

**ESTUDIO DE ONDAS GRAVITACIONALES COMO UNA PREDICCIÓN DE LAS
ECUACIONES DE EINSTEIN**

SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2019**

**ESTUDIO DE ONDAS GRAVITACIONALES COMO UNA PREDICCIÓN DE LAS
ECUACIONES DE EINSTEIN**

SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al
Título de Físico

**ASESOR:
JUAN CARLOS SALAZAR MONTENEGRO
Ph.D. FÍSICA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2019**

NOTA DE RESPONSABILIDAD

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado es responsabilidad exclusiva del autor”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1996, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Juan Carlos Salazar Montenegro

Director

Eduardo Rojas Peña

Jurado

Nicolás Guillermo Avilán Vargas

Jurado

San Juan de Pasto, 30 de Octubre 2019



Universidad de **Nariño**
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ACUERDO NÚMERO 174 DE 2019
(noviembre 14)

Por la cual se otorga una distinción de **LAUREADA** al trabajo de Grado del estudiante **SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ**.

EL CONSEJO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO, en uso de sus atribuciones reglamentarias y estatutarias y,

CONSIDERANDO:

Que mediante Proposición No.041 de 08 de noviembre de 2019, el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Física, solicitó Otorgar la distinción de tesis **LAUREADA** al trabajo de grado titulado "**ESTUDIO DE ONDAS GRAVITACIONALES COMO UNA PREDICCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN**" sustentado y aprobado por el estudiante del Programa de Física **SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ**, como requisito parcial para optar al título de Físico;

Que mediante Acuerdo No.332 del 1 de noviembre de 2005 del Consejo Académico reglamentó y unificó los criterios y puntajes para la evaluación de trabajos de grado;

Que en el precitado Acuerdo en su Artículo 8° establece "*Los Consejos de Facultad podrán otorgar estas distinciones, previa presentación de la proposición correspondiente por parte de los Comités Curriculares y de Investigaciones, en el cual se adjunte un informe por parte de cada uno de los jurados evaluadores que justifique dicho merecimiento*";

Que el Director del mencionado trabajo es el docente **JUAN CARLOS SALAZAR MONTENEGRO**.

Que según Acuerdo No 028 de Octubre 28 del 2019 el Comité Curricular designó como jurados evaluadores a los docentes **EDUARDO ROJAS PEÑA** y **NICOLAS AVILAN VARGAS**.

Que mediante acta de **sustentación N° 038** de 30 de octubre de 2019, los jurados **EDUARDO ROJAS PEÑA** y **NICOLAS AVILAN VARGAS**, asignaron una calificación de cien **puntos (100)**, obteniendo la distinción de **LAUREADA**;

Que los jurados **EDUARDO ROJAS PEÑA** y **NICOLAS AVILAN VARGAS** justifican la calificación así:

- "El trabajo desarrolla un procedimiento propio para obtener una deducción heurística de las relaciones de incertidumbre para el espacio-tiempo formuladas por Doplicher, Fredenhagen y Roberts. Aunque el resultado final está publicado en la literatura especializada el procedimiento necesario para lograr el resultado no; por esto reconozco como un aporte importante presentar un procedimiento propio para deducir las mencionadas relaciones de incertidumbre."

Elaboró: Paola S.



Universidad de **Nariño**
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

FUNDADA EN 1988

Que con base en los anteriores considerandos los jurados por la calificación obtenida de 100/100, sugieren otorgar al trabajo de grado la distinción de tesis **LAUREADA**;

Que este organismo considero viable la petición y;

ACUERDA:

PRIMERO: Otorgar la distinción de tesis **LAUREADA** al trabajo de grado titulado **"ESTUDIO DE ONDAS GRAVITACIONALES COMO UNA PREDICCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN"** sustentado y aprobado por el estudiante del Programa de Física **SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ**, como requisito parcial para optar al título de Físico, bajo la Asesoría del docente **JUAN CARLOS SALAZAR MONTENEGRO** y los docentes **EDUARDO ROJAS PEÑA** y **NICOLAS AVILAN VARGAS** como integrantes del Jurado Evaluador, según la parte motiva del presente acuerdo.

SEGUNDO: **COMUNÍQUESE** esta determinación compulsando las respectivas copias del presente Acuerdo al Departamento de Física, la oficina de Registro Académico y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

San Juan de Pasto, noviembre 14 de 2019


HERNÁN ABDÓN GARCÍA
Presidente


MARÍA JOSÉ SEVILLA SÁNCHEZ
Secretaría

Elaboró: Paola S.

Ciudadela Universitaria Torobajo - Calle 18 No. 50 - 02 - Bloque 3 - Piso 3 - Telefax 7313106
A.A. 1175 - Línea gratuita 018000957071 - email: faccn@udenar.edu.co
www.udenar.edu.co - San Juan de Pasto - Nariño - Colombia



AGRADECIMIENTOS

Gracias al Maestro Juan Carlos, por sus críticas, opiniones y aportes a este trabajo, en especial, por compartir su conocimiento de la naturaleza en toda la carrera de Física ya que me enseñó a “ver” lo profundo y asombroso que puede Ser el camino de conocimiento natural.

Gracias a mi familia, por darme un espacio para Ser, por enseñarme a mirar sin aliento, por acompañarme en este camino de corazón convirtiendo mi “ver” en una expresión de cariño y gozo.

A los sonidos del amanecer, a la sensación de Vivir plenamente, a la palabra constructora de realidades, a las miradas de encuentros y des-encuentros, a las enseñanzas de Maestros y Maestras, por todo esto y más, agradezco a la Vida: la maestra más profunda.

DEDICATORIA

A mi MADRE que me enseñó a caminar en el conocimiento de la Vida.

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza un estudio de las ecuaciones de Einstein que describen la interacción gravitacional como una manifestación de la curvatura del espacio–tiempo. Se deducen los Diagramas de Penrose para la métrica de Minkowski y de Schwarzschild, además se analiza la formulación matemática de las ondas gravitacionales y la descripción del experimento que logró detectar dichas ondas. Adicionalmente a partir de la linealización de las ecuaciones de Einstein se estudiará la deducción heurística de las condiciones de incertidumbre para el espacio–tiempo (planteadas en la propuesta para un espacio-tiempo no conmutativo) formulada por Doplicher, Fredenhagen, y Roberts.

Palabras claves: Relatividad general, agujeros negros, ondas gravitacionales.

ABSTRACT

In the present work a study of Einstein's equations that describe gravitational interaction as a manifestation of the curvature of the space–time is carried out. The Penrose Diagrams for the Minkowski and Schwarzschild metrics are deduced, also analyzed the mathematical formulation of gravitational waves and the description of the experiment that managed to detect these waves. Additionally, following the ideas of Doplicher, Fredenhagen, and Roberts, the conditions of uncertainty for spacetime will be deduced heuristically.

Keywords: General relativity, black holes, gravitational waves.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	14
CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD GENERAL	17
1.1 Relatividad Especial	17
1.2 Principio de Equivalencia	19
1.3 Espacios de Riemann	19
1.3.1 Transformaciones generales	19
1.4 Deduccción de las ecuaciones del campo gravitacional	21
CAPÍTULO 2. LA SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD	28
2.1 La métrica de Schwarzschild	28
2.2 Teorema de Birkhoff	33
2.3 Singularidades	33
2.4 Significado físico del radio de Schwarzschild S	34
2.5 Coordenadas de Kruskal-Szekeres	37
2.5.1 Interpretación de las coordenadas T y X	38
2.5.2 Espacio–tiempo en las coordenadas Kruskal-Szekeres	38
2.6 Diagramas de Penrose-Carter	40
2.6.1 Diagrama Penrose-Carter para el espaciotiempo Minkowski	40
2.6.2 Diagrama Penrose-Carter para el espacio–tiempo Kruskal-Szekeres	44
CAPÍTULO 3. ONDAS GRAVITACIONALES	47
3.1 Límite de campo débil	47
3.2 Solución a las ecuaciones de campo linealizadas en el vacío	52
3.2.1 Gauge transversal-sin traza	52
3.2.2 Una onda gravitacional propagandose en la dirección $+z$	53
3.2.3 Efecto físicos de las ondas gravitacionales sobre las partículas	54
3.3 Energía gravitacional	57
3.3.1 Tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$ a segundo orden en h^2	58
3.4 Generación de ondas gravitacionales	59
3.4.1 El flujo de energía de las ondas gravitacionales	63
3.4.2 Energía total irradiada	65

3.4.3	Aplicación a un sistema binario	66
3.5	LIGO	70
3.6	Ruidos en el experimento	74
CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA CUÁNTICA DEL ESPACIO–TIEMPO		78
4.1	Deducción de los principios de incertidumbre para el espacio–tiempo	79
CONCLUSIONES		85
RECOMENDACIONES		86
BIBLIOGRAFÍA		87
ANEXOS		89

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Cono de luz fuera del radio de Schwarzschild S , zona exterior	36
Figura 2	Cono de luz dentro del radio de Schwarzschild S , zona interior	36
Figura 3	Espacio–tiempo en las coordenadas Kruskal-Szekeres	39
Figura 4	Espacio–tiempo de Minkowski para geodésicas nulas	41
Figura 5	Diagrama de Penrose para el espacio–tiempo de Minkowski	42
Figura 6	Geodésicas nulas salientes y geodésicas nulas entrantes	43
Figura 7	Diagrama de Penrose-Carte para una estrella colapsando	44
Figura 8	Diagrama de Penrose-Carter para el espacio–tiempo de Kruskal-Szekeres	46
Figura 9	Ondas gravitacional con polarización “ <i>vertical</i> ” $wt = 0$	55
Figura 10	Ondas gravitacional con polarización “ <i>vertical</i> ” $wt = \pi$	56
Figura 11	Ondas gravitacional con polarización “ <i>diagonal</i> ” $wt = 0$	56
Figura 12	Ondas gravitacional con polarización “ <i>diagonal</i> ” $wt = \pi$	57
Figura 13	Interferómetro Michelson	71
Figura 14	Primer camino para la integral de camino	94
Figura 15	Segundo camino para la integral de camino	95
Figura 16	Campo eléctrico índice del medio más denso	101
Figura 17	Campo eléctrico índice del medio menos denso	102
Figura 18	Un medio menos denso entre dos medios con mayor densidad	102

LISTA DE ANEXOS

- ANEXO A. Aproximación de la métrica en el límite de campo débil
- ANEXO B. Solución a la ecuación de la onda por el método de la función de Green
- ANEXO C. Propiedades del operador de proyección
- ANEXO D. Propiedades de reflexión
- ANEXO E. Campo fotónico en el horizonte de sucesos

GLOSARIO

Agujero negro: Gran concentración de energía en un solo punto que deforma tanto el espacio–tiempo que ningún objeto puede salir.

Cono de luz: Representación del espacio–tiempo, modelo útil para observar la causalidad en una región del espacio–tiempo.

Covarianza: Objetos matemáticos que bajo transformaciones generales mantienen su forma escrita.

Espacio–tiempo: Modelo matemático que une los conceptos de espacio y tiempo.

Espacio-tiempo de Minkowski: Espacio–tiempo con curvatura igual a cero.

Interferómetro: Instrumento que ayuda a medir distancia de una manera muy precisa. Su funcionamiento principal es en un haz de luz coherente que se divide al llegar a un divisor de luz luego son reflejados por espejos para unirse de nuevo en un punto.

Ondas gravitacionales: Fluctuaciones que se propagan por el espacio–tiempo.

Radio de Schwarzschild: Tamaño de un agujero negro de Schwarzschild, es decir, un agujero negro con simetría esférica y sin rotación.

INTRODUCCIÓN

*“La naturaleza está llena de significados matemáticos
el científico los interpreta.”*

En la medida que el Ser humano se embarcó hacia la comprensión de la naturaleza identificó un lenguaje inscripto en ella: *las matemáticas*, poco a poco el hombre fue construyendo este nuevo camino de conocimiento que lo llevo a conocer lo más profundo de la materia hasta el origen del Universo, es como si este camino de conocimiento hubiera permitido desvelar una nueva realidad ante los ojos humanos, iluminandolo con los secretos de la naturaleza.

Así como en un jardín con senderos que se bifurcan, el camino de conocimiento natural posee bifurcaciones innatas, haciendo de una simple senda un millar de caminos, encontrando en cada uno una aventura llena de acertijos y verdades, alegrías y tristezas. En este trabajo se eligió como *camino de conocimiento natural* el campo gravitacional pero no por *tener* más conocimiento sino por el simple hecho de aprender, por la acción de ir y no la de llegar, por diversión como dice *Carl Friedrich Gauss*: “*No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje y no la posesión, sino el acto de llegar ahí, que concede el mejor disfrute.*”¹

En este camino se adentro un gran científico que pasó a la historia porque desafió los dogmas de su época y miró el conocimiento de la naturaleza a través de la imaginación, se llamaba: **Albert Einstein**, para comprender de manera clara el impacto que tuvo su descubrimiento, abordemos el contexto de su época. En este momento de la historia era conocido por los científicos los conceptos de espacio y tiempo, dos cantidades absolutas, permanecían ajenas a los observadores, el tiempo fluía y el espacio permanecía inmóvil, todos aceptan estos conceptos como *verdaderos* pero realmente nadie los había cuestionado.

Resulta algo más filosófico debatir acerca de los conceptos de espacio y tiempo, sin embargo, como es conocido con el pasar del tiempo, las cuestiones filosóficas a menudo llevan a descubrir los secretos de la naturaleza. Einstein no aceptaba por completo los conceptos de espacio y tiempo así que se embarcó hacia un nuevo rumbo, utilizando la herramienta de construcción de conocimiento más fuerte: **la imaginación**, fue entonces que logro observar que el espacio y el tiempo no son dos entidades separadas sino que hacen parte de una sola entidad conocida como espacio–tiempo y además, esta entidad dependen del movimiento del observador, es decir, si un observador se mueve cada vez más rápido, el pasar del tiempo se hace más lento y para un objeto que se mueve a lo largo de un eje un observador en reposo observa que se produce una disminución en su longitud en la dirección del movimiento. En un principio, estas ideas no tuvieron una acogida fuerte en la comunidad científica pero como siempre ha ocurrido a lo largo de la historia, las ideas que van en contra de los dogmas científicos son dejadas a un lado pero a veces estas ideas toman fuerza y salen a la luz.

¹Carta a Farkas Bolyai el 2 de septiembre de 1808.

El nuevo concepto de espacio–tiempo, llevó a Einstein a descubrir que *la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio–tiempo*, en principio una idea muy sencilla, pero que posee una nueva revolución en el concepto de la gravitación porque hasta entonces se había comprendido la gravedad como una *fuerza*, en cambio Einstein planteaba que la gravedad no es una fuerza sino una curvatura del propio espacio–tiempo, una de los pensamientos más profundos en física.

El siguiente paso a dar por el genio de Einstein era descubrir la ecuación matemática que describiera el nuevo concepto de gravitación y fue en este mismo momento cuando el genio matemático David Hilbert también se interesó en el camino de conocimiento del campo gravitacional e intento llegar más rápido que Einstein a la ecuación matemática; había comenzado la carrera hacia la teoría de la relatividad general. Al final fue Einstein que se llevaría todo el mérito del descubrimiento, pero es muy importante resaltar el aporte al conocimiento del campo gravitacional por parte de Hilbert, quien encontró un lagrangiano para las ecuaciones del campo gravitacional.

Es importante detenernos en este punto para resaltar la importancia que tiene el contexto en un camino de conocimiento, porque no sólo nos lleva a reflexionar acerca del impacto de los nuevos descubrimientos sino que nos insta a reflexionar de como se originó, es por esto que Max Born se manifestó de la teoría de la relatividad así: *“la mayor hazaña del pensamiento humano en torno a la naturaleza, la más asombrosa combinación de penetración filosófica, intuición física y habilidad matemática”* (ISAACSON, 2007).

Después de encontrar la ecuación del campo gravitacional Einstein pensó que *nadie* iba a lograr encontrar una solución exacta, ya que eran 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden, acopladas y no lineales, sin embargo, transcurrió poco tiempo hasta que el científico alemán Karl Schwarzschild lograra descubrir una solución exacta.

No obstante, la solución encontrada por Karl Schwarzschild presentaría un acontecimiento que iba contra toda intuición física: el espacio–tiempo se podía deformar hasta tal punto que podía atrapar la luz, si un observador miraba hacia ese lugar no lograría ver nada, este fenómeno se conoce como **un agujero negro**. Debido a lo anterior, la solución de Schwarzschild se considero como un imaginario físico, es decir, una solución matemática correcta pero sin realidad física. Transcurrido el tiempo los científicos descubrieron que los agujeros negros existían en la naturaleza y eran una propiedad intrínseca de la teoría de la relatividad general.

Hasta el momento nos hemos referido al origen de la teoría de la relatividad general, luego hablamos acerca de la solución exacta de las ecuaciones del campo gravitacional, ahora giraremos nuestra vista para entrar en una predicción, no menos extraña, realizada por Einstein: perturbaciones del espacio–tiempo que viajan a la velocidad de la luz, denominadas **las ondas gravitacionales**.

Cuando Einstein predijo las ondas gravitacionales no tenía la esperanza de que en algún momento se logran detectar porque las perturbaciones son relativamente pequeñas, sin embargo, en 2015 fueron detectadas por el Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Láser (LIGO) y a partir de este momento se abrió una nueva ventana para conocer el origen de la naturaleza, del Universo, de la Vida ya que se podría detectar las ondas gravitacionales generadas por la gran explosión (Big Bang).

A partir de todo el contexto anterior se entiende porque los descubrimientos de Einstein son tan importantes en el conocimiento de la naturaleza. De ahí que el objetivo de este trabajo sea comprender la teoría de la relatividad general desde las ecuaciones del campo gravitacional hasta los agujeros negros y las ondas gravitacionales.

Comenzaremos este viaje en el capítulo 1, eligiendo nuestras herramientas básicas: la definición de espacio–tiempo, los espacios de Riemann, el conocido principio de equivalencia y finalizaremos con **las ecuaciones de Einstein**, las cuales expresan al campo gravitatorio como una manifestación de la curvatura del espacio–tiempo.

En el capítulo 2 encontraremos la solución de las ecuaciones de Einstein para objetos con simetría esférica, llamada **la solución de Schwarzschild**, en la cuál comprenderemos el significado físico del *radio de Schwarzschild*, cuyo concepto nos lleva a definir un *agujero negro* entrando en un concepto temido por los científicos, las *singularidades*. Se finaliza con los conocidos *diagramas de Penrose-Carter*, diagramas en los cuales se puede ver *todo* el espacio–tiempo, es decir, “traer” el infinito a nuestra “vista”.

Para el capítulo 3 nos sumergimos en la comprensión de los rizos del espacio–tiempo, **las ondas gravitacionales**, aquí conoceremos: su “*energía gravitacional*”, que objetos las generan y cuáles son los *fundamentos* experimentales para detectarlas; se escogera el caso particular de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

Por otro lado, como un estudio adicional y producto de la linealización de las ecuaciones de Einstein, el capítulo 4 consiste en comprender la concepción heurística que define condiciones de incertidumbre para el espacio–tiempo, de manera similar a las condiciones de incertidumbre de Heisenberg, en el modelo en teoría cuántica de campos sobre espacio-tiempo no conmutativo formulado por Fredenhagen, Doplicher y Roberts.

Finalizamos este camino de conocimiento, miramos hacia atrás y vemos el camino recorrido porque recordar lo aprendido es hacer el conocimiento parte de nuestra propia existencia, volvemos nuestra mirada al frente y encontramos nuevos caminos de conocimiento natural, y es que este camino nunca termina, esto lo vio claramente Karl Raimund Popper cuando dijo: “*La ciencia será siempre una búsqueda, jamás un descubrimiento real. Es un viaje, nunca una llegada*” (NETTO, n.d).

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD GENERAL

En la naturaleza existen muchos fenómenos que interpelan al Ser humano para ser descubiertos, que requieren, por parte de este, una gran entrega de intelecto y espíritu. Este es un viaje a través del espacio y tiempo, de mujeres y hombres, que intentan encontrar la respuesta a la existencia del Universo, a la existencia del Ser. Así se fueron generando diferentes lenguajes para la comprensión de la naturaleza, uno de vital importancia es el lenguaje matemático. El camino que se forja a partir de las matemáticas para comprender los fenómenos de la naturaleza es llamado Física.

En Física existe un fenómeno que incluye a todos los objetos que poseen masa llamado **campo gravitacional**², fueron muchos que sintieron una llamada interior para entrar en el lenguaje matemático de este fenómeno pero fueron muy pocos los que llegaron a una explicación detallada y precisa.

Este capítulo está enfatizado en describir el camino que se siguió para encontrar el lenguaje matemático del campo gravitacional. Para este viaje es necesario sumergirnos en las ideas y conceptos de lo científicos que llegaron primero a este gran logro del Ser humano. Este camino no sólo es matemático sino histórico.

Esta senda comienza en 1915 cuando Albert Einstein y David Hilbert intentaban comprender la naturaleza del campo gravitacional por caminos totalmente diferentes pero complementarios. Einstein siguió un camino que tenía en cuenta los principios físicos a diferencia del camino seguido por Hilbert, quien las dedujo de una manera puramente matemática sin tener en cuenta hasta cierto punto los principios físicos.

En este trabajo se seguirá el camino de Hilbert, esta elección es debido a que en el transcurrir del tiempo se da todo el mérito del descubrimiento de las ecuaciones del campo gravitacional a Einstein sin mencionar las investigaciones que hizo Hilbert.

Este camino se entiende sólo si se comprenden los conceptos básicos de relatividad especial, el principio de equivalencia y los espacios de Riemann, es por esto que antes de iniciar con la deducción de las ecuaciones del campo gravitacional se dan a conocer estos conceptos.

1.1. Relatividad Especial

Para explicar y comprender los fenómenos de la naturaleza se utiliza el marco de referencia, existen dos tipos de marcos de referencia: los inerciales que se caracterizan por un movimiento a velocidades constantes y los no inerciales, caracterizados por un movimiento acelerado.

²De manera indirecta afecta a partículas sin masa.

Antes de examinar el sistema de referencia inercial consideremos un observador O, con coordenadas (x', y', z', t') , que se mueva a una velocidad constante v hacia la derecha respecto a un observador que se encuentra en reposo, con coordenadas (x, y, z, t) , de modo que el origen de los dos los ejes coincidan para $t = t' = 0$.

En un marco de referencia inercial se utiliza las **transformaciones de Galileo** dadas por:

$$x' = x - vt, \quad (1.1)$$

$$y' = y, \quad (1.2)$$

$$z' = z, \quad (1.3)$$

$$t' = t. \quad (1.4)$$

Esta transformación es consistente con los postulados de la mecánica clásica, es decir, no tienen en cuenta que la velocidad de la luz en el vacío es igual para cualquier observador. Es debido a esto que para marcos de referencia inerciales se utilizan los postulados de Einstein, definidos como:

- **Postulado 1:** *Todas las leyes de la física son iguales para cualquier sistema de referencia inercial.*
- **Postulado 2:** *La velocidad de la luz en el vacío es la misma para cualquier sistema de referencia inercial.*

Los postulados anteriores implican usar las **transformaciones de Lorentz** dadas por:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1.5)$$

$$y' = y, \quad (1.6)$$

$$z' = z, \quad (1.7)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad (1.8)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Existe una interpretación puramente geométrica (NABER, 1992) de las transformaciones de Lorentz realizada por *Hermann Minkowski* donde se plantea que el espacio y el tiempo no son independientes sino que forman parte de un todo conocido como *espacio-tiempo* (DE LA TORRE, 2008). En este espacio-tiempo se define el elemento de línea espaciotemporal ds^2 como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.9)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.10)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{dia}(-1, +1, +1, +1)$ es la métrica de Minkowski; *se utilizará índices latinos para las coordenadas espaciales* ($i, k = 1, 2, 3$). La teoría que utiliza las transformaciones de Lorentz se llama *Relatividad especial*.

1.2. Principio de Equivalencia

Para hablar de marcos de referencia no inerciales es necesario mencionar la **formulación general del principio de equivalencia**:

*Observadores en caída libre en un campo gravitatorio son equivalentes, **localmente**, a marcos inerciales.* (JANSSEN, 2013)

Del anterior enunciado se concluye que la gravedad afecta la trayectoria de la luz, es decir, la gravedad es un concepto físico que se relaciona íntimamente con la deformación del espacio–tiempo. La implicación matemática del principio de equivalencia es el **Principio de covarianza**:

*Las leyes de la física son iguales para **todos** los sistemas de referencia.*

Lo anterior implica hacer uso de ecuaciones tensoriales ya que mantienen su *forma* escrita invariante bajo cualquier transformación, en otras palabras, las ecuaciones tensoriales son covariantes, de esta manera es necesario conocer conceptos de transformaciones generales de coordenadas y geometría diferencial. Así, se elige a la métrica como la intensidad de campo gravitacional presente en el espacio-tiempo o equivalentemente, las propiedades del potencial gravitacional se reflejan en la métrica.

1.3. Espacios de Riemann

Un espacio riemanniano cumple las siguientes condiciones:

- El intervalo espacio–temporal es $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio–tiempo, tal que sea invariante bajo transformaciones generalizadas de coordenadas.
- Todas las derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$ existen y son continuas.
- El determinante de $g_{\mu\nu}$ no es cero.

1.3.1. Transformaciones generales

Bajo transformaciones generales un vector transforma de la siguiente forma:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}. \quad (1.11)$$

Un tensor mixto B^{μ}_{ν} , transforma de la siguiente manera:

$$B'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} B^{\alpha}_{\gamma}. \quad (1.12)$$

La derivada del vector A'^{μ} no es una operación covariante $\partial'_{\nu}A'^{\mu}$, es decir, no transforma como un tensor. Aquí surge la necesidad de construir un operador que transforme como un tensor, entonces se define el operador **derivada covariante** ∇_{β} dada por:

$$\nabla_{\beta}A^{\mu} := \partial_{\beta}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}A^{\alpha}, \quad (1.13)$$

donde $\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ es el símbolo de Christoffel definido como:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\beta}g_{\nu\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta}). \quad (1.14)$$

Para la derivada covariante de tensores de rango mayor se agrega un símbolo de Christoffel por cada índice, por ejemplo:

$$\nabla_{\beta}\xi^{\mu\nu} = \partial_{\beta}\xi^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\xi^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\xi^{\mu\alpha}. \quad (1.15)$$

Para un tensor con componentes covariantes se obtiene:

$$\nabla_{\beta}\xi_{\mu\nu} = \partial_{\beta}\xi_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\xi_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\xi_{\mu\alpha}. \quad (1.16)$$

Al aplicar la derivada covariante al tensor métrico $g^{\mu\nu}$ se cumple que:

$$\nabla_{\beta}g^{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

Del principio de equivalencia se dedujo que el campo gravitacional está asociado a la deformación del espacio lo que conlleva a trabajar en espacio *curvos*, el instrumento matemático para saber si nos encontramos en un espacio curvo es el tensor de Riemann $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ definido como:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}, \quad (1.18)$$

(el símbolo (,) indica derivada corriente) que cumple con la propiedad de:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0 \quad \text{asociado a un espacio sin curvatura,} \quad (1.19)$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \neq 0 \quad \text{asociado a un espacio curvo.} \quad (1.20)$$

Además, el tensor de Riemann satisface las siguientes identidades:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa}, \quad (1.21)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0, \quad (1.22)$$

$$\nabla_{\sigma}R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu}R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu} + \nabla_{\mu}R^{\alpha}_{\beta\nu\sigma} = 0 \quad \text{Identidad de Bianchi.} \quad (1.23)$$

Al contraer dos índices del tensor de Riemann se obtiene el tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$ y al realizar otra contracción se obtiene el escalar de Ricci R :

$$R_{\beta\mu} := R^{\alpha}_{\beta\mu\alpha} = R_{\beta\mu}, \quad (1.24)$$

$$R := R^\mu{}_\mu. \quad (1.25)$$

Geodésicas: Se define como aquella curva en la cual la distancia total es estacionaria (DE LA TORRE, 2008) en otras palabras, es el camino más corto entre dos puntos en un espacio dado. Las geodésicas cumplen con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (1.26)$$

donde λ es conocido como el *parámetro afín* y sirve para caracterizar los puntos que pertenecen a la geodésica.

Con todos los anteriores conceptos ya estamos en disposición de encontrar las ecuaciones del campo gravitacional.

