

# Stabilitätsnachweis für weiche strukturvariable Regelungen mit Zustandsbeobachter

## Stability of Soft Variable-Structure Controls with Observer

Jürgen Adamy und Hendrik Lens

---

Weiche strukturvariable Regler sind nichtlineare Zustandsregler für lineare Regelstrecken mit Stellgrößenbeschränkung. Ihr lineares Regelgesetz wird über einen zustandsabhängigen Parameter kontinuierlich verändert. Dabei erfolgt die Regleränderung so, dass die vorhandene Stellgrößenbeschränkung möglichst gut ausgenutzt wird, wodurch sich ein nahezu zeitoptimales Verhalten einstellt. Unter praktischen Gesichtspunkten erfordert eine Zustandsregelung – so auch diese – den Einsatz eines Beobachters, da oft nicht alle Zustände messbar sind. In diesem Artikel werden Beobachter für weiche strukturvariable Regler und der Nachweis der Stabilität des Regelkreises mit Beobachter behandelt.

Soft variable-structure controls are nonlinear state feedback controls for linear plants with input constraints. Their linear control law is changed continuously over time by a state dependent selection parameter. The change in the control law is such that the available input is used as much as possible. This results in a nearly time-optimal behaviour. From a practical point of view, a state feedback control should be combinable with an observer, since normally not all states can be measured. In this paper we deal with observers for soft variable-structure controls and prove that the control using an observer is stable.

**Schlagwörter:** Zustandsbeobachter, weiche strukturvariable Regelung, nahezu zeitoptimale Regelung

**Keywords:** State-space observer, soft variable-structure control, nearly time-optimal control

---

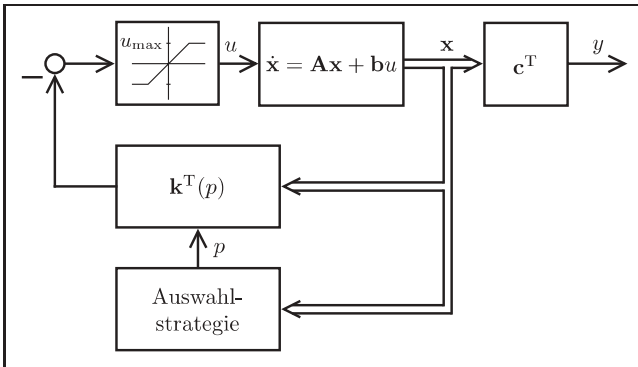
## 1 Einleitung

Regelstrecken sind in der Praxis einer Stellgrößenbeschränkung unterworfen. Insbesondere wenn hohe Anforderungen an die Ausregelzeit gestellt werden, möchte man die Stellgröße innerhalb ihrer Beschränkung möglichst gut ausnutzen. Dies ist mit einem linearen Regler nur schlecht möglich. Denn er ist so auszulegen, dass eine Verletzung der Stellgrößenbeschränkung ausgeschlossen ist. Dann ist aber die Stellgrößenausnutzung in einem großen Bereich um die Ruhelage sehr schlecht und es wird nur eine schlechte Regelgüte erreicht.

Im Gegensatz dazu verwendet ein zeitoptimaler Regler bis zum Erreichen der Ruhelage immer die maximale oder die minimale Stellgröße. Die Trajektorie erreicht die Ru-

helage so in der kürzestmöglichen Zeit. Theoretisch existiert für jede lineare Strecke mit konstanter Stellgrößenbeschränkung ein solcher Regler. Allerdings ist der Entwurf außerordentlich aufwendig und man kann das zeitoptimale Regelgesetz für sehr viele, insbesondere höherdimensionale Strecken, nicht in expliziter Form herleiten. Außerdem schaltet das Stellglied hart zwischen minimaler und maximaler Stellgröße um, was viele Aktoren, insbesondere solche mit mechanischen Komponenten, nicht leisten können.

