ***aprendizajes individualizados*** que hagan efectiva la interiorización de los procedimientos de producción de conocimientos; ***aprendizajes sociales*** que comprometan ámbitos efectivos de producción y acceso al conocimiento más allá del medio escolar formal; y ***autoaprendizajes*** que faciliten la aproximación al conocimiento.

Estamos hablando de generar competencia matemática, la cual consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral, definición que, según Rupérez y García (2008) incluye: habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, el conocimiento y manejo de los conocimientos matemáticos básicos, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. Habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos. Disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento (1ª Fase: Comprender).

Utilizar los elementos y razonamientos matemáticos para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella (2ª Fase: Pensar).

Saber aplicar las estrategias seguidas para resolver un problema a otras situaciones similares, adoptando las medidas necesarias y adecuadas para solventar las diferencias (3ª Fase ejecutar).

Desde esta perspectiva, se entiende por competencia matemática la capacidad de administrar nociones, representaciones y utilizar procedimientos matemáticos para comprender e interpretar el mundo real. Esto es, que el alumno tenga la posibilidad de matematizar el mundo real, lo que implica interpretar datos; establecer relaciones y conexiones; poner en juego conceptos matemáticos; analizar regularidades; establecer patrones de cambio; encontrar, elaborar, diseñar y/o construir modelos; argumentar; justificar; comunicar procedimientos y resultados. En este encuadre, los procesos como la argumentación, la comunicación y el establecimiento de modelos son procesos de la educación matemática que favorecen la dinámica de la clase.

Un mínimo de conocimientos del rendimiento y las actitudes

Son varios los factores que determinan el rendimiento escolar de los alumnos, pudiendo ser clasificados en tres grandes categorías: aquellos asociados a la familia (características socioeconómicas y culturales), los asociados a los factores escolares (infraestructura escolar, practicas didácticas, recursos educativos, características de los profesores, entre otros) y aquellos relacionados al propio alumno (habilidades, motivación, actitudes, etc.) (Cueto 2004; Soares 2004a).

Algunos estudios, como el realizado por Lapointe, Mead y Philips (1989), comparando el rendimiento de alumnos de trece años de diferentes países (Corea, España, EEUU, Irlanda, Reino Unido y Canadá) en una prueba objetiva en matemáticas, muestran que en muchos de estos países entre un 40 y un 50 por ciento de alumnos no alcanzan el mínimo de conocimientos matemáticos que deben estar adquiridos al finalizar la escolarización obligatoria.

En el Perú, tres evaluaciones nacionales del rendimiento escolar (EN 2001, EN 2004 y PISA, 2000) concluyen que existen grandes déficit en el rendimiento de los estudiantes a nivel nacional mostrando además diferencias entre distintos grupos de población. Así también señalan que la gran mayoría de los estudiantes no alcanza un nivel de dominio adecuado (Benavides & Rodríguez, 2006). El aprendizaje innovador cuestiona los supuestos, y busca nuevas perspectivas. Es imperativa su implementación, si se acepta la idea de que un desafío fundamental para la educación de hoy es preparar a la gente para anticipar el cambio de dar forma al futuro. Para ello se hace evidente la necesidad de una mejor comprensión de cómo enseñar habilidades para pensar. Asimismo, Coll, Pozo, Sarabia y Valls (1992) afirman que la importancia del aprendizaje está en que el alumnado construya significados y atribuya sentido a lo que aprende; pues para un ingeniero o ingeniera, no basta adquirir conocimiento matemático, es determinante comprenderlo y aplicarlo.

Un análisis de los cuadernos de trabajo de matemática de los estudiantes del sistema público realizado en el 2001 mostró que solo el 44% de los ejercicios fue resuelto (Cueto, Ramírez, León & Pain, 2003). Otros análisis de este mismo estudio mostraron un énfasis excesivo de los docentes en algunos aspectos del currículo (principalmente, en las capacidades de números y numeración), a costa de otros temas. El estudio mencionado se limitó al sexto grado y a escuelas de Lima.

Según Cueto, León, Ramírez y Guerrero (2008), los estudiantes pasan aparentemente muchas horas operando con números para resolver ejercicios de las cuatro operaciones básicas. Estos resultados son concordantes con los análisis de Cueto et al, (2003, 2004) y con los de autorreporte de los docentes que se encuentran en Galindo (2002) y Zambrano (2002); concretizando, Arellano (2006) reporta que:

> la información revela que no todas las capacidades han sido desarrolladas en el aula (Cuestionario aplicado a docentes voluntarios de la muestra en forma anónima), lo cual afecta las oportunidades de los estudiantes y mucho más si se sabe que las capacidades desarrolladas han sido trabajadas de manera operativa, sin desarrollar las capacidades de análisis, reflexión o de inferencias. (p.54).

El análisis de estas dificultades

se centra en los siguientes aspectos:

1. La actitud no favorable que, en general alumnos y profesores tienen hacia las matemáticas por considerarla una materia difícil y árida.
2. Las propias dificultades inherentes a las características del desarrollo psicológico del niño.
3. Las dificultades relacionadas con la organización escolar y el currículo.
4. La naturaleza de la propia disciplina, su carácter abstracto, la complejidad y jerarquización de los conocimientos, el uso de un lenguaje formal, etc., que hacen de las matemáticas, como se afirma en The Cockcroft Report (Cockcroft, 1982) una materia difícil de enseñar y de aprender.

El campo de las actitudes, como aspecto básico y primordial en el aprendizaje, ha cobrado en los últimos tiempos acogida por parte de los profesionales de la educación como respuesta alternativa a las dificultades reportadas en el aprendizaje de los alumnos y en la enseñanza de los profesores, tanto a nivel de matemáticas como a nivel general. Las actitudes son definidas como la tendencia psicológica que se expresa a través de la evaluación favorable o desfavorable de una entidad en particular (Eagly & Chaiken, 1998). Dicha entidad puede ser un objeto, una persona, un suceso o cualquier evento capaz de ser valorado. Las actitudes son inferidas de lo que una persona manifiesta acerca del objeto actitudinal, puesto que no son directamente observables ni se traducen necesariamente en conductas, en nuestro caso son las matemáticas.

Diferentes investigaciones han revelado que el desarrollo de actitudes positivas es fundamental para el estudio de cualquier asignatura de estudio, pues así el alumno tendrá una predisposición favorable para el estudio, y se creerá capaz de realizarlo y de hacer uso de la asignatura por una serie de razones útiles para él (Gómez, 2000).

Las actitudes tienen, en general, una relación positiva con el rendimiento en las pruebas estandarizadas sobre matemáticas (Cueto, Andrade & León, 2003). Esto no necesariamente significa una relación de causalidad, pero sí un elemento que es necesario tomar en cuenta en el desarrollo de las clases. El modelo tradicional del docente que se preocupa sólo por los conocimientos que adquieren sus estudiantes parece no tener futuro de acuerdo con estos datos —y también, por cierto, de acuerdo con la teoría educativa contemporánea y los currículos vigentes—. El pensamiento y el afecto deben estar presentes en cada sesión de aprendizaje —de hecho, inevitablemente lo están, en forma explícita o implícita.

Las actitudes juegan un papel importante en el rendimiento académico de la matemáticas en estudiantes peruanos (Aliaga, 1998). Aiken (2002) sugiere que existe una relación recíproca entre actitudes y rendimiento:

> ...las actitudes positivas hacia la materia motivarán al estudiante a pasar más tiempo estudiándola y pensando en ella, y como resultado tendrá notas más altas y otras recompensas que le harán sentirse bien sobre la materia e interesado en seguir aprendiéndola. (p.165)

Al respecto, Pozo y Gómez (2000) postulan que la forma de organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje selecciona y refuerza ciertas actitudes en los alumnos, aunque en la mayor parte de los casos no exista un propósito explícito de enseñarlas. Muchas veces el carácter implícito de este proceso lleva a transmitir actitudes contrarias a los propósitos que la educación se plantea, lo que ha sido llamado por algunos autores la transmisión del currículo oculto (Torres, 1994). Por ejemplo, con frecuencia los criterios de evaluación que emplean algunos profesores contradicen los objetivos trazados por ellos mismos. Imaginemos el caso del profesor que desea estimular la creatividad en la resolución de problemas en el área de Lógico-Matemática, pero que, pese a ello, en sus evaluaciones sólo plantea ejercicios en los que basta que el alumno aplique mecánicamente el algoritmo correspondiente. El mensaje que —sin querer— este profesor estaría enviando a sus alumnos sería el siguiente: "Lo que realmente importa es que repitan mecánicamente lo que les enseñé".

Bazán, Espinoza y Farro (2002), Aliaga y Pecho (2000), y Cueto, *Andrade y León* (2003) han investigado la relación entre rendimiento y actitud en la Matemática para el sistema escolar. Comprobaron, en general, que las actitudes fueron negativas y que estuvieron relacionadas con el bajo rendimiento. Además, en el primer trabajo se ha encontrado que, conforme los grados escolares avanzan, la actitud hacia la Matemática se torna menos favorable.

El boletín Crecer 2, de la UMC y GRADE (2000), reporta datos referidos a estudiantes peruanos, mostrando que la actitud es más positiva en primaria que en secundaria. Por su parte, Bazán *et al.,* (2002) realizaron un análisis más profundo de estos datos. Encontraron que los estudiantes que manifiestan mayor gusto y percepción de autoeficacia tenían el más alto rendimiento, mientras que aquellos que manifestaban temor e inseguridad para participar en clase tenían el peor rendimiento.

En este punto, proponemos una aproximación a las actitudes y a su relación con el aprendizaje de la Matemática a partir de un modelo general del aprendizaje basado en el reconocimiento de los tres sistemas de la personalidad (el cognitivo-productivo, afectivo-emotivo y el conativo-volitivo) a partir de una revisión de Ortiz (1994).

Para analizar las actitudes dentro del proceso de aprendizaje, debemos distinguir el plano *representacional* del plano *procedimental*. En el plano de las representaciones, nos referimos a los aspectos estructurales que son predominantemente de entrada; así tenemos disposiciones afectivas, aptitudes cognitivas y actitudes conativas. En el plano procedimental, nos referimos a la actividad que es predominantemente de salida: las emociones, lo productivo y lo volitivo. Ambos planos, según Ortiz (1994), conforman los sistemas de la personalidad el sistema afectivo-emotivo, el sistema cognitivo-productivo y el sistema conativo-volitivo.

Concordando con Ortiz (1994), en el *sistema afectivo-emotivo*, se codifican y procesan afectos y sentimientos. En el plano de las representaciones, a nivel subconsciente, estos tipos de información (afectos y sentimientos) se estructuran en las disposiciones afectivas, y en el plano de los procedimientos se organizan en las emociones de la personalidad. En el *sistema cognitivo-productivo,* se codifican y procesan imágenes y conceptos, los cuales se estructuran en el plano de las representaciones subconscientes, como las aptitudes cognitivas, y en el plano de los procedimientos, como las habilidades productivas o creativas de la personalidad. En el *sistema conativo-volitivo,* se codifican y procesan motivos y valores, que se estructuran en el plano de las representaciones de nivel subconsciente, como las actitudes conativas, y en el plano de los procedimientos, como los procesos volitivos de decisión de la personalidad.

Para comprender las actitudes, debemos enfatizar el plano representacional antes que el plano procedimental del modelo de Ortiz (1994), considerando que las actitudes son predominantemente disposiciones de evaluación de “entrada” antes que acciones o actividades de “salida”.