1.4. Deducción de las ecuaciones del campo gravitacional

Como se mencionó al comienzo de este capítulo se seguirá el camino elegido por David Hilbert para deducir las ecuaciones del campo gravitacional cuyo énfasis son los principios variacionales (KAEONIKHOM, 2006), se comienza planteando la *funcional acción* para la gravedad $A[g]$, que matemáticamente se expresa como:

$$A[g] = \int d^4 \mathbf{x} L(g_{\mu\nu}, \partial_\beta g_{\mu\nu}), \quad (1.27)$$

donde $L = L(g_{\mu\nu}, \partial_\beta g_{\mu\nu})$ es la densidad lagrangiana. La condición que debe cumplir la acción es que debe ser invariante bajo transformación de coordenadas generales. Consideremos $d^4 \mathbf{x}'$ en un sistema de coordenadas x' , al realizar una transformación a un sistema de coordenadas x se obtiene que:

$$d^4 \mathbf{x}' = |\det X| d^4 \mathbf{x}, \quad (1.28)$$

aquí X representa la matriz de transformación $X^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$. La transformación de las métricas es $g'^{\mu\nu} = X g^{\alpha\beta} X^T$, tomando determinantes a ambos lados de la ecuación:

$$\det g'^{\mu\nu} = \det X \det g^{\alpha\beta} \det X^T, \quad (1.29)$$

$$\det g'^{\mu\nu} = (\det X)^2 \det g^{\alpha\beta}. \quad (1.30)$$

Usando $\det g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det g_{\beta\alpha}}$ y llamando $g := \det g_{\alpha\beta}$ y $g' := \det g'_{\mu\nu}$ se obtiene que:

$$g = (\det X)^2 g', \quad (1.31)$$

Utilizando la ecuación (1.28) y (1.31) se puede demostrar de manera trivial que:

$$\sqrt{-g'} d^4 \mathbf{x}' = \sqrt{-g} d^4 \mathbf{x}, \quad (1.32)$$

en otras palabras, la cantidad $\sqrt{-g} d^4\mathbf{x}$ es un invariante. Por lo tanto, la acción $A[g]$ invariante bajo transformación de coordenadas generales es:

$$A[g] = \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} L(g_{\mu\nu}, \partial_\beta g_{\mu\nu}), \quad (1.33)$$

donde L es un escalar. Para encontrar la densidad lagrangiana, nos remitimos al hecho de que la gravedad es una manifestación de la *curvatura* del espaciotiempo y el tensor relacionado con la curvatura del espaciotiempo es el *tensor de Riemann*. De esta manera, la propuesta como densidad lagrangiana es el escalar de curvatura, es decir, el escalar de Ricci (CARROLL, 2003), una contracción del tensor de Riemann.

Cabe señalar que el escalar de Ricci tiene segundas derivadas del tensor métrico y la densidad lagrangiana posee primeras derivadas del tensor métrico; a primera vista se está cometiendo un proceso incorrecto. Sin embargo, como se verá más adelante, las segundas derivadas de R no contribuyen a las ecuaciones de campo ya que aparecen como un término de frontera. Bajo esta aclaración continuemos. Entonces, la acción se convierte en:

$$A[g] = \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} R, \quad (1.34)$$

la anterior ecuación es conocida como la **acción de Einstein-Hilbert**. Ahora para encontrar las ecuaciones que manifiestan la interacción del espacio-tiempo con la materia se expresan cuando la acción es mínima, es decir:

$$\delta A[g] = 0, \quad (1.35)$$

lo cual implica:

$$\delta \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} R = 0. \quad (1.36)$$

Teniendo en cuenta que la variación es sobre la métrica y no sobre las coordenadas se obtiene que:

$$\int d^4\mathbf{x} (\delta\sqrt{-g}) R + \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} (\delta R) = 0. \quad (1.37)$$

Utilizando:

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \quad (1.38)$$

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (1.39)$$

la ecuación (1.37) se convierte en:

$$\int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4\mathbf{x} (\delta\sqrt{-g}) R + \int d^4\mathbf{x} (\sqrt{-g}) R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.40)$$

Para proseguir, nos enfocaremos a trabajar en el primer término que se le asignara la siguiente notación:

$$\delta A_S = \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.41)$$

Por definición del tensor de Ricci se obtiene que:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}. \quad (1.42)$$

Realizando variaciones en la anterior ecuación:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}) + (\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma})\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}) - (\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma})\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}). \quad (1.43)$$

Organizando términos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \left[\partial_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}) - \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}) - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}) \right] \quad (1.44)$$

$$- \left[\partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}) + \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}) - \Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}) - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}) \right] \quad , \quad (1.45)$$

en este último paso se aumento y resto la cantidad $\Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma})$. Al aplicar el operador derivada covariante ∇_{α} a la variación de los simbolos de Christoffel $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ se obtiene:

$$\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}) - \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}) - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}). \quad (1.46)$$

De manera similar si se aplica el operador derivada covariante ∇_{ν} a la variación del simbolo de Christoffel $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}$ se obtiene:

$$\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}) + \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}(\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}) - \Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}) - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}). \quad (1.47)$$

Reemplazando (1.46) y (1.47) en (1.45) se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}. \quad (1.48)$$

Así, la acción δA_S es:

$$\delta A_S = \int d^4\mathbf{x}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}). \quad (1.49)$$

Dado que $\nabla_{\alpha}g^{\mu\nu} = 0$, la anterior ecuación se escribe como:

$$\delta A_S = \int d^4\mathbf{x}\sqrt{-g} \left[\nabla_{\alpha}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}) \right]. \quad (1.50)$$

Realizando un cambio de índice $\nu \Leftrightarrow \alpha$ en el último término se tiene:

$$\delta A_S = \int d^4\mathbf{x}\sqrt{-g}\nabla_{\alpha} \left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} \right] \quad , \quad (1.51)$$

definiendo la cantidad $S^{\alpha} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}$, la anterior ecuación se convierte en:

$$\delta A_S = \int d^4\mathbf{x}\sqrt{-g}\nabla_{\alpha}S^{\alpha}. \quad (1.52)$$

En geometría diferencial se conoce el **Teorema covariante de Gauss** (ASAF, 2015), que menciona que si S^α desaparece en el infinito³, se obtiene que:

$$\delta A_S = 0. \quad (1.53)$$

De esta manera, la ecuación (1.40) está dada por:

$$\int d^4\mathbf{x}(\delta\sqrt{-g})R + \int d^4\mathbf{x}(\sqrt{-g})R_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.54)$$

Ahora vamos a trabajar con las variaciones sobre las métricas. Consideremos la inversa de la matriz $g_{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g}C^{\beta\alpha}, \quad (1.55)$$

donde $C^{\beta\alpha}$ representa la matriz transpuesta de los cofactores de $g_{\alpha\beta}$. Si fijamos el valor de α la anterior ecuación se puede reescribir como:

$$g = g_{\alpha\beta}C^{\alpha\beta}, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = C^{\alpha\beta}, \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = gg^{\alpha\beta}, \quad (1.58)$$

Tomando variaciones sobre el determinante g :

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta}, \quad (1.59)$$

$$\delta g = gg^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (1.60)$$

Entonces:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g, \quad (1.61)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} gg^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (1.62)$$

Utilizando la identidad $g_{\gamma\alpha}g^{\gamma\zeta} = \delta^\zeta_\alpha$ se realiza el siguiente proceso matemático :

$$\delta(g_{\gamma\alpha}g^{\gamma\zeta}) = 0, \quad (1.63)$$

$$\delta(g_{\gamma\alpha})g^{\gamma\zeta} + g_{\gamma\alpha}\delta(g^{\gamma\zeta}) = 0, \quad (1.64)$$

$$g^{\gamma\zeta}\delta(g_{\gamma\alpha}) = -g_{\gamma\alpha}\delta(g^{\gamma\zeta}), \quad (1.65)$$

$$\delta^\gamma_\lambda \delta g_{\gamma\alpha} = -g_{\lambda\zeta}g_{\gamma\alpha}\delta g^{\gamma\zeta}, \quad (1.66)$$

$$\delta g_{\alpha\lambda} = -g_{\alpha\gamma}g_{\lambda\zeta}\delta g^{\gamma\zeta}. \quad (1.67)$$

³ S^α depende de las derivadas de la métrica $g^{\mu\nu}$ y en el infinito son cero porque en este límite el tensor métrico se convierte en la métrica de Minkowski.

Reemplazando (1.67) en (1.62):

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\alpha\beta} (-g_{\alpha\gamma} g_{\beta\zeta} \delta g^{\gamma\zeta}), \quad (1.68)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\beta\zeta} \delta g^{\beta\zeta}.$$

Reemplazando la anterior ecuación en (1.54) se obtiene

$$\int d^4\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{uv} \delta g^{uv} \right) R + \int d^4\mathbf{x} (\sqrt{-g}) R_{uv} (\delta g^{uv}) = 0, \quad (1.69)$$

$$\int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} \left(R_{uv} - R \frac{1}{2} g_{uv} \right) \delta g^{uv} = 0. \quad (1.70)$$

Debido a que δg^{uv} son completamente arbitrarias se debe cumplir que:

$$R_{uv} - R \frac{1}{2} g_{uv} = 0. \quad (1.71)$$

a está última expresión se conoce como **las ecuacion de Einstein en el vacío**. El siguiente paso para comprender las ecuaciones del campo gravitacional es trabajar con fuentes de materia, para esto se suma una acción asociada a la materia $A_M [g]$ a la acción de Einstein-Hilbert $A_{EH} [g]$, es decir, la acción para el campo gravitacional más general $A [g]$ está dada por:

$$A [g] = A_M [g] + K A_{EH} [g], \quad (1.72)$$

donde K es una constante que debe cumplir con el límite newtoniano, de está manera adquiere el valor $K = \frac{c^4}{16\pi G}$. Para obtener las ecuaciones del campo gravitacional se minimiza la acción, es decir:

$$\delta A [g] = \delta A_M [g] + K \delta A_{EH} [g] = 0. \quad (1.73)$$

La acción asociada a la materia está dada por:

$$\delta A_M [g] = \int d^4\mathbf{x} \delta [L_M(\phi, \nabla_\alpha \phi; g_{uv}) \sqrt{-g}], \quad (1.74)$$

el factor ϕ es el campo asociado a la materia y g_{uv} es el campo gravitacional asociado a este. La anterior ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\delta A_M [g] = \int d^4\mathbf{x} \left[\frac{\partial L_M}{\partial g^{uv}} - \frac{1}{2} g_{uv} L_M \right] \sqrt{-g} \delta g^{uv}, \quad (1.75)$$

se observa que la contribución del campo es igual a cero (el cálculo es trivial). En teoría de campos se conoce un tensor que está asociado a la energía llamado el *tensor de energía-momento* T_{uv} (POISSON, 2002) que se expresa como:

$$T_{uv} = -2 \frac{\partial L_M}{\partial g^{uv}} + g_{uv} L_M. \quad (1.76)$$

Por lo tanto, la ecuación (1.75) se puede escribir en términos de dicho tensor:

$$\delta A_M [g] = -\frac{1}{2} \int d^4x T_{uv} \sqrt{-g} \delta g^{uv}. \quad (1.77)$$

Así, se concluye que la ecuación (1.72) es:

$$\int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.78)$$

Debido a que $\delta g^{\mu\nu}$ son completamente arbitrarias se debe cumplir que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad , \quad (1.79)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad , \quad (1.80)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es llamado **el tensor de Einstein**, definido como $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$. La ecuación (1.34) se puede re-escribir de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha{}_\alpha \right), \quad (1.81)$$

Esta última expresión es conocida como las **ecuaciones de Einstein**, o las **ecuaciones de Einstein-Hilbert**. En resumen, el camino utilizado por David Hilbert para encontrar las ecuaciones del campo gravitacional fue proponer la acción:

$$A [g] = \int d^4\mathbf{x} \sqrt{-g} \left[\frac{c^4}{16\pi G} R + L_M \right]. \quad (1.82)$$

La pregunta que surgió en los científicos, al comprender detalladamente las ecuaciones del campo gravitacional, fue: ¿Cuál es la ecuación que describe al Universo en todo su conjunto?. Para buscar la respuesta, los científicos utilizaron el *principio cosmológico*: El universo es *isotrópo* y *homogéneo*. Al aplicar este principio a las ecuaciones de Einstein-Hilbert, descubrieron que el Universo se encontraba en expansión.

En este momento de la historia, muchos físicos, incluidos Einstein, pensaban que el Universo era estático. Entonces, para eliminar la contradicción entre sus *ideales filosóficos* y las predicciones teóricas, Albert Einstein *agregó un término a mano* en sus ecuaciones logrando un Universo estático. Años más tarde Edwin Hubble demostraría, a partir de mediciones experimentales, que el Universo se encuentra en expansión indicando el gran error cometido por Einstein.

Sin embargo, en la actualidad astrónomos intentan comprender la expansión del Universo a partir del factor agregado por Einstein, proponiendo una energía asociada al vacío conocida como **energía oscura**. De esta manera las ecuaciones de Einstein son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad , \quad (1.83)$$

donde Λ se conoce como la *constante cosmológica*. La anterior ecuación también puede deducirse de manera trivial a partir de la acción, de modo que (1.37) se reescribe como:

$$A[g] = \int d^4\mathbf{x}\sqrt{-g} \left[\frac{c^4}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + L_M \right]. \quad (1.84)$$

CAPÍTULO 2. LA SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

Al sumergirnos en la comprensión de la naturaleza nos encontramos con obstáculos que nublan nuestra visión, generando sensaciones de desconcierto y tristeza. Sin embargo, la sed de verdad es más grande que los desafíos, como dice POPPER (1991): “*Lo que caracteriza al hombre de ciencia no es la posesión del conocimiento o de verdades irrefutables, sino la búsqueda desinteresada e incesante de la verdad*”.

Lo anterior se ve reflejado en el camino de conocimiento del campo gravitacional. Cuando Einstein y Hilbert plantearon las bases matemáticas y físicas para el fenómeno gravitacional, su visión se nubló ya que no lograron encontrar una solución exacta a las ecuaciones de campo.

La luz, que despejaría su visión, provino de un íntegro científico, *Karl Schwarzschild*, al encontrar una solución para un objeto estático con simetría esférica. En el momento que Einstein recibió esta solución, emocionado y maravillado, le envió una carta a Schwarzschild donde escribía: “*no esperaba que se pudiera encontrar una solución exacta de manera tan sencilla*” (FERREIRA, 2014).

Las implicaciones de la solución de Schwarzschild, a la comprensión del Universo, son muy grandes, dio un entendimiento profundo de la relatividad general y abrió un nuevo mundo de investigación conocido, actualmente, como **agujeros negros**. No obstante, este gran científico nunca conoció este camino ya que murió como soldado en el frente oriental Alemán debido a una infección en una herida. Karl Schwarzschild será conocido por hacer brillar a la teoría de la relatividad general con más fuerza, como el científico que gestó conocimiento en medio de la guerra.

En este capítulo se estudia las implicaciones matemáticas y físicas de la solución de Schwarzschild.

2.1. La métrica de Schwarzschild

Para encontrar la métrica de Schwarzschild es necesario conocer los conceptos de campo isótropo y campo isótropo estático.

Campo isótropo: En este caso el intervalo infinitesimal espacio—temporal ds^2 depende de invariantes rotacionales (HOBSON, EFSTATHIOU Y LASENBY, 2006), es decir, debe ser un escalar bajo rotaciones tridimensionales. Los diferenciales espaciales invariantes que se pueden construir son:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Denotando la coordenada temporal como ct , ds^2 se expresa como:

$$ds^2 = -A(|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|, ct)c^2 dt^2 + B(|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|, ct)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})cdt + C(|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|, ct)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 + D(|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|, ct)(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

donde las funciones A, B, C, D , deben depender de las cantidades $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|$ y ct porque deben ser invariantes rotacionales.

Campo isótopo estático: En este caso se cumple que:

- (i) Todas las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son independientes de ct .
- (ii) El intervalo espacio–temporal ds^2 , además de su invarianza rotacional, es invariante bajo la transformación $dt \rightarrow -dt$.

Observe que (i) no implica (ii), en el caso que el espacio–tiempo satisfaga (i) pero no (ii), se llama **campo estacionario**.

Para comprender mejor las anteriores definiciones tomemos como ejemplo una *estrella sin rotación*: la inversión del tiempo no produce cambios en el espacio–tiempo, esto es un campo estático. En el caso de una *estrella con rotación*, esta inversión produce un cambio en el sentido de rotación lo que conlleva a un cambio en el espacio–tiempo, esto es un **campo estacionario**.

La métrica de Schwarzschild se caracteriza por ser un campo isótopo estático; para construir esta métrica se elegira un intervalo espacio–temporal lo más general posible, es decir, isótropa sin necesidad de recurrir a que sea estática para después imponer una condición que lleve a un campo isótopo estático.

Para comenzar con la demostración consideremos las coordenadas esféricas (r, θ, φ) , en este caso se tiene:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = r^2, \quad \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = r dr, \quad d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.3)$$

y la nueva forma que adquiere (2.2) es:

$$ds^2 = -A(r, ct)c^2 dt^2 + B(r, ct)rc dt dr + C(r, ct)r^2 dr^2 + D(r, ct)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4)$$

Absorbiendo los términos r en las funciones se redefine A, B, C, D , por ejemplo: $C(r, ct)r^2 \rightarrow C(r, ct)$, tal que ds^2 puede escribirse como:

$$ds^2 = -A(r, ct)c^2 dt^2 + B(r, ct)c dt dr + C(r, ct)dr^2 + D(r, ct)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.5)$$

Debido a que es más fácil trabajar con intervalos diagonalizados, diagonalizaremos ds^2 , definiendo una nueva coordenada como $\rho^2 = D(r, ct)$ y se absorbe todos los nuevos términos en nuevas funciones de t, ρ A, B, C, D . Por lo tanto, el intervalo ds^2 puede escribirse como:

$$ds^2 = -A(\rho, ct)c^2 dt^2 + B(\rho, ct)c dt d\rho + C(\rho, ct)d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.6)$$

Ahora consideremos la siguiente coordenada temporal \bar{ct} definida por:

$$\bar{ct} = ct + \Upsilon(\rho), \quad (2.7)$$

donde Υ es una función arbitraria de ρ (CHENG, 2010). Diferenciando y elevando al cuadrado se obtiene:

$$c^2 dt^2 = c^2 d\bar{t}^2 - \left(\frac{d\Upsilon}{d\rho} \right)^2 d\rho^2 - 2 \frac{d\Upsilon}{d\rho} d\rho dt. \quad (2.8)$$

Al reemplazar la anterior cantidad en (2.6) se obtiene el factor: $B(\rho, ct) + 2A(\rho, ct) \left(\frac{d\Upsilon}{d\rho} \right)$, que puede eliminarse escogiendo adecuadamente la función arbitraria Υ , tal que $\frac{d\Upsilon}{d\rho} = -\frac{B}{2A}$. Los otros factores pueden incluirse en nuevas funciones A,C, por lo tanto, el intervalo ds^2 , diagonalizado, es:

$$ds^2 = -A(\rho, ct)c^2 dt^2 + C(\rho, ct)d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.9)$$

donde se ha omitido la barra sobre la coordenada temporal. Al aplicar la condición para un campo isótropo estático se debe cumplir que las funciones A, B, C, D , deben ser independientes de la coordenada temporal. Así, el intervalo infinitesimal espaciotemporal para un **campo isótropo estático** es:

$$ds^2 = -A(\rho)c^2 dt^2 + C(\rho)d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.10)$$

Se observa, de manera inmediata, que el tensor métrico es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Para determinar las funciones $A(\rho)$ y $C(\rho)$ como también la relación de ρ y r , se calcula las componentes del tensor de Ricci para posteriormente aplicarlas a las ecuaciones de Einstein. Lo símbolos de Chistoffel se calculan a partir de la expresión:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.12)$$

Para $\mu = 1, \alpha = 1$ y $\beta = 1$ se tiene:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1\nu} (g_{\nu 1,1} + g_{1\nu,1} - g_{11,\nu}), \quad (2.13)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2C} (C' + C' - C'), \quad (2.14)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{C'}{2C}, \quad (2.15)$$

donde la prima, $'$, significa *derivada respecto a ρ* . Análogamente los otros simbolos de Chistoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= \frac{A'}{2C}, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{\rho}{C}, \\ \Gamma^0_{01} &= \frac{A'}{2A}, & \Gamma^3_{23} &= ctg\theta, \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{\rho}, & \Gamma^1_{33} &= -\frac{\rho \sin^2\theta}{B}, \\ \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{\rho}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Con estos valores se puede calcular las componentes del tensor de Ricci, dadas por la expresión:

$$R_{\beta\mu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha,\mu} - \Gamma^\pi_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\pi\mu} + \Gamma^\pi_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\pi\alpha}. \quad (2.17)$$

Para $\beta, \mu = 0$ se tiene:

$$R_{00} = \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} - \Gamma^\pi_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{\pi 0} + \Gamma^\pi_{00}\Gamma^\alpha_{\pi\alpha}, \quad (2.18)$$

$$R_{00} = \Gamma^1_{00,1} - \Gamma^\pi_{00}\Gamma^0_{\pi 0} - \Gamma^\pi_{01}\Gamma^1_{\pi 0} + \Gamma^1_{00}\Gamma^\alpha_{1\alpha}, \quad (2.19)$$

$$R_{00} = \Gamma^1_{00,1} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}), \quad (2.20)$$

$$R_{00} = -\frac{A'C'}{2C^2} + \frac{A''}{2C} - \frac{(A')^2}{2AC} + \frac{A'}{2C}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} + \frac{1}{\rho}\right), \quad (2.21)$$

$$R_{00} = \frac{1}{4\rho AC^2}(2\rho ACA'' - \rho CA'^2 - \rho AA'C' + 4ACA'). \quad (2.22)$$

De manera similar, las otras componentes del tensor de Ricci, diferentes de cero, son:

$$R_{11} = -\frac{1}{4\rho A^2 C}(2\rho ACA'' - \rho CA'^2 - \rho AA'C' - 4A^2 C'), \quad (2.23)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2AC^2}(-\rho CA' + \rho AC' + 2AC^2 - 2AC), \quad (2.24)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}. \quad (2.25)$$

Para utilizar las ecuaciones de campo de Einstein-Hilbert se considera una distribución de masa con ausencia de cargas o corrientes eléctricas de modo que **fuera** del objeto, el tensor de energía-momento es $T_{\beta\mu} = 0$ (**Dentro** del objeto $T_{\beta\mu} \neq 0$ (SHARAN, 2009)), entonces, las ecuaciones de campo gravitacional *fuera* de la distribución de masa se expresan como:

$$R_{\beta\mu} = 0. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.24) se pueden escribir como:

$$2\rho ACA'' - \rho CA'^2 - \rho AA'C' = -4ACA', \quad (2.27)$$

$$2\rho ACA'' - \rho CA'^2 - \rho AA'C' = 4A^2 C', \quad (2.28)$$

$$-\rho CA' + \rho AC' + 2AC^2 - 2AC = 0. \quad (2.29)$$

De las ecuaciones (2.27) y (2.28) se concluye:

$$A(\rho)C(\rho) = K_1, \quad (2.30)$$

donde K_1 es una constante. Así:

$$C(\rho) = \frac{K_1}{A(\rho)}. \quad (2.31)$$

Reemplazando (2.31) en (2.29) se obtiene:

$$\frac{d}{d\rho}(\rho A) = K_1. \quad (2.32)$$

La solución a esta ecuación es:

$$A = K_1 \left(1 + \frac{K_2}{\rho} \right), \quad (2.33)$$

donde K_2 es una constante. Para determinar las constantes K_1 y K_2 se utilizara una condición física conocida como *el límite newtoniano*; en el cual la teoría de la relatividad debe ser equivalente al formalismo Newtoniano de la gravitación, caracterizado por ser un campo débil (campo gravitacional *aproximadamente* plano y velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz c). En este límite la componente g_{00} del campo gravitacional se comporta como:

$$g_{00} \approx -1 - \frac{2\Phi}{c^2}, \quad (2.34)$$

donde Φ es el potencial gravitacional newtoniano (ver ANEXO A). Al comparar las ecuaciones (2.16) y (2.17) se concluye que $K_1 = 1$, $K_2 = -\frac{2GM}{c^2}$ y $\rho = r$. Teniendo como base lo anterior se establece que el intervalo infinitesimal espaciotemporal para un **campo isótropo estático** es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.35)$$

y, la métrica (2.11) es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2GM}{c^2 r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$ se obtiene el tensor métrico para un espacio-tiempo plano, por esta razón la solución de Schwarzschild es *asintóticamente plana* (LARRAÑA, 2008) además, como es de esperarse, para $M = 0$ se obtiene un espacio-tiempo plano.

A partir de este momento nos centramos en el problema cuando toda la distribución de masa está ubicada en un punto, de modo que la anterior solución es válida para cualquier punto en el exterior, excepto para $r = 0$.

La métrica de Schwarzschild se puede reescribir definiendo el **radio de Schwarzschild S** como:

$$S := \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.37)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{S}{r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.38)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{S}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{S}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

2.2. Teorema de Birkhoff

En el caso que no impongamos la condición que nuestra métrica sea estática o estacionaria pero si isotropa, entonces la métrica más general está dada por (2.9):

$$ds^2 = -A(\rho, ct)c^2 dt^2 + C(\rho, ct)d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.40)$$

Se puede demostrar, realizando el mismo proceso anterior, que el espacio—tiempo de una métrica isotropa para las ecuaciones de Einstein-Hilbert en el vacío, corresponde a la geometría de Schwarzschild, de manera más formal: **cualquier solución con simétrica esférica, en el vacío, es estática.**

Este teorema tiene implicaciones muy importantes porque, como veremos en el capítulo siguiente, ningún objeto simétrico puede producir ondas gravitacionales.

2.3. Singularidades

Muchas teorías en física pueden presentar **singularidades**, es decir, valores infinitos para observables que se esperan tengan un valor finito, por ejemplo: el campo eléctrico generado por una carga puntual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, $\sim (1/r^2)$, al evaluar el campo eléctrico en $r = 0$ se obtiene una *singularidad*, o un *infinito*, por lo tanto, la teoría asociada al campo eléctrico de una *carga puntual*, no puede *predecir* lo que ocurre en el origen de coordenadas, existe una **singularidad** en $r = 0$.

Esta singularidad expresa que nuestro modelo para calcular el campo eléctrico de una carga puntual, **cuando nos acercamos a la carga**, no es el más adecuado porque estamos ignorando las propiedades de la misma carga que influyen en nuestra teoría, entonces debemos encontrar un modelo corregido, cambiar nuestra teoría del campo eléctrico.

Bajo lo anterior, estamos interesados en identificar las *singularidades que existen en la solución de Schwarzschild*. Al evaluar $r = 0$ en el tensor métrico se obtiene dos *infinitos* en g_{00} y g_{11} , si evaluamos en $r = S$ se obtiene un *infinito* en g_{11} , así se concluye que existen dos singularidades; $r = 0$ y $r = S$.

No obstante, estas singularidades difieren mucho con respecto a la que ocurre en el campo eléctrico de una carga puntual, porque en relatividad general juega un papel *importante* la elección de coordenadas. Para ilustrar mejor lo anterior, evaluemos el tensor métrico en, $\theta = 0$, con lo cual se obtiene un infinito en g^{44} , es decir, existe una “singularidad” en $\theta = 0$, *pero si realizamos un rotación en la parte angular θ dicha singularidad desaparece.*

Este tipo de singularidades son conocidas como *singularidades de coordenadas* o **pseudosingularidades** ya que desaparecen al transformar el sistema de coordenadas.

Ahora surge la pregunta ¿Al evaluar el tensor métrico en $r = 0$ y $r = S$ los infinitos son singularidades o pseudosingularidades?. El punto $r = S$ se asocia a una pseudosingularidad porque existen varios sistemas coordenados que la eliminan, entre ellas se encuentran las coordenadas de Eddington-Finkelstein, el de Painlevé-Gullstrand y el de Kruskal-Szekeres, en la sección (2.4) analizaremos las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

En el caso del punto $r = 0$, tenemos en cuenta que para identificar una singularidad física, es decir, propia de la teoría, sólo es necesario encontrar un invariante⁴ que sea singular en dicho punto. En este caso utilizaremos el **invariante de curvatura Kretschmann**, definido como el “cuadrado” del tensor de Riemann, $K = R_{\mu\nu\rho\gamma}R^{\mu\nu\rho\gamma}$ que para la solución de Schwarzschild, K adquiere el valor de:

$$K = R_{\mu\nu\rho\gamma}R^{\mu\nu\rho\gamma} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}. \quad (2.41)$$

Se observa, de manera clara, que para $r = 0$ se obtiene una curvatura espacio-temporal infinita y por ello es una singularidad física. Por lo anterior, la teoría de la relatividad general no puede predecir lo que ocurre en $r = 0$.

En la actualidad se busca una teoría llamada *Gravedad cuántica* que una los conceptos de la relatividad general y la *mecánica cuántica*, la cual representa la teoría física de la *estructura de la materia*, para predecir lo que ocurre en la singularidad $r = 0$. En esta parte del trabajo estamos interesados en identificar las singularidades que existen en la solución de Schwarzschild, por lo tanto dejaremos a un lado la teoría de la gravedad cuántica.

En definitiva, en la solución de Schwarzschild, con las *coordenadas* (ct, r, θ, φ) , conocidas como las **coordenadas de Schwarzschild**, existe una pseudosingularidad y una singularidad.

2.4. Significado físico del radio de Schwarzschild S

Existe una distinción importante, entre el tiempo y el espacio; concepto dado en la relatividad especial que nos dice que un objeto puede moverse libremente en el espacio, pero en el tiempo sólo hacia el futuro. Esto es algo claro que es necesario tenerlo en cuenta para comprender lo que ocurre en el radio Schwarzschild S . Para analizar el radio de Schwarzschild S consideremos el movimiento radial de un punto, para ello $d\theta = 0 = d\varphi$, con lo cual ds^2 es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.42)$$

Para una partícula masiva se debe cumplir que $ds^2 < 0$,

$$- \left(1 - \frac{S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-1} dr^2 < 0. \quad (2.43)$$

⁴Cantidad matemática cuyo valor es independiente del sistema de coordenadas

Analicemos el caso cuando $r > S$, que delimita la región del espacio–tiempo comúnmente llamada **la zona exterior** y para la cual el factor $(1 - \frac{S}{r})$ es positivo y por lo tanto (2.43) se puede escribir como:

$$c^2 dt^2 > \left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-2} dr^2. \quad (2.44)$$

Esta desigualdad se cumple sólo si $dt \neq 0$. Esto expresa que el movimiento requiere un cambio en la coordenada t , por esta razón t se llama una **coordenada temporaloide**, además la desigualdad (2.44) no impone ninguna condición sobre la coordenada dr que puede tomar el valor mayor, menor o igual a cero, es por esto que se le llama coordenada **espacialoide**.