Weiche strukturvariable Regelungen (weiche SVR) [1; 3; 4; 6–10; 14; 15] bieten einen Kompromiss zwischen den Eigenschaften linearer und zeitoptimaler Regelungen. Sie verwenden eine Auswahlstrategie, mit der stetig – daher



**Bild 1:** Blockschaltbild eines linearen Systems mit weicher strukturvariabler Regelung.

die Bezeichnung „weich“ – ein Reglervektor variiert wird. Durch das Variieren der Struktur bzw. der Parameter ist das System insgesamt nichtlinear. Die prinzipielle Struktur ist in Bild 1 dargestellt. Bei Systemen mit Stellgrößenbeschränkung erreichen weiche SVR nahezu die Regelgüte eines zeitoptimalen Reglers, jedoch mit einem vertretbaren Entwurfsaufwand. Darüber hinaus sind aufgrund der kontinuierlichen Strukturänderung auch die Stellgrößenverläufe grundsätzlich kontinuierlich.

Auf keinen Fall sollten weiche SVR mit Sliding-mode Reglern verwechselt werden, die insbesondere in der anglo-amerikanischen Literatur ebenfalls mit „variable-structure control“ bezeichnet werden.

Weiche SVR sind wie erwähnt nichtlineare Zustandsregler und benötigen zum Bestimmen der Stellgröße alle Zustände. Allerdings ist es nur selten möglich, alle Zustandsgrößen zu messen. Für praktische Anwendungen müssen daher nicht gemessene Größen geschätzt werden. Dies ist mit einem Beobachter möglich. Nach einer Übersicht der betrachteten strukturvariablen Reglerkonzepte wird in diesem Artikel gezeigt, wie weiche SVR zusammen mit Beobachtern eingesetzt werden können.

Es wird von einer linearen SISO-Strecke

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}\end{aligned}\quad (1)$$

ausgegangen, welche der Stellgrößenbeschränkung

$$|u| \leq u_{\max} \quad (2)$$

unterliegt. Ein zulässiges Regelgesetz muss also die Bedingung  $|u(t)| \leq u_{\max}$  für alle  $t \geq 0$  erfüllen.

Die Menge der Zustände, für die ein zulässiges, stabilisierendes Regelgesetz existiert, wird mit  $\mathcal{C}$  bezeichnet und nullregelbares Gebiet<sup>1</sup> genannt [12; 19]. Im Falle einer stabilen oder grenzstabilen linearen Regelstrecke ist  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ . Für instabile lineare Regelstrecken ist die Menge  $\mathcal{C}$  offen und konvex. Sie kann numerisch bestimmt werden, was aber insbesondere für höhere Dimensionen sehr aufwendig ist.

<sup>1</sup> Englisch: *null controllable region*

Man geht sinnvollerweise von einem in  $\mathcal{C}$  enthaltenen Gebiet möglicher Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(t=0) \in \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3)$$

aus, das asymptotisch stabil ausgeglichen werden soll. Dieses Gebiet  $\mathcal{X}_0$  liegt meist als Hyperquader

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq \bar{x}_1, \dots, |x_n| \leq \bar{x}_n\} \quad (4)$$

mit  $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^+$  vor.

## 2 Weiche strukturvariable Regelungen

Die Stellgröße ergibt sich bei weichen SVR aus dem Regelgesetz

$$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} \quad (5)$$

mit dem Auswahlparameter  $p$ . Dieses Regelgesetz ist für einen festen Wert von  $p$  linear. Der Auswahlparameter  $p$  ergibt sich aus einem Auswahlgesetz, das entweder implizit oder explizit formuliert ist, in jedem Falle aber kontinuierlich bezüglich  $p$ . Ein solches Auswahlgesetz ist in einfacher, statischer Form gegeben durch