A menudo se ha estudiado cuál es la relación entre las actitudes y el rendimiento escolar. Las actitudes podrían ser una causa del rendimiento, un efecto del rendimiento o simplemente podrían ser dos eventos que dependen de otros factores —por ejemplo, actitudes y rendimiento podrían desarrollarse de manera paralela a partir de un buen o mal clima escolar—.

El papel de la matemática tiene la finalidad, de involucrar valores, desarrollar actitudes y aptitudes en el estudiante y requiere para ello el uso de estrategias que permitan desarrollar las capacidades de comprender, asociar, analizar e interpretar los conocimientos adquiridos para enfrentar su entorno, a través de las siguientes actitudes (Maurtúa, 2006):

- Que el estudiante manipule los objetos matemáticos

(Tangibles).

- Que active su propia capacidad mental.
- Que ejercite su creatividad.
- Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente.
- Que, a ser posible, haga transferencia de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- Que adquieran confianza en sí mismo.
- Que se divierta con su propia actividad mental.
- Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- Que se prepare para los nuevos roles de la tecnología y de la ciencia.

Nuevos planteamientos basados en la teoría cognitiva

La velocidad del cambio y la gran cantidad de información que caracterizan el mundo actual hacen necesario un nuevo tipo de aprendizaje, orientado no solo a transmitir contenidos, sino también ha hacer más eficiente los procesos involucrados en la resolución de problemas y toma de decisiones (Arancibia, Herrera & Strasser, 1999).

Los métodos tradicionales de enseñanza, basados fundamentalmente en la práctica del cálculo y en la memorización de fórmulas, algoritmos y teoremas dieron paso en la década de los setenta a un amplio movimiento de reforma que se extendió por numerosos países del mundo occidental. Los nuevos planteamientos sobre las matemáticas se sustentan, fundamentalmente, en el constructivismo. Las personalidades más influyentes en la concepción constructivista del desarrollo cognitivo han sido Piaget y Vigotsky.

La epistemología genética de Piaget (1970) tiene como objeto de estudio el desarrollo cognitivo del niño. Su sistema se basa en estructuras cognitivas correspondientes a diferentes estadios de desarrollo, que van desde el más elemental, la etapa senso-motriz, hasta la más abstracta en la que tienen lugar las operaciones formales. Dichas estructuras cognitivas cambian durante el proceso de adaptación en el que se asimila y acomoda: asimilar supone interpretar los acontecimientos mediante estructuras cognitivas ya existentes; acomodar significa cambiar una estructura para dar sentido al entorno. El desarrollo cognitivo consiste en una constante adaptación al entorno, en una sucesión de asimilaciones y acomodaciones que, pese a corresponderse con determinados intervalos de edad del niño, pueden variar entre individuos. La enseñanza de las matemáticas, según estos supuestos, debía orientarse al desarrollo de las capacidades lógicas de tipo general (clasificar, ordenar, seriar, conservar cantidades, etc.) que son las que sustentan los contenidos específicamente matemáticos (operaciones, cálculos, etc.) que deben ser enseñados con posterioridad. La piagetiana es pues una perspectiva constructivista del aprendizaje que puede facilitarse proporcionando actividades y situaciones que pongan a los aprendices ante retos que requieran asimilación y acomodación. Cada una de estas actividades deberá tener en cuenta el estadio de desarrollo cognitivo del niño en relación a su madurez.

Sin embargo, Piaget no da un papel suficientemente relevante a quienes forman parte del entorno del niño y se ocupa más del individuo. En cambio, para Vigotsky (1978), la interacción social juega un papel fundamental en el desarrollo cognitivo. El grado de habilidad que el niño puede desarrollar con la ayuda o guía amplía el alcance de lo que puede conseguir por sí solo dando lugar a la llamada *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP). Un completo desarrollo cognitivo no puede lograrse sin interacción social.

Según Vigotsky, los conceptos científicos se construyen de arriba a abajo, al contrario de los conceptos espontáneos, que se crean de abajo hacia arriba. Los conceptos científicos, elaborados y refinados a lo largo de la historia, no son interiorizados por el individuo fácilmente, sino que se transforman en procesos mentales ínteractuantes con funciones intelectuales. Al principio son abstractos, pero mediante la aplicación a fenómenos situados adquieren significación. En este sentido su desarrollo es descendente. En cambio, los conceptos espontáneos se construyen desde abajo y ligados a las situaciones, son ricos en significado, pero demasiado locales y desligados unos de otros.

Las investigaciones sobre cognición llevadas a cabo antes del último cuarto del siglo XX tuvieron lugar en el contexto de laboratorio, pero desde entonces se ha ido dando una importancia creciente al papel jugado por el contexto en las actividades cognitivas: 'La influencia de observaciones interculturales ha puesto de manifiesto como gente que muestra dificultades para lograr una habilidad particular en el laboratorio es capaz de evidenciarla de forma espontánea en sus actividades cotidianas' (Rogoff, 1984). ¿Cómo se explica esto? Las propuestas de Vigotsky (1977, 1988), que enfatizan los aspectos contextuales y de que todo proceso de aprendizaje tiene lugar en un contexto cultural y socialmente organizado y el hecho mismo de que los conocimientos se construyen usándolos en contextos significativos nos remite a la necesidad de plantear una enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas.

El estudio de los procesos que tienen lugar durante el aprendizaje condujo al interés por identificar cuáles procesos subyacen a una realización inteligente, como estrategia para mejorar la calidad del aprendizaje de nuestros alumnos.

Se encontró que, basado en la descripción de los procesos que posibilitan una ejecución exitosa en distintos tipos de tareas, era posible proponer estrategias para enseñar a los estudiantes a utilizar más efectivamente su pensamiento en diferentes situaciones.

Así fue como surgió un desplazamiento desde el contenido del aprendizaje hacia la forma de éste; la eficiencia y la rapidez en los procesos tales como la retención, la resolución de problemas y el razonamiento se convirtieron en un objetivo para algunos educadores.

A continuación se revisan algunos modelos, entre los que se encuentran el de las estrategias cognitivas, el de las estrategias metacognitivas, el modelo de resolución de problemas y el de la creatividad.

Estrategias cognitivas

Las estrategias cognitivas o habilidades de pensamientos son una serie de tácticas y procedimientos libres de contenidos que permiten aprender, resolver problemas y comprender.

Algunas de las estrategias que identifica Sternberg (1983) en la resolución de problemas son: Identificación del problema a ser resuelto; selección de proceso a utilizar; selección de las formas de representar la información pertinente a la tarea; selección de la estrategia; selección de las secuencias en las cuales se aplican los proceso de representación; ejecución del plan de acción. Por su parte, las habilidades en los procesos de aprendizaje que Winstein y Mayer (1986) identifican están: estrategias básicas y complejas de ensayo; estrategias de elaboración básicas y complejas; estrategias básicas y complejas de organización; estrategias de de comprensión y monitoreo; estrategias afectivas y motivacionales.

En el terreno de las acciones concretas, Feuerstein (1980) propone un método de enriquecimiento Instrumental (EI) basado en las creencias de que es posible modificar y hacer más eficientes las estrategias de pensamiento de los individuos. Para este autor, el rendimiento defectuoso puede ser producto de un déficit en las "experiencias de aprendizaje mediado". Éstas son experiencias en las cuales un adulto organiza y selecciona los estímulos para que el aprendiz pueda manejarlos y aprehenderlos de manera más eficientes. Este programa (EI) consiste en un ataque directo y focalizado sobre los procesos mentales que por su ausencia, fragilidad o ineficiencia son culpables del bajo rendimiento. Algunas de las funciones que pueden ser defectuosas y en las que se enfoca este programa son: percepción; exploración sistemática; conservación, constancia y permanencia de objeto; precisión; definición del problema; interiorización; comportamiento planificado; ampliar el campo mental; proyectar relaciones; comportamiento comparativo; categorización; pensamiento hipotético; evidencia lógica; sobrepasar la comunicación egocéntrica; sobrepasar el ensayo y error; restringir el comportamiento impulsivo; sobrepasar el bloqueo.

Una estrategia instruccional que se puede seguir para la implementación de un *programa de entrenamiento en estrategias de aprendizaje para las matemáticas* (con la tipología de estrategias cognoscitivas realizada por Beltrán [1998] y que constituyen lo que algunos autores llaman condiciones del aprendizaje significativo [Beltrán, 1998; Hernández, 1991; Navarro, 2003; Sternberg, 1986]), consta de diversos procedimientos (Carbonedo & Navarro, 2006):

(1) Información psicoeducativa (descripción detallada de las estrategias: estrategias de selección, organización, elaboración y verificación), señalando cuándo y cómo utilizarla, así como los beneficios de su aplicación),

(2) enseñanza directa (explicación detallada del contenido que se va a aprender y ejemplificación del uso de la estrategia de enseñanza),

(3) modelado (realización de la tarea por un experto, profesor, padre, adulto o igual, de forma que los estudiantes puedan observar y construir un modelo conceptual de los procesos que se requieran para realizar la tarea. El profesor ejecuta la estrategia delante de los estudiantes verbalizando y justificando lo que se hace, lo que a su vez permite construir un modelo mental apropiado de las actividades que se requieren para una buena ejecución),

(4) estimulación del recuerdo (una vez ofrecidos varios modelos y antes de la puesta en práctica, se estimula su recuerdo por medio de la elaboración verbal, bien sea en forma individual o grupal),

(5) práctica guiada (aplicación de la estrategia a las actividades matemáticas desarrolladas en el programa inicialmente con la ayuda del profesor),

(6) práctica independiente (a medida que el estudiante avanza, el profesor va traspasando su responsabilidad a cada

estudiante, lo que permite favorecer el desarrollo de sentimientos de autoeficacia, de competencia y de control de la propia conducta a través del esfuerzo y de la persistencia),

(7) *retroalimentación* (verbalización de las acciones implicadas en la aplicación de la estrategia, discutiendo y observando los errores y aciertos de los demás y los propios).

Estrategias metacognitivas

Román y Carbonero (2002) plantean que entre las causas de los reiterados fracasos de los alumnos está la deficiente utilización de estrategias cognitivas y metacognitivas; por lo que resulta necesario que la instrucción matemática incluya heurísticos o estrategias para analizar o resolver conflictos, razonamiento inductivo e intuitivo, y la comprobación de hipótesis. También Aguilar et al. (2002) sugieren que alcanzar el nivel de razonamiento formal no es suficiente para saber aplicarlo en problemas matemáticos concretos, siendo necesario adquirir el conocimiento específico para llevar a cabo una correcta resolución. Se trata de que el alumno tome conciencia de las actividades que realiza, lo que permitirá construir su propio conocimiento, a la vez que el estudiante genere estrategias y desarrolle un pensamiento organizado y creativo.

Las estrategias metacognitivas pueden pensarse como habilidades cognitivas que son necesarias para la adquisición, uso y control del conocimiento y de otras habilidades cognitivas. Ellas incluyen la habilidad de planificar y regular el uso efectivo de nuestros propios recursos cognitivos. Permiten dirigir, monitorear; evaluar, modificar nuestro aprendizaje y nuestro pensamiento. El conocimiento metacognitivo es el conocimiento acerca del conocimiento y del saber, incluyendo el conocimiento de las capacidades y limitaciones de los procesos del pensamiento humano.

Algunos ejemplos de habilidades metacognitivas son: Planificación efectiva y formulación de estrategias; control y evaluación del propio conocimiento y rendimiento; reconocimiento de la utilidad de una habilidad.