Ahora realicemos el análisis para $r < S$, llamada **zona interior**, donde $(1 - \frac{S}{r})$ es negativa y la desigualdad (2.43) queda como:

$$dr^2 > \left(1 - \frac{S}{r}\right)^2 c^2 dt^2. \quad (2.45)$$

Esta desigualdad se cumple sólo si $dr \neq 0$. Esto expresa que el movimiento se da por un cambio en la coordenada r , por esta razón r se llama una **coordenada temporaloide**. Además la desigualdad (2.45) no impone ninguna condición sobre la coordenada dt que puede tomar el valor mayor, menor o igual a cero, es por esto que se le llama coordenada **espacialoide**.

En resumen, al pasar de la parte exterior a la parte interior las coordenadas t y r se intercambian: La coordenada espacialoide se vuelve temporaloide y la coordenada temporaloide se vuelve espacialoide, en palabras sencillas: *el “espacio” se convierte en “tiempo” y el “tiempo” en “espacio”*.

Con el análisis anterior se puede entender cual es el significado físico en $r = S$. Un objeto que se encuentre en $r < S$ ya no puede volver a salir porque su coordenada espacialoide se convirtió en una coordenada temporaloide o sea avanza hacia adentro con la misma inevitabilidad que un objeto en $r > S$ avanza en el tiempo, dicho de otra manera, *su salida ya se encuentra en el pasado*, su *destino* es la singularidad en $r = 0$. Lo anterior se puede observar de manera clara viendo los conos de luz en la zona exterior e interior (ver figuras 2.1 y 2.2).

En conclusión, el radio de Schwarzschild S actúa como una *membrana unidireccional* llamada, comúnmente, **horizonte de eventos**, ningún objeto que pase este horizonte puede salir, ni siquiera la luz.

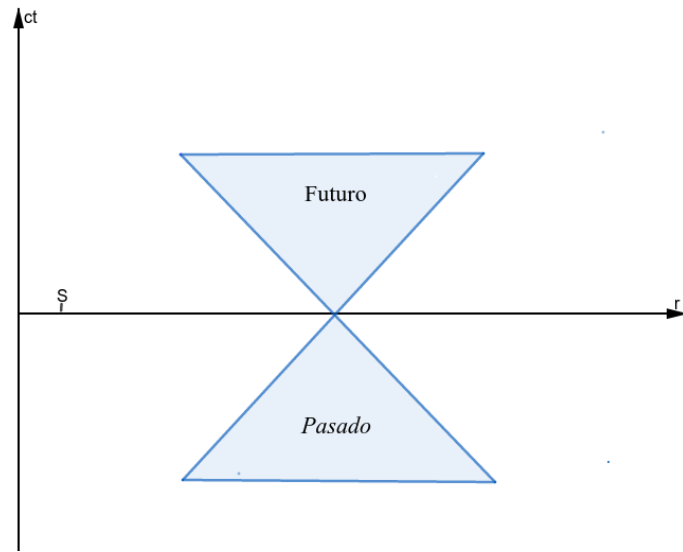


Figura 1: Cono de luz fuera del radio de Schwarzschild S , zona exterior. Fuente la presente investigación

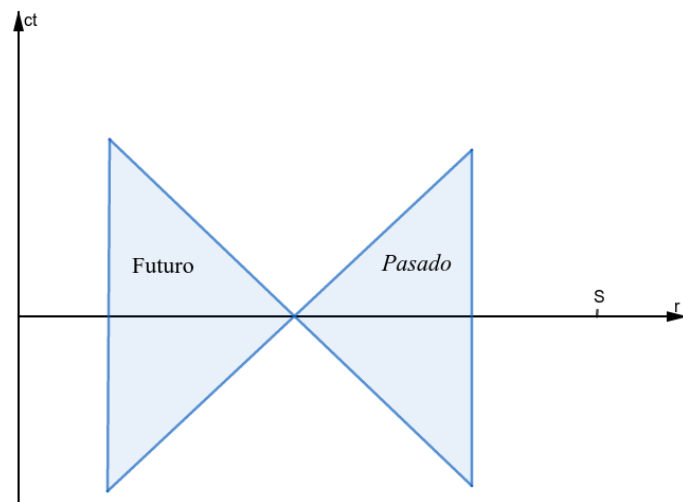


Figura 2: Cono de luz dentro del radio de Schwarzschild S , zona interior. Fuente la presente investigación

2.5. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Como se menciono anteriormente una elección de coordenadas que elimina la pseudosingularidad en $r = S$ son *las coordenadas de Kruskal-Szekeres* que para la región $r < S$ se definen como:

$$T = e^{r/2S} \sqrt{1 - \frac{r}{S}} \cosh\left(\frac{ct}{2s}\right), \quad (2.46)$$

$$X = e^{r/2S} \sqrt{1 - \frac{r}{S}} \sinh\left(\frac{ct}{2s}\right), \quad (2.47)$$

y en la región $r > S$ se definen como:

$$T = e^{r/2S} \sqrt{\frac{r}{S} - 1} \sinh\left(\frac{ct}{2s}\right), \quad (2.48)$$

$$X = e^{r/2S} \sqrt{\frac{r}{S} - 1} \cosh\left(\frac{ct}{2s}\right). \quad (2.49)$$

De las anteriores ecuaciones se obtienen las transformadas inversas:

$$ct = 2S \operatorname{arctanh}\left(\frac{X}{T}\right) \quad \text{para } r < S, \quad (2.50)$$

$$ct = 2S \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{X}\right) \quad \text{para } r > S, \quad (2.51)$$

$$\left(1 - \frac{r}{S}\right) e^{r/S} = T^2 - X^2 \quad \text{para todo } r. \quad (2.52)$$

Tomando diferenciales a las ecuaciones (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49) se obtienen las siguientes expresiones, válidas para todo r :

$$dT = \frac{c}{2S} X dt + \frac{1}{2S} \left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-1} T dr, \quad (2.53)$$

$$dX = \frac{c}{2S} T dt + \frac{1}{2S} \left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-1} X dr. \quad (2.54)$$

Operando estas ecuaciones se puede llegar, de manera trivial, a la siguiente ecuación:

$$dT^2 - dX^2 = \frac{1}{4S^2} \frac{X^2 - T^2}{1 - S/r} [c^2(1 - S/r)dt^2 - (1 - S/r)^{-1}dr^2]. \quad (2.55)$$

En términos del intervalo ds^2 :

$$dT^2 - dX^2 = \frac{1}{4S^2} \frac{X^2 - T^2}{1 - S/r} [-ds^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (2.56)$$

$$ds^2 = \frac{4S^2(1 - S/r)}{X^2 - T^2} (dX^2 - dT^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.57)$$

Utilizando (2.52) en la anterior expresión se concluye que:

$$ds^2 = 4S^3 \frac{e^{-r/S}}{r} (dX^2 - dT^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.58)$$

donde ya no existe la singularidad en $r = S$. El paso siguiente es interpretar el significado de las coordenadas T y X para luego realizar el diagrama, espacio-tiempo, de las coordenadas de Kruskal-Szekeres, ver subsección 3.5.2.

2.5.1. Interpretación de las coordenadas T y X

Para una partícula masiva el intervalo espacio–temporal cumple con la condición $ds^2 < 0$, si la partícula se mueve radialmente ($d\theta = 0 = d\varphi$) se obtiene que:

$$4S^3 \frac{e^{-r/S}}{r} (dX^2 - dT^2) < 0, \quad (2.59)$$

de está manera se concluye que $dT^2 > dX^2$. Está desigualdad se cumple sólo si $dT \neq 0$, en consecuencia, el movimiento de la partícula viene dado por un cambio en la coordenada T , por está razón T es la coordenada *temporaloide*, además la anterior desigualdad no impone ninguna condición sobre la coordenada dX que puede tomar un valor mayor, menor o igual a cero, como resultado X es la coordenada *espacialoide*.

Ahora analicemos el movimiento *radial* para un pulso de luz, para eso hacemos $ds^2 = 0$ entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dX}{dT} = \pm 1. \quad (2.60)$$

La anterior ecuación expresa que los conos de luz en las coordenadas de Kruskal-Szekeres tienen una apertura de 90° . En conclusión: las coordenadas T y X se interpretan como siendo coordenadas *temporaloide* y *espacialoide*, respectivamente, y los conos de luz poseen una inclinación de 45° , así como en el espacio–tiempo de Minkowski.

2.5.2. Espacio–tiempo en las coordenadas Kruskal-Szekeres

Para realizar el diagrama, espacio–tiempo, de las coordenadas de Kruskal-Szekeres suprimimos las coordenadas angulares (θ, φ) de modo que se obtienen los ejes (T, X), como se muestra en la figura 2.3.

Si evaluamos la ecuación (2.50) en el límite cuando $t \rightarrow \infty$ se obtiene una recta $T = X$ (se obtiene el mismo valor para la ecuación (2.51)) y en el límite cuando $t \rightarrow -\infty$ se obtiene una recta $T = -X$, de está manera nuestra gráfica se divide en cuatro regiones que las denotaremos como: región I para la división del lado derecho, región II para la división superior, región III para la división izquierda y región IV para la división inferior.

Al evaluar la ecuación (2.52), que es válida para todo r , en $r = 0$ se obtiene la hipérbole $T = \pm\sqrt{X^2 + 1}$, gráfícada de color rojo en la figura 2.3. Al evaluar la ecuación (2.52) en el radio de Schwarzschild $r = S$, se obtienen rectas $T = \pm X$ de aquí se concluye que las regiones I y III corresponden a $r > S$ y las regiones II y IV corresponden a $r < S$. Al evaluar la ecuación (2.52) para valores de r constante se obtienen hipérbolas, gráfíçadas con color morado en la figura 2.3.

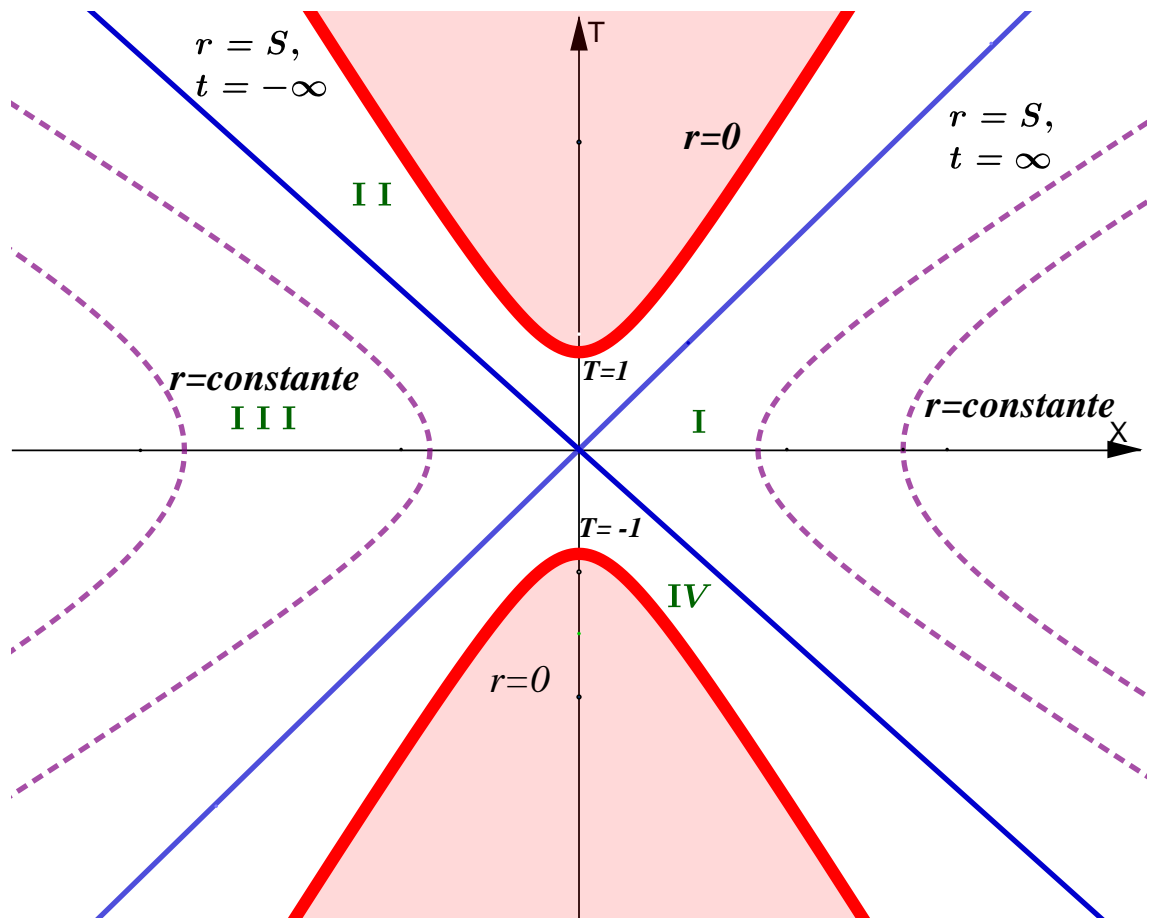


Figura 3: Espacio-tiempo en las coordenadas Kruskal-Szekeres. Fuente la presente investigación

Al dibujar los conos de luz en la región II, tenga en cuenta que las trayectorias de las partículas quedan contenidas dentro del cono luz, se observa que *todas* las trayectorias siempre apuntan hacia la singularidad, es decir, $r = 0$. Las trayectorias de las partículas avanzan de modo que la coordenada r disminuye, en otras palabras, ninguna partícula en la región II puede evitar llegar a la singularidad, esto se conoce como un *agujero negro*.

Al dibujar los conos de luz en la región IV se observa que todas las trayectorias avanzan hacia valores crecientes de r , es decir, se *alejan* de la singularidad, por esta razón se le asigna el nombre de *agujero blanco*, ya que posee un comportamiento opuesto al del agujero negro. En el momento de realizar este trabajo se entiende a un agujero blanco como una pura abstracción matemática, es decir, no existen en el Universo.

2.6. Diagramas de Penrose-Carter

Con relación al espacio-tiempo algunos sistemas coordenados como por ejemplo: la solución de Schwarzschild y el espacio-tiempo de Minkowski, comparten un inconveniente: no se observa toda la estructura del espacio-tiempo, es decir, no se observa el *infinito*. La solución a este problema es utilizar los **diagramas de Penrose-Carter** que representan el infinito como un punto, utilizando una **transformación conforme**, es decir, manteniendo invariante las geodésicas de luz.

Para tener una idea clara de los diagramas de Penrose-Carter se aplicara su procedimiento al espacio-tiempo de Minkowski y luego se empleara este procedimiento al espaciotiempo de Kruskal-Szekeres.

2.6.1. Diagrama Penrose-Carter para el espaciotiempo Minkowski

En el espaciotiempo de Minkowski no se puede ver toda la estructura del mismo, no se observa donde terminan las geodésicas (NORTON, 2001-2018), en especial, para las geodésicas nulas (ver figura 2.4). Para *compactificar* este espaciotiempo primero es necesario encontrar una transformación de modo que no afecte las geodésicas nulas, esta transformación surge de manera natural como veremos a continuación.

El intervalo ds^2 para el espaciotiempo de Minkowski en coordenadas esféricas, sin tener en cuenta la parte angular, es:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2. \quad (2.61)$$

Para pulsos de luz $ds^2 = 0$:

$$-c^2 dt^2 + dr^2 = 0, \quad (2.62)$$

$$(cdt + dr)(-cdt + dr) = 0. \quad (2.63)$$

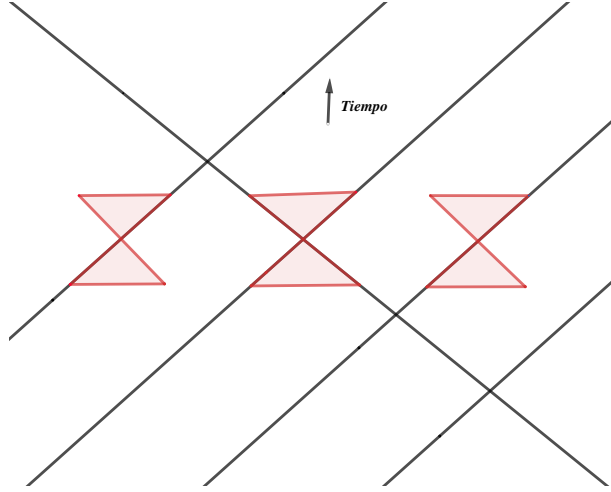


Figura 4: Espacio–tiempo de Minkowski para geodésicas nulas. Fuente la presente investigación

La anterior ecuación se puede ver como una transformación de dos variables u, w :

$$dudw = (cdt + dr)(-cdt + dr) = 0, \quad (2.64)$$

donde se concluye que:

$$u = ct + r, \quad (2.65)$$

$$w = -ct + r, \quad (2.66)$$

las variables u, w mantienen **invariantes los conos de luz**, es decir, los conos de luz mantienen una apertura de 90° . El intervalo ds^2 en términos de estas variables es:

$$ds^2 = dudw. \quad (2.67)$$

El siguiente paso es encontrar una función que *convierta* el infinito en un punto. En este caso se elegirá la función tangente hiperbólica $y = \tanh(x)$, por su comportamiento asintótico en el límite $x \rightarrow \pm\infty$. En términos de las variables u, w es:

$$Y^+ = \tanh(u), \quad (2.68)$$

$$Y^- = \tanh(w), \quad (2.69)$$

Usando (2.65) y (2.66) en las anteriores ecuaciones se obtiene:

$$Y^+ = \tanh(ct + r), \quad (2.70)$$

$$Y^- = \tanh(-ct + r). \quad (2.71)$$

Consideremos el plano (ct, r) con rango de las variables $0 < r < \infty$ y $-\infty < t < \infty$, los valores de t pueden ser negativos ya que se está evaluando los conos de luz en el pasado, y a cada punto se le asigna un punto de la función Y^\pm . Para realizar el diagrama de Penrose-Carter se sigue los siguientes pasos:

- Cuando $r = 0$ y $t \rightarrow \infty$ se tiene $Y^+ = 1$. Para $r = 0$ y $t \rightarrow -\infty$ se tiene $Y^+ = -1$ y para $t = 0$ y $r \rightarrow \infty$ se obtiene $Y^+ = 1 = Y^-$. Así se obtienen tres puntos designados como i^+ , i^- y i^0 respectivamente.
- Cuando $r = 1$ y $t \rightarrow \infty$ (matemáticamente igual al punto $r = 0$ y $t \rightarrow \infty$) se tiene $Y^+ = 1$ y para $r = 1$ y $t \rightarrow -\infty$ se tiene $Y^- = -1$.
- Cuando $t = \pm 1$ y $r \rightarrow \infty$ se tiene $Y^+ = 1 = Y^-$.

Al realizar los anteriores pasos se obtiene el siguiente diagrama:

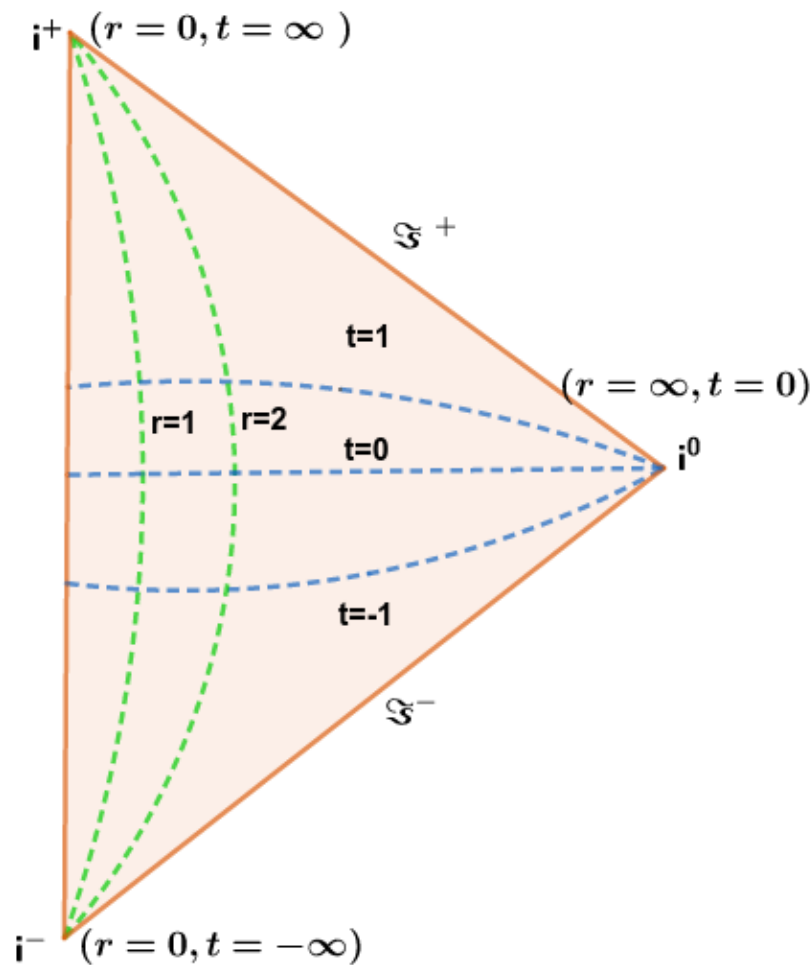


Figura 5: Diagrama de Penrose para el espaciotiempo de Minkowski. Fuente la presente investigación

El punto i^+ se llama **futuro infinito temporal** ya que contienen los puntos futuros finales de todas las geodésicas temporales. El punto i^- se llama **pasado infinito temporal** ya que contienen los puntos pasados finales de todas las geodésicas temporales. El punto i^0 se llama **infinito espacial** ya que contienen los puntos finales de todas las geodésicas espaciales.

La recta \mathfrak{S}^+ se llama **futuro infinito nulo** ya que contiene los puntos finales futuros de todas las geodésicas nulas salientes (no olvidar que las variables u, w mantienen invariantes los conos de luz). La recta \mathfrak{S}^- se llama **pasado infinito nulo** ya que contiene los puntos finales pasados de todas las geodésicas nulas entrantes, ver figura 2.6.

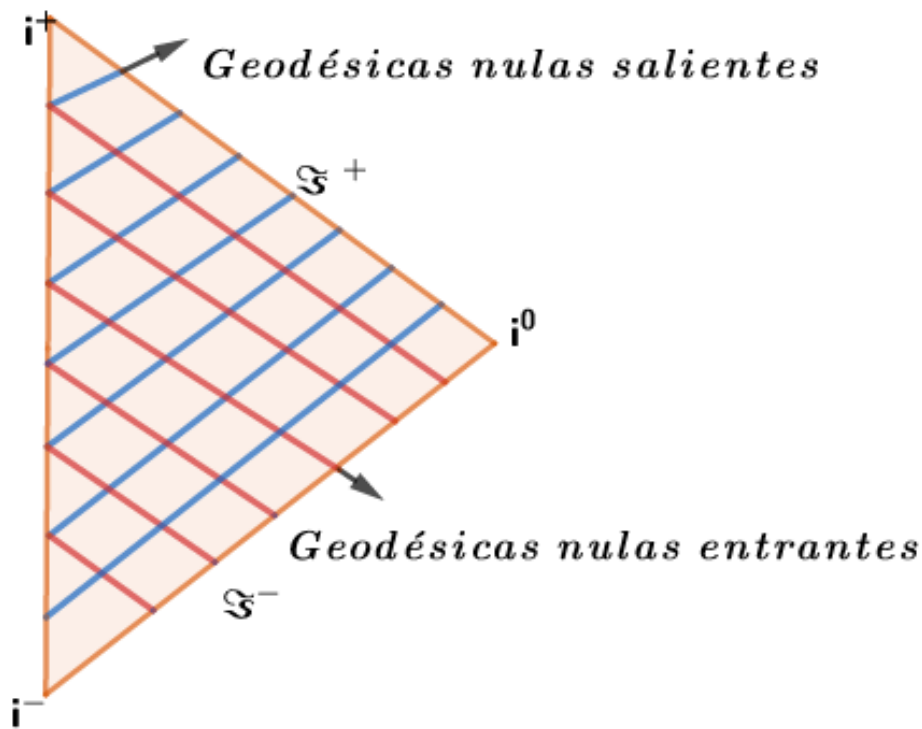


Figura 6: Geodésicas nulas salientes y geodésicas nulas entrantes. Fuente la presente investigación

En una primera vista no se ha obtenido nada de los digramas de Penrose-Carter, parece una nueva forma de ver el espacio-tiempo de Minkowski, sin embargo, como veremos a continuación, nos ayuda a comprender lo que ocurre en el colapso de una estrella. El diagrama de Penrose-Carter para una estrella colapsando se muestra en la figura 3.7.

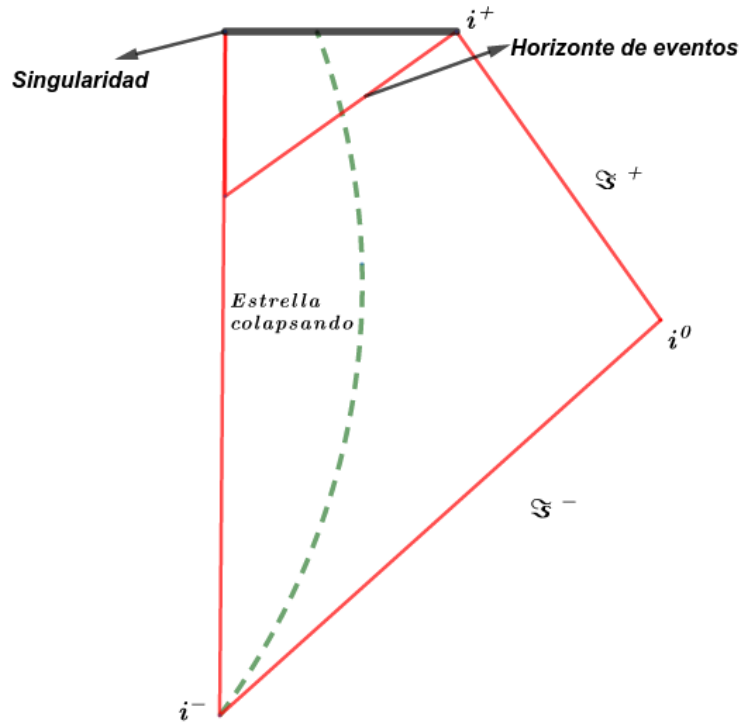


Figura 7: Diagrama de Penrose-Carte para una estrella colapsando. Fuente la presente investigación

El diagrama se lee desde la parte inferior. La línea de mundo empieza desde el pasado infinito temporal i^- , un agujero negro se genera cuando la estrella colapsa hasta generar un horizonte de eventos así toda la materia de la estrella termina en la singularidad.

Para un planeta la línea de mundo se origina en i^- y termina en el futuro infinito temporal i^+ . Si un nave viaja desde el planeta y pasa el horizonte de eventos *nunca* va poder salir, es la zona de **no retorno**. Antes del horizonte de eventos todavía puede encontrar líneas de mundo que terminen en i^+ evitando la zona de no retorno.

Si consideramos el caso cuando la nave envíe pulsos de luz al planeta se observa, claramente, que antes del horizonte de eventos se encuentran en *contacto*. Cuando la nave pasa a la zona de no retorno ninguna señal llega al planeta, los pulsos de luz terminan en la singularidad.

2.6.2. Diagrama Penrose-Carter para el espacio–tiempo Kruskal-Szekeres

El intervalo ds^2 para el espacio–tiempo de Kruskal-Szekeres, sin tener en cuenta la parte angular, es:

$$ds^2 = 4S^3 \frac{e^{-r/S}}{r} (dX^2 - dT^2). \quad (2.72)$$

Para pulsos de luz $ds^2 = 0$:

$$dX^2 - dT^2 = (dX - dT)(dX + dT) = 0. \quad (2.73)$$

La anterior ecuación se puede ver como una transformación de dos variables ξ, Λ :

$$\xi = X + T, \quad (2.74)$$

$$\Lambda = -X + T, \quad (2.75)$$

las variables ξ, Λ mantienen **invariantes los conos de luz**, es decir, los conos de luz mantienen una apertura de 90° . El intervalo ds^2 en términos de estas variables es:

$$ds^2 = -4S^3 \frac{e^{-r/S}}{r} d\xi d\Lambda. \quad (2.76)$$

El siguiente paso es encontrar una función que convierta el infinito en un punto. En este caso se elegirá la función tangente hiperbólica $y = \arctan(x)$, por su comportamiento asintótico en el límite $x \rightarrow \pm\infty$. En términos de las variables ξ, Λ es:

$$\gamma = \arctan(\xi), \quad (2.77)$$

$$\zeta = \arctan(\Lambda). \quad (2.78)$$

Usando (2.77) y (2.78) en las anteriores ecuaciones se obtiene:

$$\gamma = \arctan(X + T), \quad (2.79)$$

$$\zeta = \arctan(-X + T). \quad (2.80)$$

En la sección 2.5.2 se obtuvo que la singularidad $r = 0$, satisface la ecuación de una hipérbola, dada por la expresión:

$$T^2 - X^2 = 1. \quad (2.81)$$

Al utilizar las ecuaciones (2.79) y (2.80) en la anterior ecuación se obtiene que:

$$\tan \gamma \tan \zeta = 1, \quad (2.82)$$

$$\sin \gamma \sin \zeta - \cos \gamma \cos \zeta = 0, \quad (2.83)$$

$$\cos(\gamma + \zeta) = 0, \quad (2.84)$$

$$\gamma + \zeta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (2.85)$$

entonces, la singularidad $r = 0$, en las coordenadas (γ, ζ) se expresa a partir de dos rectas: $\gamma = -\zeta - \frac{\pi}{2}$ y $\gamma = -\zeta + \frac{\pi}{2}$. El horizonte de eventos $r = S$, caracterizado por las rectas: $T = -X$ y $T = X$, en las coordenadas (γ, ζ) se expresa como: $\gamma = 0$ y $\zeta = 0$, respectivamente. Al observar las ecuaciones (2.79) y (2.80) se observa que el espacio-tiempo se encuentra limitado por las rectas constantes: $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ y $\zeta = \pm \frac{\pi}{2}$. Al realizar el anterior proceso se obtiene el diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo de Kruskal-Szekeres (ver figura 2.8).

