Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2021. Том 57. С. 181–189

УДК 517.977

© *В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ОЧИСТКИ ВОДОЕМА ОТ ПРИМЕСИ

Рассматривается задача управления процессом очистки водоема от примеси с использованием вытекающей из него реки. Управляемой переменной является концентрация примеси, поступающей из водоема в реку. Распространение примеси в реке описывается уравнением переноса. В это уравнение входит слагаемое, которое определяется другими источниками примеси, попадающей в реку. Точное значение этого слагаемого неизвестно. Заданы только границы его изменения. Показателем качества управления является значение линейной комбинации концентрации примеси в реке в заданный момент времени и оставшееся количество массы примеси в этот момент в водоеме. Цель управления заключается в том, чтобы значение этого показателя оказалось в заданном промежутке.

Ключевые слова: управление, неопределенность, уравнение переноса.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-09

Введение

Одной из актуальных проблем охраны окружающей среды является интенсивное загрязнение водоемов [1–4]. Прогнозирование результатов процессов их очистки основывается, как правило, на математическом моделировании процессов переноса примесей в водной среде (см., например, [1, 3]). В таких задачах применим также игровой подход (см., например, [4]).

При изучении управляемых процессов переноса возникают математические задачи управления параболическими уравнениями [5–11]. На практике возникают задачи очистки водоемов путем сброса управляемой концентрации примеси в реку, вытекающую из водоема. Эта задача сводится к исследованию уравнения переноса, граничные условия в котором зависят от управления [8–11]. В таких задачах возможны случаи, когда в уравнение переноса входит слагаемое, которое определяется другими источниками примеси, попадающей в реку. Точное значение этого слагаемого неизвестно.

При исследовании таких задач можно применять метод оптимизации гарантированного результата [12]. В основе этого метода лежит теория дифференциальных игр. Неопределенность принимается за второго игрока — противника.

В работах [10, 11] рассмотрена задача управления процессом нагрева стержня. В этой задаче управляется скорость изменения температуры на левом конце стержня. Следуя изложенному в [10,11] подходу, в данной работе решается задача управления процессом очистки водоема от примеси. Управляется концентрация примеси, которая поступает в реку, вытекающую из водоема. В уравнении переноса примеси присутствует слагаемое, которое определяется другими источниками примеси, попадающей в реку. Точное значение этого слагаемого неизвестно, а заданы только границы его изменения. Показателем качества управления является значение линейной комбинации средней концентрации примеси в реке в заданный момент времени и оставшееся количество массы примеси в этот момент в водоеме.

Задача сводится к одномерной однотипной задаче управления при наличии неопределенности. Для таких задач, рассматриваемых в рамках теории линейных дифференциальных игр [13], построены управления игроков, которые решают поставленную задачу [14, 15].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим модель очистки водоема с использованием вытекающей из него реки.

Примесь, попадая из водоема A в реку, распространяется вдоль ее русла. Считаем, что в каждом сечении реки сохраняется состояние, близкое к однородному. При этом допущении можно считать, что концентрация T примеси постоянна в каждом сечении. Направим ось x вдоль русла реки. Тогда концентрация примеси является функцией $T(t,x)$ времени t и расстояния x от начала сброса примеси в реку. Считаем, что скорость v воды в реке в каждый момент времени одна и та же в каждом сечении реки. Стало быть она является функцией $v(t,x)$.

Уравнение переноса, записанное для распространения примеси, примет вид [16]

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial(v(t,x)T(t,x))}{\partial x} + f(t,x). \tag{1.1}$$

Здесь D — коэффициент диффузии; $T(t,x)$ — концентрация; $v(t,x)$ – скорость воды в реке.

Для введенных величин в системе СИ приняты размерности $[T] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $[D] = \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$, $[x] = \text{м}$, $[v] = \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

Слагаемое $f(t,x)$ добавлено для того, чтобы описать другие источники, откуда примесь поступает в реку.