$$p = S(\mathbf{x}) . \quad (6)$$

Allgemeiner gefasst können auch dynamische Auswahlgesetze,

$$\dot{p} = S(\mathbf{x}, p) , \quad (7)$$

sowie implizite Auswahlgesetze,

$$S(\mathbf{x}, p, \dot{p}, \ddot{p}, \dots) = 0 , \quad (8)$$

berücksichtigt werden. Das nichtlineare Regelgesetz (5) und die Auswahlstrategie (6), (7) oder (8) werden so ausgelegt, dass für alle  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$  die Stellgrößenbeschränkung  $|u| \leq u_{\max}$  eingehalten wird und  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  die einzige und stabile Ruhelage innerhalb von  $\mathcal{C}$  ist.

Die Entwicklungsgeschichte, die Funktionsweise und der Entwurf weicher SVR werden im Übersichtsartikel [3] detailliert behandelt. Deshalb werden im Folgenden die drei betrachteten Varianten – die weiche SVR mit impliziter Auswahlstrategie, die weiche SVR mit variabler Sättigung und die dynamische weiche SVR – nur kurz beschrieben.

### 2.1 Implizite weiche SVR

#### 2.1.1 Regelgesetz

Für den Entwurf dieser Regelung [1; 3] ist es erforderlich, dass die Strecke in Regelungsnormalform vorliegt oder in diese Form transformiert wurde. Dies ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich.

Das Regelgesetz der impliziten weichen SVR lautet

$$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} = -(\mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{x} \quad (9)$$

mit  $0 < p \leq 1$  und

$$\mathbf{D}(p) = \begin{pmatrix} p^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p^{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p \end{pmatrix}, \quad (10)$$

sowie

$$\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})^T, \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1})^T. \quad (12)$$

Dabei enthält  $\mathbf{a}$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Strecke und  $\hat{\mathbf{a}}$  die Koeffizienten der Systemmatrix

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(1) \quad (13)$$

des mit  $\mathbf{k}(p=1)$  geregelten Systems.

Der Parameter  $p$  ist durch die implizite Gleichung

$$S(\mathbf{x}, p) = e(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(p) \mathbf{x} - 1 = 0 \quad (14)$$

gegeben. Dabei ist  $\mathbf{R}_i(p)$  – der Index  $i$  ist die Abkürzung für „implizit“ – eine von  $p$  abhängige, positiv definite Matrix

$$\mathbf{R}_i(p) = \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p), \quad (15)$$

wobei  $\mathbf{R}_1$  eine geeignet zu wählende, konstante, positiv definite Matrix und  $\mathbf{D}(p)$  wie in Gleichung (10) vorgegeben ist. Schließlich ist die Funktion  $e(p)$  gegeben durch

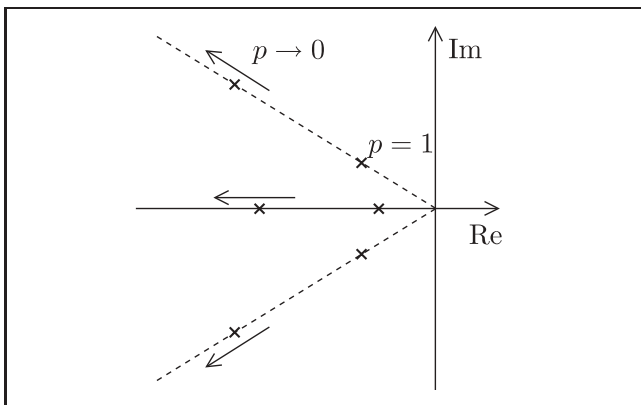
$$e(p) = \frac{\mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}_i^{-1}(p) \mathbf{k}(p)}{u_{\max}^2}. \quad (16)$$

### 2.1.2 Funktionsweise

Bei obigem Regelgesetz (9) für  $\mathbf{k}(p)$  verschieben sich die Eigenwerte der Systemmatrix  $\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)$  des geschlossenen Regelkreises auf Strahlen

$$\lambda_i(p) = \frac{\lambda_i(1)}{p}, \quad i = 1 \dots n. \quad (17)$$

Das System wird um so schneller, je kleiner  $p$  wird, wie in Bild 2 dargestellt.