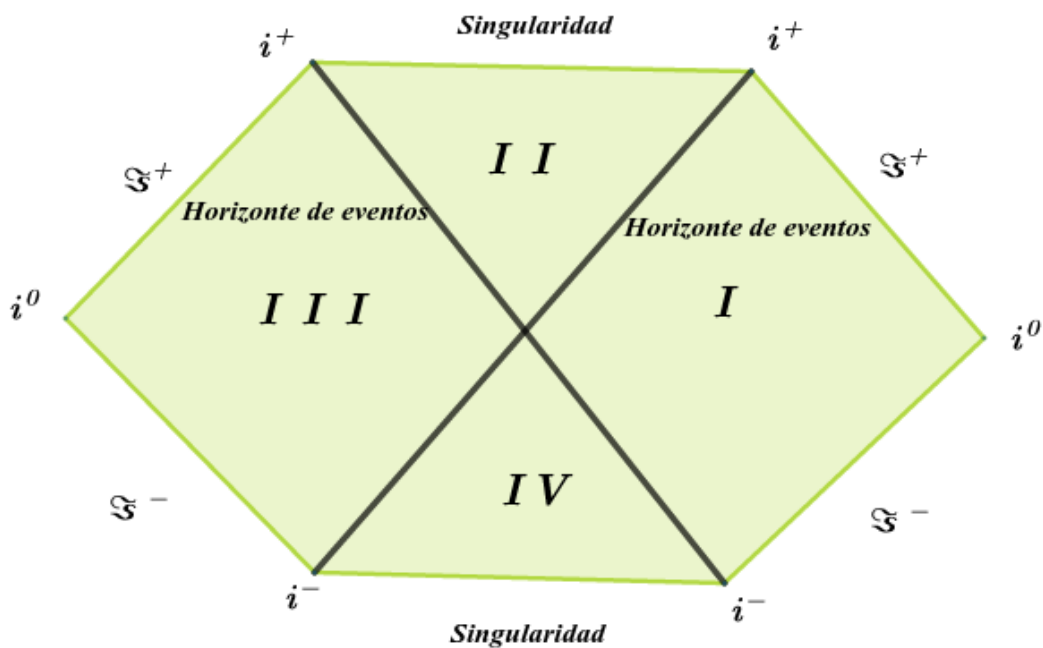


Figura 8: Diagrama de Penrose-Carter para el espaciotiempo de Kruskal-Szekeres. Fuente la presente investigación

De manera análoga a lo visto en el diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo de Minkowski se identifica: a i^+ como **el futuro infinito temporal** ya que contienen los puntos futuros finales de todas las geodésicas temporales. El punto i^- se llama **pasado infinito temporal** ya que contienen los puntos pasados finales de todas las geodésicas temporales. El punto i^0 se llama **infinito espacial** ya que contienen los puntos finales de todas las geodésicas espaciales.

La recta \mathfrak{S}^+ se llama **futuro infinito nulo** ya que contiene los puntos finales futuros de todas las geodésicas nulas salientes. La recta \mathfrak{S}^- se llama **pasado infinito nulo** ya que contiene los puntos finales pasados de todas las geodésicas nulas entrantes.

Debido a que los conos de luz mantienen una apertura de 90° todas las trayectorias en la región II se dirigen hacia la singularidad; una partícula que no pase el horizonte de eventos aún puede encontrar trayectorias que apunten hacia i^+ , en contraste con una partícula que *pase* el horizonte de eventos, todas las trayectorias se dirigen hacia la singularidad: *la singularidad es inevitable*.

CAPÍTULO 3. ONDAS GRAVITACIONALES

El camino de conocimiento de la naturaleza surge en la necesidad del Ser humano en comprender la realidad, en una búsqueda de su propio significado. En este ir y venir fue **construyendo la realidad** a partir del lenguaje inscripto en la naturaleza: *las matemáticas*, como un lector que diálogos con la autora a través del texto para construir el significado de este.

El descubrimiento de un nuevo lenguaje matemático de la naturaleza lleva consigo una nueva comprensión de la realidad, como puede verse reflejado en la teoría de la relatividad general. Cuando se comprendieron las ecuaciones de Einstein–Hilbert científicos comenzaron a predecir y desvelar los secretos de la naturaleza que antes permanecían ocultos ante la *mirada* del Ser humano. Uno de suma importancia fue predicho por el *gran* Albert Einstein en 1916: existen perturbaciones que se propagan a la velocidad de la luz por el espacio–tiempo, llamadas **ondas gravitacionales**. Esta predicción fue comprobada en 2015 por LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory).

Comprender la fundamentación matemática de las ondas gravitacionales es de suma importancia ya que desvelan una nueva forma de comprender la naturaleza, nos invitan a explorar regiones desconocidas del *Universo*.

El presente capítulo es una invitación a re-descubrir el lenguaje matemático de las ondas gravitacionales, una invitación a sumergirnos en la mente de Einstein cuyas ideas aun siguen vivas en nuestro alrededor.

Se comenzara linealizando las ecuaciones del campo gravitacional, es decir, encontraremos cuál es la forma matemática del campo gravitacional en un espacio–tiempo *aproximadamente* plano, aquí aparece de forma natural una ecuación *semajante* a una ecuación de onda.

Posteriormente, se analizara la energía y generación de ondas gravitacionales y se finalizara con algunos detalles físico–matemáticos del experimento LIGO.

3.1. Límite de campo débil

El límite de campo débil se define como un espacio–tiempo aproximadamente plano, corresponde a masas (energía) pequeñas que generan deformaciones mínimas en el espacio–tiempo. Comencemos definiendo el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para un espacio–tiempo aproximadamente plano, tal que:

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{donde} \quad h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} \quad \text{y} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.1)$$

y las derivadas parciales de $h_{\mu\nu}$ son pequeñas. La matriz $h_{\mu\nu}$ se llama la **métrica de perturbación**. Para encontrar la métrica inversa definamos $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}$, donde $|b^{\mu\nu}| \ll 1$. El paso siguiente es encontrar $b^{\mu\nu}$, y para eso utilizamos la definición de la métrica inversa

$g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$, obteniendo:

$$(\eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu})(\eta_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}) = \delta^\mu_\alpha, \quad (3.2)$$

$$\delta^\mu_\alpha + \eta^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} + b^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha} + b^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha. \quad (3.3)$$

A *primer orden* la anterior identidad se cumple si:

$$b^{\mu\beta} = -h^{\mu\beta} = -\eta^{\mu\nu}\eta^{\beta\alpha}h_{\nu\alpha}, \quad (3.4)$$

entonces la métrica inversa es:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

esto significa que se puede subir y bajar índices del orden de la magnitud de $h_{\mu\nu}$ utilizando la métrica del espacio–tiempo de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$. En este momento surge una pregunta: ¿Qué forma adquiere las ecuaciones del campo gravitacional en el límite de campo débil? Para responder a está pregunta partamos de las ecuaciones de Einstein-Hilbert:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

si definimos **el tensor de Einstein** $G^{\mu\nu}$, como: $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}$, la anterior ecuación se convierte en:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

El lado izquierdo relaciona la parte geométrica del espacio–tiempo y es en donde nos enfocaremos. Para conocer la nueva *forma* de la parte geométrica del espacio–tiempo sólo es necesario conocer el tensor de Riemann porque el tensor y el escalar de Ricci son contracciones de éste. El tensor de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}, \quad (3.8)$$

donde los símbolos de Christoffel se calculan a partir de:

$$\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\mu\lambda,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\mu} - g_{\sigma\mu,\lambda}). \quad (3.9)$$

Para encontrar la forma que adquiere el tensor de Riemann, para el espacio–tiempo cuasiplano, utilizamos (3.1) en la anterior ecuación, con lo cual se obtiene:

$$\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\lambda} - h^{\alpha\lambda})(h_{\mu\lambda,\sigma} + h_{\lambda\sigma,\mu} - h_{\sigma\mu,\lambda}), \quad (3.10)$$

$$\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(h_{\mu\lambda,\sigma} + h_{\lambda\sigma,\mu} - h_{\sigma\mu,\lambda}), \quad (3.11)$$

donde se ha despreciado términos a segundo orden en $h_{\mu\nu}$. Desde este momento sólo se considerara términos a primer orden en $h_{\mu\nu}$ a menos que se diga lo contrario. Al reemplazar la anterior ecuación en (3.8) se obtiene el tensor de Riemann, tal que:

$$R_{\gamma\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma}R^\alpha_{\beta\mu\nu} = (\eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma}) \left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(h_{\mu\lambda,\beta} + h_{\lambda\beta,\mu} - h_{\beta\mu,\lambda})_{,\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(h_{\nu\lambda,\beta} + h_{\lambda\beta,\nu} - h_{\beta\nu,\lambda})_{,\mu} \right], \quad (3.12)$$

$$R_{\gamma\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\gamma(h_{\mu\lambda,\beta\nu} + h_{\lambda\beta,\mu\nu} - h_{\beta\mu,\lambda\nu} - h_{\nu\lambda,\beta\mu} - h_{\lambda\beta,\nu\mu} + h_{\beta\nu,\lambda\mu}), \quad (3.13)$$

$$R_{\gamma\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu\gamma,\beta\nu} - h_{\beta\mu,\gamma\nu} - h_{\nu\gamma,\beta\mu} + h_{\beta\nu,\gamma\mu}). \quad (3.14)$$

El tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$ se obtiene realizando una contracción de índices en el tensor de Riemann, tal que:

$$R_{\beta\mu} = g^{\gamma\nu}R_{\gamma\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\nu}(h_{\beta\mu,\gamma\nu} + h_{\nu\gamma,\beta\mu} - h_{\mu\gamma,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\gamma\mu}). \quad (3.15)$$

Para obtener el escalar de Ricci R se realiza una nueva contracción de índices:

$$R = g^{\beta\mu}R_{\beta\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\beta\mu}\eta^{\gamma\nu}(h_{\beta\mu,\gamma\nu} + h_{\nu\gamma,\beta\mu} - h_{\mu\gamma,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\gamma\mu}). \quad (3.16)$$

Utilizando (3.15) y (3.16) en el lado izquierdo ($L.I$) de (3.6) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} L.I &= \frac{1}{2}\eta^{\gamma\beta}(\partial^\nu\partial_\gamma h^\mu{}_\beta + \partial^\mu\partial_\beta h^\nu{}_\gamma - \partial^\mu\partial^\nu h_{\beta\gamma} - \partial_\gamma\partial_\beta h^{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\beta\zeta}\eta^{\gamma\theta}(\partial_\gamma\partial_\theta h_{\beta\zeta} + \partial_\beta\partial_\zeta h_{\theta\gamma} - \partial_\gamma\partial_\zeta h_{\beta\theta} - \partial_\beta\partial_\theta h_{\zeta\gamma}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} L.I &= \frac{1}{2}(\partial^\nu\partial_\gamma h^{\mu\gamma} + \partial^\mu\partial_\beta h^{\nu\beta} - \partial^\mu\partial^\nu h - \partial^\beta\partial_\beta h^{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial_\theta h + \eta^{\mu\nu}\partial^\zeta\partial_\zeta h - \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial^\beta h_{\beta\theta} - \eta^{\mu\nu}\partial^\zeta\partial^\gamma h_{\zeta\gamma}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$L.I = \frac{1}{2}(\partial^\nu\partial_\gamma h^{\mu\gamma} + \partial^\mu\partial_\beta h^{\nu\beta} - \partial^\mu\partial^\nu h - \partial^\beta\partial_\beta h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial_\theta h - \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial^\beta h_{\beta\theta}).$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein-Hilbert quedaran como:

$$\partial^\nu\partial_\gamma h^{\mu\gamma} + \partial^\mu\partial_\beta h^{\nu\beta} - \partial^\mu\partial^\nu h - \partial^\beta\partial_\beta h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial_\theta h - \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial^\beta h_{\beta\theta} = \frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

La anterior ecuación se puede simplificar definiendo la **métrica de perturbación con traza invertida** $H_{\mu\nu}$ como:

$$H_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (3.20)$$

Con lo anterior⁵ se obtiene que:

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}H. \quad (3.21)$$

Observemos como cambia (3.19) utilizando la anterior expresión:

$$\begin{aligned} &\partial^\nu\partial_\gamma H^{\mu\gamma} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\gamma}\partial^\nu\partial_\gamma H + \partial^\mu\partial_\beta H^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}\partial^\mu\partial_\beta H + \partial^\mu\partial^\nu H - \partial^\beta\partial_\beta H^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial^\beta\partial_\beta H \\ &\quad - \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial_\theta H - \eta^{\mu\nu}\partial^\theta\partial^\beta H_{\beta\theta} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\beta\theta}\partial^\theta\partial^\beta H = \frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

⁵Se puede demostrar de manera trivial que $H = -h$, de ahí su nombre.

$$\begin{aligned} \partial^\nu \partial_\gamma H^{\mu\gamma} - \frac{1}{2} \partial^\nu \partial^\mu H + \partial^\mu \partial_\beta H^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \partial^\mu \partial^\nu H + \partial^\mu \partial^\nu H - \partial^\beta \partial_\beta H^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial^\beta \partial_\beta \\ - \eta^{\mu\nu} \partial^\theta \partial_\theta H - \eta^{\mu\nu} \partial^\theta \partial^\beta H_{\beta\theta} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\beta \partial^\beta H = \frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\partial^\beta \partial_\beta H^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\gamma H^{\mu\gamma} - \partial^\mu \partial_\beta H^{\nu\beta} + \eta^{\mu\nu} \partial^\theta \partial^\beta H_{\beta\theta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Para simplificar la ecuación (3.24) se utiliza una **transformación Gauge** que consiste en escoger un nuevo sistema de coordenadas x'^α relacionadas con el sistema original x^α de la forma:

$$x'^\alpha := x^\alpha + \xi^\alpha \quad \text{donde} \quad |\xi^\alpha| \ll 1. \quad (3.25)$$

Bajo esta nueva transformación se tiene que:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta + \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \delta^\beta_\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\beta_\alpha - (\delta^\mu_\alpha - \partial'_\alpha \xi^\beta) \partial_\mu \xi^\alpha \approx \delta^\beta_\alpha - \partial_\alpha \xi^\beta. \quad (3.27)$$

Bajo la transformación (3.25) el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ queda de la siguiente manera:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (3.28)$$

$$g'_{\mu\nu} = (\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \xi^\beta) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}), \quad (3.29)$$

$$g'_{\mu\nu} = (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\mu \partial_\nu \xi^\beta - \delta^\beta_\nu \partial_\mu \xi^\alpha) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}), \quad (3.30)$$

$$g'_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha + h_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

$$g'_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu, \quad (3.32)$$

y debido a que $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}'$, se obtiene la transformación de la métrica de perturbación $h_{\mu\nu}$ dada por:

$$h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu. \quad (3.33)$$

Ahora analicemos como transforma la ecuación (3.20):

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (3.34)$$

$$H_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (3.35)$$

$$H_{\mu\nu} = H'_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h' - h). \quad (3.36)$$

Ahora:

$$h' - h = h' - \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h' - \eta^{\alpha\beta} (h'_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha) = -2\partial_\alpha \xi^\alpha, \quad (3.37)$$

entonces:

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha. \quad (3.38)$$

Bajo la transformación Gauge el tensor de Riemann $R_{\gamma\beta\mu\nu}$ se convierte en:

$$R'_{\gamma\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\nu h'_{\mu\gamma} - \partial_\gamma\partial_\nu h'_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h'_{\nu\gamma} + \partial_\gamma\partial_\mu h'_{\beta\nu}), \quad (3.39)$$

$$R'_{\gamma\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\nu h_{\mu\gamma} - \partial_\beta\partial_\nu\partial_\mu\xi_\gamma - \partial_\beta\partial_\nu\partial_\gamma\xi_\mu - \partial_\gamma\partial_\nu h_{\beta\mu} + \partial_\gamma\partial_\nu\partial_\beta\xi_\mu + \partial_\gamma\partial_\nu\partial_\mu\xi_\beta, \\ - \partial_\beta\partial_\mu h_{\nu\gamma} + \partial_\beta\partial_\mu\partial_\nu\xi_\gamma + \partial_\beta\partial_\mu\partial_\gamma\xi_\nu + \partial_\gamma\partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\gamma\partial_\mu\partial_\beta\xi_\nu - \partial_\gamma\partial_\mu\partial_\nu\xi_\beta), \quad (3.40)$$

$$R'_{\gamma\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\nu h_{\mu\gamma} - \partial_\gamma\partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h_{\nu\gamma} + \partial_\gamma\partial_\mu h_{\beta\nu}), \quad (3.41)$$

obsevando la ecuación (3.14), se tiene que $R'_{\gamma\beta\mu\nu} = R_{\gamma\beta\mu\nu}$. De está manera hemos concluido que el tensor de Riemann es invariante bajo la transformación Gauge, es decir, la transformación Gauge **no afecta** a las ecuaciones de Einstein-Hilbert en el límite de campo débil; Si $h_{\mu\nu}$ (ó $H_{\mu\nu}$) *satisfacen las ecuaciones de Einstein–Hilbert, entonces $h'_{\mu\nu}$ (ó $H'_{\mu\nu}$) también lo hacen.*

Por el criterio anterior, se puede afirmar que dada una solución de las ecuaciones de Einstein-Hilbert en el límite de campo débil se puede generar una *familia* de soluciones usando diferentes transformaciones Gauge, ajustando el factor Gauge ξ^α (MOORE, 2010) ; esto se llama *Gauge libre*.

Entonces, el paso siguiente es **fixar** un valor del factor Gauge de modo que simplifique la ecuación (3.24). Observemos que si en la ecuación (3.24) (en términos de $H'^{\mu\nu}$) las derivadas de la forma $\partial_\mu H'^{\mu\nu}$ fueran cero, se llegaría a una ecuación *semejante* a una ecuación de onda. Este sera nuestro enfoque, llegar a la ecuación de onda, por consiguiente, se escogera un factor de Gauge ξ^α con la condición:

$$\partial^\mu\partial_\mu\xi^\nu = \partial_\mu H'^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

Comprobemos que (3.42) cumple con nuestro requerimiento. La ecuación (3.33) implica que:

$$H'^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} - \partial^\mu\xi^\nu - \partial^\nu\xi^\mu + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\xi^\alpha, \quad (3.43)$$

tomando derivada parcial ∂_μ en la anterior ecuación, se obtiene que:

$$\partial_\mu H'^{\mu\nu} = \partial_\mu H^{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\mu\xi^\nu - \partial_\mu\partial^\nu\xi^\mu + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\alpha\xi^\alpha, \quad (3.44)$$

$$\partial_\mu H'^{\mu\nu} = \partial_\mu H^{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\mu\xi^\nu, \quad (3.45)$$

$$\partial_\mu H'^{\mu\nu} = 0, \quad (3.46)$$

la ecuación (3.46) se conoce como **el Gauge de Lorentz**, y por lo tanto la ecuación (3.24) en el Gauge de Lorentz es:

$$\square^2 H^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (3.47)$$

donde \square^2 es el operador *D'Alambertiano* y se ha omitido '. De forma **elegante** las ecuaciones (3.47) son lineales en la métrica de perturbación con traza invertida y lo más importante, son completamente **desacopladas**.

3.2. Solución a las ecuaciones de campo linealizadas en el vacío

Las ecuaciones de campo linealizadas en el vacío son:

$$\square^2 H^{\mu\nu} = 0. \quad (3.48)$$

La anterior ecuación es una ecuación de onda cuya solución $H^{\mu\nu}$ es una **onda gravitacional plana** de la forma:

$$H^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \cos(k_\sigma x^\sigma) = A^{\mu\nu} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt), \quad (3.49)$$

donde $A^{\mu\nu}$ es una matriz constante y k_σ es el cuadvivector de onda $k_\sigma = (-\frac{w}{c}, \mathbf{k})$, para el cual se cumple que:

$$k_\sigma k^\sigma = -\frac{w^2}{c^2} + k^2 = 0. \quad (3.50)$$

En consecuencia las ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz. Adicionalmente, al aplicar el Gauge de Lorentz ($\partial_\mu H^{\mu\nu}$) a la onda plana se obtiene:

$$k_\mu A^{\mu\nu} = 0, \quad (3.51)$$

así pues se concluye que la onda gravitacional plana es perpendicular a la dirección de propagación.

3.2.1. Gauge transversal-sin traza

Consideremos una transformación Gauge de la forma:

$$\xi^\mu = B^\mu \sin(k_\sigma x^\sigma), \quad (3.52)$$

donde las componentes del cuadvivector B^μ son constantes. Apliquemos el operador $\partial^\alpha \partial_\alpha$ a la ecuación (3.52), tal que:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu = \partial^\alpha \partial_\alpha B^\mu \sin(k_\sigma x^\sigma) = -k^\sigma k_\sigma B^\mu \sin(k_\sigma x^\sigma) = 0, \quad (3.53)$$

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu = 0. \quad (3.54)$$

Con esta nueva transformación nuestra onda plana gravitacional $H^{\mu\nu}$ se convierte en:

$$H'^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha, \quad (3.55)$$

$$H'^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} - \eta^{\mu\gamma} \partial_\mu \xi^\nu - \eta^{\nu\beta} \partial_\beta \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha, \quad (3.56)$$

y ya que $\partial_\mu \xi^\nu = B^\nu k_\mu \cos(k_\sigma x^\sigma)$ se obtiene:

$$H'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \cos(k_\sigma x^\sigma) - \eta^{\mu\gamma} k_\gamma B^\nu \cos(k_\sigma x^\sigma) - \eta^{\nu\beta} k_\beta B^\mu \cos(k_\sigma x^\sigma) + \eta^{\mu\nu} k_\alpha B^\alpha \cos(k_\sigma x^\sigma), \quad (3.57)$$

Tomando $H'^{\mu\nu} = A'^{\mu\nu} \cos(k_\sigma x^\sigma)$ la anterior ecuación implica:

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \eta^{\mu\gamma} k_\gamma B^\nu - \eta^{\nu\beta} k_\beta B^\mu + \eta^{\mu\nu} k_\alpha B^\alpha, \quad (3.58)$$

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - k^\mu B^\nu - k^\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu} k_\alpha B^\alpha. \quad (3.59)$$

Debido a que B^ν es arbitraria se puede escoger apropiadamente sus componentes tal que:

$$A'^{\mu 0} = 0 \quad y \quad A'^{\mu}_{\ \mu} = 0, \quad (3.60)$$

las ecuaciones (3.60) definen lo que se conoce como el **Gauge transversal-sin traza**. Una onda gravitacional plana que satisfaga las ecuaciones (3.60) la denotaremos con el símbolo $H^{\mu\nu}_{TT}$.

Debido al resultado anterior, la ecuación (3.20) se puede expresar como:

$$H^{\mu\nu}_{TT} = h^{\mu\nu}_{TT}. \quad (3.61)$$

Lo anterior expresa que no existe diferencia entre $h^{\mu\nu}_{TT}$ y $H^{\mu\nu}_{TT}$ **en el vacío**.

3.2.2. Una onda gravitacional propagandose en la dirección +z

Las componentes del cuadvivector de onda en la dirección +z es:

$$k_\sigma = \left[-\frac{w}{c}, 0, 0, \frac{w}{c} \right], \quad (3.62)$$

Entonces el Gauge de Lorentz, ecuación (3.30), se reduce a $A^{\nu 3} = A^{3\nu}$. Esto junto con las condiciones Gauge TT y la simetría de $A^{\nu\mu}$ implican:

$$\text{Gauge TT y simetría } A^{0\nu} = A^{\nu 0} = 0,$$

$$\text{Gauge Lorentz y simetría } A^{\nu 3} = A^{3\nu} = A^{0\nu} = 0,$$

$$\text{Gauge TT } A^{xx} + A^{yy} = 0.$$

Con estas relaciones las componentes de la matriz $A^{\mu\nu}$ son:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{xx} & A^{xy} & 0 \\ 0 & A^{xy} & -A^{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

$$A^{\mu\nu} = A_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

donde:

$$A_+ = A^{xx} = -A^{yy} \quad y \quad A_\times = A^{xy} = A^{yx} \quad (3.65)$$

Las cantidades A_+ y A_\times se llaman **polarizaciones** de las ondas gravitacionales debido a su analogía con las ondas electromagnéticas. Estos dos estados de polarización se llaman “vertical” y “diagonal” o “suma” y “cruz”, por razones que se explicaran la siguiente subsección.

3.2.3. Efecto físicos de las ondas gravitacionales sobre las partículas

Al considerar una partícula en reposo, en ausencia de ondas gravitacionales, su cuadrivelocidad viene expresada por $U^\mu \approx (c, 0, 0, 0)$. El efecto de una onda gravitacional sobre esta partícula se determina por la ecuación diferencial de la geodésica, dada por:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (3.66)$$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{tt} \frac{dx^t}{d\tau} \frac{dx^t}{d\tau} = -c^2 \Gamma^\sigma_{tt}, \quad (3.67)$$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} c^2 \eta^{\alpha\lambda} (h_{0\lambda,0} + h_{\lambda 0,0} - h_{00,\lambda}), \quad (3.68)$$

donde en la tercera línea se ha echo uso de (3.11). Ahora adoptemos el Gauge TT, caracterizado por $h_{\nu 0} = 0$ y $h_{00} = 0$, entonces se obtiene que:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = 0, \quad (3.69)$$

al parecer las ondas gravitacionales no tienen ningún efecto sobre la partícula, sin embargo, está ecuación realmente **no expresa esto**; en realidad significa que la partícula es estacionaria con respecto al sistema de coordenadas dados por el Gauge TT, en otras palabras, *el sistema de coordenadas de la partícula en reposo permanecen fijas al paso de la onda gravitacional*.

Para encontrar el efecto **real** de la onda gravitacional consideremos un conjunto de partículas estacionarias ubicadas en un anillo de radio R en el plano $x - y$ (antes que pase la onda gravitacional), con una partícula de referencia en el centro del anillo. Los desplazamientos para cualquier partícula relativa al centro del anillo $dx = R \cos \theta$ y $dy = R \sin \theta$ permanecen fijas en el sistema de coordenadas TT, como lo vimos anteriormente. Ahora imagine que una onda plana polarizada “*verticalmente*” (lo que implica $A_x = 0$) se mueve en la dirección $+z$ a lo largo del círculo, en esta condición el intervalo ds^2 se expresa como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h^{TT}_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + H^{TT}_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.70)$$

$$ds^2 = [\eta_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \cos(k_\sigma x^\sigma)] dx^\mu dx^\nu, \quad (3.71)$$

debido a que $z = 0$ se obtiene $k_i x^i = 0$. Entonces:

$$ds^2 = [\eta_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \cos(\omega t)] dx^\mu dx^\nu, \quad (3.72)$$

$$ds^2 = [\eta_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \cos(\omega t)] dx^\mu dx^\nu, \quad (3.73)$$

$$ds^2 = [\eta_{xx} + A_{xx} \cos(\omega t)] dx^2 + [\eta_{yy} + A_{yy} \cos(\omega t)] dy^2 + 2A_{xy} \cos(\omega t) dx dy, \quad (3.74)$$

donde asumimos $dt = 0$. En nuestro caso $A_{xy} = 0$ y ya que $A_{xx} = -A_{yy}$, se obtiene:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \theta [1 + A_+ \cos(\omega t)] + R^2 \sin^2 \theta [1 - A_+ \cos(\omega t)], \quad (3.75)$$

$$ds^2 = R^2 [1 + A_+ \cos(wt)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)], \quad (3.76)$$

$$ds^2 = R^2 [1 + A_+ \cos(wt) \cos(2\theta)], \quad (3.77)$$

$$ds = R[1 + A_+ \cos(wt) \cos(2\theta)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.78)$$

$$ds \approx R \left[1 + \frac{1}{2} A_+ \cos(wt) \cos(2\theta) \right], \quad (3.79)$$

donde se echo uso de la aproximación binomial $(1 + x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}$. De manera análoga se puede demostrar que para una onda gravitacional polarizada “*diagonalmente*” (lo que implica $A_+ = 0$) el intervalo ds^2 es:

$$ds \approx R \left[1 + \frac{1}{2} A_x \cos(wt) \sin(2\theta) \right]. \quad (3.80)$$

Así se concluye que la onda gravitacional deforma el anillo de radio R , graficamente se muestra en las figuras (3.1–3.4), las curvas punteadas expresan al conjunto de partículas en ausencia de ondas gravitacionales y las curvas roja y verde, expresan al conjunto de partículas cuando pasa la onda gravitacional.