Считаем, что длина рассматриваемой реки равна l. Задан момент времени $p > 0$. При $0 \leqslant t \leqslant p$ процесс сброса примесей из водоема A в реку является управляемым

$$\frac{dT(t,0)}{dt} = a_1(t) + a_2(t)\xi, \quad |\xi| \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Здесь функции $a_i(t)$ являются непрерывными и удовлетворяют условиям

$$a_2(t) \geqslant 0, \quad \int_0^t a_1(r)\,dr \geqslant \int_0^t a_2(r)\,dr \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant p. \tag{1.3}$$

Условие (1.3) гарантирует выполнение неравенства $T(0,t) \geqslant 0$ при любой функции $\xi(t)$ в (1.2), удовлетворяющей неравенству $|\xi(t)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant p$.

Водоем B является большим по размеру. Поэтому можно считать, что концентрация примеси в нем постоянна и равна нулю. С учетом этого граничное условие при $x = l$ принимает вид [17]

$$\frac{\partial T(t,l)}{\partial x} + \lambda T(t,l) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant p. \tag{1.4}$$

Здесь коэффициент $\lambda > 0$. Его размерность $[\lambda] = \text{м}^{-1}$.

Считаем, что значение функции $f(t,x)$, описывающей другие источники примеси, поступающей в реку, точно неизвестно. Известна только ее оценка

$$f_2(t,x) \leqslant f(t,x) \leqslant f_1(t,x), \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,p]. \tag{1.5}$$

Здесь функции $f_i\colon [0,l] \times [0,p] \to R$, $i = 1,2$, являются непрерывными.

Обозначим через $M(t)$ массу оставшейся в водоеме A примеси в момент времени t. Тогда

$$\dot{M}(t) = -ST(t,0)v(t,0). \tag{1.6}$$

Здесь S — площадь сечения реки при выходе ее из водоема A.

Цель выбора управления ξ (1.2) заключается в минимизации оставшейся в водоеме A массы $M(p)$ и в минимизации среднего значения примеси в реке в момент времени p, которую определим формулой

$$\int_0^l T(p,x)\sigma(x)\,dx.$$

Здесь функция $\sigma(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ является дифференцируемой и удовлетворяет условиям

$$\sigma(0) = \sigma(l) = 0, \quad \dot{\sigma}(l) = 0. \tag{1.7}$$

Сформулированная выше задача является двухкритериальной. Зафиксируем число $\mu>0$, имеющее размерность м$^{-2}$, и запишем критерий

$$\int_0^l T(p,x)\sigma(x)\,dx + \mu M(p) \to \min .$$

Зафиксируем числа $L \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. Будем искать управление (1.2), которое обеспечивает выполнение неравенства

$$\left| \int_0^p T(p,x)\sigma(x)\,dx + \mu M(p) - L \right| \leqslant \varepsilon. \tag{1.8}$$

§ 2. Формализация задачи

Допустимое правило формирования управления ξ (1.2) означает, что каждому моменту $0 \leqslant \nu < p$ и каждой возможной функции концентрации $T(t,x)$ ставится в соответствие функция $\xi\colon [\nu,p] \to [0,1]$. Такое правило будем обозначать

$$\xi(t) = N(t, n(\nu,\cdot)), \quad t \in [\nu,p]. \tag{2.1}$$

Возьмем разбиение

$$\omega\colon 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{n+1} = p$$

отрезка $[0,p]$ с диаметром $d(\omega) = \max_{0\leqslant i\leqslant n}(t_{i+1} - t_i)$.

Зафиксируем управление (2.1), функцию $f(t,x)$, $0 \leqslant t \leqslant p$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Построим решение $T_\omega(t,x)$ при $0 \leqslant t \leqslant p$, $0 \leqslant x \leqslant l$ задачи (1.1)–(1.4) следующим образом.