**Bild 2:** Verlauf der Eigenwerte in Abhängigkeit des Auswahlparameters  $p$  bei der impliziten weichen SVR.

Die Zustandsvektoren  $\mathbf{x}$ , welche die implizite Gleichung (14) für ein bestimmtes  $p$  erfüllen, liegen auf einer Hyperellipse, die mit  $\partial\mathcal{G}(p)$  bezeichnet wird. Diese Hyperellipse

$$\partial\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} | S(\mathbf{x}, p) = e(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(p) \mathbf{x} - 1 = 0\} \quad (18)$$

ist der Rand des Gebietes

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} | e(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(p) \mathbf{x} - 1 < 0\}. \quad (19)$$

Bei geeignet gewählten Parametern  $\hat{\mathbf{a}}$  und  $\mathbf{R}_1$  ist das Gebiet  $\mathcal{G}(p)$  ein Ljapunov-Gebiet. Dies bedeutet, dass Trajektorien, die auf dem Rand  $\partial\mathcal{G}(p)$  des Gebietes starten, in dieses Gebiet einlaufen. Es gilt

$$\mathbf{x}(t + \varepsilon) \in \mathcal{G}(p(\mathbf{x}(t))) \quad (20)$$

für beliebig kleine  $\varepsilon > 0$ . Außerdem sind die Gebiete mit kleiner werdendem  $p$  ineinander geschachtelt, d. h. es gilt

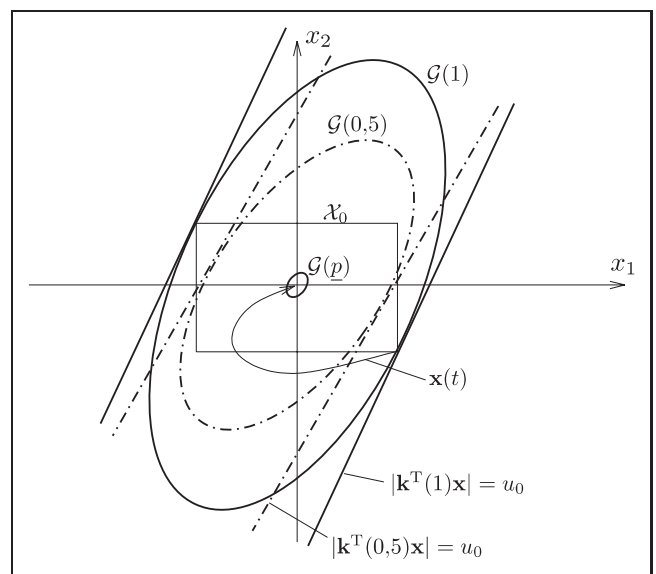
$$\mathcal{G}(p - \varepsilon) \subset \mathcal{G}(p) \quad (21)$$

für beliebig kleine  $\varepsilon > 0$ . Der Regler  $\mathbf{k}(p)$  wird dann aktiviert, wenn die Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  auf den Gebietsrand  $\partial\mathcal{G}(p)$  trifft. Dies ist der Fall, wenn Gl. (14) erfüllt ist. Bild 3 zeigt beispielhaft, wie sich die Gebiete  $\mathcal{G}(p)$  während des Regelvorgangs verändern.

Der Reglervektor  $\mathbf{k}(p)$  wird für alle  $\mathbf{x}$  auf der Hyperellipse  $\partial\mathcal{G}(p)$  – und nur dort – verwendet. Während des Verlaufs der Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  tritt diese in immer kleinere Ljapunov-Gebiete  $\mathcal{G}(p)$  ein. Der Parameter  $p$  nimmt dabei ab und immer stärkere Regler (9) werden aktiviert.