Entrenamiento en resolución de problemas

Las conclusiones de diversos estudios muestran que los jóvenes están egresando de la educación escolar sin tener los conocimientos ni las habilidades de razonamiento matemático ni verbales necesarias para su desempeño cotidiano. En el Perú, en la Evaluación Nacional 2001 (EN 2001) realizada por el Ministerio de Educación (UMC) en estudiantes de sexto grado, solo 7,4% dominaba las capacidades normativas de resolución de problemas.

Estos resultados devastadores indican que es una necesidad imperiosa mejorar el razonamiento y solución de problemas de los alumnos. ¿Qué mejor lugar para empezar a enseñar estas habilidades que la enseñanza básica? En general, el área curricular de matemáticas provee el contenido ideal para este propósito, aunque las otras áreas también debieran preocuparse del desarrollo de la resolución de problemas y de habilidades de razonamiento, como el foco principal del currículo entero.

La actividad de resolución de problemas ha estado en el corazón mismo de la elaboración de la ciencia matemática. De modo tal que casi es posible afirmar sin riesgo a equivocarse que *hacer matemática* es resolver problemas (Charnay, 1994).

Si bien no puede decirse exactamente que es lo que hace exitosos a un buen “razonador” y “solucionador” de problemas, Krulic y Rednick (1993) señalan las características comunes a ellos: Tienen el deseo de resolver problemas; les interesa los problemas y se sienten desafiados por ellos; se estimula fácilmente su curiosidad, disfrutando perseguir una solución lógica; son naturalmente inquisitivos; sus pensamientos van más allá de lo obvio hacia el porque de la respuesta; son perseverantes al solucionar problemas; son personas curiosas, con interés en investigar; su pensamiento es divergente, y va más allá de encontrar la solución a un problema en particular; no temen especular, conjeturar o adivinar; se arriesgan y no temen equivocarse o fracasar en un problema dado; tienen habilidad para saltarse algunos pasos en el proceso de solución; conectan cosas rápidamente, perciben cuales son los detalles irrelevantes y pueden hacer generalizaciones a partir de pocos ejemplos.

Los investigadores han demostrado que cuando las habilidades de pensamiento son enseñadas directamente, el rendimiento mejora (Arancibia et al., 1999). *El razonamiento y la resolución de problemas son necesarios para la vida cotidiana, ya que proveen el eslabón entre los datos, los algoritmos, y los problemas de la vida real que se enfrenta*.

El entrenamiento en resolución de problemas se refiere a la instrucción de conductas y procesos de pensamiento dirigidos hacia la ejecución de tareas intelectualmente exigentes. Según Krulic y Rudnick (1993), es un proceso a través del cual un individuo usa información, habilidades o entendimiento previamente adquiridos, para satisfacer las demandas de una situación desconocida o poco familiar. El proceso comienza con la confrontación inicial y culmina con la respuesta obtenida. El alumno debe sintetizar los que ha aprendido y aplicarlo a la nueva situación.

Es posible enseñar a los alumnos ciertas heurísticas para resolver problemas. Una heurística es un procedimiento general y aplicable a varios tipos de problemas. Existen diversas heurísticas para resolver problemas. A continuación se presenta un modelo o plan heurístico para utilizarse en niños en edad escolar (Krulic & Rednick, 1993) con sugerencias especificas y ayuda para que los profesores lo apliquen en la instrucción:

FOCALIZAR	ANALIZAR	RESOLVER	VALIDAR	REFLEJAR
1. Identificar 2. Observar 3. Clarificar	4. Organizar 5. Clasificar 6. Recordar 7. Formar vínculos 8. Representar 9. Conjeturar	10. Concluir 11. Determinar	12. Probar 13. Explicar 14. Verbalizar	15. Generar 16. Sintetizar 17. Explicar 18. Aplicar 19. Considerar enfoques alternativos

En resumen, la resolución de problemas exige una serie de aprendizajes esenciales que no se adquieren sólo con la práctica. Ella requiere (Sadovsky, 1998):

- Interpretar la información que se brinda,
- Seleccionar la información necesaria para responder las preguntas y organizarla,
- Hacer una representación de la situación,
- Movilizar las herramientas matemáticas necesarias,
- Planificar una estrategia de resolución,
- Registrar los procedimientos utilizados,
- Rechazar procedimientos que parecen no conducir a la meta,
- Analizar la razonabilidad de los resultados,
- Validar el procedimiento utilizado,
- Analizar la economía de la estrategia elegida.

Resolver un problema, para el niño consiste en realizar en forma real o imaginaria una operación concreta y traducirla mediante una operación aritmética. Esta trascripción simbólica exige que el niño haya comprendido el enunciado y que haya razonado los distintos datos del problema.

La comprensión del enunciado tiene una gran importancia en la resolución de un problema. Las palabras o las expresiones contenidas en el enunciado pueden pertenecer a tres categorías:

(1) Formar parte del lenguaje común y ser empleadas en su sentido habitual(por ejemplo, juntar, quitar, perder),

(2) Formar parte del lenguaje común pero ser empleadas en un sentido particular. Por ejemplo, repartir sólo implica igualdad en aritmética.

(3) Pertenecer específicamente al lenguaje aritmético: adición, etc.

Cuando ha comprendido la significación de cada palabra del enunciado, el niño debe representarse las distintas acciones y recordar su desarrollo, relacionándolas entre sí. Comprender es construir mentalmente el enunciado, recordar los datos y relacionarlos lógicamente sin perder de vista la idea principal.

Las representaciones mentales suministran al niño la capacidad de aprehender la totalidad del enunciado, y le proporcionan una visión global del mismo, de la cual extraerán las partes esenciales, establecerán las relaciones lógicas y simbolizarán las asociaciones efectuadas mentalmente. El juicio de relación es el razonamiento más elemental que se puede establecer.

La resolución de problemas puede y debe ser enseñada en clase desde la enseñanza básica, ya que es una actividad que dura toda la vida. La enseñanza de la resolución de problemas no necesita reemplazar a ningún contenido programático; debe ser continua y constante y atravesar todas las materias (transversalidad).

Para enseñar exitosamente las habilidades de resolución de problemas en clase, es necesario utilizar buenos problemas, que sean interesantes para los alumnos; que requieran habilidades de observación, análisis crítico y la comprensión de un concepto o aplicación de una habilidad; que puede tener más de una solución.

Para culminar este punto, Arancibia et al., (1999) señalan algunas sugerencias para el profesor que quiera introducir en su clases la instrucción de resolución de problemas.

a) *Crear una atmósfera de éxito*. Si los y las estudiantes son exitosos(as) en sus problemas introductorias, van a estar más dispuestos a enfrentar problemas más difíciles.

b) *Incentivar a los alumnos a resolver problemas*. Para llegar a ser exitosos en la resolución de problemas y el razonamiento, los alumnos deben verse enfrentados a estos tipos de actividades constantemente, y en toda situación.

c) *Introducir objetos manipulables y dibujos al proceso de solución*. Esto le permite al estudiante "ver" lo que esta pasando y observar las relaciones que existen. El profesor debe ser un modelo para los alumnos, y debe adquirir práctica en dibujar a mano alzada, etc.

d) *Sugerir alternativas cuando los alumnos han sido frustrados en sus intentos de solución*. Es frecuente que algunos alumnos, aún sin lograr el éxito, con la misma aproximación que no le otorga el resultado, hay que sacarlos de este atolladero, ya que generalmente esto bloque todo tipo de comportamiento alternativo. La aproximación debe ser cambiada, el profesor puede ayudarle mostrando información que el alumno(s) no tomo en cuenta, etc.; sugerir a los alumnos que prueben una de las siguientes ideas: a) Actuar el problema, b) usar objetos manipulables, c) hacer un dibujo, d) buscar un problema similar cuya solución ya conocen, e) adivinar y chequear, f) tratar de resolver una versión más simple del problema, g) hacer una tabla, h) usar una calculadora, i) trabajar hacia atrás, desde la respuesta, j) buscar un patrón, k) dividir el problema en partes y resolver cada una, l) usar pensamiento lógico, m) usar pensamiento lateral.

Creatividad

Otro de los focos actuales y de mayor interés que ha producido la aplicación de la psicología cognitiva a la educación, especialmente en la educación matemática, ha sido el estimular la creatividad.

De hecho las formas de razonamiento matemático, que algunos las identifican con pensamiento lógico, y las reducen a él, son componentes importantes del proceso creativo; pero el pensamiento lógico por sí solo es insuficiente para encontrar ideas novedosas y originales para solucionar determinados problemas. Si recurrimos a la historia y a la epistemología de las matemáticas podemos comprender con mayor claridad lo que acabamos de decir. El estudio de la naturaleza de las matemáticas y del proceso de obtención de verdades matemáticas, nos permite confirmar los siguientes criterios (Arteaga, 2003):

- Las Matemáticas no se

reducen a la deducción lógica, la afirmación de Leibniz –quien pretendiera fundamentar las matemáticas reduciéndolas a la lógica– ha sido ampliamente criticada en nuestros días.

- Las Matemáticas progresan gracias a una profunda y original labor intelectual creativa, lo que permite asegurar que la labor de los matemáticos desde la antigüedad hasta la fecha es una actividad creadora.
- Todo razonamiento matemático incluye grandes dosis de creatividad, sin lo cual sería imposible prácticamente el surgimiento de nuevas ideas y teorías matemáticas.
- Las Matemáticas se manifiestan como un terreno abonado para fomentar la creatividad de las personas que se interesan por su estudio.
- Las ideas matemáticas se descubren en un acto de creación, en el cual participan activamente el pensamiento lateral o divergente, el pensamiento especulativo, el pensamiento heurístico y el pensamiento lógico, éste último el encargado de juzgar y elaborar las nuevas ideas.

Actualmente, se considera que la creatividad constituye una capacidad inherente a todo ser humano, susceptible de ser estimulada y desarrollada y en cuya expresión intervienen una gran cantidad de factores. La creatividad se analiza desde tres aspectos: la persona que crea, el proceso creativo, el producto creativo y Contexto o ambiente (Navarro, 2008; Arancibia, Herrera & Strasser, 1999).

La persona que crea. En esta dimensión se considera a la actitud, motivación, aptitudes o habilidades cognitivas y la personalidad de las personas calificadas como creativas. Rodríguez-Estrada (2005) agrupa en torno a tres aspectos (cognoscitivo, afectivo y volitivo), las características de la personalidad creativa: 1) Cognoscitiva: fineza de percepción, capacidad intuitiva, imaginación, capacidad crítica, curiosidad intelectual; 2) Afectivas: autoestima, soltura y libertad, pasión, audacia, profundidad; y Volitivas: tenacidad, tolerancia a la frustración, capacidad de decisión.