Обозначим $g_0(x) = T(0,x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. При $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ функцию $T_\omega(t,x)$ определим как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial T_\omega(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T_\omega(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial(v(t,x)T(t,x))}{\partial x} + f(t,x), \tag{2.2}$$

$$T_\omega(t_i,x) = g_i(x), \quad T_\omega(t,0) = T_\omega(t_i,0) + \int_{t_i}^t (a_1(r) + a_2(r)\xi_i(r))\,dr, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T_\omega(t,l)}{\partial x} + \lambda T_\omega(t,l) = 0, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \tag{2.4}$$

$$\xi_i(t) = N(t, n_\omega(t_i,\cdot)). \tag{2.5}$$

Здесь $i = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_{i+1}$.

Пусть функция $T_\omega(t,x)$ определена при $0 \leqslant t \leqslant t_i$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Положим $g_i(x) = T_\omega(t_i,x)$. С помощью формул (2.2)–(2.5) построим функцию $T_\omega(t,x)$ при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$.

Будем говорить, что управление (2.1) гарантирует выполнение поставленной цели (1.8), если для любого числа $\gamma > \varepsilon$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения ω с диаметром $d(\omega) < \delta$ и для любой непрерывной функции $f(t,x)$, удовлетворяющей условию (1.5), выполнено неравенство

$$\left| \int_0^l T_\omega(p,x)\sigma(x)\,dx - \mu\int_0^p v(r,0)T_\omega(r,0)\,dr + \mu M(0) - L \right| \leqslant \gamma. \tag{2.6}$$

Здесь использована формула (1.6).

§ 3. Переход к одномерной задаче

Пусть функция $\psi(\tau, x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant p$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial\psi(\tau, x)}{\partial\tau} = D\frac{\partial^2\psi(\tau, x)}{\partial x^2} + v(p-\tau, x)\frac{\partial\psi(\tau, x)}{\partial x}, \tag{3.1}$$

$$\psi(\tau, 0) = 0, \quad \frac{\partial\psi(\tau, l)}{\partial x} + \left(\lambda + \frac{v(p-\tau, l)}{D}\right)\psi(\tau, l) = 0, \tag{3.2}$$

$$\psi(0, x) = \sigma(x). \tag{3.3}$$

Из формул (1.7) следует, что при $x = 0$ и $x = l$ выполнены условия согласования. Обозначим

$$\theta(t) = \int_0^l T(t, x)\psi(p-t, x)\,dx. \tag{3.4}$$

Тогда, применяя формулу интегрирования по частям получим, что

$$\dot{\theta} = \int_0^p \left(-\frac{\partial\psi(p-t, x)}{\partial\tau} + D\frac{\partial^2\psi(p-t, x)}{\partial x^2} + v(t, x)\frac{\partial\psi(p-t, x)}{\partial x}\right)T(t, x)\,dx + \\ + D\frac{\partial T(t, l)}{\partial x}\psi(p-t, l) - DT(t, l)\frac{\partial\psi(p-t, l)}{\partial x} + DT(t, 0)\frac{\partial\psi(p-t, 0)}{\partial x} - \\ - v(t, l)T(t, l)\psi(p-t, l) + \int_0^l f(t, x)\psi(p-t, x)\,dx.$$

Отсюда, из уравнения (3.1) и первого условия в (3.2) следует, что

$$\dot{\theta}(t) = D\frac{\partial T(t, l)}{\partial x}\psi(p-t, l) - DT(t, l)\frac{\partial\psi(p-t, l)}{\partial x} + \\ + DT(t, 0)\frac{\partial\psi(p-t, 0)}{\partial x} - v(t, l)T(t, l)\psi(p-t, l) + \int_0^l f(t, x)\psi(p-t, x)\,dx.$$

Подставим сюда граничное условие (1.4). Получим

$$\dot{\theta}(t) = -D\left(\lambda\psi(p-t, l) + \frac{\partial\psi(p-t, l)}{\partial x} + \frac{v(t, l)}{D}\psi(p-t, l)\right)T(t, l) + \\ + DT(t, 0)\frac{\partial\psi(p-t, 0)}{\partial x} + \int_0^l f(t, x)\psi(p-t, x)\,dx.$$