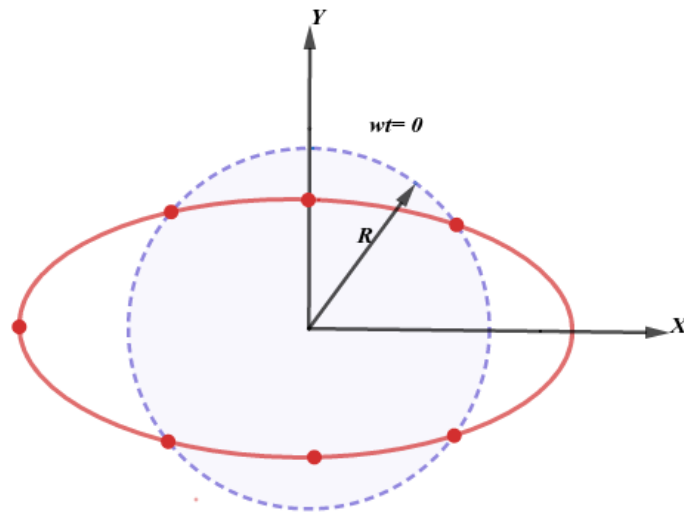


Figura 9: Ondas gravitacional con polarización “*vertical*” $wt = 0$. Fuente la presente investigación

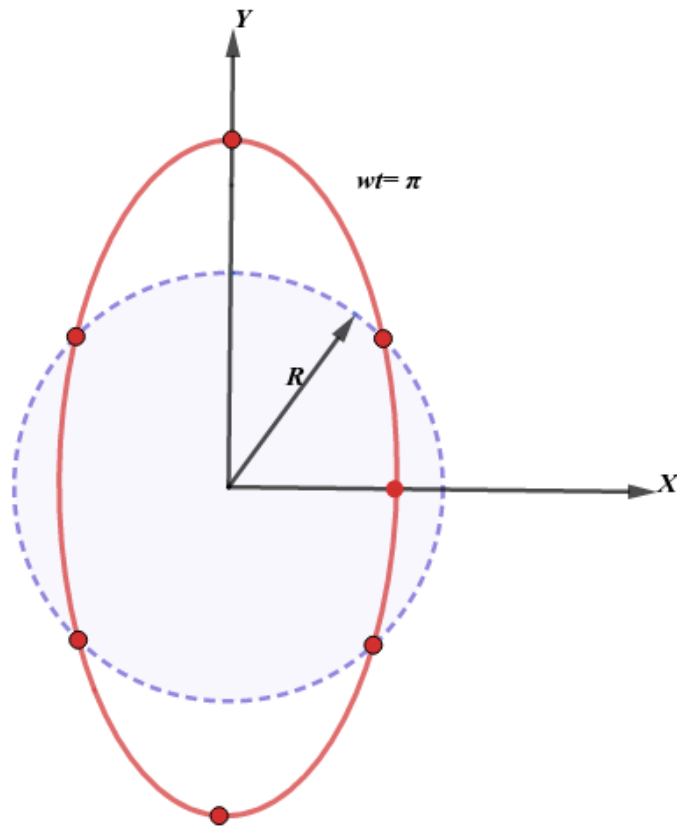


Figura 10: Ondas gravitacional con polarización “vertical” $wt = \pi$. Fuente la presente investigación

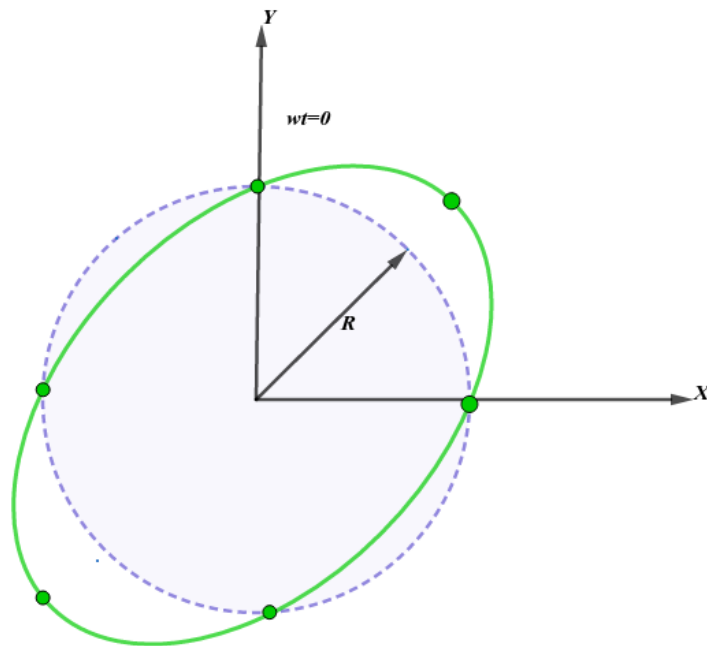


Figura 11: Ondas gravitacional con polarización “diagonal” $wt = 0$. Fuente la presente investigación

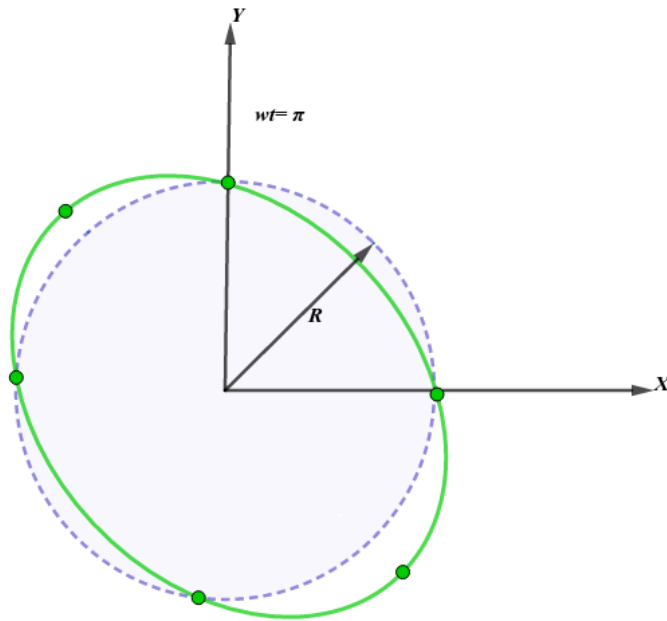


Figura 12: Ondas gravitacional con polarización “*diagonal*” $wt = \pi$. Fuente la presente investigación

3.3. Energía gravitacional

En física existe un principio fundamental, la conservación de la energía y el momento: en un sistema cerrado la energía y el momento se conservan. Debido a que estamos estudiando espacios curvos, surge de inmediato la pregunta: ¿La energía en espacios curvos también se conserva?. Se podría caer en el error de responder, apresuradamente, *si*. Observe que la conservación de la energía y momento surgen debido a las simetrías del espacio y tiempo en el espacio–tiempo de Minkowski, para un espacio–tiempo en general *no existen* tales simetrías.

Adicionalmente se debe tener en cuenta, el **detalle**, que el tensor de energía–momento, en las ecuaciones de Einstein-Hilbert, **no** incluye al campo gravitacional porque una transformación de coordenadas a un sistema en caída libre puede eliminar los efectos gravitacionales en un evento dado, debido al *principio de equivalencia*. Entonces, no se puede construir un tensor de energía momento asociado al campo gravitacional ya que en un punto dicho tensor sería cero y por consiguiente sería cero en cualquier punto. De aquí se concluye que la energía gravitacional **no es localizable**, es por esta razón que no aparece en las ecuaciones de Einstein-Hilbert.

Al conocer los anteriores argumentos ya no resulta tan *trivial* responder a la pregunta que si la energía y el momento en espacios curvos se conserva. Un lector atento podría preguntar: ¿sí no existe una energía asociada al campo gravitacional por qué las partículas realizan desplazamientos al paso de una onda gravitacional (ver sección anterior)? Esto ocurre porque se observó de manera *global* el espacio.

En el caso del límite de campo débil se puede construir un tensor de energía-momento considerando segundos términos (h^2) en el procedimiento desarrollado en la sección (3.1), asociándolos a términos como energía gravitacional, despreciando términos de orden superior, y se considera un promedio sobre una pequeña región sobre varias longitudes de ondas de modo que se aprecie la curvatura del espacio-tiempo, este proceso se denotara como $\langle \dots \rangle$. Es importante señalar que el promedio de las primeras derivadas es cero, ya que el promedio es sobre todas las direcciones en cada punto, es decir, para un campo tensorial $a(x)$, se obtiene $\langle \partial_\mu a \rangle = 0$ (DEWITT, 2011). Esto tiene la consecuencia de que:

$$\langle \partial_\mu (ab) \rangle = 0 \quad (3.81)$$

$$\Rightarrow \langle a \partial_\mu b \rangle = - \langle (\partial_\mu a) b \rangle \quad (3.82)$$

Con todo esto en mente, proseguiremos a construir el tensor de energía-momento para el campo gravitacional, calculando el *Tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$ a segundo orden en (h^2); parte izquierda de la ecuación (3.6), comencemos calculando el tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$.

3.3.1. Tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$ a segundo orden en h^2

El tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$ se calcula a partir de la expresión:

$$R_{\beta\mu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}, \quad (3.83)$$

donde:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\mu} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\lambda} - h^{\alpha\lambda}) (\partial_\beta h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\lambda\beta} - \partial_\lambda h_{\beta\mu}). \quad (3.84)$$

El primer término de (3.83) a segundo orden es:

$$\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\mu} = -\frac{1}{2} [(\partial_\alpha h^{\alpha\lambda} \partial_\beta h_{\mu\lambda} + \partial_\alpha h^{\alpha\lambda} \partial_\mu h_{\lambda\beta} - \partial_\alpha h^{\alpha\lambda} \partial_\lambda h_{\beta\mu}) + h^{\alpha\lambda} (\partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\lambda} + \partial_\mu \partial_\alpha h_{\lambda\beta} - \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\beta\mu})]. \quad (3.85)$$

El segundo término de (3.83) a segundo orden es:

$$-\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu h^{\alpha\lambda} \partial_\beta h_{\alpha\lambda} + \partial_\mu h^{\alpha\lambda} \partial_\alpha h_{\lambda\beta} - \partial_\mu h^{\alpha\lambda} \partial_\lambda h_{\beta\alpha}) + h^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha \partial_\mu h_{\lambda\beta} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\beta\alpha})]. \quad (3.86)$$

El tercer término de (3.83) a segundo orden es:

$$-\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu h^\alpha_\sigma \partial_\beta h^\sigma_\alpha + 2\partial_\sigma h^\alpha_\mu \partial_\alpha h^\sigma_\beta - 2\partial_\sigma h^\alpha_\mu \partial^\sigma h_{\beta\alpha}). \quad (3.87)$$

El cuarto término de (3.83) a segundo orden es:

$$\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} = \frac{1}{4} (\partial_\sigma h \partial_\beta h^\sigma_\mu + \partial_\sigma h \partial_\mu h^\sigma_\beta - \partial_\sigma h \partial^\sigma h_{\beta\mu}). \quad (3.88)$$

Reemplazando (3.85), (3.86), (3.87) y (3.88) en (3.83) se obtiene:

$$R_{\beta\mu}^{(2)} = \frac{1}{4} \partial^\alpha h \partial_\beta h_{\alpha\mu} + \frac{1}{4} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\beta\mu} + \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda} \partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda} \partial_\mu \partial_\lambda h_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda} \partial_\beta \partial_\alpha h_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\alpha\lambda} \partial_\beta h_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\alpha\lambda} \partial_\lambda h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\alpha\lambda} \partial_\mu h_{\lambda\beta} \\
& + \frac{1}{4} \partial_\beta h_{\alpha\sigma} \partial_\mu h^{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \partial^\sigma h^\alpha{}_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial^\sigma h^\alpha{}_\mu \partial_\alpha h_{\sigma\beta}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Al utilizar el Gauge TT; caracterizado por: $H^{\mu\nu}{}_{TT} = h^{\mu\nu}{}_{TT}$ y $\partial_\mu H^{\mu\nu}{}_{TT} = 0$, en la ecuación (3.89) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
R_{\beta\mu}^{(2)} &= \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\lambda}{}^{TT} - \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\mu \partial_\lambda h_{\alpha\beta}{}^{TT} + \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\beta\mu}{}^{TT} - \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\beta \partial_\alpha h_{\mu\lambda}{}^{TT} \\
&+ \frac{1}{4} \partial_\beta h_{\alpha\sigma}{}^{TT} \partial_\mu h^{\alpha\sigma}{}_{TT} + \frac{1}{2} \partial^\sigma h^\alpha{}_{(TT)\mu} \partial_\sigma h_{\alpha\beta}{}^{TT} - \frac{1}{2} \partial^\sigma h^\alpha{}_{(TT)\mu} \partial_\alpha h_{\sigma\beta}{}^{TT}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Promediando sobre las longitudes de onda se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle R_{\beta\mu}^{(2)} \rangle &= \langle -\frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\mu \partial_\lambda h_{\alpha\beta}{}^{TT} + \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\beta\mu}{}^{TT} - \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}{}_{TT} \partial_\beta \partial_\alpha h_{\mu\lambda}{}^{TT} \\
&- \frac{1}{4} \partial_\beta h_{\alpha\sigma}{}^{TT} \partial_\mu h^{\alpha\sigma}{}_{TT} - \frac{1}{2} \partial^\sigma h^\alpha{}_{(TT)\mu} \partial_\alpha h_{\sigma\beta}{}^{TT} \rangle
\end{aligned} \tag{3.91}$$

donde se ha usado la ecuación (3.82). El último término de esta expresión se puede reescribir como $\langle \partial_\sigma h^{TT}{}_{\alpha\mu} \partial^\alpha h^{(TT)\sigma}{}_\beta \rangle = -\langle \partial_\sigma \partial^\alpha h^{TT}{}_{\alpha\mu} h^{(TT)\sigma}{}_\beta \rangle = 0$, bajo el Gauge Lorentz. De manera análoga los tres primeros términos son cero. Así, después de una larga álgebra, se obtiene una expresión sencilla para el tensor de Ricci $R_{\beta\mu}$ a segundo orden en h^2 :

$$\langle R_{\beta\mu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\beta h_{\alpha\sigma}{}^{TT} \partial_\mu h^{\alpha\sigma}{}_{TT} \rangle. \tag{3.92}$$

De la anterior expresión se deduce, trivialmente, que el escalar de Ricci $\langle R^{(2)} \rangle$ a segundo orden en h^2 es cero $\langle R^{(2)} \rangle = 0$. Por lo tanto, el tensor de Einstein a segundo orden en (h^2) se expresa como:

$$G_{\beta\mu} = -\frac{1}{4} \langle \partial_\beta h_{\alpha\sigma}{}^{TT} \partial_\mu h^{\alpha\sigma}{}_{TT} \rangle, \tag{3.93}$$

De esta manera, se concluye que el tensor de energía-momento asociado al campo gravitacional de las ondas gravitacionales (OG) $T^{OG}{}_{\mu\nu}$ es:

$$T^{OG}{}_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\beta h_{\alpha\sigma}{}^{TT} \partial_\mu h^{\alpha\sigma}{}_{TT} \rangle. \tag{3.94}$$

3.4. Generación de ondas gravitacionales

Hasta el momento se ha resuelto la ecuaciones de Einstein-Hilbert linealizadas en el vacío el paso siguiente es encontrar la solución general, es decir, encontrar una solución en presencia de materia. Para esto comencemos con la ecuación que describe a las ondas gravitacionales:

$$\Box^2 H_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{3.95}$$

La solución general de está ecuación es:

$$H_{uv} = \frac{4G}{c^4} \int d^3\mathbf{x}' \frac{T_{uv}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (3.96)$$

para una demostración detallada ver ANEXO B. La interpretación a la anterior ecuación debe ser clara: *La perturbación en el campo gravitacional en (\mathbf{x}, t) es la suma de la energía y el momento de la fuente ubicada en el punto $(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, t_r)$ donde $t_r = t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}$* (CARROLL, 2003).

Consideremos el caso donde la radiación gravitacional es emitida por una fuente aislada y *lejana* respecto al punto de observación. Ahora, para una función del espacio–tiempo $\zeta(\mathbf{x}, t)$ la transformada de Fourier y su inversa $\bar{\zeta}(\mathbf{x}, w)$ son:

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dw \bar{\zeta}(\mathbf{x}, w) e^{-iwt}, \quad (3.97)$$

$$\bar{\zeta}(\mathbf{x}, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \zeta(\mathbf{x}, t) e^{iwt}. \quad (3.98)$$

Por lo tanto, si asumimos que la transformada de Fourier es válida para la perturbación métrica con traza invertida $H_{\mu\nu}$ tenemos que:

$$\overline{H_{\mu\nu}}(\mathbf{x}, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt H_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) e^{iwt}, \quad (3.99)$$

$$\overline{H_{\mu\nu}}(\mathbf{x}, w) = \frac{4G}{c^4 \sqrt{2\pi}} \int dt d^3\mathbf{x}' e^{iwt} \frac{T_{uv}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (3.100)$$

$$\overline{H_{\mu\nu}}(\mathbf{x}, w) = \frac{4G}{c^4 \sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3\mathbf{x}' e^{iwt_r} e^{iw \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} \frac{T_{uv}(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (3.101)$$

$$\overline{H_{\mu\nu}}(\mathbf{x}, w) = \frac{4G}{c^4} \int d^3\mathbf{x}' e^{iw \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} \frac{\overline{T_{\mu\nu}}(\mathbf{x}', w)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (3.102)$$

donde en el último paso se utilizó:

$$\overline{T_{\mu\nu}}(\mathbf{x}', w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t_r) e^{iwt_r}. \quad (3.103)$$

Para proseguir, consideremos que la fuente se mueve *lentamente* entonces la radiación gravitacional emitida posee frecuencias cortas. Además, ya que la fuente se encuentra a una distancia espacial r muy grande las diferentes partes de la fuente $r + \delta r$ cumplen $\delta r \ll r$, con lo cual se puede considerar la siguiente aproximación $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx r$, entonces la ecuación (3.102) se convierte en:

$$\overline{H_{\mu\nu}}(x, t) = \frac{4G}{c^4} \frac{e^{\frac{iwr}{c}}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \overline{T_{\mu\nu}}(\mathbf{x}', w), \quad (3.104)$$

Ahora enfoquemos nuestra atención en la implicación del Gauge de Lorentz $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$ en el espacio de frecuencias:

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu \int dw e^{-i\omega t} \overline{H^{\mu\nu}}, \quad (3.105)$$

$$0 = \int dw \partial_0 (e^{-i\omega t} \overline{H^{0\nu}}) + \int dw e^{-i\omega t} \partial_k \overline{H^{k\nu}}, \quad (3.106)$$

$$0 = \int dw \left(\frac{-i\omega}{c} \right) e^{-i\omega t} \overline{H^{0\nu}} + \int dw e^{-i\omega t} \partial_k \overline{H^{k\nu}}, \quad (3.107)$$

$$0 = \int dw e^{-i\omega t} \left(\frac{-i\omega}{c} \overline{H^{0\nu}} + \partial_k \overline{H^{k\nu}} \right), \quad (3.108)$$

$$\overline{H^{0\nu}} = -\frac{ic}{\omega} \partial_k \overline{H^{k\nu}}, \quad (3.109)$$

de aquí se concluye que sólo es necesario conocer las componentes espaciales $\overline{H^{kj}}$ para obtener *todas* las componentes de $\overline{H^{\mu\nu}}$. De manera análoga se puede demostrar que para la condición $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ se obtiene:

$$\overline{T^{0\nu}} = -\frac{ic}{\omega} \partial_k \overline{T^{k\nu}}. \quad (3.110)$$

A partir de este momento nos enfocaremos *sólo* en las componentes espaciales. Observe que:

$$\int d^3 \mathbf{x}' \partial_{k'} (x'^i \overline{T^{kj}}) = 0, \quad (3.111)$$

por el teorema de la divergencia. La anterior ecuación implica:

$$\int d^3 \mathbf{x}' \delta'^i_k \overline{T^{kj}} + \int d^3 \mathbf{x}' x'^i \partial_{k'} \overline{T^{kj}} = 0, \quad (3.112)$$

$$\int d^3 \mathbf{x}' \overline{T^{ij}} + \int d^3 \mathbf{x}' x'^i \partial_{k'} \overline{T^{kj}} = 0, \quad (3.113)$$

$$\int d^3 \mathbf{x}' \overline{T^{ij}} = - \int d^3 \mathbf{x}' x'^i \partial_{k'} \overline{T^{kj}}. \quad (3.114)$$

Utilizando la ecuación (3.110) se obtiene que:

$$\int d^3 \mathbf{x}' \overline{T^{ij}} = -\frac{i\omega}{c} \int d^3 \mathbf{x}' x'^i \overline{T^{0j}}, \quad (3.115)$$

$$\int d^3 \mathbf{x}' \overline{T^{ij}} = -\frac{i\omega}{2c} \int d^3 \mathbf{x}' (x'^i \overline{T^{0j}} + x'^j \overline{T^{0i}}). \quad (3.116)$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\partial_{l'} (x'^i x'^j \overline{T^{0l}}) = x'^j \overline{T^{0i}} + x'^i \overline{T^{0j}} + x'^i x'^j \partial_{l'} \overline{T^{0l}}, \quad (3.117)$$

la ecuación (3.114) se reescribe así:

$$\int d^3 \mathbf{x}' \overline{T^{ij}} = -\frac{i\omega}{2c} \int d^3 \mathbf{x}' \left[\partial_{l'} (x'^i x'^j \overline{T^{0l}}) - x'^i x'^j \partial_{l'} \overline{T^{0l}} \right], \quad (3.118)$$

$$\int d^3\mathbf{x}' \overline{T^{ij}} = \frac{iw}{2c} \int x'^i x'^j \partial_\nu \overline{T^{0l}} d^3\mathbf{x}', \quad (3.119)$$

$$\int d^3\mathbf{x}' \overline{T^{ij}} = -\frac{w^2}{2c^2} \int x'^i x'^j \overline{T^{00}} d^3\mathbf{x}'. \quad (3.120)$$

Es conveniente definir el **tensor de momento cuadrupolar**

$$\overline{I_{ij}}(w) := \int x'^i x'^j \overline{T^{00}}(w, \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'. \quad (3.121)$$

Utilizando (3.117) y (3.120) la ecuación (3.103) se expresa como:

$$\overline{H_{ij}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{2Gw^2}{c^6} \frac{e^{iwr}}{r} \overline{I_{ij}}(w). \quad (3.122)$$

Esta ecuación se puede transformar para t usando (3.97):

$$H_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dw e^{-iwt} \overline{H_{ij}}(\mathbf{x}, w), \quad (3.123)$$

$$H_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dw e^{-iwt} \left(-\frac{2Gw^2}{rc^6} e^{iwr} \right) \overline{I_{ij}}(w), \quad (3.124)$$

$$H_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{-2G}{rc^6 \sqrt{2\pi}} \int dw e^{-iw(t-\frac{r}{c})} w^2 \overline{I_{ij}}(w), \quad (3.125)$$

$$H_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{rc^6} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dw e^{-iw(t-\frac{r}{c})} \overline{I_{ij}}(w) \right), \quad (3.126)$$

$$H_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{rc^6} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt^2}. \quad (3.127)$$

A partir de la ecuación (3.127) concluimos que la *radiación gravitacional* es proporcional a la segunda derivada del tensor de momento cuadrupolar, por lo tanto, la radiación gravitacional es muy débil. En el electromagnetismo, la radiación electromagnética es generada por el momento dipolar por consiguiente la radiación electromagnética es más fuerte que la radiación gravitacional.

Observe que el momento dipolar no puede generar radiación gravitacional ya que la energía y el momento se conserva. Esto es sencillo de demostrar, el *momento dipolar* se define como:

$$I^i := \int d^3\mathbf{x} T^{00} x^i, \quad (3.128)$$

tomando derivada temporal se tiene:

$$\frac{dI^i}{dt} = c \int d^3\mathbf{x} \partial_0 T^{00} x^i, \quad (3.129)$$

$$\frac{dI^i}{dt} = -c \int d^3\mathbf{x} \partial_j T^{0j} x^i, \quad (3.130)$$

$$\frac{dI^i}{dt} = c \int d^3\mathbf{x} \delta^i_j T^{0j}, \quad (3.131)$$

$$\frac{dI^i}{dt} = c \int d^3\mathbf{x} T^{0i}, \quad (3.132)$$

donde en la segunda línea se utilizó $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y en la tercera línea se integro por partes. Al aplicar una derivada temporal la anterior expresión es cero porque el momento se **conserva**.

Además hay que mencionar que las fuentes estáticas no generan ondas gravitacionales debido a la dependencia temporal en la ecuación (3.122). El teorema de Birkhoff, visto en el capítulo anterior, menciona que para cualquier objeto simétrico la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío deben ser **estáticas** y asintóticamente planas. Aquí se obtiene la *importante* conclusión: un objeto simétrico **no** genera ondas gravitacionales.

3.4.1. El flujo de energía de las ondas gravitacionales

Debido a la analogía que presenta el momento dipolar con la expansión multipolar en mecánica newtoniana es conveniente definir el **tensor de momento cuadrupolar reducido**:

$$J^{ij} := \int d^3\mathbf{x} T^{00} \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \eta^{ij} r^2 \right) \quad (3.133)$$

$$J^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3} \eta^{ij} I, \quad (3.134)$$

la traza de J^{ij} es cero. De aquí se obtiene:

$$I^{ij} = J^{ij} + \frac{1}{3} \eta^{ij} I. \quad (3.135)$$

Observe que si estamos ubicados lo suficientemente lejos de la fuente, las ondas gravitacionales son aproximadamente planas, por consiguiente podemos utilizar el Gauge TT. Entonces la ecuación (3.127) en el Gauge TT es:

$$H_{ij}^{TT}(x, t) = \frac{2G}{rc^6} \frac{d^2 I_{ij}^{TT}(t_r)}{dt^2}. \quad (3.136)$$

Utilizando la ecuación (3.134) la anterior expresión se convierte en:

$$H_{ij}^{TT}(x, t) = \frac{2G}{rc^6} \frac{d^2 J_{ij}^{TT}(t_r)}{dt^2}. \quad (3.137)$$

Antes de proseguir detengamonos a analizar las componentes de la amplitud en TT $A^{\mu\nu}$ para una onda gravitacional plana:

$$H^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \cos(k_\alpha x^\alpha + \theta_0). \quad (3.138)$$

Viajando en una dirección arbitraria indicada por el vector unitario \mathbf{n} las condiciones Gauge requieren $A^{0\mu} = A^{\mu 0} = 0$ así que sólo es necesario conocer las componentes espaciales A^{jk} . Para el caso particular de una onda gravitacional moviendose en dirección $+z$ se cumple:

$$A^{xx}_{TT} = -A^{yy}_{TT} = \frac{1}{2}(A^{xx} - A^{yy}), \quad (3.139)$$

$$A^{xy}_{TT} = A^{yx}_{TT} = A^{yx}, \quad (3.140)$$

las restantes componentes son cero. En este caso la condición Lorentz implica $A^{0\mu} = A^{z0} = 0$, es decir, *se hicieron cero las componentes de la matriz $A^{\nu\mu}$ que viajen en la dirección de propagación $+z$* . Esto es equivalente a proyectar la matriz A^{jk} original en el plano xy. Bajo este razonamiento se deduce que las ondas que viajan en la dirección \mathbf{n} proyectan la matriz A^{jk} sobre el plano perpendicular a la dirección \mathbf{n} . De inmediato surge la pregunta: ¿Qué factor proyecta la matriz sobre un plano?.