El proceso creativo. Hay dos enfoques. 1) Enfoque descriptivo: se centra en describir las fases etapas sucesivas del proceso creativo Arancibia, 1990): percepción del problema, formulación del problema, hallazgo de la idea, evaluación de la idea, y realización de la idea. 2) Enfoque de funcionamiento interno del proceso creativo: se centra en el análisis de la adquisición y procesamiento de la información que hace el individuo durante el proceso creativo. De Bono (1986 citado por Arancibia, 1990) distingue entre pensamiento lateral y vertical. El *pensamiento lateral* se caracteriza por "moverse hacia los lados" en busca de nuevas formas y alternativas; su función es modificar las ideas y conceptos, requiriendo la flexibilidad para buscar información. El *pensamiento vertical* en cambio se caracteriza por la utilización del análisis y de lo lógico-secuencial, y su función principal es la del enjuiciamiento y valoración. Para De Bono (1986), el proceso creativo sería producto del interjuego entre estos dos tipos de pensamiento: el pensamiento lateral aporta nuevas ideas y conceptos, y el pensamiento vertical se encarga del juicio y evaluación de éstos. Si bien los tipos de pensamiento son necesarios en el proceso creativo, De Bono enfatiza la importancia del pensamiento lateral ya que es el responsable de la generación de nuevas ideas y diferentes alternativas para enfocar las situaciones.

El *producto creativo*. Tiene relación con la caracterización de lo que sería un producto creativo, ya que esta caracterización está dada por el contexto histórico, la persona que evalúa y la persona que crea. Por tanto, la dificultad ha estado siempre en la selección de los criterios, indicadores o contenidos a evaluar. Menchén (2006) propone que cada ámbito debe contemplar su propio catálogo de criterios. Según Huidobro (2002), los investigadores coinciden en señlar como producto creativo aquel que reúne las características de: a) novedad, b) adecuación/aprobación por otros, c) rareza, y d) transformación.

El *contexto*. Las propuestas medioambientalistas son relativamente recientes. La creatividad no es simplemente un rasgo del individuo que se manifiesta sean las circunstancias que sean, sino que es una actividad del individuo basada en el contexto social y cultural (Alonso Monreal, 2000). Esto es comprensible dentro de la teoría de sistemas, en que la creatividad es un proceso que sólo puede observarse en la intersección donde interactúan el individuo, el contexto cultural (o dominio) y el contexto social (o campo) (Navarro, 2008).

Las matemáticas escolares, a nuestro juicio, son aptas para desarrollar en los alumnos diferentes formas de pensamiento, que luego el alumno podrá emplear en su futura actividad personal o profesional para dar solución a los problemas y tareas que se le presenten. Eso es lo que en todas las esferas de actuación del sujeto le permitirá apreciar en toda su magnitud el valor de las matemáticas, que tantas horas le ocupó en su vida escolar, eso es sin contar los problemas y dificultades que les trajo a algunos. El siguiente párrafo resume las principales formas de pensamiento que puede y deben desarrollarse en los alumnos como resultado de la educación matemática.

Las formas de pensamiento que se desarrollan en la educación matemática son las siguientes:

a) Asociadas al pensamiento formal: Pensamiento lógico-abstracto (razonamientos inductivos, razonamientos deductivos, razonamientos por analogía).

b) Asociadas al pensamiento no formal: Pensamiento intuitivo, pensamiento heurístico, pensamiento especulativo y pensamiento lateral o divergente.

Entre las técnicas y estrategias generales más efectivas para la estimulación de la creatividad, tenemos las siguientes (Arancibia *et al*., 1999):

a) El arte de preguntar: constituye una importante fuente de estimulación del potencial creativo; puesto que abre un mundo de posibilidades de respuesta que enriquecen la búsqueda de soluciones creativas a los problemas.

b) *La síntesis creativa*: Implica tomar lo fundamental de diversas fuentes, aunque parezcan como inconexas, y organizarlas en un todo con sentido; por definición, la actividad de síntesis creativa estimula al ser humano a dar luz a algo nuevo.

c) *Recombinar elementos*: Es un procedimiento general que permite obtener ideas nuevas a partir de elementos que aparentemente no estaban relacionados; constituyendo una importante fuente de alternativas de solución de problemas.

d) *El juego*: El uso del juego tiene una gran importancia para la estimulación de la creatividad. Al analizar la actividad lúdica, el individuo se libera de reglas y presiones, dejando fluir sus ideas y sentimientos, produciendo además una sensación de goce. Abre un mundo de posibilidades generalmente adormecidas y libera de bloqueos permitiendo la emergencia del potencial, creativo.

Entre las estrategias especificas para estimular la capacidad creativa tenemos: Lluvia de ideas (brainstorming); lista de atributos; Análisis morfológico; lista de preguntas; sinéctica y el pensamiento lateral.

Las inteligencias múltiples

La visión de inteligencia que es usada en nuestros colegios se restringe a las habilidades lógico-matemáticas y de razonamiento verbal. Howard Gardner propone una teoría donde hay diferentes tipos de inteligencia: lingüística, musical, lógico-matemática, espacial, kinéstesica-corporal, intrapersonal, interpersonal, natural. Cada una de ellas con un desarrollo característico, con operaciones y formas de pensar propias, y con asociaciones neurológicas particulares. Según este autor la escuela debe posibilitar el desarrollo de todas ellas.

En esta teoría, la inteligencia se define como una habilidad o un conjunto de habilidades que le permiten al individuo resolver problemas y proponer productos apropiados a uno o más contextos culturales. La inteligencia no se conceptualiza como una “cosa”, sino como una potencialidad cuya presencia permite al individuo tener acceso a formas de pensamiento apropiadas a determinados contenidos.

Estilos de aprendizaje

Las investigaciones cognitivas han demostrado que las personas piensan de manera distinta, captan la información, la procesan, la almacenan y la recuperan de forma diferente. La teoría de los Estilos de Aprendizaje confirma esta diversidad entre los individuos y proponen un camino para mejorar el aprendizaje por medio de la reflexión personal y las peculiaridades diferenciales en el modo de aprender.

Estos estudios nos señalan que existe una brecha cuando los estilos de enseñanza del profesor y los estilos de aprendizaje de los estudiantes no correlacionan, no sintetizan. Esta situación puede provocar desinterés en el estudiante, pobre aprovechamiento académico, pobre participación, poca asistencia, bajas e insatisfacción, en general.

Santaolalla (2009) nos refiere una relación muy importante entre la Enseñanza de las Matemáticas y la Teoría de los Estilos de Aprendizaje. Señalando que entre los artículos encontrados destaca el escrito por Gallego y Nevot (2008) sobre ***Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas***. Los autores defienden que el conocimiento de los Estilos de Aprendizaje de los estudiantes constituye el primer paso para mejorar la labor docente. Idéntico método de trabajo es el que propone la ***American Mathematical Association of Two – Year Colleges en su informe anual sobre educación*** (AMATYC, 2006). Dicho informe señala que el modo en que los estudiantes aprenden matemáticas está influenciado por sus Estilos de Aprendizaje pero que además, el Estilo de Aprendizaje en matemáticas de algunos estudiantes es diferente de su estilo de aprendizaje en otras materias, como el inglés, la literatura o la historia.

Por este motivo, para identificar el estilo de aprendizaje matemático es muy importante utilizar un cuestionario diseñado específicamente para las matemáticas.

Una vez que se haya diagnosticado el estilo de aprendizaje matemático recomiendan que los colegios o las universidades ayuden a los estudiantes a emplear las estrategias adecuadas para maximizar su aprendizaje de las matemáticas. También aseguran que los estudiantes que descubren, comprenden y aplican las estrategias de estudio que complementan sus estilos de aprendizaje, tienen mayor predisposición a tener un aprendizaje matemático eficiente y a dar sentido a cualquier información nueva.

Esta información nos hace reflexionar que debemos estar más conscientes sobre las diferencias entre los estilos de aprendizaje y las estrategias de enseñanza que tenemos disponibles. Implica que el educador debe ser atento, flexible y receptivo a las necesidades del aprendiz. El balance entre ambos aspectos estimula la colaboración y la participación del aprendiz en el proceso de enseñanza - aprendizaje, haciendo que sea más significativo y efectivo.

Para los profesores que quieran seguir las sugerencias de la AMATYC, recomienda Santaolalla, resulta muy interesante el libro escrito por Clausen – May (2005), ***Teaching maths to pupils with different learning styles.*** En él se muestran diferentes maneras de enseñar matemáticas de forma que resulten estimulantes para los alumnos con estilos de aprendizaje diferentes. Propone a los profesores que utilicen una gran variedad de métodos de enseñanza distintos y ofrece una gama de modelos e imágenes para ayudar a que los alumnos, sobre todo aquellos con predominancia en los estilos visual y cinético, realicen un aprendizaje basado en la comprensión y sean capaces de reconocer las relaciones y los vínculos entre los distintos conceptos matemáticos que se vayan encontrando.

Aspectos epistemológicos y filosóficos

La didáctica de las matemáticas - al igual que las demás didácticas específicas- es una disciplina relativamente nueva. Surge, impulsada, sobre todo por Brousseau y otros autores franceses. Uno de los más importantes es Chevallard, que ha publicado un libro al que titula

"Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje" (Chevallard, Bosh & Gascón, 1997). Una de las tesis centrales de estos autores, es la necesidad de ir más allá de la relación enseñanza-aprendizaje y de captar todo el proceso de estudio de las matemáticas (o proceso didáctico) mucho más amplio que el análisis de la enseñanza (tan sólo un medio para el estudio) y del aprendizaje (tan sólo el objetivo del estudio).

En este sentido en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas es necesario tener en cuenta posturas y programas epistemológicos así como enfoques filosóficos que orientan el aprendizaje, la enseñanza, la investigación y la teorización en las matemáticas.

Así, Etchegaray (2001) en *Didáctica de la Matemática*, en el apartado Encuadre del Enfoque Semiótico-antropológico para la Didáctica de las Matemáticas, desarrolla una amplia información sobre los modelos que sostienen este enfoque. Indica que, tal como lo afirma Godino (1999a), no es un modelo teórico acabado, sino un sistema de nociones en proceso de elaboración y desarrollo que pretende a través de nociones semióticas integrar distintas dimensiones (epistemológicas, cognitivas e instruccionales) que actúan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tres son los modelos teóricos que sostienen este enfoque, a saber (Etchegaray, 2001):

- La teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos *(Godino & Batanero, 1994, 1998)* que es equivalente al componente epistemológico de la teoría antropológica de Chevallard *(1992, 1997)*
- La teoría de las funciones semióticas *(Godino & Recio, 1998), (Godino & Batanero, 1998)* que pretende articular cuestiones ontológicas, epistemológicas y psicológicas presentes en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.
- La teoría de las trayectorias didácticas *(Godino, 1999b)* que se propone como

modelización de los procesos de instrucción matemática. Este modelo interpreta y extiende el aspecto instruccional de la Teoría de las situaciones didácticas *(Brousseau, 1986)* y la Teoría de los momentos didácticos *(Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)*

En esta línea, recuerda Godino (2002), que recientemente se observa un interés creciente en la comunidad de investigación en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así se encuentran trabajos presentados en PME (Ernest 1993, Vile & Lerman 1996), y los realizados desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, entre otros, por Bauersfeld y colaboradores (Cobb & Bauersfeld 1995) que enfatizan la noción de significado y negociación de significados como centrales para la educación matemática. Se destaca también los trabajos sobre la problemática de la influencia de los sistemas de representación (Duval, 1993), simbolización y comunicación (Pimm, 1995; Cobb, Yackel & McClain, 2000), y, en general, del lenguaje y el discurso (Ellerton & Clarkson, 1996; Kieran, Forman & Sfard, 2001) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las investigaciones sobre la comprensión de las matemáticas (Sierpinska & Lerman, 1996; Godino, 1996), que no pueden eludir las cuestiones del significado.

Entre las nociones teóricas descritas en este modelo para explicar las dimensiones epistemológicas, cognitiva e instruccional del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática tenemos las de significado institucional y personal entendidas como el sistema de prácticas actuativas y discursivas que una institución (o una persona) realizan para resolver un determinado campo de problemas.