Отсюда и из второго условия в (3.2) следует, что

$$\dot{\theta}(t) = D\frac{\partial\psi(p-t, 0)}{\partial x}T(t, 0) + \int_0^l f(t, x)\psi(p-t, x)\,dx. \tag{3.5}$$

Из неравенств (1.5) получим, что

$$\int_0^l f(t, x)\psi(p-t, x)\,dx = b_1(t) + b(t)\eta, \quad |\eta| \leqslant 1.$$

Здесь

$$b_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (f_1(t, x) + f_2(t, x))\psi(p-t, x)\,dx,$$

$$b_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (f_2(t, x) - f_1(t, x))\psi(p-t, x)\,dx.$$

Поэтому формула (3.5) примет вид

$$\dot{\theta}(t) = D\frac{\partial\psi(p-t,0)}{\partial x}T(t,0) + b_1(t) + b_2(t)\eta, \quad |\eta| \leqslant 1. \tag{3.6}$$

Введем новую переменную

$$\begin{gathered} z(t) = \theta(t) + DT(t,0)\int_t^p \left(\frac{\partial\psi(p-r,0)}{\partial x} - S\frac{\mu}{D}v(r,0)\right)dr + \\ + D\int_t^p a_1(\tau)\int_\tau^p \left(\frac{\partial\psi(p-r,0)}{\partial x} - S\frac{\mu}{D}v(r,0)\right)dr\,d\tau - S\mu\int_0^t T(r,0)v(r,0)\,dr + \\ + \int_t^p b_1(r)\,dr + \mu M(0) - L. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Полагая в (3.7) $t = p$ и учитывая формулы (1.6), (3.3) и (3.4), будем иметь

$$z(p) = \int_0^l T(p,x)\sigma(x)\,dx + \mu M(p) - L.$$

Из этой формулы следует, что неравенство (2.6) примет вид

$$|z(p)| \leqslant \gamma. \tag{3.8}$$

Дифференцируя функцию $z(t)$ (3.7) и используя формулы (1.2) и (3.6), получим

$$\dot{z}(t) = Da_2(t)\int_t^p \left(\frac{\partial\psi(p-r,0)}{\partial x} - S\frac{\mu}{D}v(r,0)\right)dr\xi + b_2(t)\eta. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} a(t) = Da_2(t)\left|\int_t^p \left(\frac{\partial\psi(p-r,0)}{\partial x} - S\frac{\mu}{D}v(r,0)\right)dr\right| \\ u = -\text{sign}\left(\int_t^p \left(\frac{\partial\psi(p-r,0)}{\partial x} - S\frac{\mu}{D}v(r,0)\right)dr\right)\xi, \\ b(t) = |b_2(t)|, \quad \widehat{v} = (\text{sign}\, b_2(t))\eta. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Полагаем sign $0 = 1$. Тогда из (3.9) получим, что

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)\widehat{v}, \quad |u| \leqslant 1, \quad |\widehat{v}| \leqslant 1. \tag{3.11}$$

§ 4. Условия возможности окончания в одномерной задаче

Рассмотрим одномерную задачу (3.8), (3.11). Построим ломаные

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^t a(r)\,dru_i + \int_{t_i}^t b(r)\,dr\widehat{v}_i, \quad t_i < t \leqslant t_{i+1}, \tag{4.1}$$

с начальным условием $z_\omega(0) = z(0)$. Семейство этих ломаных, определенных на отрезке $[0,p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным [14, с. 46]. По теореме Арцела [18, с. 104] из любой последовательности ломаных (4.1) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,p]$.