Resulta que el operador:

$$P^j_m := \delta^j_m - n^j n_m, \quad (3.141)$$

convierte a un vector arbitrario \mathbf{B} a un vector $B^j_P = P^j_m B^m$ que corresponde la proyección de \mathbf{B} sobre el plano perpendicular a \mathbf{n} (ver ANEXO C). Ahora en el Gauge TT se cumple que:

$$A^{jk}_{TT} = \left(P^j_m P^k_n - \frac{1}{2} P^{jk} P_{mn} \right) A^{mn}. \quad (3.142)$$

Además, ya que $\ddot{J}^{jk}{}_{\alpha} H^{jk}{}_{\alpha} A^{jk}$ se deduce lo siguiente:

$$\ddot{J}^{jk}_{TT} = \left(P^j_m P^k_n - \frac{1}{2} P^{jk} P_{mn} \right) \ddot{J}^{jk}, \quad (3.143)$$

derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\ddot{\ddot{J}}^{jk}_{TT} = \left(P^j_m P^k_n - \frac{1}{2} P^{jk} P_{mn} \right) \ddot{\ddot{J}}^{jk}. \quad (3.144)$$

De la ecuación (3.144) se deduce lo siguiente:

$$\ddot{\ddot{J}}^{jk}_{TT} \ddot{\ddot{J}}^{TT}_{jk} = \left(P^j_m P^k_n - \frac{1}{2} P^{jk} P_{mn} \right) \left(P^a_j P^b_k - \frac{1}{2} P^{ab} P_{jk} \right) \ddot{\ddot{J}}^{mn} \ddot{\ddot{J}}_{ab}, \quad (3.145)$$

$$\ddot{\ddot{J}}^{jk}_{TT} \ddot{\ddot{J}}^{TT}_{jk} = \left(P^a_m P^b_n - \frac{1}{2} P^{ab} P_{mn} \right) \ddot{\ddot{J}}^{mn} \ddot{\ddot{J}}_{ab}, \quad (3.146)$$

en este paso se uso las propiedades del operador de proyección (ver ANEXO C). Utilizando la definición del operador de proyección se obtiene:

$$\ddot{\ddot{J}}^{jk}_{TT} \ddot{\ddot{J}}^{TT}_{jk} = \{ (\delta^a_m - n^a n_m) (\delta^b_n - n^b n_n) - \frac{1}{2} (\delta^{ab} - n^a n^b) (\delta_{mn} - n_m n_n) \} \ddot{\ddot{J}}^{mn} \ddot{\ddot{J}}_{ab}, \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{J}}^{jk}_{TT} \ddot{\ddot{J}}^{TT}_{jk} &= \{ \delta^a_m \delta^b_n - \delta^a_m n^b n_n - \delta^b_n n^a n_m + n^a n^b n_m n_n \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta^{ab} \delta_{mn} + \frac{1}{2} \delta^{ab} n_m n_n + \frac{1}{2} \delta_{mn} n^a n^b - \frac{1}{2} n^a n^b n_m n_n \} \ddot{\ddot{J}}^{mn} \ddot{\ddot{J}}_{ab}, \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\ddot{\ddot{J}}^{jk}_{TT} \ddot{\ddot{J}}^{TT}_{jk} = \ddot{\ddot{J}}^{mn} \ddot{\ddot{J}}_{mn} - 2 \ddot{\ddot{J}}^b_m \ddot{\ddot{J}}_{ab} n^a n^m + \frac{1}{2} \ddot{\ddot{J}}^{mn} \ddot{\ddot{J}}_{ab} n^a n^b n^m n^n. \quad (3.149)$$

En este momento ya estamos en posición de encontrar el flujo de energía de las ondas gravitacionales. El flujo de energía se obtiene de la ecuación (3.94) haciendo $\mu = 0$ y $\nu = r$:

$$T^{OG}_{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_0 h^{TT}_{ij} \partial_r h^{ij}_{TT} \rangle \quad (3.150)$$

$$T^{OG}_{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_0 H^{TT}_{ij} \partial_r H^{ij}_{TT} \rangle. \quad (3.151)$$

A partir de la ecuación (3.137) se obtienen las derivadas parciales $\partial_0 H^{TT}_{ij}$ y $\partial_r H^{ij}_{TT}$:

$$\partial_0 H^{TT}_{ij} = \frac{2G}{rc^6} \frac{d^3 J^{TT}_{ij}}{dt^3}, \quad (3.152)$$

$$\partial_r H^{ij}_{TT} = -\frac{2G}{rc^7} \frac{d^3 J^{TT}_{ij}}{dt^3} - \frac{2G}{r^2 c^6} \frac{d^2 J^{TT}_{ij}}{dt^2}, \quad (3.153)$$

$$\partial_r H^{ij}_{TT} \approx -\frac{2G}{rc^7} \frac{d^3 J^{TT}_{ij}}{dt^3}, \quad (3.154)$$

en la segunda línea se utilizó $\partial_r J^{TT}_{ij} = -\frac{1}{c} \partial_0 J^{TT}_{ij}$. Reemplazando (3.152) y (3.154) en (3.151) se llega a la siguiente expresión:

$$T^{OG}_{0r} = -\frac{G}{8\pi c^9 r^2} \left\langle \frac{d^3 J^{TT}_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J^{ij}_{TT}}{dt^3} \right\rangle. \quad (3.155)$$

Usando la ecuación (3.80) la ecuación (3.84) se reescribe como:

$$T^{OG}_{0r} = -\frac{G}{8\pi c^9 r^2} \left\langle \ddot{J}^{mn} \ddot{J}_{mn} - 2 \ddot{J}_m^b \ddot{J}_{ab} n^a n^m + \frac{1}{2} \ddot{J}_{mn} \ddot{J}_{ab} n^a n^b n^m n^n \right\rangle. \quad (3.156)$$

Esta ecuación expresa el flujo de energía para las ondas gravitacionales en el Gauge TT, el paso siguiente es calcular la energía total irradiada.

3.4.2. Energía total irradiada

En la anterior subsección se encontró el flujo de energía generado por las ondas gravitacionales para una fuente aislada (que se mueve lentamente) y lejana del punto de observación, el siguiente paso es encontrar la energía total irradiada y para eso se considera un elemento diferencial de área dA de una esfera tal que $dA = r \sin \theta \cos \phi$ definida por un vector unitario $\mathbf{n} = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$, luego se integrara en toda la esfera. Entonces la energía total irradiada por unidad de tiempo, es:

$$\frac{dE}{dt} = \int \text{flujo} \cdot dA, \quad (3.157)$$

usando (3.156) se tiene:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{Gr^2}{8\pi c^9 r^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \left\langle \ddot{J}^{mn} \ddot{J}_{mn} - 2 \ddot{J}_m^b \ddot{J}_{ab} n^a n^m + \frac{1}{2} \ddot{J}_{mn} \ddot{J}_{ab} n^a n^b n^m n^n \right\rangle d\phi, \quad (3.158)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{8\pi c^9} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \left\langle \ddot{J}^{mn} \ddot{J}_{mn} - 2 \ddot{J}_m^b \ddot{J}_{ab} n^a n^m + \frac{1}{2} \ddot{J}_{mn} \ddot{J}_{ab} n^a n^b n^m n^n \right\rangle d\phi. \quad (3.159)$$

Los tres términos dentro de las integrales dependen de las variables θ y ϕ a través de los vectores unitarios \mathbf{n} : Las componentes de \ddot{J}^{kl} sólo dependen de la ubicación de la fuente en nuestro

sistema de coordenadas y no de la dirección \mathbf{n} , observe la ecuación (3.133). Por lo tanto, las anteriores integrales son:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\frac{G}{8\pi c^9} \left\langle \ddot{J}_{mn} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} \right\rangle \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi + \frac{G}{4\pi c^9} \left\langle \ddot{J}_m^{\dot{b}} \ddot{J}_{ab} \right\rangle \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n^a n^m \sin \theta d\theta d\phi, \\ & - \frac{G}{16\pi c^9} \left\langle \ddot{J}_{mn} \ddot{J}_{ab} \right\rangle \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n^a n^b n^m n^n \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Las anteriores integrales se resuelven utilizando las identidades:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = 4\pi, \quad (3.161)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi n^a n^m \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3} \eta^{am}, \quad (3.162)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi n^a n^b n^m n^n \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{15} (\eta^{ab} \eta^{mn} + \eta^{bm} \eta^{an} + \eta^{bn} \eta^{am}). \quad (3.163)$$

Reemplazando en (3.160) se tiene:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{2c^9} \left\langle \ddot{J}_{mn} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} - \frac{2}{3} \ddot{J}_m^{\dot{b}} \ddot{J}_{ab} \eta^{am} + \frac{1}{30} (\eta^{ab} \eta^{mn} + \eta^{bm} \eta^{an} + \eta^{bn} \eta^{am}) \ddot{J}_{mn} \ddot{J}_{ab} \right\rangle, \quad (3.164)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{2c^9} \left\langle \ddot{J}_{mn} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} - \frac{2}{3} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} \ddot{J}_{mn} + \frac{1}{30} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} \ddot{J}_{mn} + \frac{1}{30} \ddot{J}_{mn} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} \right\rangle, \quad (3.165)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^9} \left\langle \ddot{J}_{mn} \ddot{J}^{\dot{m}\dot{n}} \right\rangle. \quad (3.166)$$

el signo menos representa la disminución de la energía total de la fuente.

3.4.3. Aplicación a un sistema binario

Consideremos dos partículas A y B de masa m_1 y m_2 respectivamente separadas por una distancia fija D , es decir, orbitan entre si como si estuvieran sujetas a una cuerda girando alrededor de su centro de masa. Además supondremos que la rotación este ubicada en el plano xy . Los radios orbitales de las dos masas son:

$$r_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) D, \quad (3.167)$$

$$r_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) D, \quad (3.168)$$

donde se utilizó $R_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$ y $r_i = r_{Di} + R_{CM}$, aquí r_{Di} representa la distancia de la partícula i al centro de masa, con $i = 1, 2$. Ahora se define $t = 0$ como el instante cuando la m_1 cruza el eje $+x$. Las coordenadas x_1, y_1 y x_2, y_2 para un instante de tiempo t son:

$$x_1 = r_1 \cos (wt) = \frac{m_2 D}{m_1 + m_2} \cos (wt) \quad y_1 = r_1 \sin (wt) = \frac{m_2 D}{m_1 + m_2} \sin (wt), \quad (3.169)$$

$$x_2 = -r_2 \cos(\omega t) = \frac{m_1 D}{m_1 + m_2} \cos(\omega t) \quad y_2 = -r_2 \sin(\omega t) = -\frac{m_1 D}{m_1 + m_2} \sin(\omega t), \quad (3.170)$$

debido a que las partículas se mueven lentamente se puede utilizar la aproximación $T^{00} \approx \rho c^2$ donde ρ es la densidad de energía. Entonces el tensor de momento cuadrupolar reducido J^{jk} es:

$$J^{jk} = \int \rho c^2 \left(x^j x^k - \frac{1}{2} \eta^{jk} r^2 \right) dV = m_1 c^2 \left(x_1^j x_1^k - \frac{1}{2} \eta^{jk} r_1^2 \right) + m_2 c^2 \left(x_2^j x_2^k - \frac{1}{2} \eta^{jk} r_2^2 \right), \quad (3.171)$$

Calculemos la componente para $j = k = x$:

$$J^{xx} = m_1 c^2 \left[\frac{m_2^2 D^2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \frac{m_2^2 D^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] + m_2 c^2 \left[\frac{m_1^2 D^2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \frac{m_1^2 D^2}{(m_1 + m_2)^2} \right], \quad (3.172)$$

$$J^{xx} = c^2 \left[\frac{m_1 m_2^2 D^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 D^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \left[\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right], \quad (3.173)$$

$$J^{xx} = c^2 \frac{m_1 m_2 D^2}{m_1 + m_2} \left[\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right], \quad (3.174)$$

$$J^{xx} = \mu c^2 D^2 \left[\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} \right], \quad (3.175)$$

donde μ es la masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. De manera análoga se obtienen las otras componentes.

Así el tensor de momento cuadrupolar J^{jk} da:

$$J^{jk} = \mu c^2 D^2 \begin{bmatrix} \cos^2(\omega t) - \frac{1}{3} & \cos(\omega t) \sin(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) \sin(\omega t) & \sin^2(\omega t) - \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad (3.176)$$

Usando las identidades $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$ y $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ la anterior ecuación se convierte en:

$$J^{jk} = \frac{1}{2} c^2 \mu D^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{1}{3} - \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (3.177)$$

Su segunda y tercera derivada temporal son:

$$\ddot{J}^{jk} = 2\mu c^2 D^2 \omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) & 0 \\ -\sin(2\omega t) & \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.178)$$

$$\dddot{J}^{jk} = 4\mu c^2 D^2 \omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.179)$$

respectivamente. Esto ocurre en el Gauge TT para la radiación en la dirección $+z$, así que para un observador en la dirección $+z$ a una distancia R del sistema del centro de masa la perturbación métrica h^{jk}_{TT} es:

$$h^{jk}_{TT} = -\frac{4G}{Rc^4}\mu D^2 w^2 \begin{bmatrix} \cos [2w(t - \frac{R}{c})] & \sin [2w(t - \frac{R}{c})] & 0 \\ \sin [2w(t - \frac{R}{c})] & -\cos [2w(t - \frac{R}{c})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.180)$$

de donde:

$$A_+ = A_\times = \frac{4G}{Rc^4}\mu D^2 w^2. \quad (3.181)$$

Utilizando la ecuación (3.166) dada por:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^9} \mu^2 c^4 D^4 w^6 \langle \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \rangle, \quad (3.182)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{16G}{5c^5} \mu^2 D^4 w^6 \langle 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \rangle, \quad (3.183)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32G}{5c^5} \mu^2 D^4 w^6, \quad (3.184)$$

donde $\theta = 2w(t - \frac{R}{c})$. Así concluimos que la energía radiada se expresa en términos de μ , D , w , a continuación estudiaremos el caso para un sistema binario.

Aplicación a un sistema binario de estrellas

Supongamos un sistema binario de dos estrellas que se encuentren a una distancia D muy grande y que su movimiento sea lento de modo que la teoría gravitacional newtoniana sea válida. En estas condiciones se puede encontrar una relación entre la distancia D y la frecuencia angular w . Dado que la cantidad física más fácil de observar es w , se buscara una expresión que relacione D en términos de w . La segunda ley de Newton aplicada a la estrella de masa m_1 es:

$$\frac{Gm_1 m_2}{D^2} = \frac{m_1 v_1^2}{r_1}, \quad (3.185)$$

$$\frac{Gm_2}{D^2} = r_1 \left(\frac{v_1}{r_1} \right)^2 = \frac{m_2 D}{m_1 + m_2} w^2, \quad (3.186)$$

por lo tanto:

$$D^3 = \frac{GM}{w^2}, \quad (3.187)$$

donde M es la masa total $M = m_1 + m_2$. Las amplitudes de polarización (ver ecuación (3.181)), para una onda viajando en dirección $+z$ son:

$$A_+ = A_\times = \frac{4G}{Rc^4} \mu \left(\frac{GM}{w^2} \right)^{\frac{2}{3}} w^2, \quad (3.188)$$

$$A_+ = A_\times = \frac{4G}{Rc^4} \mu (GMw)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.189)$$

de manera análoga la energía irradiada sera:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32G}{5c^5}\mu^2\left(\frac{GM}{w^2}\right)^{\frac{4}{3}}w^6, \quad (3.190)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5GM^2c^5}\mu^2(GMw)^{\frac{10}{3}}. \quad (3.191)$$

La anterior ecuación implica que la energía perdida aumenta *drásticamente* a medida que la masa total M , ó la frecuencia angular w , aumenta. En los cálculos que se ha realizado hasta el momento se ha supuesto que las cantidades D y w permanecen constantes, sin embargo, para un sistema binario **real** la separación de las estrellas como la frecuencia angular *no permanece constante*, entonces los cálculos realizados hasta el momento no son del todo correctos, **pero** siempre que la energía irradiada se escape de manera lenta se justifica ignorar las variaciones temporales en D y w .

Sistema binario real

Asumiendo que la aproximación newtoniana sea correcta, la energía total de nuestro sistema binario es:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{D} = \frac{1}{2}m_1r_1^2w^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2w^2 - \frac{Gm_1m_2}{D}, \quad (3.192)$$

Usando las expresiones (3.167) y (3.168) la anterior ecuación se expresa como:

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2D}{m_1+m_2}\right)^2w^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1D}{m_1+m_2}\right)^2w^2 - \frac{Gm_1m_2}{D}, \quad (3.193)$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}D^2w^2 - \frac{Gm_1m_2}{D}, \quad (3.194)$$

reemplazando $D^3 = \frac{G(m_1+m_2)}{w^2}$ se tiene que:

$$E = -\frac{1}{2}\mu(GMw)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.195)$$

Por otra parte, la razón de cambio del período T se puede escribir como:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dw} \frac{dw}{dE} \frac{dE}{dt}, \quad (3.196)$$

donde $\frac{dT}{dw}$ se obtiene de $T = \frac{2\pi}{dw}$; $\frac{dw}{dE}$ se obtiene de la ecuación (3.195) y $\frac{dE}{dt}$ es la ecuación (3.191) tal que:

$$\frac{dT}{dw} = -\frac{2\pi}{w^2}, \quad (3.197)$$

$$\frac{dw}{dE} = -\frac{3}{GM}(GMw)^{\frac{2}{6}}, \quad (3.198)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5GM^2c^5}\mu^2(GMw)^{\frac{10}{3}}, \quad (3.199)$$

reemplazando en (3.196) se tiene que:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{Mc^5} \mu (GMw)^{\frac{5}{3}}. \quad (3.200)$$

Para tener más claro las ecuaciones anteriores consideremos los datos del sistema binario ϵ Boöres: dos estrellas con masa de $1,0M_{\odot}$ y $0,5M_{\odot}$ orbitando con un periodo $T = 23,300s$ la distancia a este sistema es de $3,6 \times 10^{17}m$ (OHANIAN Y RUFFINI, 2013). Para este sistema se obtienen los siguiente valores:

$$A_{\times} = 8,7 \times 10^{-21}, \quad (3.201)$$

$$\frac{dE}{dt} = -1,1 \times 10^{23}W, \quad (3.202)$$

$$\frac{dT}{dt} = -8,4 \times 10^{-14}. \quad (3.203)$$

Como es de esperarse, la razón de cambio en el período es muy pequeño, de la ecuación (3.104), se observa que la *elongación* debido al paso de una onda gravitacional es extremadamente pequeña, por lo cual parece casi imposible realizar una medición de tal magnitud. Cuando Albert Einstein descubrió el tamaño de la amplitud, dijo que seria imposible comprobar la existencia de las ondas gravitacionales; otro error de Einstein.

En 2015 se detectó las ondas gravitacionales en el ***observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser***, más conocido como LIGO, comprobando la predicción de Einstein y a la vez mostrando el error en el cuál se encontraba.

Entonces, luego se sumergimos en los *rizos espacio–temporales* vamos a entrar a explicar el funcionamiento principal y ciertos detalles experimentales de LIGO.

3.5. LIGO

Antes de comenzar, es necesario mencionar que el conocimiento utilizado por LIGO es muy amplio y avanzado por lo que es muy difícil explicar de manera detallada toda su instrumentación. Entonces, lo que se pretende es dar a conocer las *ideas básicas* de su funcionamiento de está manera los cálculos realizados en está sección, no son los más fieles a LIGO, con está aclaridad comencemos.

Para detectar ondas gravitacionales LIGO utiliza un *interferómetro de Michelson* que en su forma más simple consiste en un láser monocromático, un espejo de reflexión parcial (divisor de luz), dos espejos localizados a una distancia del divisor de luz en dos direcciones ortogonales y un fotodetector (SAULSON, 1994), ver figura 3.5.

Al encender el láser la luz transmitida llega al divisor de luz y luego viaja a los dos espejos que posteriormente los refleja para unirse en el divisor de luz y llegar al fotodetector. La medición

consiste en observar el patrón de interferencia en el fotodetector, es decir, se mide la diferencia de fase en los dos haces de luz.

Para proseguir con la parte matemática del interferómetro es necesario aclarar las características de los espejos y el divisor de luz: el divisor de luz es de 50-50, es decir, el coeficiente de reflexión es $C_r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $C_r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ver ANEXO D), del otro lado el coeficiente de transmisión es $C_t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, además los espejos en el final de los brazos son perfectamente reflectores, es decir, $r = -1$.

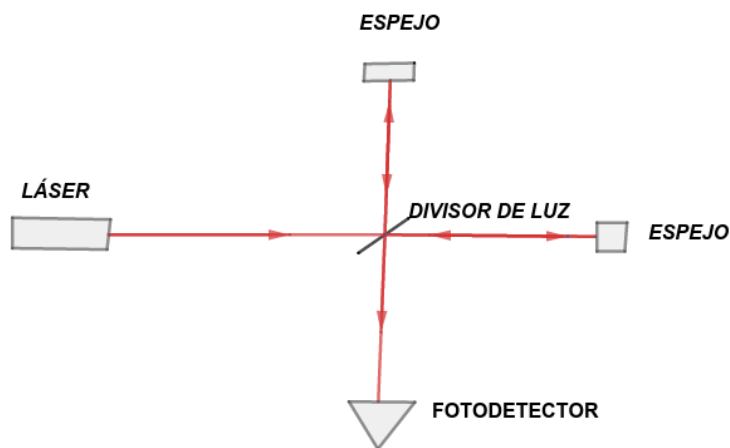


Figura 13: Interferómetro Michelson, utilizado para detectar ondas gravitacionales. Fuente la presente investigación

Considerando el interferómetro ubicado en el plano xy y nuestro origen de coordenadas en el divisor de luz, el campo eléctrico de la señal de luz de entrada es $E_0 e^{-i(\omega t - k_L x)}$, así cuando el haz de luz llega al divisor de luz campo eléctrico que es transmitido se multiplica por un factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y análogamente para la luz reflejada a lo largo del eje y .

Al incidir en el espejo totalmente refractante cada campo eléctrico se multiplica por -1 . Al llegar al divisor de luz el campo eléctrico que se refleja se multiplica por $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y el campo eléctrico que se transmite se multiplica por $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Entonces, el campo eléctrico de salida se expresa de la siguiente manera:

$$E_{salida} = +\frac{1}{2} E_0 e^{-i(\omega_L t - 2k_L L_y)} - \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\omega_L t - 2k_L L_x)}, \quad (3.204)$$

$$E_{salida} = -i E_0 e^{-i[\omega_L t - k_L(L_x + L_y)]} \sin[k_L(L_y - L_x)], \quad (3.205)$$

entonces la potencia medida por el fotodetector es proporcional a:

$$|E_{salida}|^2 = E_0^2 \sin^2[k_L(L_y - L_x)]. \quad (3.206)$$

Cuando $L_y = L_x$ se obtiene $|E_{salida}|^2 = 0$ entonces el fotodetector no realizara ninguna medición porque las ondas interfieren destructivamente. En conclusión, en ausencia de ondas gravitacionales no se observa ningún patrón de luz en el fotodetector.

Interacción con ondas gravitacionales: En la sección anterior descubrimos que el paso de una onda gravitacional produce un desplazamiento en las partículas en una determinada región, por lo tanto nuestro objetivo es *medir* el desplazamiento de los espejos haciendo uso del interferómetro en el cuál se observa un patrón de luz detectada por el fotodetector, expresado de manera más formal, es necesario medir la diferencia de fase entre los dos haces de luz.

Debido a que la onda gravitacional cambia la distancia a la cual se encuentran los espejos lo que se requiere es calcular el tiempo que se demora en llegar cada haz de luz al divisor. Para encontrar el tiempo que tarda cada haz de luz partamos del intervalo espacio-temporal ds^2 en el sistema TT para una polarización “vertical”, ver sección 4.2.2, dada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.207)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+(t)] dx^2 + [1 - h_+(t)] dy^2 + dz^2. \quad (3.208)$$

Los fotones se caracterizan por viajar a lo largo de geodesicas nulas, $ds^2 = 0$, así que para el haz de luz a lo largo del eje x se obtiene:

$$0 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+(t)] dx^2, \quad (3.209)$$

$$dx = \pm c dt \left[1 - \frac{h_+(t)}{2} \right], \quad (3.210)$$

donde se ha echo usa de la aproximación $(1 + x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ teniendo en cuenta que la amplitud de la onda gravitacional es débil. Aquí el *signo positivo* indica el viaje del haz de luz del divisor al espejo y el *signo negativo* indica el viaje del espejo al divisor. Considerando que el fotón llega al divisor de luz a un tiempo t_0 y tomando la longitud de los dos brazos como L la anterior ecuación se la puede integrar así:

$$L = \int_0^L dx = c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt' h_+(t'). \quad (3.211)$$

Luego el fotón es reflejado y regresa al divisor de luz a un tiempo t_2 entonces usando el signo menos de (3.210) se obtiene:

$$\int_L^0 dx = -c \int_{t_1}^{t_2} dt' \left[1 - \frac{1}{2} h_+(t') \right], \quad (3.212)$$

$$L = c(t_2 - t_1) - \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt' h_+(t'). \quad (3.213)$$

Sumando las ecuaciones (3.211) y (3.213) se obtiene:

$$t_2 - t_0 = \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt' h_+(t'), \quad (3.214)$$

$$t_2 - t_0 = \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt' A_+ \cos(w_{OG}t'), \quad (3.215)$$

$$t_2 - t_0 = \frac{2L}{c} + \frac{A_+}{2w_{OG}} \left\{ \sin \left[w_{OG} \left(t_0 + 2\frac{L}{c} \right) \right] - \sin(w_{OG}t_0) \right\}, \quad (3.216)$$

la indicación OG se la utiliza para no confundir las frecuencias asociadas a la onda gravitacional y la frecuencia del láser. Usando la identidad $\sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha) = 2 \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$ la anterior ecuación se reescribe como:

$$t_2 - t_0 = \frac{2L}{c} + \frac{A_+L}{c} \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})} \cos \left[w_{OG} \left(t_0 + \frac{L}{c} \right) \right], \quad (3.217)$$

$$t_2 - t_0 = \frac{2L}{c} + \frac{L}{c} h_+ \left[w_{OG} \left(t_0 + \frac{L}{c} \right) \right] \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})}, \quad (3.218)$$

De manera análoga para el brazo y se obtiene (lo que difiere es en el signo menos en $h(t)$):

$$t_2 - t_0 = \frac{2L}{c} - \frac{L}{c} h_+ \left[w_{OG} \left(t_0 + \frac{L}{c} \right) \right] \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})}. \quad (3.219)$$

En la práctica estamos interesados en el haz de luz que sale del divisor por lo que es útil reescribir las ecuaciones a un valor de tiempo $t_2 = t$ y calcular el valor correspondiente a t_0 , de esta manera las ecuaciones (3.218) y (3.219) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$t_0 = t - \frac{2L}{c} - \frac{L}{c} h_+ \left[w_{OG} \left(t - \frac{L}{c} \right) \right] \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})}, \quad (3.220)$$

$$t_0 = t - \frac{2L}{c} + \frac{L}{c} h_+ \left[w_{OG} \left(t - \frac{L}{c} \right) \right] \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})}. \quad (3.221)$$

Reemplazando cada tiempo en el campo eléctrico respectivo se obtiene:

$$E^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} E_0 e^{-iw(t-\frac{2L}{c})+i\Delta\phi_x}, \quad (3.222)$$

$$E^{(y)}(t) = +\frac{1}{2} E_0 e^{-iw(t-\frac{2L}{c})+i\Delta\phi_y}, \quad (3.223)$$

donde:

$$\Delta\phi_x = \frac{Lw}{c} h_+ \left[w_{OG} \left(t - \frac{L}{c} \right) \right] \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})}, \quad (3.224)$$

$$\Delta\phi_y = -\frac{Lw}{c} h_+ \left[w_{OG} \left(t - \frac{L}{c} \right) \right] \frac{\sin(w_{OG}\frac{L}{c})}{(w_{OG}\frac{L}{c})}, \quad (3.225)$$

donde se observa de manera clara que $\Delta\phi_x = -\Delta\phi_y$. El campo eléctrico de salida es la suma de los dos campos eléctricos de cada brazo es decir:

$$E_{salida}(t) = E^{(x)}(t) + E^{(y)}(t), \quad (3.226)$$

$$E_{salida}(t) = -\frac{1}{2} E_0 e^{-iw(t-\frac{2L}{c})+i\Delta\phi_x} + \frac{1}{2} E_0 e^{-iw(t-\frac{2L}{c})+i\Delta\phi_y}, \quad (3.227)$$

$$E_{salida}(t) = E_0 e^{-i\omega(t-\frac{2L}{c})} \frac{[-e^{i\Delta\phi_x} + e^{+i\Delta\phi_y}]}{2}, \quad (3.228)$$

$$E_{salida}(t) = E_0 e^{-i\omega(t-\frac{2L}{c})} \frac{[-e^{i\Delta\phi_x} + e^{-i\Delta\phi_x}]}{2}, \quad (3.229)$$

$$E_{salida}(t) = -iE_0 e^{-i\omega(t-\frac{2L}{c})} \sin \Delta\phi_x. \quad (3.230)$$

El potencial total ($|E_{salida}|^2$) observado por el fotodetector es:

$$P = P_0 \sin^2 \Delta\phi_x. \quad (3.231)$$

Está ecuación expresa que para detectar onas gravitacionales es necesario medir la cantidad $\Delta\phi_x$, para darnos una idea de su valor consideremos el caso cuando $\omega_{OG} \frac{L}{c} \ll 1$ entonces ϕ_x se puede aproximar a:

$$\Delta\phi_x \simeq h_+ \left(t - \frac{L}{c} \right) kL. \quad (3.232)$$

En términos del desplazamiento de los espejos ΔL , $\Delta\phi_x$ se puede escribir como:

$$\Delta\phi_x = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = k\Delta L. \quad (3.233)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.232) se puede expresar de la siguiente manera:

$$k\Delta L \simeq h_+ \left(t - \frac{L}{c} \right) kL, \quad (3.234)$$

$$\Delta L \simeq h_+ \left(t - \frac{L}{c} \right) L. \quad (3.235)$$

Suponiendo que los brazos tengan una longitud de $4000m$ y una amplitud de una onda gravitacional del orden de 10^{-21} (ver sección anterior) la variación correspondiente de los espejos es del orden:

$$\Delta L \sim 10^{-18}m. \quad (3.236)$$

Como se puede apreciar ΔL es un valor muy pequeño comparelo con el tamaño del núcleo atómico $10^{-15}m$. En conclusión, para medir el paso de una onda gravitacional por el interferómetro es necesario medir un desplazamiento de una milésima del tamaño del núcleo atómico.

3.6. Ruidos en el experimento

Debido a que la medición requerida es muy pequeña se debe aislar ó minimizar las diferentes clases de ruidos para no confundirlos con una señal de una onda gravitacional. A continuación se explica los ruidos más fundamentales y como minimizarlos.

- **Ruido cuántico:** Se produce debido a las fluctuaciones en el número de fotones *contados* por la fotocélula, para comprender la manera de *minimizar* este ruido es necesario encontrar la característica que debe tener el láser en el interferómetro.

Para contar el números de fotones se utiliza la *distribución de Poisson*⁶ dada por la siguiente expresión:

$$p(N_\gamma, \bar{N}_\gamma) := \frac{1}{\bar{N}_\gamma} \bar{N}_\gamma^{N_\gamma} e^{-\bar{N}_\gamma}, \quad (3.237)$$

donde \bar{N}_γ es el valor promedio del número de fotones N_γ . Esta distribución posee una característica muy importante: *la desviación estandar es igual a $\sqrt{\bar{N}_\gamma}$* :

$$\Delta N_\gamma = \sqrt{\bar{N}_\gamma}, \quad (3.238)$$

está ecuación expresa que entre mayor sea el número de fotones “*menor*” es la incerteza. Por lo tanto, para controlar el error cuántico se necesita un láser de alta potencia (un gran número de fotones por unidad de tiempo). Ahora, analicemos la relación del láser con la medición de la amplitud de ondas gravitacionales.