Die Form von  $\partial\mathcal{G}(p)$  wird durch die Matrix  $\mathbf{R}_i(p)$  festgelegt. Die skalare Funktion  $e(p)$  nach Gleichung (16) skaliert die Größe der Hyperellipse  $\partial\mathcal{G}(p)$  so, dass sie die beiden Hyperebenen  $|\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| = u_{\max}$  tangiert, wie Bild 3 für  $p = 1$  und  $p = 0,5$  zeigt. Daraus folgt, dass

$$\max_{S(\mathbf{x}, p)=0} |\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| = u_{\max} \quad (22)$$



**Bild 3:** Darstellung der Gebiete  $\mathcal{G}(p)$  nach Gleichung (19). Für eine korrekte Ausregelung aller möglichen Anfangszustände muss  $\mathcal{G}(1)$  die Menge  $\mathcal{X}_0$  enthalten.

gilt. Dies bedeutet, dass das Skalarprodukt aus einem beliebigen Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(p)$ , dem der Auswahlparameter  $p(\mathbf{x})$  zugeordnet wird, und dem zum gleichen  $p$  gehörigen Reglervektor vom Betrag her immer kleiner oder gleich  $u_{\max}$  ist. Dies gilt für beliebige  $p \in (0, 1]$ , sodass für alle  $\mathbf{x}$ , für die  $p(\mathbf{x}) \leq 1$  ist, die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird. Gilt  $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{G}(1)$ , so ist die Regelung für alle  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$  möglich. Obiges Regelgesetz (9), (14) garantiert also aufgrund seiner Konstruktion die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung (2).

Aus der Tatsache, dass die Gebiete  $\mathcal{G}(p)$  geschachtelte Ljapunov-Gebiete sind und  $p$  im Verlauf des Regelvorgangs kontinuierlich abnimmt, folgt nach Gleichung (17), dass das System während des Regelungsverlaufs für kleinere Zustände  $\mathbf{x}$  immer schneller wird. Dies bedingt die gute Leistungsfähigkeit der Regelung.

Außerdem ist eine kontinuierliche Abnahme von  $p$  entlang einer Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  gleichbedeutend mit der Aussage

$$\dot{p}(\mathbf{x}(t)) < 0. \quad (23)$$

Zusätzlich gilt  $p(\mathbf{x}) > 0$  sowie  $p = 0$  für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .<sup>2</sup> Daraus folgt nach der direkten Methode von Ljapunov, dass

$$v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) \quad (24)$$

eine Ljapunov-Funktion des Systems ist. Da sie über Gleichung (14) implizit gegeben ist, wird sie als *implizite Ljapunov-Funktion* [1; 2] bezeichnet.

### 2.1.3 Entwurf

Damit das Regelgesetz (9) und die Auswahlgleichung (14) wie oben beschrieben funktionieren, müssen die Parameter  $\hat{\mathbf{a}}$  und  $\mathbf{R}_1$  folgende Bedingungen erfüllen. Die beiden Matrizen

$$\mathbf{Q}_1 = -\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1, \quad (25)$$

$$\mathbf{S}_1 = -\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} \quad (26)$$

mit

$$\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -1) \quad (27)$$

müssen positiv definit sein und es muss

$$e'(p) = \frac{\partial e}{\partial p} < 0 \quad \text{für alle } p \in (0, 1] \quad (28)$$

gelten.

Außerdem muss die Menge möglicher Anfangszustände  $\mathcal{X}_0$  im Gebiet  $\mathcal{G}(1)$  enthalten sein.

### 2.1.4 Praktische Implementierung

Für die Berechnung der Stellgröße muss die implizite Gleichung (14) online (numerisch) gelöst werden. Da im In-

<sup>2</sup>Streng genommen ist Gl. (14) nicht lösbar für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Die Festlegung  $p(\mathbf{0}) = 0$  ist jedoch eine stetige Fortsetzung, da  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} p(\mathbf{x}) = 0$  gilt [1; 2].

tervall  $(0, 1]$  nur eine Nullstelle existiert, können sicher konvergierende Verfahren eingesetzt werden.