Пусть в (4.1)

$$u_i = \text{sign}\, z_\omega(t_i), \quad t_i < t \leqslant t_{i+1}, \quad i = \overline{0,m}, \tag{4.2}$$

а функции $z(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant p$ является равномерным пределом последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$ (4.1), у которых диаметр разбиения $d(\omega_k) \to 0$. Тогда [14, теорема 8.1] выполнено неравенство

$$|z(p)| \leqslant F(z(0)).$$

Здесь обозначено

$$F(z) = \max\left(|z| + \int_0^p (b(r) - a(r))\, dr; \max_{0 \leqslant \tau \leqslant p} \int_\tau^p (b(r) - a(r))\, dr\right).$$

Пусть число $\varepsilon \geqslant F(z(0))$. Тогда можно показать, что для любого числа $\gamma > \varepsilon$ существует число $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство $|z_\omega(p)| \leqslant \gamma$ для любой ломаной (4.1) с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$ и с управлением (4.2).

Пусть в (4.1)

$$\widehat{v}_i = \text{sign } z_\omega(t_i), \quad t_i < t \leqslant t_{i+1}, \quad i = \overline{0, m}, \tag{4.3}$$

а функция $z(t)$ является равномерным пределом последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$ (4.1), у которых $d(\omega_k) \to 0$. Тогда [14, теорема 8.2] выполнено неравенство

$$|z(p)| \geqslant F(z(0)).$$

Отсюда можно получить, что, если числа $\varepsilon < \gamma < F(z(0))$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|z_\omega(p)| > \gamma$$

для любой ломаной $z_\omega(t)$ (4.1) с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$ и с $\widehat{v}_i$ (4.3).

Таким образом можно построить управление (2.1), которое гарантирует выполнение (2.6) тогда и только тогда, когда $F(z(0)) \leqslant \varepsilon$.

Из формул (3.10) и (4.2) следует, что это управление равно

$$\xi = -\text{sign } \left(z \int_t^p \left(\frac{\partial \psi(p - r, 0)}{\partial x} - S\frac{\mu}{D} v(r, 0)\right) dr\right).$$

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pimpunchat B., Sweatman W. L., Wake G. C., Triampo W., Parshotam A. A mathematical model for pollution in a river and its remediation by aeration // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22. Issue 3. P. 304–308. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.03.026
2. Guo G., Cheng G. Mathematical modelling and application for simulation of water pollution accidents // Process Safety and Environmental Protection. 2019. Vol. 127. P. 189–196. https://doi.org/10.1016/j.psep.2019.05.012
3. Othata P., Pochai N. A one-dimensional mathematical simulation to salinity control in a river with a barrage dam using an unconditionally stable explicit finite difference method // Advances in Difference Equations. 2019. Article number 203. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2106-4
4. Sedakov A., Qiao H., Wang S. A model of river pollution as a dynamic game with network externalities // European Journal of Operational Research. 2020. Vol. 290. Issue 3. P. 1136–1153. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.053
5. Осипов Ю. С. Позиционное управление в параболических системах // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 195–201.
6. Короткий А. И., Осипов Ю. С. Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. № 4. С. 599–605.

7. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
8. Liu J., Zheng G., Ali M. M. Stability analysis of the anti-stable heat equation with uncertain disturbance on the boundary // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. Vol. 428. Issue 2. P. 1193–1201. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.073
9. Dai J., Ren B. UDE-based robust boundary control of heat equation with unknown input disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 11403–11408. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1801
10. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 739–742. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.458
11. Ухоботов В. И., Изместьев И. В. Задача управления процессом нагрева стержня с неизвестными температурой на правом конце и плотностью источника тепла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 297–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-297-305
12. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
13. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. http://mi.mathnet.ru/msb2728
14. Ухоботов В. И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005.
15. Ухоботов В. И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 196–204. http://mi.mathnet.ru/timm622
16. Галлахер Л., Хоббс Дж. Д. Распространение загрязнений в эстуарии // Математические модели контроля загрязнений воды. М.: Мир, 1981. С. 229–243.
17. Зарипов Ш. Х., Марданов Р. Ф., Гильфанов А. К., Шарафутдинов В. Ф., Никоненкова Т. В. Математические модели переноса загрязнений в окружающей среде. Казань: Казан. ун-т, 2018.
18. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 30.03.2021

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Изместьев Игорь Вячеславович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Цитирование: В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев. Об одной задаче управления процессом очистки водоема от примеси // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 181–189.