Los supuestos epistemológicos y cognitivos que subyacen a esta teoría pragmática y relativista del significado de los conceptos se pueden sintetizar mediante los siguientes principios (Etchegaray, 2001):

1) Las acciones de las personas son la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, adhiriéndose a la posición piagetiana, ya que se considera a las matemáticas como un quehacer humano que surge como respuesta a problemas.

2) Los sistemas de símbolos matemáticos al desempeñar un papel instrumental por sobre lo comunicativo son quienes modifican al sujeto que los utiliza como mediadores *(Vigotsky, 1977)*.

3) Las interrelaciones entre las componentes de un sistema matemático son quienes explican el gran número de problemas implicados en el aprendizaje de las matemáticas, pues la actividad matemática pretende la construcción de un sistema conceptual lógicamente organizado.

Según López y Ursini (2007), varios investigadores, como Ernest (1994, 1996, 2004), Moslehian (2003, 2004), Handal (2004), Alemán (2001), Sierpinska y Lerman (1996) y Tymoczko (1991, 1994), entre otros, han reflexionado desde la perspectiva de la educación matemática acerca de las distintas posturas filosóficas que hay en relación con la naturaleza de las matemáticas.

A partir de los trabajos de estos investigadores, proponen López y Ursini (2007), se pueden ubicar esencialmente dos grandes tendencias filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas: las denominadas modernistas y las posmodernistas. Siguiendo a Handal (2004), Ernest (1994), Skovsmose & Nielsen (1996) y Alemán (2001), podríamos situar entre las tendencias modernistas las posturas *absolutistas, fundacionalistas, modernas, monológicas y descriptivistas*; mientras que entre las tendencias posmodernistas estarían las posturas *falibilistas* y *cuasi-empiricistas,* el *posmodernismo,* las *dialógicas* y las *no descriptivistas*.

Conclusiones - sugerencias

Son numerosas las evidencias de que los niños preescolares construyen un conjunto de conceptos matemáticos informales previos a la enseñanza formal en aritmética, y que una buena parte de dicho conocimiento informal está fundado en situaciones de solución de problemas con objetos concretos; los niños adquieren dichos conceptos a través de sus interacciones con el mundo físico y social

El estudio del desarrollo de la función del número en el niño muestra que el sistema de cálculo, a partir de unas nociones concretas perceptivas de las primeras unidades, se desarrolla en relación con la función operacional lógica de la inteligencia. Sin embargo, existen ciertas características de análisis, de síntesis, de seriación, de constancia y evaluación de cantidades, que le son inherentes.

Las operaciones no se comprenden sino se realizan, El niño debe ser capaz, dada una acción concreta simple, de traducirla en términos de operación aritmética. Inversamente, ante una operación aritmética, el niño ha de poder indicar una acción concreta simple que responda a dicha fórmula. Esto se llama comprensión de las operaciones.

Resolver un problema, para el niño consiste en realizar en forma real o imaginaria una operación concreta y traducirla mediante una operación aritmética. Esta transcripción simbólica exige que el niño haya comprendido el enunciado y que haya razonado los distintos datos del problema.

Las propuestas de Vigotsky, que enfatizan los aspectos contextuales y de que todo proceso de aprendizaje tiene lugar en un contexto cultural y socialmente organizado y el hecho mismo de que los conocimientos se construyen usándolos en contextos significativos nos remite a la necesidad de plantear una enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas.

Encarar la educación matemática desde una *perspectiva holística* (que tenga en cuenta a la persona en su contexto) implica aproximarse al problema, en su marco teórico, desde varios ámbitos de conocimiento; dos ámbitos que muy poco se ha investigado son: a) *El aprendizaje desde la perspectiva sociocultural:* tener en cuenta la matemática como conocimiento cultural; el contexto sociocultural y motivacional en el aprendizaje (investigaciones que desarrollan una aproximación sociocultural a la Instrucción); los estudios sobre comunidades de aula, donde la matemática es socialmente construida;, las investigaciones que documentan las discontinuidades de la matemática en la escuela y en la vida cotidiana; los presupuestos constructivistas en el aprendizaje; etc. b) *La dimensión afectiva en la educación matemática:* acercarse a las distintas aproximaciones teóricas del ámbito de la psicología y de la sociología que están en la base de los desarrollos en educación matemática.

Asumir la máxima de que «la enseñanza debe adaptarse al alumno», y no al revés, es decir, es el alumno el que debe ocupar el centro de todo acto educativo y, a medida que adquiere madurez, debe sentirse cada vez más libre de decidir por sí mismo lo que quiere aprender y en lo que desea formarse. Por tanto, la docencia es cada día más un arte, además de una profesión, en la que se impone la calidad en todas sus actividades profesionales y humanas (Díez, 1998).

La necesidad de proponer y elaborar marcos más amplios y visiones holísticas para adaptar las relaciones profundas que rigen las matemáticas y su enseñanza en ciertos contextos y paradigmas culturales, teniendo en cuenta las características afectivas, cognitivas de los estudiantes, *debe constituirse en uno de los retos actuales en la Didáctica de las Matemáticas*. La enseñanza de los contenidos matemáticos ha de hacerse poniendo la atención en las personas concretas a quienes van dirigidos, con características afectivas, cognitivas, contextuales, etc. muy diferentes. Es necesario tener en cuenta, que tales personas están inmersas en una cultura y en una sociedad bien específica, con sus formas de existencia y de comunicación propia y marcadamente diferentes unas de otras.

La enseñanza de habilidades de pensamiento (cognitivas, metacognitivas, de creatividad, de resolución de problemas) requiere de un ambiente especial de clase, distinto del ambiente tradicional centrado en el profesor. El cambio incluye dar mayor libertad de expresión a los alumnos, mayor posibilidad de interacción entre alumnos y entre éstos con el profesor, ofrecer preguntas creativas y situaciones provocadoras de pensamiento, instar a los alumnos a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, implementar nuevos procedimiento evaluativos.

Sucede que en muchas clases los niños no ven la relación entre diversos contenidos aprendidos a lo largo del año escolar: ven cada tópico como una unidad separada. Ante esto la resolución de problemas se erige como una alternativa, ya que ésta muestra la interrelación entre las ideas y materias, ya que los problemas no se resuelven en el vacío, sino que se relacionan con los demás aprendizajes. Así, los buenos problemas sirven para repasar contenidos ya pasados, y para presentar nuevas ideas. La resolución de problemas es más interesante y desafiante para los niños que la ejercitación tradicional.

En los siguientes años será necesario que el Ministerio de Educación programe capacitaciones con docentes en ejercicio y las diversas instituciones formadoras de docentes revisen sus programas de formación en matemática, de modo que se asegure que los docentes dominen métodos para enseñar matemática que exijan altos niveles de pensamiento por parte de los estudiantes, de acuerdo a lo que se menciona en el currículo (Cueto et al., 2003).

Se hace necesario reconocer cuándo un estudiante aprenderá mejor y qué posibles dificultades o inconvenientes encontrará, y que se constituyan en las tareas principales de cualquier profesor interesado en adaptarse al grupo de alumnos. De hecho, es necesario averiguar cuándo un alumno tiene cierta preferencia por un determinado estilo de aprendizaje, o por el contrario, cuándo posee preferencia baja en otro estilo de aprendizaje (Nevot, 2004).

Recientes estudios sugieren que es posible ayudar a los docentes a enriquecer sus bases de conocimientos y a desarrollar creencias más productivas acerca del aprendizaje y la enseñanza de la matemática, que les permitan tomar mejores decisiones pedagógicas. Estos cambios no ocurren rápida ni fácilmente. La investigación futura debería documentar esta evolución, entender cómo se relacionan con las creencias de los alumnos, sus actitudes hacia la matemática y su aprendizaje y proponer caminos para modificarlas, sin perder de vista la complejidad del tema.

Una de las conclusiones más importantes y recurrentes de los análisis llevados a cabo por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú es que las desigualdades en los rendimientos educativos de los estudiantes tienen que ver en buena parte con desigualdades en los recursos económicos de las familias, lo cual se expresa tanto al comparar estudiantes como al comparar escuelas (Benavides, 2003). Es decir con la llamada democratización del Estado nació, aunque suene paradójico decirlo, otra forma de exclusión; las masas anteriormente excluidas desde fuera por el Estado, pasaron a serlo desde dentro (Benavides, 2004).

Los aspectos metafectivos son necesarios trabajarlos en el aprendizaje matemático, por lo que supone de estabilización del *sistema de creencias* acerca de la matemática tanto en estudiantes como profesores.

La dimensión emocional debería ser trabajada en el aprendizaje matemático, esto conlleva aproximarse al tema tanto *desde una perspectiva psicológica como sociológica*. Las relaciones entre la dimensión emocional y las Matemáticas no son fáciles y requieren que el profesor se prepare específicamente en aspectos pertenecientes al área de Psicología y Sociología de la Educación Matemática.

Se debe estar a tono con tiempos actuales con el empleo de los llamados métodos activos, productivos, problémicos y diversas técnicas de trabajo grupal; muchas de estas propuestas englobadas bajo el nombre de métodos y técnicas participativas basadas en la concepción del aprendizaje como proceso activo de construcción y reconstrucción del conocimiento por los alumnos, mediante la solución colectiva de tareas docentes, el intercambio y confrontación de ideas, opiniones y experiencias entre estudiantes y profesores.

Referencias

Aguilar, M., Navarro, J.I., López, J.M. & Alcalde, C (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, 14*(2), 382-386.

Aiken, L. (2002). *Attitude and related psychosocial constructs*. Thousand Oaks, EE.UU.: Sage Publications.

Alemán, A. (2001). *Lógica, matemáticas y realidad*. España: Tecnos.

Aliaga, J. & Pecho, J. (2000). Evaluación de la actitud hacia la Matemática en estudiantes secundarios. *Revista Paradigmas, 1*(1-2), 61-78. Lima: Colegio de Psicólogos del Perú.

Aliaga, J. (1998). *La inteligencia, la personalidad, las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento en matemáticas de los estudiantes de quinto año de secundaria.* Tesis [Grado de Magíster en Educación). Universidad de San Martín de Porres, Facultad de Educación, Sección de Post Grado en Educación. Lima, Perú.

Alonso-Monreal, C. (2000). *Que es la creatividad*. Madrid: Editorial Biblioteca Nueva, S.L.

AMATYC. (2006). *Beyond Crossroads: Implementing Mathematics Standards in the First Two Years of College*. Memphis: American Mathematical Association of Two – Year Colleges.

Arancibia, V. (1990). *Teorías del aprendizaje: Revisión de las corrientes actuales*. Santiago: CIDE.

Arancibia, V., Herrera, P. & Strasser, K. (1999). Psicología de la educación (2ª ed.). México: Alfaomega Grupo Editor.

Arellano, T. (2006). La Educación Matemática en el Perú. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación matemática, 5,* 53 – 89. Marzo de 2006.

Arias, N. (2005). Matemáticas en el Perú: Un caso de responsabilidad social. *Cuaderno de Difusión, 10,* 18-19.

Arteaga, E. (2003). Las tareas de contenido y las tareas formales para el diagnostico en la *asignatura matemática. Xixim Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas, 3*(3), 77-87. Recuperado de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html?1102

Bazán, J., Espinoza, G. & Farro, C. (2002). Rendimiento y actitudes hacia la matemática en el sistema escolar peruano. En J. Rodríguez & S. Vargas (eds.). *Análisis de los resultados y metodología de las pruebas CRECER 1998* (55-70). Documento de trabajo 13, Programa Especial de mejoramiento de la calidad de la educación peruana. Lima: Ministerio de Educación.