La potencia promedio medida por el fotodetector durante un tiempo de observación τ es:

$$P = \frac{1}{\tau} N_\gamma \hbar \omega_l. \quad (3.239)$$

Debido a que nuestro tratamiento es *semi-clásico* es necesario tener en cuenta el *principio de incertidumbre de Heisenberg*, que en términos de incertidumbre de energía y tiempo es :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{4\pi}, \quad (3.240)$$

pero como la energía está relaciona con el número de fónones, $\Delta E = \Delta N \hbar f$, y la incertidumbre en el tiempo se relaciona con la incertidumbre de fase, $\Delta \phi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta N_\gamma \geq \frac{1}{\Delta \phi}, \quad (3.241)$$

en el caso de la **igualdad** se obtiene:

$$\Delta N_\gamma = \frac{1}{\Delta \phi}, \quad (3.242)$$

entonces podemos relacionar la diferencia de láser entre nuestros haces de luz visto en la sección anterior. Usando (3.238) y (3.242) en (3.233) se llega a la siguiente expresión:

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2\pi N_\gamma^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.243)$$

⁶No se utiliza la estadística de Bose-Einstein porque se aplica a luz térmica, en nuestro caso el láser es una luz coherente, es decir, la onda emitida tiene una frecuencia.

utilizando (3.239) se obtiene:

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\tau P}{w_l \hbar} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{2\pi v} \left(\frac{\tau P}{w_l \hbar} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.244)$$

$$\Delta L = \frac{c}{2\pi v} \left(\frac{\tau P}{2\pi v \hbar} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.245)$$

$$\Delta L = \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\pi v \tau P}}, \quad (3.246)$$

y haciendo uso de (3.235) se obtiene una relación proporcional a la amplitud de onda requerida:

$$A = \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\pi v \tau P L^2}}. \quad (3.247)$$

está ecuación expresa que para realizar una medición sensible se escoge la longitud de los brazos lo más grande posible. Sin embargo, hay que recordar que los haces de luz deben completar su viaje en un tiempo más corto que la mitad del período de la onda gravitacional porque después de la mitad del período, el desplazamiento de los brazos del interferómetro se invierten y los efectos de interferencia cambian de signo (OHANIAN Y RUFFINI, 2013), y lo que nos interesa es observar el patrón de interferencia en nuestro fotodetector, para observarlo de manera más clara ver las figuras 3.1-3.4. Entonces la longitud máxima en cada brazo es de $L = \lambda_{OG}/2$. Además, el tiempo de medición T debe ser más corto que el tiempo del *pulso gravitacional*, es decir, lo que se requiere es realizar una medición antes de que el pulso desaparezca. De esta manera, se escoge el tiempo de medición como el período de la la onda gravitacional $\tau = T_{OG} = \frac{1}{v_{OG}}$. Bajo estas consideraciones la ecuación (3.246) se expresa como:

$$A = \sqrt{\frac{2c^2 \hbar}{\pi v P T_{OG} \lambda_{OG}^2}}, \quad (3.248)$$

$$A = \sqrt{\frac{2\hbar v_{OG}^3}{\pi v P}}. \quad (3.249)$$

Llegamos a la ecuación que relaciona la potencia del laser y la amplitud de la onda gravitacional. Si suponemos el láser con una frecuencia de $v = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$, con una potencia de $P = 200 \text{ watts}$ y para una onda gravitacional de frecuencia $v_{OG} = 100 \text{ Hz}$ se obtiene una amplitud proporcional de $A \sim 10^{-21}$.

- **Sismos:** Para comprobar la existencia de ondas gravitacionales se necesita medir el desplazamiento que producen en nuestros espejos, en consecuencia, se requiere que nuestros espejos permanezcan inmóviles a ruidos externos, es decir, a ruidos sísmicos; entonces: ¿cómo saber si lo que se mide es realmente una onda gravitacional y no *ruidos sísmicos*?

Nuestro detector debe ser sensible a una frecuencia de alrededor de unos 100Hz y los ruidos sísmicos se presenta a varias frecuencias. El instrumento que se utiliza para minimizar el ruido sísmico es un *péndulo simple*, colgamos nuestros espejos del interferómetro con hilos. El péndulo posee unas características muy importantes: a una frecuencia específica el péndulo se mueve mucho, a frecuencias bajas se mueve todo junto y en el caso que se tenga frecuencias más altas su movimiento es casi imperceptible, este es el fenómeno de **resonancia**. Para evitar que el péndulo se mueva a la frecuencia de resonancia pegamos unos imanes minúsculos al espejo y se utilizan electroimanes, es decir, instrumentos que generan campo magnéticos para empujar nuestro espejo. LIGO utiliza péndulos en cascada, es decir, cuatro péndulos seguidos, uno atado en la parte inferior del otro, de esta manera se reduce aún más el ruido (LIGO, n.d).

- **Ruidos sonoros:** Los sonidos producidos por las personas alrededor del experimento se hacen detectables, por lo tanto para eliminar las *ondas sonoras* los brazos deben permanecer en el vacío (LIGO, n.d).

Aún bajo estas condiciones pueden existir ruidos locales, es decir, ruidos producidos por la región que pueden confundirse con señales de ondas gravitacionales es por esto que se construyeron dos observatorios de ondas gravitacionales en Estados Unidos (funcionando a la vez) para verificar que la señal detectada es producida por una onda gravitacional.⁷

⁷Los observatorios se encuentran en Luisiana y en Richland.

CAPÍTULO 4

ESTRUCTURA CUÁNTICA DEL ESPACIO—TIEMPO

Desvelar los secretos de la naturaleza conlleva ha adquirir una nueva manera de observar la realidad, es cambiar nuestra manera de percibir y percibirnos. Un *reflejo* de lo anterior ocurrió cuando los científicos intentaban comprender la *estructura de la materia*, los átomos, porque se dieron cuenta que los conceptos clásicos no funcionaban en escalas pequeñas, fue en este momento que la física clásica se desmoronó, era como si los conceptos clásicos estuvieran sostenidos por pilares de papel, de esta forma la manera clásica de percibir el mundo no era la más profunda, era necesario encontrar una nueva teoría.

Así surgió la *mecánica cuántica* una teoría que predice los fenómenos atómicos. Está desconcertante teoría maneja muchos conceptos que clásicamente son inaceptables como por ejemplo: la dualidad onda—corpúsculo, energías discretas, efecto túnel. Un concepto cuántico de suma importancia es *el principio de incertidumbre de Heisenberg*: las partículas cuánticas no se pueden localizar, existe una *limitación* en nuestra manera de ver la naturaleza.

Ya que nuestro contexto de trabajo es la relatividad general aquí surge la pregunta: ¿existen problemas de localización propias del espacio—tiempo?, al parecer esta cuestión no es tan fácil de responder. Para intentar dar una respuesta remitamos al siguiente *experimento mental* (*gedanken experimenten*): imagine que usted desea **localizar** un evento en una región O del espacio—tiempo, para eso usted debería enviar un pulso de luz con una longitud de onda tal que sea igual al tamaño de la región O , nada extraño hasta el momento; ahora suponga que la región O es extremadamente pequeña, siguiendo el mismo proceso anterior, usted debería enviar un pulso de luz con una longitud de onda extremadamente pequeña lo cual conlleva a enviar una energía muy grande en la región O por consiguiente se generaría, en principio, un **agujero negro**.⁸

Al generarse un agujero negro ninguna información podría salir, haciendo que la localización de un evento no tenga sentido (TOMASSINI Y VIAGGIU, 2014) , por esta razón se propone la idea que existen ciertos principios de incertidumbre asociados al espacio—tiempo que eviten la generación de un agujero negro *diminuto*.

El objetivo de este capítulo es encontrar, de manera **heurística**⁹, las relaciones de incertidumbre para el espacio—tiempo utilizando los principios básicos de la mecánica cuántica y la relatividad general siguiendo el modelo planteado por Doplicher, Fredenhagen y Roberts, este modelo se conoce como **DFR** (DOPLICHER, FREDENHAGEN Y ROBERTS, 1995).

⁸Recuerde que una gran concentración de energía en una región del espacio—tiempo puede generar un agujero negro.

⁹Un argumento que no es riguroso pero permitiendo un resultado de forma aproximada.

4.1. Deducción de los principios de incertidumbre para el espacio—tiempo

Suponga que se desea realizar una medición de una coordenada espaciotemporal, entonces, en principio, se debería concentrar una cantidad de energía, en un determinado tiempo, en la región de localización, así se generaría un campo gravitacional que debería determinarse a partir de las ecuaciones de Einstein-Hilbert:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

en el límite newtoniano las anteriores ecuaciones se escriben como:

$$\square^2 H_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

cuya solución viene dada por (ver ANEXO B):

$$H_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int d\mathbf{z}^3 \frac{T_{\mu\nu} \left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}{c} \right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}. \quad (4.3)$$

Asumiendo que las componentes del tensor de energía—momento $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$ son despreciables la anterior ecuación se convierte en :

$$H_{00} = \frac{4G}{c^4} \int d\mathbf{z}^3 \frac{T_{00} \left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}{c} \right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}, \quad (4.4)$$

$$H_{00} = \frac{4G}{c^4} \int d\mathbf{z}^3 \frac{\varrho \left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}{c} \right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}, \quad (4.5)$$

en la segunda línea se ha echo uso de que $T_{00} = \varrho$, donde ϱ es la densidad de energía. Del capítulo 2 sabemos que:

$$g_{00} \sim -\frac{\Phi}{c^2}, \quad (4.6)$$

donde Φ es el potencial newtoniano. La anterior ecuación implica que:

$$H_{00} \sim -\frac{\Phi}{c^2}. \quad (4.7)$$

Entonces la ecuación (4.5) se escribe como:

$$\Phi \sim -\frac{G}{c^2} \int d\mathbf{z}^3 \frac{\varrho \left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}{c} \right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}, \quad (4.8)$$

Evaluando el potencial newtoniano en $t = 0$ y $|\mathbf{x}| = 0$, la anterior ecuación se puede escribir como:

$$\Phi \sim -\frac{G}{c^2} \int d\mathbf{z}^3 \frac{\varrho \left(r, -\frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (4.9)$$

Suponiendo que la densidad de energía $\varrho(-t)$ se distribuye en un volumen con lados $(\Delta x_1 + ct)(\Delta x_2 + ct)(\Delta x_3 + ct)$ la anterior ecuación se convierte en

$$\Phi \sim -\frac{G}{c^2} \int d\mathbf{z}^3 \frac{1}{r} \frac{\Delta E}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}. \quad (4.10)$$

Asumiendo que el principio de incertidumbre de Heisenberg que relaciona la incertidumbre de energía y tiempo cumple que:

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar. \quad (4.11)$$

De esta manera, la ecuación (4.10) se escribe como:

$$\Phi \sim -\frac{G}{c^2} \int d\mathbf{z}^3 \frac{1}{r} \frac{(\hbar \frac{1}{\Delta t})}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}, \quad (4.12)$$

$$\Phi \sim -\frac{G\hbar}{c^2 \Delta t} \int d\mathbf{z}^3 \frac{1}{r} \frac{1}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}, \quad (4.13)$$

$$\Phi \sim -\frac{G\hbar}{c^2 \Delta t} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}. \quad (4.14)$$

$$\Phi \sim -\frac{G\hbar}{c\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}. \quad (4.15)$$

La anterior integral es fácil de resolver en tres regiones:

Primera región $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$,

Segunda región $\Delta x_1 = \Delta x_2 \gg \Delta x_3$,

Tercera región $\Delta x_2 = \Delta x_3 \gg \Delta x_1$.

Denotaremos \mathfrak{S} a la integral:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)} \quad (4.16)$$

Primera Región: En este caso la integral se resuelve como se indica a continuación:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)^3}, \quad (4.17)$$

realizando cambio de variable como $W = \Delta x_1 + r$ la anterior integral se transforma como:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_1}^\infty \frac{(W - \Delta x_1) dW}{W^3}, \quad (4.18)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \left(\int_{\Delta x_1}^\infty \frac{dW}{W^2} - \Delta x_1 \int_{\Delta x_1}^\infty \frac{dW}{W^3} \right), \quad (4.19)$$

$$\mathfrak{S} \sim \frac{1}{\Delta x_0 \Delta x_1}. \quad (4.20)$$

Reemplazando en (4.15) se tiene:

$$\Phi \sim -\frac{G\hbar}{c} \frac{1}{\Delta x_0 \Delta x_1}. \quad (4.21)$$

Debido a que los fotones no deben ser atrapados en la región de localización se propone la condición $-\Phi \lesssim c^2$ (ver ANEXO E) de esta manera la anterior ecuación se convierte en:

$$\Delta x_0 \Delta x_1 \gtrsim \delta_{Planck}^2, \quad (4.22)$$

donde δ_{Planck} es la longitud de Planck definida como $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$.

Segundo región: En este caso la integral se resuelve como se indica a continuación:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)^2 (\Delta x_3 + r)}. \quad (4.23)$$

Realizando el cambio de variable $W = \Delta x_1 + r$ la integral se transforma como

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_1}^\infty \frac{(W - \Delta x_1) dW}{W^2 (\Delta x_3 - \Delta x_1 + W)}. \quad (4.24)$$

Utilizando la condición $\Delta x_1 \gg \Delta x_3$ la anterior ecuación se puede aproximar a:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_1}^\infty \frac{dW}{W^2}. \quad (4.25)$$

Resolviendo la integral se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0 \Delta x_1}, \quad (4.26)$$

qué cumple la condición de la *primera región*.

Tercera Región: En este caso la integral se resuelve como se indica a continuación:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)^2}. \quad (4.27)$$

Realizando el cambio de variable $W = r + \Delta x_2$ la integral anterior se transforma en:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_2}^\infty \frac{(W - \Delta x_2) dr}{W^2 (\Delta x_1 - \Delta x_2 + W)}. \quad (4.28)$$

Ahora utilizando la condición $\Delta x_1 \gg \Delta x_2$ la anterior integral puede aproximarse a:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_2}^\infty \frac{(W - \Delta x_2) dr}{W^2 (W + \Delta x_1)}, \quad (4.29)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_2}^\infty dW \left[\frac{1}{W(W + \Delta x_1)} - \frac{\Delta x_2}{W^2(W + \Delta x_1)} \right]. \quad (4.30)$$

Utilizando fracciones parciales la integral anterior se puede escribir como:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{\Delta x_2}^\infty dW \left\{ \frac{1}{W(W + \Delta x_1)} - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \left[\frac{1}{W^2} - \frac{1}{W(W + \Delta x_1)} \right] \right\}, \quad (4.31)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ -\frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(1 + \frac{\Delta x_1}{W} \right) - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \left[-\frac{1}{W} + \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(1 + \frac{\Delta x_1}{W} \right) \right] \right\}_{\Delta x_2}^\infty. \quad (4.32)$$

Evaluando los intervalos se encuentra que para el límite superior el resultado es cero y para el límite inferior se obtiene que:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \left[\frac{1}{\Delta x_2} - \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) \right] \right\} \quad (4.33)$$

Si utilizamos la condición para esta región $\Delta x_1 \gg \Delta x_2$ la anterior ecuación puede escribirse a buena aproximación como:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \left[\frac{1}{\Delta x_2} - \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) \right] \right\}, \quad (4.34)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) \left[1 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right] - \frac{1}{\Delta x_1} \right\}, \quad (4.35)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ \frac{1}{\Delta x_1} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) - \frac{1}{\Delta x_1} \right\}, \quad (4.36)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0 \Delta x_1} \left[\ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) - 1 \right], \quad (4.37)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\Delta x_0 \Delta x_1} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right). \quad (4.38)$$

Reemplazando la anterior ecuación en (4.10) se obtiene que:

$$\Phi \sim -\frac{G\hbar}{c} \frac{1}{\Delta x_0 \Delta x_1} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right). \quad (4.39)$$

Al aplicar la condición de los fotones a la anterior ecuación se concluye que:

$$\Delta x_0 \Delta x_1 \gtrsim \delta^2_{Planck} \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) \quad (4.40)$$

Si $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$ es el orden de la unidad regresamos al primer caso. Entonces el límite absoluto está dado por la **primera región** dado por:

$$\Delta x_0 \Delta x_1 \gtrsim \delta^2_{Planck}, \quad (4.41)$$

que en tres dimensiones espaciales sería:

$$\Delta x_0 \sum_{j=1}^3 \Delta x_j \gtrsim \delta^2_{Planck}. \quad (4.42)$$

Recuerde también que existe una relación de energía en la relatividad especial que para partículas con masa despreciable es:

$$E = |\mathbf{k}| c \quad (4.43)$$

donde $|\mathbf{k}|$ es la magnitud del momentum espacial. El paso que seguiremos es encontrar *otra* relación de incertidumbre para el espacio–tiempo haciendo uso de la energía relativista. De la anterior ecuación es fácil observar que ΔE es igual a:

$$\Delta E = \sqrt{\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + \Delta k_3^2} c \quad (4.44)$$

Utilizando el principio de incertidumbre Heisenberg para las coordenadas y el momento se obtiene que:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta x_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta x_3}\right)^2} c\hbar, \quad (4.45)$$

utilizando la desigualdad muy cruda:

$$\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2} + \frac{1}{\Delta x_3} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta x_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta x_3}\right)^2}. \quad (4.46)$$

La ecuación (4.45) se convierte en la desigualdad:

$$\Delta E \leq \left(\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2} + \frac{1}{\Delta x_3}\right) c\hbar \quad (4.47)$$

reemplazando la anterior ecuación en (4.10) se obtiene que:

$$\Phi \leq -\frac{G\hbar}{c} \left(\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2} + \frac{1}{\Delta x_3}\right) \int d\mathbf{z}^3 \frac{1}{r(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}, \quad (4.48)$$

$$\Phi \leq -\frac{G\hbar}{c} \left(\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}\right) (\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta x_2 \Delta x_3) \int d\mathbf{z}^3 \frac{1}{r(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}, \quad (4.49)$$

Tengamos en cuenta la desigualdad:

$$\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta x_2 \Delta x_3 \geq \frac{\Delta x_1^2 \Delta x_2 \Delta x_3}{\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta x_2 \Delta x_3} \quad (4.50)$$

Utilizando la desigualdad (4.50), la ecuación (4.51) se puede escribir como:

$$\Phi \leq -\frac{G\hbar}{c} \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta x_2 \Delta x_3}\right) \int d\mathbf{z}^3 \frac{1}{r(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)}. \quad (4.51)$$

Para calcular la integral hacemos uso de los valores obtenidos en las regiones anteriores.

Primera y segunda región: Para estas regiones se obtuvo el valor de $\frac{1}{\Delta x_1}$, entonces la ecuación (4.51) es igual a:

$$\Phi \leq -\frac{G\hbar}{c} \left(\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta x_2 \Delta x_3}\right), \quad (4.52)$$

Imponiendo la condición para que los fotones no queden atrapados $-\Phi \lesssim c^2$ la anterior ecuación se convierte en:

$$\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta x_3 \Delta x_2 \gtrsim \delta_{Planck}^2. \quad (4.53)$$

De manera análoga, se obtiene este valor para la **tercera región**.

En conclusión, hemos obtenido relaciones de incertidumbre para el espacio–tiempo (*utilizando aproximaciones muy crudas*) a partir de conceptos clásicos de relatividad general y del principio de incertidumbre Heisenberg, dadas por:

$$\Delta x_0(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3) \gtrsim \delta^2_{Planck}, \quad (4.54)$$

$$\Delta x_1\Delta x_2 + \Delta x_1\Delta x_3 + \Delta x_3\Delta x_2 \gtrsim \delta^2_{Planck}, \quad (4.55)$$

las cuales son la motivación principal para trabajar en geometrías no conmutativas relacionadas con la teoría de la gravedad cuántica (DOPLICHER, FREDENHAGEN Y ROBERTS, 1994).

CONCLUSIONES

Se ha identificado como densidad lagrangiana al escalar de Ricci R , escalar de curvatura del espacio–tiempo, para obtener las ecuaciones de Einstein–Hilbert.

En la solución de Schwarzschild se identificó una pseudosingularidad en $r = S$ y una singularidad física en $r = 0$. La primera tiene un significado físico actuando como una membrana unidireccional llamada **horizonte de eventos**.

Identificamos los diagramas de Penrose-Carter como mecanismos que nos permiten hacer los *infinitos visibles* y para eso escogimos una transformación asintótica en el infinito tal que conserven la causalidad en el espacio–tiempo, aplicamos este proceso para el espacio–tiempo de Minkowski y de Kruskal Szekeres.

Aplicando el *límite de campo débil* a las ecuaciones de Einstein–Hilbert se obtuvo la famosa ecuación diferencial de las ondas gravitacionales. Se comprendió el efecto físico sobre las partículas y que fuentes generan ondas gravitacionales, en especial, se demostró que un objeto simétrico no puede generar ondas gravitacionales. Adicionalmente, identificamos el inconveniente que se presenta al asociar una energía al campo gravitacional a causa del principio de equivalencia, sin embargo, en el contexto que nos compete, *límite de campo débil*, se logró asociar una energía al campo gravitacional.

Se realizó una descripción de LIGO cuyo principio fundamental es el interferómetro de Michelson, donde en ausencia de ondas gravitacionales los haces de luz producen interferencia destructiva y al paso de una onda gravitacional existe un patrón de interferencia el cuál se detecta por el fotodetector. Por otra parte, se comprendió como LIGO trata con los ruidos presentes en el experimento los cuales son: ruido cuántico, consiste en las fluctuaciones en el número de fotones contados por el fotodetector el cual se minimiza contando una gran cantidad de fotones; ruido de los sismos, causado por el movimiento de la tierra, para minimizar este ruido se utiliza péndulos debido a sus características de resonancia; ruidos sonoros, sonidos producidos, en general, por las personas alrededor del experimento y se minimiza realizando vacío en el experimento.

Se realizaron los cálculos para obtener los principios de incertidumbre para el espacio–tiempo planteados por Doplicher, Fredenhagen y Roberts. Como guía para este proceso se utilizó un **experimento mental**: para localizar un evento diminuto en el espacio–tiempo se necesita una gran cantidad de energía generando, en principio, un agujero negro.

RECOMENDACIONES

Se recomienda realizar un estudio de las soluciones a las ecuaciones de Einstein–Hilbert llamadas: *la solución de Kerr*, *la solución de Reissner–Nordström* y *la solución de Kerr–Newman*, que consisten en: un objeto simétrico con rotación, un objeto simétrico sin rotación con carga eléctrica y un objeto simétrico con rotación y carga eléctrica, respectivamente. Además, se recomienda realizar una monografía para encontrar las estructuras algebraicas del modelo planteado por Doplicher, Fredenhagen y Roberts.

BIBLIOGRAFÍA

- ASAF, PE/ER(2015). Vectors and tensors in curved space time.
Recuperado de [http : //www.physics.ucc.ie/appeer/PY4112/Tensors.pdf](http://www.physics.ucc.ie/appeer/PY4112/Tensors.pdf).
Citado el 28 de Enero de 2019.
- CARROLL, S. M. (2005). Spacetime and Geometry: An introduction to general relativity.
Addison Wesley , 512, 159-164 y 302.
- CHENG, TP (2009). Relativity, gravitation and cosmology: a basic introduction. *Oxford University Press*, 435, 119
- DE LA TORRE, L. (2008). Elementos de relatividad. *Universidad de Antioquia*, 419, 29 y 263.
- DEWITT, B. (2011). Bryce DeWitt's Lectures on Gravitation *Springer* , 179-180.
- DOPLICHER, S., FREDENHAGEN, K. Y ROBERTS, J. E. (1995). The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields.
Communications in Mathematical Physics, 172 (1), 187-220.
arXiv:hep-th/0303037.
- DOPLICHER, S., FREDENHAGEN, K. Y ROBERTS, J. E. (1994). Spacetime quantization induced by classical gravity *Physics Letters B* , 331 (1-2), 39-44.
- FERREIRA, P. G. (2014). La teoría perfecta. *Anagrama* , 472, sección 4.
- HOBSON, M. P., EFSTATHIOU, G. P., Y LASENBY, A. N. (2006). General Relativity: An introduction for Physicists. *Cambridge University Press*.
572, 197.
- ISAACSON, W. (2007). Einstein: Su vida y su universo. *Debate*, 734, 257.
- JANSSEN, B. (2013). Teoría de la Relatividad General . *Universidad de Granada*. 243, 145.
- KAEONIKHOM, C. (2006). Variational Principle Approach to General Relativity.
Naresuan University. 55, 24-28.
- LARRAÑAGA, E. (2008). Agujeros Negros Clásicos. *Universidad Nacional de Colombia*, 178, 53.
- LIGO, (n.d). Recuperado de [https : //www.ligo.caltech.edu/page/ligo – technology](https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-technology).
Citado el 18 de Octubre de 2019.

- MAGGIORE, M. (2008). Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments. *Oxford university press*, 554, 471-482.
- MOORE, T. A. (2010). A general relativity workbook. *University Science Books*, 440, 317-319.
- NABER, G. (1992). The Geometry of Minkowski Spacetime. *Courier Corporation*, 257,1.
- NETTO, R. *Físicanet*. n.d. Recuperado de [http : www.fisicanet.com.ar/biografias/cientificos /p/popper.php](http://www.fisicanet.com.ar/biografias/cientificos/p/popper.php). Citado el 16 de mayo 2019.
- NORTON, J. (2001-2018). *A Better Picture of Black Holes*. Recuperado de [https : //www.pitt.edu/ jdnorton/teaching/HPS.0410/chapters /black.holes.picture/index.html](https://www.pitt.edu/jdnorton/teaching/HPS.0410/chapters/black.holes.picture/index.html).
- OHANIAN, H. C., Y RUFFINI, R. (2013). Gravitation and spacetime. *Cambridge University Press*. 545, 70 y 200.
- OKUN, L. B. (2000). *Photons and static gravity*. *Modern Physics Letters A*, 15 (31), 1941-1947.
- POISSON, E. (2002). An advanced course in general relativity. *University of Guelph*. 174, 96.
- POPPER, K. (1991). La lógica de la investigación científica, Madrid: *Tecnos*, 1973.
Popper, Karl. The Open Universe. An argument for Indeterminism, Londres: *Routledge*, 576, 260-261.
- SHARAN, P. (2009). Spacetime, Geometry and Gravitation. *Springer Science y Business Media*, 528, 299-303.
- SAULSON, P. R. (1994). Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors. *World Scientific Publishing Company*, 336, 13.
- TOMASSINI , L., Y VIAGGIU, S. (2014). Building non-commutative spacetimes at the Planck length for Friedmann flat cosmologies. *Classical and Quantum Gravity*, 31 (18), 185001. arXiv:1308.2767.