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev

On problem of controlling the process of cleaning a pond from impurity

Keywords: control, uncertainty, convection–diffusion equation.

MSC2020: 49N70, 49N75, 91A23, 91A24

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-09

The problem of controlling the process of cleaning a pond from impurity using the river flowing from it is considered. A controlled variable is the concentration of impurity entering the river from the pond. The spread of impurity in the river is described by the convection–diffusion equation. This equation includes a term that is determined by other sources of impurity entering the river. The exact value of this term is unknown. Only the boundaries of its change are set. An indicator of the control quality is the value of the linear combination of the concentration of the impurity in the river at a given moment of time and the remaining amount of the mass of the impurity at that moment in the pond. The goal of the control is to bring the value of this indicator within the specified interval.

Funding. The research was funded by Russian Foundation for Basic Research and Chelyabinsk Region, project number 20-41-740027.

REFERENCES

1. Pimpunchat B., Sweatman W. L., Wake G. C., Triampo W., Parshotam A. A mathematical model for pollution in a river and its remediation by aeration, *Applied Mathematics Letters*, 2009, vol. 22, issue 3, pp. 304–308. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.03.026
2. Guo G., Cheng G. Mathematical modelling and application for simulation of water pollution accidents, *Process Safety and Environmental Protection*, 2019, vol. 127, pp. 189–196. https://doi.org/10.1016/j.psep.2019.05.012
3. Othata P., Pochai N. A one-dimensional mathematical simulation to salinity control in a river with a barrage dam using an unconditionally stable explicit finite difference method, *Advances in Difference Equations*, 2019, article number 203. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2106-4
4. Sedakov A., Qiao H., Wang S. A model of river pollution as a dynamic game with network externalities, *European Journal of Operational Research*, 2021, vol. 290, issue 3, pp. 1136–1153. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.053
5. Osipov Iu. S. Position control in parabolic systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 187–193. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90001-6
6. Korotkii A. I., Osipov Iu. S. Approximation in problems of position control of parabolic systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1978, vol. 42, no. 4, pp. 631–637. https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90004-7
7. Egorov A. I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* (Optimal control of thermal and diffusion processes), Moscow: Nauka, 1978.
8. Liu J., Zheng G., Ali M. M. Stability analysis of the anti-stable heat equation with uncertain disturbance on the boundary, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, vol. 428, issue 2, pp. 1193–1201. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.073
9. Dai J., Ren B. UDE-based robust boundary control of heat equation with unknown input disturbance, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, issue 1, pp. 11403–11408. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1801
10. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 739–742. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.458
11. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. A control problem for a rod heating process with unknown temperature at the right end and unknown density of the heat source, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki*

UrO RAN, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 297–305 (in Russian).
https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-297-305
12. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamical system), Moscow: Nauka, 1985.
13. Pontrjagin L. S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815
14. Ukhobotov V. I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* (Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints), Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2005.
15. Ukhobotov V.I. One type differential games with convex goal, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm622
16. Gallagher L., Hobbs G. D. Estuarine dispersion, *Mathematical Models in Water Pollution Control*, New York: John Wiley and Sons, 1978, pp. 193–205.
Translated under the title Rasprostranenie zagryaznenii v estuarii, *Matematicheskie modeli kontrolya zagryazneniya vody*, Moscow: Mir, 1981, pp. 229–243.
17. Zaripov Sh. Kh., Mardanov R. F., Gil'fanov A. K., Sharafutdinov V. F., Nikonenkova T. V. *Matematicheskie modeli perenosa zagryaznenii v okruzhayushchei srede* (Mathematical models of pollution transport in the environment), Kazan: Kazan Federal University, 2018.
18. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1972.

Received 30.03.2021

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Izmest'ev Igor' Vyacheslavovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Citation: V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev. On problem of controlling the process of cleaning a pond from impurity, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 181–189.