Beltrán, J. (1998). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis, S.A.

Benavides, M. & José Rodríguez, J. (2006) *Investigación y política educativa en el Perú. Lecciones de los estudios promovidos por el CIES.* Investigaciones Breves 22. Lima: CIES-GRADE-PUCP.

Benavides, M. (2002). Para explicar las diferencias en el rendimiento en matemáticas de cuarto grado en el Perú urbano: Análisis de resultados a partir de un modelo básico. En J. Rodríguez & S. Vargas (Eds.), *Análisis de los resultados y metodología de las pruebas CRECER 1998 (83-108).* Documento de Trabajo 13. MECEP-Ministerio de Educación.

Benavides, M. (2003). Los caminos de la desigualdad en la escuela peruana. En *Boletín Análisis y Propuestas,* No 7. Lima: GRADE.

Benavides, M. (ed.). (2004). Presentación. En *Educación, Procesos Pedagógicos y Equidad: cuatro informes de investigación.* Lima: Grade. Diciembre 2004

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona:* Ediciones Paidós Ibérica. (Original en inglés, 1991).

Blanco, B. & Blanco, L. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71,* 75–85. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid: Visor.

Bronzina, L., Chemello, G. & Agrasar, M. (2009). *Aportes para la enseñanza de la Matemática. Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo*. Santiago: OREALC/UNESCO – LLECE.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes des didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115. (Versión en castellano: Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). Argentina

Burnett, N. (dir.). (2007). *Informe de Seguimiento de la Educación para Todos en el Mundo 2008 "Educación para Todos en 2015 ¿Alcanzaremos la meta? (*Traducción al español: Francisco Vicente-Sandoval). Paris: UNESCO

Carbonedo, M.A. & Navarro, J.C. (2006). Entrenamiento de alumnos de Educación Superior en estrategias de aprendizaje en matemáticas. *Psicothema, 18(3), 348-352.*

Charnay, R, (1997). Aprender por medio de la resolución de problemas. En Parra, C & Saiz, I. (Comp.). *Didáctica de la matemática*. Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17* (3), 17-54.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori e ICE de la Universidad de Barcelona.

Clausen–May, T. (2005). *Teaching Maths to Pupils with Different Learning Styles*. London: PCP.

Cobb P., Yackel, E. & McClain, K. (eds.). (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*. London: Lawrence

Erbaum.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale (N.Y.): Lawrence Erlbaum.

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics Counts, Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Dr WH Cockcroft, HMSO (The Cockcroft Report).

Coll, C., Pozo, I., Sarabia, B. & Valls, E. (1992). *Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes*. Santillana: Madrid.

Cueto S., Andrade, F. & León, J. (2003). Las actitudes de los estudiantes peruanos hacia la lectura, la escritura, la matemática y las lenguas indígenas. Documento de Trabajo Nº 44. Lima: GRADE.

Cueto, S. (2004). Factores Predictivos del Rendimiento Escolar, Deserción e Ingreso a Educación Secundaria en una Muestra de Estudiantes de Zonas Rurales del Perú. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, *12*, 35.

Cueto, S., León, J., Ramírez, C. & Guerrero, G. (2008). Oportunidades de aprendizaje y rendimiento escolar en matemática y lenguaje: resumen de tres estudios en Perú. *REICE - Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, vol. 6 (1), 29-41.

Cueto, S., Ramírez, C., León, J. & Guerrero, G. (2004). Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemática de los estudiantes de tercero y cuarto grados de primaria en Lima y Ayacucho. En M. Benavides (Ed.). *Educación y procesos pedagógicos y equidad. Cuatro informes de investigación* (15-67). Lima, Perú: GRADE, Grupo de Análisis para el Desarrollo, Diciembre 2004. Disponible en www.grade.org.pe. Recuperado el 08 de Agosto de 2010.

Cueto, S., Ramírez, C., León, J. & Pain, O. (2003). Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemática en una muestra de estudiantes de sexto grado de primaria de Lima". Documento de Trabajo 43. Lima: GRADE.

Díez, R. (1998). *Aprender para el futuro. Nuevo marco de la tarea docente.* Madrid: Fundación Santillana.

DiLalla, L.F., Marcus, J.L. & Wright-Phillips, M.V. (2004). Longitudinal effects of preschool behavioral styles on early adolescent school performance. *Journal of School Psychology*, *42* (5), 385-401.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Eagly, A. & Chaiken, S. (1998). Attitude Structure and Function. En D.T. Gilbert, S.T. Fiske & G. Lindzey: *The Handbook of Social Psychology*, (4ª ed.), 1, (269-322). New York: McGraw-Hill.

Ellerton, N. F. & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. En A. J. Bishop *et al*., (eds*.). International Handbook of Mathematics Education* (987-1034). Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1993). Mathematical activity and rhetoric: A social constructivist account. En I. Hirabasash, N. Nohda, K. Shigematsu & F. Lin (eds.). *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (II-238-245). Japan: University of Tsukuba.

Ernest, P. (1994). The Dialogical Nature of Mathematics. En P. Ernest, *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. Londres: The Falmer Press.

Ernest, P. (1996). The Nature of Mathematics and Teaching. *Philosophy of Mathematics and Education Journal*, 9.

Ernest, P. (2004). What is the Philosophy of Mathematics Education?. *Philosophy of Mathematics and Education Journal*, 18, octubre.

Etchegaray, S. (2001). *Didáctica de la matemática: Algunas consideraciones sobre el programa epistemológico*. Córdova: Universidad Pública de Río Cuarto.

Feuerstein, F. (1980). *Instrumental enrichment, on intervention program for cognitive modificabillity*. Baltimore: University Mark Press.

Foro Educativo. (2000). *Agenda de prioridades en educación: 2000-2005. Boletín de Foro Educativo*. Lima: Autor.

Galindo, C. (2002). El currículo implementado como indicador del proceso educativo. En J. Rodríguez & S. Vargas (Eds.) *Análisis de los Resultado y Metodología de las Pruebas CRECER 1998* (pp.13-38). Documento de Trabajo 13 de MECEP. Lima: Ministerio de Educación.

Gallego, D. J. & Nevot, A. (2008). Los Estilos de Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 19* (1), 95 - 112.

Garrido, J.M. & Grau, S. (2001). *Currículo cognitivo para educación infantil*. Alicante, España: Editorial Club Universitario – ECU.

Ginsburg, H. P., Klein, A. & Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. In W. Damon, J. E. Sigel & K. A. Renninger (dirs.). *Handbook of child psychology. Child psychology in practice* (401-476). New York: John Wiley & Sons Inc.

Godino, J.D. & Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier & K. Newstead (eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (1-8). South Africa: University of Stellenbosch.

Godino, J.D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig & A. Gutierrez (eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (417-424). Valencia: Universidad de Valencia.

Godino, J., Font Moll, V., Wilhelmi, M. & Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19,* 34-46. Recuperado de http://www.fisem.org/descargas/19/Union_019_008.pdf.

Godino, J.D. & Batanero, C. (1994).

Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355.

Godino, J.D. & Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y prendizaje de las matemáticas. En I. Vale & J. Portela (Eds.), Actas del IX *Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática (SIEM)*. Guimaraes: Associaçao de Professores de Matemática.

Godino, J.D. (1999a). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. *III Simposio de la SEIEM*. Valladolid. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J.D. (1999b). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática*. III Simposio de la SEIEM*, Valladolid. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino. Recuperado el 18 de mayo 2010.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22* (23), 237-284.

Gómez-Chacón, I. (2000). Matemática emocional. *Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: NARCEA, S.A, Ediciones.

Guevara, Y., Hermosillo, A., López, A., Delgado, U., García, G. & Rugerio, J.P. (2008). Habilidades matemáticas en niños de bajo nivel sociocultural. *Acta Colombiana de Psicología, 11* (2), 13-24. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/D2148F2C-9BEF-4303-B911-8DFDAD03CA80/FinalDownload/DownloadId-52F918BE0451F570C52898C04AF8AC4D/D2148F2C-9BEF-4303-B911-8DFDAD03CA80/redalyc/pdf/798/79811202.pdf.

Handal, B. (2004). Teachers instructional beliefs about integrating educational technology. *e-Journal of Instructional Science and Technology, 17*(1). Recuperado de http://www.usq.edu.au/electpub/e-jist/docs/Vol7_No1/Commentary/Teachers_ins_beliefs.htm

Hernández, P. y García, L. (1991). *Psicología y enseñanza del estudio*.

Madrid: Pirámide.

Huidobro, T. (2002*). Una definición de la creatividad a través de 24 autores seleccionados*. Madrid: Dpto., de Psicología Básica II. Procesos cognitivos – Universidad Complutense de Madrid.

INEI. (1995). *Atraso y Deserción Escolar en Niños y Adolescentes*. Lima: Instituto Nacional de Estadística e Informática y Programa Mundial de Alimentos.

Kieran C., Forman E. & Sfard A. (2001), Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 1-12.

Kitcher, P. (1988). Mathematical progress. *Revue International de Philosophie*, *167,* 518-540.

Krulic, D. & Rudnick, J. (1993). *Reasoning and problem solving: a handbook for elementary school teachers*. Boston: Allyn y Bancon.

Lapointe, A. E., Mead, N. A., & Phillips, G. W. (1989). *A world of differences: An international assessment of mathematics and science*. *Princeton*, NJ: Educational Testing Service.

Lay, W. A. (1928). *Pedagogía experimental* (Trad., J. Ruiz Manent). Barcelona: Labor. (Trabajo original publicado en 1909)

Leppänen, U., Niemi, P., Aunola, K. & Nurmi, J. E. (2004). Development of reading skills among preschool and primary school pupils. *Reading Research Quarterly, 39* (1), 72-93.

López, A & Ursini, S. (2007). Investigación en educación matemática y sus fundamentos filosóficos. *Educación Matemática*, *19* (3), 91-113. México: Santillana.

Macnab D. S., & Cummine J. A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad*. Madrid: Visor.

Maurtua, J.L. (2006). La metodología problémica en la enseñanza de la matemática. *Revista del Instituto de Investigaciones Educativas*, *10* (17), 151 – 156. Agosto, 2006. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Educación.

Menchén, F. (2006a). El producto

creativo. En *Comprender y evaluar la creatividad*, volumen I. Málaga: Ediciones Aljibe.

Moslehian, M. S. (2003). Posmodern Pedagogy of Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 17.

Moslehian, M. S. (2004). Posmodern View of Humanistic Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (18).

Moya, A. (2005). *La Educación Matemática: Una Aproximación a su Comprensión desde una Visión Interdisciplinar. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18, 369-375. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa [CLAME]. México.*

Navarro, J. (2008). *Mejora de la creatividad en el aula de primaria*. Tesis [Grado de Doctor]. Universidad de Murcia, Departamento de Personalidad, evaluación y tratamiento psicológico. Murcia, España.

Nevot, A. (2004). Enseñanza de las Matemáticas basada en los Estilos de aprendizaje. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada,* 28, 169-184.

Ortiz, P. (1994). *El Sistema de la Personalidad*. Lima: ORION S.R.L.

Phillips, R. (1993). Teacher attitude as related to student attitude and achievement in Elementary School Mathematics. *School Science and Mathematics*, *73*(6), 501 - 507.