ANEXOS

ANEXO A: APROXIMACIÓN DE LA MÉTRICA EN EL LÍMITE DE CAMPO DÉBIL

El cuadrivector de una partícula libre U^μ en coordenadas Minkowskianas $x^\mu = (ct, x, y, z)$ esta dado por:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (\text{A.1})$$

Para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, $\mathbf{v} \ll c$, la anterior ecuación indica la componente temporal de la cuadrivelocidad es mucho mayor que las componentes espaciales de la cuadrivelocidad, matemáticamente se expresa como:

$$U^0 \gg U^a, \quad (\text{A.2})$$

es decir, el factor $\frac{dx^a}{d\tau}$ es despreciable en comparación con el factor $\frac{dx^0}{d\tau}$. La trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo se expresa a partir de la ecuación diferencial de las geodésicas (E.D.G):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (\text{A.3})$$

donde λ es el parámetro afín . Consideremos el tiempo propio $d\tau$, tiempo que marca un reloj que acompaña la partícula, como el parámetro afín, es decir:

$$d^2 s = -c^2 d\tau^2. \quad (\text{A.4})$$

Así la E.D.G es:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (\text{A.5})$$

Usando la identidad (A.2) se obtiene que:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} - \Gamma^\sigma_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} \approx -\Gamma^\sigma_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -c^2 \Gamma^\sigma_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (\text{A.8})$$

donde en la última ecuación se ha echo uso de $dx^0 = cdt$. Para calcular el símbolo de Christoffel Γ^σ_{00} se utiliza la siguiente expresión:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (\text{A.9})$$

En nuestro caso $\mu, \nu = 0$:

$$\Gamma^\sigma_{00} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(g_{0\alpha,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}). \quad (\text{A.10})$$

Debido a que el campo gravitacional es estático las derivadas $g_{\alpha 0,0}$, $g_{0\alpha,0}$ son cero. Entonces se obtiene la expresión:

$$\Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2}g^{\sigma a}g_{00,a}. \quad (\text{A.11})$$

Si el campo gravitacional es débil el tensor métrico se escribe como:

$$g_{\beta\delta} = \eta_{\beta\delta} + h_{\beta\delta}, \quad (\text{A.12})$$

donde $\eta_{\beta\delta}$ es la métrica de Minkowsky caracterizada por un espaciotiempo plano y $h_{\beta\delta}$, conocido como el **factor de perturbación**, es una matriz 4x4 con componentes $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y primeras derivadas pequeñas. En estas condiciones se puede operar la ecuación (A.11) de la siguiente manera:

$$\Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2}(\eta^{\sigma a} + h^{\sigma a})(\eta_{00,b} + h_{00,a}), \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2}(\eta^{\sigma a} + h^{\sigma b})(h_{00,a}), \quad (\text{A.14})$$

$$\Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2}(\eta^{\sigma a}h_{00,a} + h^{\sigma b}h_{00,a}), \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\sigma a}h_{00,a}, \quad (\text{A.16})$$

donde se ha despreciado el término $h^{\sigma b}h_{00,a}$. Por lo tanto, la ecuación (A.8) es:

$$\frac{d^2x^\varsigma}{d\tau^2} = \frac{1}{2}c^2\eta^{\varsigma a}h_{00,a} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (\text{A.17})$$

Escribiendo la anterior ecuación para $\varsigma = 0$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = \frac{1}{2}c^2\eta^{0a}h_{00,a} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (\text{A.18})$$

Lo cuál implica que $a = 0$, pero como la métrica es estática (independiente del tiempo) se tiene:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \text{constante}, \quad (\text{A.20})$$

Escribiendo la ecuación (A.17) para $\varsigma = b$:

$$\frac{d^2x^b}{d\varsigma^2} = \frac{1}{2}c^2\eta^{ba}h_{00,a} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \quad (\text{A.21})$$

donde se cumple que $a = b$, entonces:

$$\frac{d^2x^b}{d\varsigma^2} = \frac{1}{2}c^2\eta^{bb}h_{00,b} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d^2 x^b}{d\tau^2} = \frac{1}{2} c^2 \frac{dh_{00}}{dx_b} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (\text{A.24})$$

Por regla de la derivación en cadena se puede afirmar que :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tau}. \quad (\text{A.25})$$

Derivando nuevamente respecto a la variable τ y como $dt/d\tau$ es constante se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (\text{A.26})$$

Usando la propiedad anterior, la ecuación (A.11) se convierte en:

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00}. \quad (\text{A.28})$$

De la gravitación newtoniana se conoce que la fuerza gravitacional \mathbf{F} entre dos masas M y m separadas una distancia r se expresa como:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{A.29})$$

Además por las leyes de newton se conoce que la aceleración que ejerce un cuerpo de masa M a una distancia r es:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{A.30})$$

El potencial gravitacional Φ se enuncia como:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}. \quad (\text{A.31})$$

Por lo tanto, la aceleración \mathbf{a} en términos del potencial gravitacional Φ es:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi. \quad (\text{A.32})$$

Con la anterior propiedad la ecuación (A.13) se escribe como:

$$\frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00} = -\nabla \Phi. \quad (\text{A.33})$$

Organizando términos :

$$\nabla \left(h_{00} + \frac{2}{c^2} \Phi \right) = 0. \quad (\text{A.34})$$

Para que la anterior ecuación sea válida se debe cumplir :

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \Phi + S_e, \quad (\text{A.35})$$

donde S_e es una constante. Esta constante se determina en un punto donde $\Phi = 0$, es decir, un espaciotiempo donde no exista campo gravitacional $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Por consiguiente $h_{\mu\nu} = 0$, entonces se cumple que la constante S_e es cero. De esta manera se obtiene:

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}\Phi, \quad (\text{A.36})$$

De aquí, se deduce que:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \quad (\text{A.37})$$

ANEXO B: SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA POR EL MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN

La función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ para la ecuación de onda es:

$$\square G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t'), \quad (\text{B.1})$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + \nabla^2 G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t'). \quad (\text{B.2})$$

Para encontrar la solución se utilizara la transformada de Fourier en cuatro dimensiones que para la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ se define como:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int d^3\mathbf{k}dw \ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)}, \quad (\text{B.3})$$

donde $\ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t')$ es la función transformada. El paso siguiente es encontrar la ecuación de onda para la función transformada ℓ la cuál se obtiene reemplazando (B.3) en (B.2):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int d^3\mathbf{k}dw \ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)} \right] + \nabla^2 \left[\int d^3\mathbf{k}dw \ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)} \right] \\ = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Antes de proseguir observe que la transformada de Fourier para la distribución delta de Dirac **temporal** es:

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-iw(t-t')}, \quad (\text{B.5})$$

y para la distribución delta de Dirac **espacial**:

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (\text{B.6})$$

Así se concluye:

$$\delta(t - t')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d^3\mathbf{k}dw e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - w(t-t)]}. \quad (\text{B.7})$$

Reemplazando la anterior ecuación en (B.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int d^3\mathbf{k}dw \ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)} \right] + \nabla^2 \left[\int d^3\mathbf{k}dw \ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)} \right] \\ = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d^3\mathbf{k}dw e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - w(t-t)]}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Realizando las derivadas parciales se llega a la siguiente expresión:

$$\int d^3\mathbf{k}dw \left(-k^2 + \frac{w^2}{c^2} \right) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)} \ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d^3\mathbf{k}dw e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - w(t-t)]}, \quad (\text{B.9})$$

eliminando integrales:

$$\left(-k^2 + \frac{w^2}{c^2}\right)\ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t')e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-w(t-t')]}, \quad (\text{B.10})$$

despejando la función ℓ se obtiene:

$$\ell(\mathbf{k}, w; \mathbf{x}', t') = \frac{c^2}{16\pi^4} \frac{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-wt')}}{w^2 - k^2c^2}. \quad (\text{B.11})$$

Reemplazando la anterior ecuación en (B.2) se obtiene la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{c^2}{16\pi^4} \int d^3\mathbf{k}dw \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-w(t-t')]}{w^2 - k^2c^2}. \quad (\text{B.12})$$

Para realizar la anterior integral primero se resuelve sobre w porque resulta la forma más simple de lidiar con las singularidades en $w = \pm kc$. El intervalo de integración en la variable w es $[-\infty, \infty]$ lo cuál implica integrar a través de las *singularidades*.

Este problema se resuelve al elegir w como una variable compleja, entonces se evita cada una de las singularidades rodeandola en el plano complejo. Existen diferentes formas de evitar las singularidades, cada camino da una función de Green válida para la ecuacion de onda; ya que la ecuacion de onda es de segundo orden deben existir dos soluciones linealmente independientes.

Centraremos nuestro estudio en dos caminos particulares:

- **Primer camino** que pasa por encima de las singularidades en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- **Segundo camino** que pasa por debajo de ambas singularidades en sentido de las manecillas del reloj.

Gráficamente se observa como:

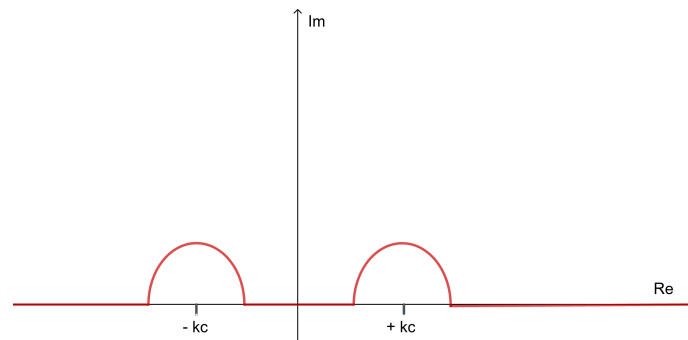


Figura 14: Primer camino para la integral se camino. Fuente la presente investigación

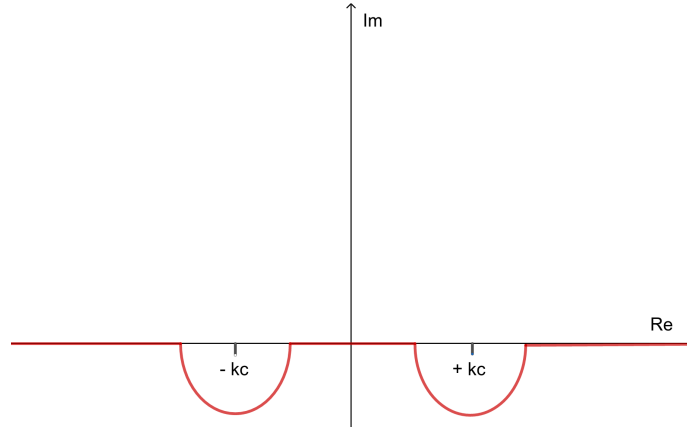


Figura 15: Segundo camino para la integral de camino. Fuente la presente investigación

Para resolver la integral en el plano complejo w se utilizara la fórmula de la integral de Cauchy. Sea $f(w)$ una función analítica sobre el contorno C ; es decir, que se puede escribir como una serie de potencias convergente, se cumple la proposición:

$$\oint_C dw f(w) = 2\pi i \sum_{R_i \in C} R_i, \quad (\text{B.13})$$

donde R_i son los residuos de $f(w)$ de la forma $\frac{1}{w-w_i}$. En nuestro caso se tiene sólo una integral de $-\infty$ a ∞ a lo largo del eje real w . Para realizar la integral de Cauchy es necesario cerrar la ruta de integración agregando un semicirculo de radio $r \rightarrow \infty$ en la mitad superior o inferior del plano w complejo. La integral en w que se requiere resolver es de la forma:

$$\frac{e^{-iw(t-t')}}{(w+kc)(w-kc)}, \quad (\text{B.14})$$

ya que el factor $e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')]}$ permanece constante en el espacio w . Al separar a la variable w en términos de su parte real w_R e imaginaria w_I como $w = w_R + iw_I$ el factor exponencial se convierte en:

$$e^{-iw(t-t')} = e^{-iw_R(t-t')} e^{w_I(t-t')}, \quad (\text{B.15})$$

pero debido a que la anterior función debe converger en el infinito se debe escoger para el *primer camino*, caracterizado por $w_I > 0$, la siguiente condición $t < t'$ y para el *segundo camino*, caracterizado por $w_I < 0$, la condición $t > t'$. Para proseguir es necesario calcular los residuos para los dos casos específicos: $w = -kc$ y $w = kc$.

Cuando $w = -kc$ el residuo está dado por:

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{e^{ick(t-t')}}{2kc}. \quad (\text{B.16})$$

Cuando $w = kc$ el residuo está dado por:

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{e^{-ick(t-t')}}{2kc}. \quad (\text{B.17})$$

Ahora se encontrara la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ para el primer y segundo camino, con la siguiente notación: para el *Primer camino*, que pasa por arriba de los polos la denotaremos como $G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ y para el *segundo camino*, que pasa por debajo de los polos, la denotaremos como $G_+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$.

Primer camino

En este caso la integral se escribe como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{-iw(t-t')}}{(w+kc)(w-kc)} = \oint_{-} dw \frac{e^{-iw(t-t')}}{(w+kc)(w-kc)}. \quad (\text{B.18})$$

Debido al análisis anterior se obtiene que:

$$\oint_{-} dw \frac{e^{-iw(t-t')}}{(w+kc)(w-kc)} = 2\pi i (\Re_1 + \Re_2) \Theta(t' - t), \quad (\text{B.19})$$

donde $\Theta(t' - t)$ se conoce como la función escalón de Heaviside y se define como:

$$\Theta(t' - t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t' < t \\ 1 & \text{si } t' > t \end{cases}, \quad (\text{B.20})$$

está función se agrega para expresar que se está trabajando en $w_I > 0$, es decir, $t' > t$. Reemplazando los residuos se obtiene:

$$\oint_{-} dw \frac{e^{-iw(t-t')}}{(w+kc)(w-kc)} = \frac{2\pi}{kc} \sin[kc(t-t')] \Theta(t' - t), \quad (\text{B.21})$$

entonces la función de Green $G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ se convierte en:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{c}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{\sin[kc(t-t')] \Theta(t' - t)}{k}, \quad (\text{B.22})$$

trabajando en coordenadas esféricas se obtiene la siguiente expresión:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{8\pi^3} \iiint dk d\theta d\phi \quad k \sin\theta e^{ikR \cos\theta} \sin[kc(t' - t)] \Theta(t' - t), \quad (\text{B.23})$$

donde $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Resolviendo la integral en ϕ :

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{4\pi^2} \iint dk d\theta \quad k \sin\theta e^{ikR \cos\theta} \sin[kc(t' - t)] \Theta(t' - t). \quad (\text{B.24})$$

La integral sobre la variable θ es fácil de realizar:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{2\pi^2 R} \int_0^{\infty} dk \quad \sin[kc(t' - t)] \sin(kR) \Theta(t' - t), \quad (\text{B.25})$$

utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin A \sin B = \frac{[\cos(A - B) - \cos(A + B)]}{2}, \quad (\text{B.26})$$

la ecuación (B.25) se re–escribe como:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{4\pi^2 R} \int_0^\infty dk \{ \cos [k(R - c(t' - t))] - \cos [k(R + c(t' - t))] \} \Theta(t' - t), \quad (\text{B.27})$$

utilizando la propiedad de la función trigonométrica:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (\text{B.28})$$

la ecuación (B.27) se convierte en:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{8\pi^2 R} \int_0^\infty dk \left\{ \begin{array}{l} e^{ik[R-c(t'-t)]} + e^{-ik[R-c(t'-t)]} \\ -e^{ik[R+c(t'-t)]} - e^{-ik[R+c(t'-t)]} \end{array} \right\} \Theta(t' - t). \quad (\text{B.29})$$

Debido a que la función que se encuentra dentro de la integral es una función par, se cumple la siguiente propiedad:

$$\int_0^\infty dx f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx f(x). \quad (\text{B.30})$$

Por lo tanto, la ecuación (B.13) se re–escribe como:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{16\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ \begin{array}{l} e^{ik[R-c(t'-t)]} + e^{-ik[R-c(t'-t)]} \\ -e^{ik[R+c(t'-t)]} - e^{-ik[R+c(t'-t)]} \end{array} \right\} \Theta(t' - t), \quad (\text{B.31})$$

usando la definición de la función *delta de Dirac* se obtiene que:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{8\pi R} \left\{ \begin{array}{l} \delta[-R + c(t' - t)] + \delta[R - c(t' - t)] \\ -\delta[-R - c(t' - t)] - \delta[R + c(t' - t)] \end{array} \right\} \Theta(t' - t), \quad (\text{B.32})$$

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{4\pi R} \{ \delta[R - c(t' - t)] - \delta[R + c(t' - t)] \} \Theta(t' - t), \quad (\text{B.33})$$

donde se ha echo uso de la propiedad de la función de Dirac $\delta(x) = \delta(-x)$. Debido a que $R > 0$ y la función de Heaviside fuerza a $t' - t > 0$ entonces la segunda *delta de Dirac* es igual a cero, así se obtiene que:

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{c}{4\pi R} \delta[R - c(t' - t)], \quad (\text{B.34})$$

$$G_-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{1}{4\pi R} \delta \left[t' - \left(\frac{R}{c} + t \right) \right]. \quad (\text{B.35})$$

Análogamente para el **segundo camino** se obtiene la siguiente expresión:

$$G_+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{1}{4\pi R} \delta \left[t' - \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (\text{B.36})$$

La forma compacta de la función de Green, incluyendo las ecuaciones (B.14) y (B.15), es:

$$G^\pm(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta \left(t' - \left[t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right] \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.37})$$

A la función de Green $G^+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ es llamada como *la función de Green retardada* debido a que el argumento de la función delta indica que un efecto en \mathbf{x} a un tiempo t es causado por una fuente a una distancia $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ a un tiempo anterior o retardado $t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$.

A la función de Green $G^-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ es llamada como *la función de Green avanzada* debido a que el argumento de la función delta indica que un efecto en \mathbf{x} a un tiempo t es causado por una fuente a una distancia $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ a un tiempo posterior o avanzado $t' = t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$.

A partir de esto se puede encontrar una función $\Psi(\mathbf{x}, t)$ que satisfaga la ecuación de onda, es decir:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{x}, t) = \alpha \xi(\mathbf{x}, t), \quad (\text{B.38})$$

$$\Psi^\pm(\mathbf{x}, t) = \alpha \iiint d^3 \mathbf{x}' dt' G^\pm(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \xi(\mathbf{x}', t'). \quad (\text{B.39})$$

Teniendo en cuenta los efectos de la física que solo los efectos del pasado producen efectos en el futuro, se escogera la función de Green retardada, es decir, sólo se utilizara $G^+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$.

Por lo tanto, la función $\Psi(\mathbf{x}, t)$ se expresa como:

$$\Psi^+(\mathbf{x}, t) \equiv \Psi(\mathbf{x}, t) = \alpha \iiint d^3 \mathbf{x}' dt' G^+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \xi(\mathbf{x}', t'), \quad (\text{B.40})$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = -\alpha \iiint d^3 \mathbf{x}' dt' \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta \left[t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \right] \xi(\mathbf{x}', t'). \quad (\text{B.41})$$

Así se concluye que la función $\Psi(\mathbf{x}, t)$ que satisface la ecuación de onda está dada por:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\xi \left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.42})$$

Para el caso de las *ondas gravitacionales* se obtiene la siguiente ecuación de onda:

$$\square^2 H_{uv} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{uv}, \quad (\text{B.43})$$

entonces utilizamos la ecuación (B.17) en la anterior ecuación obteniendo:

$$H_{uv} = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{16\pi G}{c^4} \right) \int d^3 \mathbf{x}' \frac{T_{uv} \left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.44})$$

De está manera, se concluye lo siguiente:

$$H_{uv} = \frac{4G}{c^4} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{T_{uv} \left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.45})$$

ANEXO C: PROPIEDADES DEL OPERADOR PROYECCIÓN

El operador de proyección P_m^j :

$$P_m^j := \delta_m^j - n^j n_m, \quad (\text{C.1})$$

convierte a un vector arbitrario \mathbf{B} a un vector $B_P^j = P_m^j B^m$ que es la proyección de \mathbf{B} sobre el plano perpendicular a \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_P = \eta_{ij} n^i (P_m^j B^m), \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_P = \eta_{ij} n^i (\delta_m^j B^m - n^j n_m B^m), \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_P = (n_m - n_m) B^m = 0, \quad (\text{C.4})$$

donde se ha echo uso de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_k n^k = 1$. Realicemos otra comprobación, si \mathbf{B}_P es la proyección sobre el plano entonces no debería cambiar al aplicar nuevamente el operador P_j^k :

$$P_j^k B_P^j = P_j^k P_m^j B^m, \quad (\text{C.5})$$

$$P_j^k P_m^j = P_j^k (\delta_m^j - n^j n_m) = P_m^k - P_m^k n^j n_m = P_m^k, \quad (\text{C.6})$$

$$\implies P_j^k B_P^j = P_m^k B^m. \quad (\text{C.7})$$

Por el anterior análisis el operador P_j^k se llama el **operador de proyección**. Existen unas propiedades del operador de proyección, de suma importancia, que son:

$$P_{kj} P_m^j = P_{km}, \quad (\text{C.8})$$

$$P^{jm} P_j^k = P^{mk}, \quad (\text{C.9})$$

$$P_j^k P_m^j = P_m^k, \quad (\text{C.10})$$

su demostración es trivial. Regresemos a nuestro caso de una onda gravitacional propagandose en la dirección $+z$. El vector unitario \mathbf{n} es $[0, 0, 1]$ entonces las unicas componentes diferentes de cero del operador de proyección son $P_x^x = 1$ y $P_y^y = 1$. La proyección en forma matricial para un vector arbitrario \mathbf{C} es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^x \\ C^y \\ C^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^x \\ C^y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Para proyectar una matriz A^{mn} se considera a cada índice transformando como un vector $A^{jk}_T = P_m^j A^{mn} P_n^k$ en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{xx} & A^{xy} & A^{xz} \\ A^{yx} & A^{yy} & A^{yz} \\ A^{zx} & A^{zy} & A^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{xx} & A^{xy} & 0 \\ A^{yx} & A^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Encontremos como transforma la traza de la matriz:

$$\eta_{ab}A^{ab}_P = \eta_{ab}(P^a_m A^{mn} P^b_n) = P_{mn}A^{mn} = A^{xx} + A^{yy}. \quad (\text{C.13})$$

Bajo la argumentación anterior se puede construir la matriz para el Gauge TT A^{jk}_{TT} en términos del operador de proyección de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A^{xx} - A^{yy}) & A^{xy} & 0 \\ A^{yx} & \frac{1}{2}(A^{yy} - A^{xx}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{xx} & A^{xy} & 0 \\ A^{yx} & A^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (A^{xx} + A^{yy}), \quad (\text{C.14})$$

de manera compacta:

$$A^{jk}_{TT} = A^{jk}_T - \frac{1}{2}P^{jk}P_{mn}A^{mn}, \quad (\text{C.15})$$

$$A^{jk}_{TT} = \left(P^j_m P^k_n - \frac{1}{2}P^{jk}P_{mn} \right) A^{mn}, \quad (\text{C.16})$$

ya que está ecuación es correcta para un vector unitario $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$ debería funcionar para un \mathbf{n} arbitrario.

ANEXO D: PROPIEDADES DE REFLEXIÓN

Del electromagnetismo se conoce que si se tiene una superficie de dos medios uno denso y otro menos denso, como se indica en la figura 4.8, existe una relación relativa entre el campo eléctrico entrante E_{en} , el campo reflejado E_{refle} y el campo transmitido E_t tal que:

$$E_{refle} = C_r E_{en}, \quad (D.1)$$

$$E_t = C_t E_{en}, \quad (D.2)$$

donde C_r y C_t son los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente (en general son números complejos). De manera similar, denotamos a C'_r y C'_t como los coeficientes de reflexión y transmisión que vienen del otro medio, ver figura 4.9. Suponiendo que no exista pérdida de energía y que la división de los medios no produzca cambios en la fase; esta condición hace los valores de los coeficientes de transmisión y reflexión sean reales (MAGGIORE, 2008), se cumple que:

$$C_r^2 + C_t^2 = 1, \quad (D.3)$$

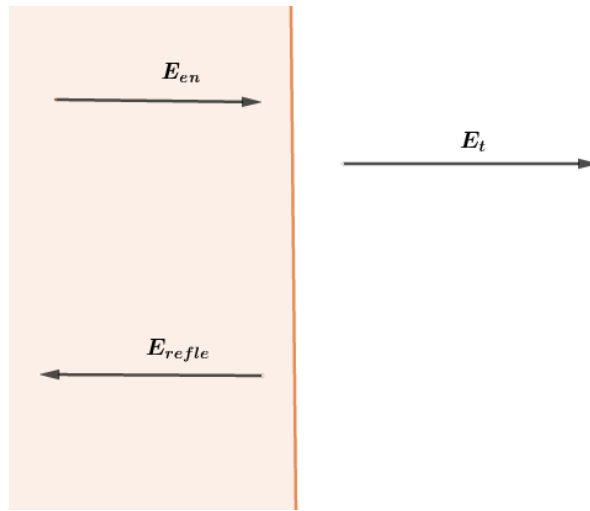


Figura 16: Campo eléctrico índice del medio más denso. Fuente la presente investigación

de manera análoga $C'_r{}^2 + C'_t{}^2 = 1$. Ahora consideremos una separación entre dos medios como se muestra en la figura 4.10. Denotemos al campo eléctrico dentro de la cavidad como E_{cav} y E'_{cav} para el campo eléctrico que incide desde la izquierda y el campo eléctrico que incide desde la derecha. Entonces, por definición de los coeficientes de reflexión se obtiene:

$$E_{cav} = C_t E_{en} + C'_r E'_{cav}, \quad (D.4)$$

$$E_{refle} = C_r E_{en} + C'_t E'_{cav}. \quad (D.5)$$

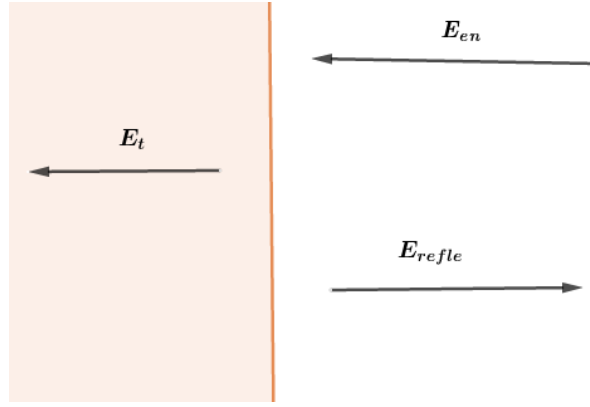


Figura 17: Campo eléctrico índice del medio menos denso. Fuente la presente investigación

Tomando el límite cuando $d \rightarrow 0$ se obtienen las siguientes relaciones

$$E_t = C'_t E_{cav}, \quad (D.6)$$

$$E'_{cav} = C'_r E_{cav}, \quad (D.7)$$

$$E_{refle} = 0, \quad (D.8)$$

$$E_{ent} = E_t, \quad (D.9)$$

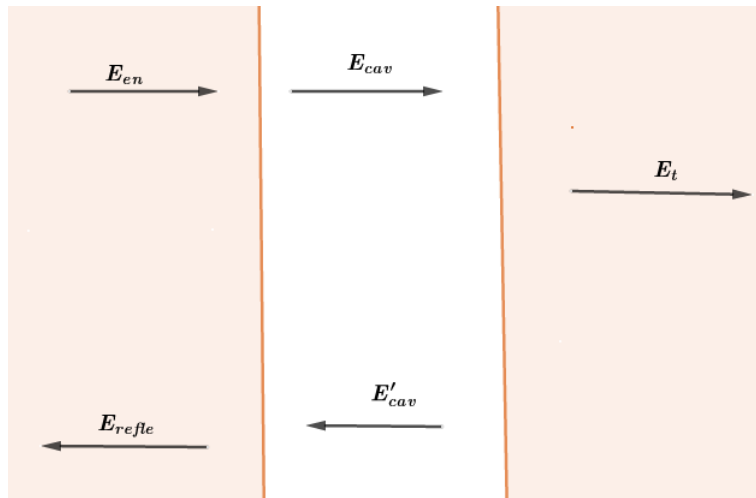


Figura 18: Un medio menos denso entre dos medios con mayor densidad. Fuente la presente investigación

reemplazando las anteriores ecuaciones en (D.4) y (D.5) se obtiene:

$$C_r = -C'_r, \quad (D.10)$$

$$C'_t C_t + C'_r C'_r = 1, \quad (D.11)$$

Utilizando la ecuación (D.3) la ecuación (D.11) se convierte en:

$$C'_t = C_t. \quad (D.12)$$

En resumen, se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$C'_r = -C_r, \quad (\text{D.13})$$

$$C'_t = C_t. \quad (\text{D.14})$$

Para un espejo totalmente reflector, la reflexión de un medio menos denso a uno más denso viene dado por $C'_r = -1$ y la reflexión de un medio más denso a uno menos denso es $C_r = 1$.

ANEXO E: CAMPO FOTÓNICO EN EL HORIZONTE DE SUCESOS

En relatividad general es muy conocido el *Efecto Doppler Gravitacional*, que consiste en el desplazamiento de la frecuencia de la radiación al ser emitido por un objeto. A continuación se realizara una análisis matemático de como cambia la energía del fotón en presencia de un objeto gravitacional (OKUN, 2000).

De la relatividad especial se conoce que la energía en reposo está dada por:

$$E = m_0 c^2, \quad (\text{E.1})$$

donde m_0 es la masa en reposo. En presencia de un campo gravitacional está ecuación ya no es válida porque cualquier objeto masivo debe incrementar su energía a medida que se aleja del cuerpo gravitacional porque el potencial gravitacional aumenta. Este fenómeno se explica a través de la siguiente ecuación, que ha sido comprobada experimentalmente:

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (\text{E.2})$$

Se podría pensar en utilizar la anterior ecuación para el fotón, pero seria un grave error porque se le está asociando al fotón una masa en reposo. Para resolver este problema se utilizara la métrica de Schwarzschild, para θ y φ fijos, dada por:

$$g^{00} = - \left(1 - \frac{S}{r} \right)^{-1}, \quad (\text{E.3})$$

$$g^{rr} = \left(1 - \frac{S}{r} \right), \quad (\text{E.4})$$

donde s es conocido como el radio de Schwarzschild definido como:

$$S := \frac{2MG}{c^2} \quad (\text{E.5})$$

El intervalo espaciotemporal para el fotón está caracterizado por $ds^2 = 0$ por lo tanto se cumple que:

$$g^{uv} dx_u dx_v = 0, \quad (\text{E.6})$$

Que se puede reescribir como::

$$g^{uv} p_u p_v = 0, \quad (\text{E.7})$$

donde p_u es el cuádrimomento del fotón. Expandiendo se obtiene:

$$g^{00} p_0 p_0 + g^{rr} p_r p_r = 0. \quad (\text{E.8})$$

Reemplazando (E.3) y (E.4) se tiene:

$$- \left(1 - \frac{S}{r} \right)^{-1} p_0^2 + \left(1 - \frac{S}{r} \right) p_r^2 = 0. \quad (\text{E.9})$$

Para el fotón se tiene:

$$p_0 = \frac{E}{c}. \quad (\text{E.10})$$

La ecuación (E.9) se convierte en :

$$\left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-1} \frac{E^2}{c^2} = \left(1 - \frac{S}{r}\right) p_r^2, \quad (\text{E.11})$$

$$p_r = \frac{E}{c} \left(1 - \frac{S}{r}\right)^{-1}. \quad (\text{E.12})$$

El *Postulado de De Broglie*, definido como:

$$p_r = \frac{2\pi\hbar}{c} \nu, \quad (\text{E.13})$$

donde ν es la frecuencia del fotón, la ecuación (D.6) se reescribe como:

$$E = \hbar 2\pi \nu \left(1 - \frac{S}{r}\right), \quad (\text{E.14})$$

$$E = E_f \left(1 - \frac{S}{r}\right), \quad (\text{E.15})$$

donde $E_f = \hbar 2\pi \nu$ es la energía del fotón en ausencia de un campo gravitacional. Debido a que el potencial gravitacional está dado por:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (\text{E.16})$$

La ecuación (E.15) se reescribe como:

$$E = E_f + \frac{2}{c^2} E_f \Phi. \quad (\text{E.17})$$

Imponiendo la condición $E \geq 0$ para la energía total del fotón en presencia de un campo gravitacional el potencial debe satisfacer la siguiente relación:

$$-\Phi \leq \frac{c^2}{2}. \quad (\text{E.18})$$