Piaget, J. & Szemunska, A. (1996). *Génesis del número en el niño* (8ª ed.). Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (1967). Génesis del número en el niño. Buenos Aires: Guadalupe. (Original: Piaget, J. (1965) The child's concepción of number. Nueva York: Norton.).

Piaget, J. (1970). La evolución intelectual entre la adolescencia y la edad adulta. En J. Delval (Comp.). *Lecturas de psicología del niño*, *2*, 208-213. Madrid: Alianza.

Piaget, J. (1972). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

PISA. (2003). *Literacy Skills for the*

World of Tomorrow. Further Results from PISA 2000. Programme for International Student Assessment, OECD-UNESCO. Junio.

Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática* (75-95). Lisboa: Ministerio da Educação - PRODEP.

Pozo, J.I. & Gómez, M.A. (2000). *Aprender y enseñar ciencia* (2ª ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Rodríguez-Estrada, M. (2005). *Manual de creatividad. Los procesos psíquicos del desarrollo*. Alcalá de Guadaira, Sevilla, España: Editorial MAD.

Rogoff, B. (1990): *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context.* Oxford University Press. New York.

Román, J. & Carbonero, M. (2002). Estrategias de aprendizaje en el área de las matemáticas. En J. González, J. Núñez, L. Álvarez y E. Soler: *Estrategias de aprendizaje: concepto, evaluación e intervención*. Madrid: Pirámide, 163-178.

Rupérez, J. & García, M. (2008). Competencias matemáticas y resolución de problemas. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas, 69*, 1-6.

Sadovsky, P. (1998). *Pensar la matemática en la escuela.* Buenos Aires: Aiqué.

Sánchez, E. (2008) Un aprendizaje eficaz de la numeración. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 13*, 51 – 60.

Santaló, L.A. (1990). *Matemática para no matemáticos.* Conferencia inaugural del I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España.

Santaolalla, E. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje, 4(4), 1-14.*

Segura, M. & Chacón, I. (1996). Competitividad en la educación superior. *Umbral, 11*(5), 29-37.

Serrano, J. (2008). Acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. Presentación Tema Monográfico: Psicología de las matemáticas. *Anales de psicología, 24* (2), 169-179.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996).

Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. En A. J. Bishop. *International Handbook of Mathematics Education*. (827-876). Países Bajos: Kluwer Academic Publisher.

Skovsmose, O. & Nielsen, L. (1996). Critical Mathematics Education. En A. J. Bishop. *International Handbook of Mathematics Education.* Países Bajos: Kluwer Academic Publisher, pp. 827-876.

Soares, F. (2004a). Qualidade e eqüidade na educação básica Brasileira: A evidência do SAEB-2001. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas, 12*, 38.

Sternberg, R. (1983). Criteria for intellectual skills training. *Educational Researcher, 12*, 6-12.

Sternberg, R. (1986). *Intelligence applied: understanding and increasing your intellectual skills*. San Diego: Harcourt Brace. Jovanovich.

The Cockcroft Report. (1982). *Mathematics counts Report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Dr WH Cockcroft*.

Torres, J. (1994). *El curriculum oculto (4[a] ed.)*. Madrid: Morata.

Tymoczko, T. (1991), "Mathematics, Science and Ontology", *Synthese*, 88, 201-228.

Tymoczko, T. (1994), "Structuralism and Pos-modernism in the Philosophy of Mathematics. En P. Ernest. *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, Londres: The Falmer Press.

UMC y GRADE (2001a). Análisis de ítemes de las pruebas CRECER 1998. Resultados de lógico-matemática en cuarto grado de primaria. *Boletín UMC 10*. Lima: Ministerio de Educación.

UMC y GRADE (2001b). Análisis de ítemes de las pruebas CRECER 1998. Resultados de lógico-matemática en sexto grado de primaria. *Boletín UMC 13*. Lima: Ministerio de Educación.

UMC y GRADE (2001c). El Perú en el primer estudio internacional comparativo de la UNESCO sobre lenguaje, matemática y factores asociados en tercer y cuarto grado. *Boletín UMC 9*. Lima: Ministerio de Educación.

UMC y GRADE. (2000). ¿Te gustan las clases de matemáticas? ¿Y las de lenguaje?. *Boletín Crecer 2*. Lima: Ministerio de Educación

Vigotsky, L. S. (1977). *Lenguaje y Pensamiento*. Barcelona: La Pleyade.

Vigotsky, L. S. (1978): *Mind in Society.* Cambridge, MA. Harvard University Press.

Vigotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.

Vile, A. & Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematics domain. En L. Puig & A. Gutiérrez (eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (395-402). Valencia: Universitat de Valencia.

Whimbey, A. & Lochhead, J. (1993). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Winstein, C. & Mayer, R. (1986). *The teaching of learning strategie*. New York: MacMillan.

World Bank. (1999). *Peru Education at a Crossroads. Challenges and opportunities for the 21st century* (Vol I). Report No.19066-PE. Washington DC: The World Bank.

Zambrano, G. (2002). Las oportunidades de aprendizaje en lógico-matemática: un estudio para cuarto grado de primaria. Lima: Ministerio de Educación. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/mediciondelacalidad/2003/pdfs_nac/inf04_oda_logico_mate_4to_prim.p

Recibido: 24 de marzo del 2010
Aceptado: 27 de setiembre del 2010

ANEXO

DOSSIER DOCUMENTAL

En las Revistas CL & E: Comunicación, lenguaje y educación. (1989-1993), y en la Revista Infancia y Aprendizaje (publicadas en el lapso de 1990 y 2010 en España), se abordan diversos aspectos tratados en el artículo.

Vasco, C. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,*** **6, 5-26.** En "el aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura", Carlos Vasco examina el "mito" de que las matemáticas son un "lenguaje universal de la ciencia" y, por tanto, una materia supracultural. En sus análisis de casos de niños colombianos, llega a la conclusión de que las matemáticas pueden depender tanto de la cultura como el aprendizaje de la literatura o la historia. Según vasco, la mayoría de los enseñantes cree que los niños no saben nada de matemáticas cuando entran en la escuela; por tanto, la enseñanza de la "matemática moderna" solo puede llegar a un pequeño porcentaje de los niños. Vasco aduce que solo los estudiante que pueden construir sus propios "sistemas conceptuales a pesar de sus maestros" y desentrañar por su cuenta la maraña de sistemas simbólicos serán inmunes a la "fobia a las matemáticas".

Joseph, L. & Kamii, C. (1990). La enseñanza del valor posicional y de la adición en dos columnas. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,*** **6, 27-36.** En este artículo, la autora sostiene que la enseñanza de los mecanismos operativos de la adición, cuya automatización no por ser necesaria debe imponerse desde fuera, debe hacerse desde una comprensión por parte del niño de las reglas de esa convencionalidad, pactándola con ellos mediante procedimientos didácticos diferentes a los tradicionalmente utilizados en preescolar.

Gómez Ruiz, C. (1991). Cognición, contexto y enseñanza de las matemáticas. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,*** **11-12, 11-26.** A partir de una reflexión sobre el controvertido tema del "creciente analfabetismo matemático" en las sociedades modernas, en este artículo se plantea la insuficiencia de los enfoques piagetiano y cognitivo para dar respuesta a los problemas de la enseñanza de las matemáticas y el interes de recoger algunas de las aportaciones de la psicología historico-cultural. Frente a la concepción dominante en el pensamiento occidental, que tiende a considerar el conocimiento y el lenguaje matemático como el mas alto exponente de la razón, se propone considerar el razonamiento matemático como una forma especifica de discurso, entre otras. Sobre la idea de que existe una heterogeneidad de voces y discursos tanto en distintos grupos culturales como en la mente de una misma persona, se propone una enseñanza de las matemáticas que guíe y conduzca al alumno hacia la formalización a partir de otras formas de discurso no formal, de manera que se pueda pasar de uno a otro código flexiblemente.

Bedoya, E. & Orozco Hormaza, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,* 11-12, 55-62. El artículo intenta presentar algunas elaboraciones que podrían justificar las dificultades que los niños tienen para manejar el sistema de numeración decimal y ejemplificar la comprensión que la maestra debe poseer para trabajarlo. Para esto presentamos una descripción del sistema y las operaciones y relaciones que los niños requieren para manejarlo, analizando producciones de niños al resolver tareas que se adaptan a las características del sistema.

Martí, E. (1991). Aprender matemáticas con ordenadores. *Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,* 11-12, 63-76. El uso de ordenadores para aprender matemáticas puede significar un cambio cualitativo en la manera de aprender y puede ofrecer al alumno nuevas posibilidades de actuación en su experiencia matemática. Este cambio en el proceso de aprendizaje es analizado a través de cuatro dimensiones: 1) interactividad y comunicación; 2) integración de diferentes medios simbólicos; 3) articulación del conocimiento declarativo y del conocimiento procedimental, y 4) situación de resolución de problemas. Cada dimensión es ilustrada con un ejemplo que muestra como se puede utilizar el medio informático para trabajar.

Bassedas-Ballús, E. (1991). Utilizar el cálculo en la escuela: la programación de una situación significativa. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación*****, 11-12, 87-94**. El artículo se refiere a una experiencia sobre aprendizaje del calculo realizada con niños de 4 a 8 años (parvulario y ciclo inicial de primaria). Se explican los aspectos básicos de su organización (utilización de juegos de mesa, trabajo en pequeño grupo, importancia de la observación sistemática), así como las bases teóricas que la sustentan (construcción del conocimiento mediante tareas significativas, aprovechamiento de los conocimientos informales de los alumnos, importancia de la interacción entre maestra y alumnos, atención a la diversidad). Se acompañan algunos ejemplos del material elaborado (pautas de observación, fichas-resumen).

Wilson, B., Howson,G. & Nebres, B. (1991). Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación*****, 11-12, 95-112.** El acelerado cambio del papel de las matemáticas en el mundo en general o en cada cultura en particular, supone una serie de desafíos y cambios correlativos en la enseñanza de las matemáticas. En este ya clásico informe, convertido en libro tras su discusión en un seminario internacional, se pasa revista a ambos procesos y se sacan consecuencias concretas para la educación y los educadores sobre el lugar y el modo de abordar las matemáticas en el curriculum escolar.

Howson, G. & Wilson, B. (1991). La enseñanza de contenidos específicos en matemáticas. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación*****, 11-12, 121-140**. ¿Matemáticas para todos o matemáticas de elite? ¿Lenguaje matemático o matemática aplicada? En la base de las últimas reformas educativas de todo el mundo no dejan de estar presentes dilemas, reales unas veces, ficticios otras, que tienen mucho que ver con los supuestos políticos-ideológicos que sustenten los diseñadores de esa reforma respecto al papel de la educación y a los que no se sustrae la enseñanza de las matemáticas.

Plellegrini, V. (1992). Procoor: un sistema para estudiar la geometría espacial. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,*** **13, 89-94**. Poder desarrollar programas educativos específicos que pretenden enseñar mejor determinados contenidos del curriculum, yendo mas allá de las limitaciones del discurso oral o escrito lineales, es una de las grandes virtudes del ordenador. Se presenta aquí un programa experimental de geometría.

Quiles, M. (1993). Actitudes matemáticas y rendimiento. ***Revista Comunicación, Lenguaje y Educación,*** **18, 115-125.** Con el fin de comprobar si el rendimiento del alumno en matemáticas se ve afectado por las actitudes que hacia esas asignaturas mantienen los padres, profesores y el propio alumno llevamos a cabo un estudio correlacional. Participaron en el 600 alumnos de 5 de egb, 300 padres y 24 profesores. Las variables predictoras se midieron a través de tres escalas de actitudes matemáticas elaboradas para este estudio. La variable criterio, a su vez, se midió por la nota final obtenida en junio en dicha asignatura. Los resultados confirmaron la relación en el caso de padres y alumnos pero no en el de profesores.

Armendáriz, M., Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las matemáticas y psicología. ***Revista Infancia y Aprendizaje,*** **62-63, 77-99**. A partir de las observaciones de Howson, Keitel y Kilpatric (1981) expuestas en "Curriculum Development in Mathematics” se caracteriza una evolución que considera la corriente conductista, el enfoque estructuralista y el formativo y concluye con la perspectiva constructivista, y breves referencias al estudio del comportamiento matemático y del aprendizaje de las Matemáticas desde una perspectiva social.

Gómez-Granell, C. & Fraile, J. (1993). Psicología y Didáctica de las matemáticas. ***Revista Infancia y Aprendizaje,*** **62-63, 101-113**. Considerando que la mayoría de los trabajos e investigaciones actuales siguen centrados en una perspectiva estrictamente individual que presta muy poca o ninguna importancia al contexto, se plantea, como una necesidad, la inclusión de las variables contextuales, si queremos conocer cómo se producen los procesos de enseñanza y aprendizaje conjuntamente, en vez de seguir centrados, como hasta ahora, unos más en el aprendizaje y otros más en la enseñanza. Es decir, se propone el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos del curriculum sin desvincularlos del contexto en el que se están produciendo (en el contexto del aula y de la institución escolar).

Tolchinsky, L. & Karmiloff-Smith, A. (1993). Las restricciones del conocimiento rotacional. ***Revista Infancia y Aprendizaje,*** **62-63, 19-51**. El trabajo deja en claro que desde muy temprana edad las restricciones que el niño impone a lo notacional son específicas para cada dominio. En otras palabras, los niños no tratan lo notacional como un área general, sino que cada una de sus realizaciones, dibujo, escritura, notación numérica, son exploradas según sus propias restricciones. Esta diferenciación se da a varios niveles. Los niños producen formas gráficas distintas para dibujar, hacer números o letras. Parece además que antes de que se haga evidente la diferenciación en los productos gráficos existe una diferenciación en los procesos mismos de producción.

Pontecorvo, C. (1996). La notación y el razonamiento con números y nombres en el período preescolar y en la escuela primaria. ***Revista Infancia y Aprendizaje,*** **74, 3-24**. El objetivo de este estudio en describir un posible itinerario evolutivo de la capacidad simbólica infantil en el sistema de notación numérico. Entre otros resultados, merecen destacarse los siguientes: 1) En preescolares de 3; 9 a 6; 2 años, la elaboración de la escritura de palabras es relativamente más tardía con respecto a la producción e interpretación de los números y de las competencias aritméticas generales. 2) El nivel de construcción y de interpretación de la escritura resulta notablemente correlacionado, no sólo con la notación de la cantidad, sino también con las otras capacidades numéricas de la cuenta y la valoración de las cantidades. 3) Se puede afirmar, genéricamente, que la adquisición de los conocimientos matemáticos requiere de múltiples y diversas capacidades , pertenecientes en su origen a "mundos de razonamiento y de práctica bastante diversos.

Soriano, M., Arlandis, P. & Miranda, A. (1997). Instrucción en estrategias y entrenamiento atribucional: efectos sobre la resolución de problemas y el autoconcepto de los estudiantes con dificultades en el aprendizaje. *Revista Infancia y Aprendizaje,* 80, 37-52. Este estudio investigó la eficacia del entrenamiento atribucional asociado a un programa dirigido a enseñar estrategias de resolución de problemas a estudiantes con dificultades de aprendizaje (de quinto de primaria). El programa de instrucción de estrategias tuvo dos modalidades: 1) instrucción en estrategias mediante autoinstrucciones, y 2) instrucción en estrategias mediante autoinstrucciones más reentrenamiento atribucional explícito. Los resultaron indicaron que los estudiantes que siguieron un programa de instrucción en estrategias mejoraron en todas las medidas utilizadas (pruebas de resolución de problemas matemáticos, autoinformes de atribuciones y autoconcepto y cuestionario a padres y profesores), pero las ganancias, especialmente en la fase de seguimiento, fueron superiores en el grupo que además recibió reentrenamiento atribucional.

Tiéche, Ch., Merlo, S., Sinclair, A. & Scheuer, N. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Revista Infancia y Aprendizaje,* 90, 31- 50. Las notaciones numéricas se construyen empleando un conjunto muy reducido de formas (los numerales 1 a 9) y de principios organizadores, ya que los números son entidades profundamente conceptuales y abstractas, reducibles a unas pocas nociones nucleares que al combinarse se extienden. Las notaciones representan ideas, en lugar de dimensiones de carácter más observable. Por esta razón, al estudiar las notaciones numéricas nos encontramos en el cruce de dos aproximaciones: los conceptos numéricos de los niños (conceptos que ellos pueden representar con líneas, flechas, etc.) y su comprensión de un sistema convencional. Este es el problema de la investigación de Sheuer y colbs, con la que se propone: a) comprender mejor el desarrollo de las estrategias notacionales en los inicios de la escolaridad, b) estudiar las estrategias notacionales de los niños para cantidades con diferentes características y c) estudiar la influencia de diferentes entornos socioculturales en el empleo de estas estrategias. Los resultados más importantes nos indican: Que la adquisición de la notación numérica es un desarrollo lento y complejo, en el que los usos de formas convencionales y no convencionales conviven durante un largo período, aunque manifestándose en diferentes intervalos numéricos. La notable semejanza en la producción notacional en los dos grupos socioculturales explorados- de Bariloche (Argentina) y Ginebra (Suiza) – a excepción de las formas para los números.

Coll, C. (2000). Actividad conjunta y traspaso del control en tres secuencias didácticas sobre los primeros números de la serie natural. *Revista Infancia y Aprendizaje,* 92, 109–130. La investigación que presentan Coll y Rochera tiene como objetivo el estudio del traspaso del control como mecanismo de influencia educativa que opera en el plano de la organización de la actividad conjunta de profesor y alumnos en torno a los contenidos o tareas escolares. Se analizan los registros observacionales de tres secuencias didácticas sucesivas y relacionadas entre sí, en las que una profesora y un grupo de alumnos de una clase de cuatro años de educación infantil trabajan los primeros números de la serie natural mediante la realización de juegos de mesa. Los resultados muestran cómo en estas secuencias didácticas el traspaso del control se produce mediante una serie de dispositivos de ayuda pedagógica diversos en cuanto a los participantes que intervienen y los momentos en que aparecen.

Orrantía, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Revista Infancia y Aprendizaje, 26*(4), 451-468. En el trabajo se analiza la importancia del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. Para ello, y partiendo de un modelo explicativo de los procesos y estrategias implicados en la tarea de resolver problemas, se estudia la influencia del conocimiento conceptual en el propio contexto de resolución de problemas a partir de la idea de resistencia a la instrucción, es decir, a partir de la cantidad de ayuda que un alumno/ a necesita para resolver la tarea. Los resultados muestran una relación entre el conocimiento conceptual y la resolución de problemas, aunque la mayor influencia se observa fundamentalmente en los problemas más complejos, aquellos que necesitan de conocimientos numéricos más avanzados. Los resultados son interpretados desde la importancia de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética.

Vicente, S, (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Revista Infancia y Aprendizaje, 31*(4), 463-484. Partiendo de la doble naturaleza matemática y textual de la tarea de resolver un problema aritmético, hemos diseñado un estudio empírico que incorpora al proceso de resolución dos ayudas diferentes: la reescritura -matemática o situacional- de problemas y las ayudas gráficas (dibujos) matemáticas o situacionales. Se analizó con estadísticos no paramétricos la influencia de estas ayudas en el acierto con el que una muestra de 152 alumnos de 3° a 5° de Educación Primaria resolvió doce problemas aritméticos de dos operaciones. Los resultados mostraron que los dos tipos de reescritura y los dibujos matemáticos incrementan el acierto (especialmente para los alumnos más competentes) mientras que los dibujos situacionales no ejercieron ninguna influencia.

Coll, C. & Remesal, A. (2009). Concepciones del profesorado de matemáticas acerca de las funciones de la evaluación del aprendizaje en la educación obligatoria. *Revista Infancia y Aprendizaje, 32*(3), 391-404. El artículo presenta los resultados de un estudio de las concepciones del profesorado de matemáticas sobre las funciones de la evaluación en la educación obligatoria. Los datos corresponden a las entrevistas realizadas a 50 profesores de educación primaria y de educación secundaria obligatoria, de 18 centros educativos públicos de la zona metropolitana de Barcelona, así como a muestras de material de aula representativo de sus prácticas de evaluación proporcionadas por los mismos profesores. Tomando como punto de partida las creencias de los profesores acerca de los efectos de la evaluación sobre cuatro dimensiones del proceso educativo - los procesos de aprendizaje, los procesos de enseñanza, la acreditación y la rendición de cuentas- se identifican y describen cinco tipos de concepciones: pedagógica pura, pedagógica mixta, mixta indefinida, social mixta y social pura. Estas concepciones se distribuyen desigualmente en los dos niveles educativos, mostrando algunas tendencias que pueden relacionarse con la tensión intrínseca derivada de la confluencia de las funciones pedagógicas y sociales de la evaluación y su peso relativo en cada nivel.

Cupani, M. & Lorenzo, J. (2010). Evaluación de un modelo social-cognitivo del rendimiento en matemática en una población de preadolescentes argentinos. *Revista Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 63-74. El trabajo se propone verificar las hipótesis propuestas por el modelo de rendimiento académico en Matemática de la Teoría Social-Cognitiva del Desarrollo de Carrera (Lent, Brown y Hackett, 1994). Con esta finalidad se administraron las escalas de autoeficacia para el rendimiento en matemática (Pajares, 1996), expectativas de resultados en matemática y metas de rendimiento en matemática (Fouad, Smith y Enochs, 1997) a una muestra de 288 adolescentes de ambos sexos, y con edades comprendidas entre 13 y 15 años. Se utilizó un path análisis para identificar con mayor precisión la interrelación entre las variables y sus efectos directos e indirectos. Los resultados permiten concluir que el modelo explica parcialmente el rendimiento académico en Matemática, ya que algunas de las hipótesis propuestas no fueron corroboradas. Se sugieren mejoras en las definiciones operacionales en algunas de las variables con la finalidad de mejorar la precisión de los constructos.

Font, V., Planas, N. & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Revista Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. Se presenta la viabilidad de un modelo teórico para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho modelo contempla cinco niveles de análisis, los cuales son aplicados conjuntamente a un episodio de clase. Este modelo se ha elaborado para describir (¿qué ha ocurrido aquí?), explicar (¿por qué ha ocurrido?) y valorar (¿qué se podría mejorar?) procesos de instrucción en el aula de matemáticas. Nos basamos en una síntesis teórica de aspectos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, que venimos desarrollando desde hace una década. Aunque algunas partes del modelo son específicas de la actividad matemática, investigadores de otras áreas educativas pueden adaptarlas de modo que resulten eficaces en el análisis didáctico de otros tipos de prácticas escolares. El principal resultado esperado de la aplicación del modelo es llegar a una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.