Für sehr kleine  $p$  werden die Einträge des Reglervektors  $\mathbf{k}(p)$  sehr groß und das Messrauschen wird unnötig verstärkt. Außerdem können dann numerische Probleme bei der Berechnung von  $\mathbf{D}^{-1}(p)$  auftreten. Deshalb führt man in der Praxis eine Untergrenze  $\underline{p}$  für den Auswahlparameter  $p$  ein. Übliche Werte für  $\underline{p}$  liegen zwischen 0,01 und 0,1. Innerhalb des Gebietes

$$\mathcal{G}(\underline{p}) = \left\{ \mathbf{x} \mid e(\underline{p}) \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1(\underline{p}) \mathbf{x} < 1 \right\}, \quad (29)$$

also für sehr kleine  $\|\mathbf{x}\|$ , unterschreitet die Lösung von Gl. (14) den Wert  $\underline{p}$ . Dann geht man dazu über, die Regelung linear mit dem Regelgesetz

$$u = -\mathbf{k}^T(\underline{p}) \mathbf{x} \quad (30)$$

arbeiten zu lassen. Dieser Übergang von weicher SVR zu linearer Regelung ist nur für sehr kleine  $p$  aus den oben genannten Gründen notwendig und für das Reglerverhalten nicht wesentlich.

## 2.2 Weiche SVR mit variabler Sättigung

Bei der weichen SVR mit variabler Sättigung [4] wird einem linearen Regler  $\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$ , der so ausgelegt ist, dass er das System für alle  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0$  ohne Verletzung der Stellgrößenbeschränkung (2) stabilisiert, ein weiterer linearer Regler,  $\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}$ , additiv zugeschaltet, um die Ausregelung zu beschleunigen. Dessen Ausgang ist mit einer variablen Sättigung  $u_{\text{sat}}(\mathbf{x})$  versehen, welche verhindert, dass die Summe beider Stellgrößen die Beschränkung  $u_{\max}$  überschreitet. Beide Regler zusammen ergeben das Regelgesetz

$$u = -(\mathbf{k}_1 + p \mathbf{k}_2)^T \mathbf{x} \quad (31)$$

mit dem Auswahlgesetz

$$p = S(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{u_{\text{sat}}(\mathbf{x})}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}} & \text{für } \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \geq u_{\text{sat}}(\mathbf{x}) \\ 1 & \text{für } |\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}| < u_{\text{sat}}(\mathbf{x}) \\ -\frac{u_{\text{sat}}(\mathbf{x})}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}} & \text{für } \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \leq -u_{\text{sat}}(\mathbf{x}) \end{cases}. \quad (32)$$

Dabei ist die variable Sättigung gegeben durch

$$u_{\text{sat}}(\mathbf{x}) = u_{\max} - \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_v \mathbf{x} \mathbf{k}_1^T \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{k}_1}. \quad (33)$$

Aus (32) erkennt man, dass  $p$  nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Für große Zustandsgrößen ergibt sich  $p \approx 0$ , der schwächstmögliche Regler  $\mathbf{k}_1$  wird genutzt. Für mittlere Zustandsgrößen liegt  $p$  zwischen 0 und 1. In diesem nichtlinearen Bereich wird der zweite Regler einblendet, und beide Regler sind mit  $\mathbf{k}_1 + p \mathbf{k}_2$  aktiv. Für kleine Zustandsgrößen erreicht  $p$  irgendwann den Wert 1, und die Regelung arbeitet linear mit dem stärkstmöglichen Reglervektor  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ .

Die Funktion

$$v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_v \mathbf{x} \quad (34)$$

ist eine Ljapunov-Funktion des Systems. Damit die Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  gewährleistet ist, muss die Matrix  $\mathbf{R}_v$  positiv definit sein und die folgenden Ljapunov-Gleichungen

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T)^T \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_v (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T) = -\mathbf{Q}_{v,1}, \quad (35)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_{12}^T)^T \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_v (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_{12}^T) = -\mathbf{Q}_{v,2} \quad (36)$$

simultan erfüllen, wobei  $\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  gilt. Die Matrizen  $\mathbf{Q}_{v,1}$  und  $\mathbf{Q}_{v,2}$  müssen positiv definit sein.

Beim Entwurf geht man von einem zulässigen stabilisierenden Regler  $\mathbf{k}_1$  aus. Zulässig bedeutet hier, dass die Stellgrößenbeschränkung für alle  $\mathbf{x}(t)$  mit  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$  eingehalten wird. Daraufhin werden der Vektor  $\mathbf{k}_2$  und die Matrix  $\mathbf{R}_v$  mittels eines Suchverfahrens so optimiert, dass die Regelung mit  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  möglichst schnell wird und die Nebenbedingungen (35) und (36) erfüllt sind.

### 2.3 Dynamische weiche SVR

Die dynamische weiche SVR [7–10] weist das gleiche Regelgesetz auf wie die weiche SVR mit variabler Sättigung:

$$u = -(\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2)^T \mathbf{x}. \quad (37)$$

Allerdings ist der Auswahlparameter  $p$  hier keine Funktion von  $\mathbf{x}$ , sondern gegeben über die Differentialgleichung

$$\dot{p} = S(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_d \mathbf{b} \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} - p \cdot r(p, \mathbf{x})}{q}, \quad p(0) = 0. \quad (38)$$

Dabei ist  $q$  ein geeignet zu wählender Parameter. Wie bei der weichen SVR mit variabler Sättigung muss der Regler  $\mathbf{k}_1$  das System unter Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung stabilisieren für alle  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ . Die Funktion  $r(p, \mathbf{x})$  ist gegeben durch:

$$r(p, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mu \left(1 - \frac{\alpha(\mathbf{x})}{p}\right) + \mu_0 \frac{\alpha(\mathbf{x})}{p}, & p \leq \alpha(\mathbf{x}) \\ \mu_0, & \alpha(\mathbf{x}) < p < \beta(\mathbf{x}) \\ \mu \left(1 - \frac{\beta(\mathbf{x})}{p}\right) + \mu_0 \frac{\beta(\mathbf{x})}{p}, & p \geq \beta(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (39)$$

wobei  $\mu \gg 1$  und  $0 < \mu_0 \ll 1$  gelten sollte.

Dabei sind  $\alpha(\mathbf{x})$  und  $\beta(\mathbf{x})$  die Unter- bzw. Obergrenze für  $p$ , welche auch die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung (2) sicherstellen. Die Intervallgrenzen sind wie folgt definiert:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \leq \frac{-u_{\max} + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ -P, & \frac{-u_{\max} + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} < \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} < \frac{u_{\max} + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ \frac{-u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \geq \frac{u_{\max} + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \end{cases} \quad (40)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{-u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \leq \frac{-u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ P, & \frac{-u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} < \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} < \frac{u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ \frac{u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \geq \frac{u_{\max} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \end{cases} \quad (41)$$

Dabei legt  $P \gg 0$  eine absolute Obergrenze für  $\beta(\mathbf{x})$  bzw.  $-P \ll 0$  eine absolute Untergrenze für  $\alpha(\mathbf{x})$ , und somit auch jeweils für  $p$ , fest.

Die symmetrische, positiv definite Matrix  $\mathbf{R}_d$  in Gl. (38) resultiert aus der Ljapunov-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T)^T \mathbf{R}_d + \mathbf{R}_d (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T) = -\mathbf{Q}_d, \quad (42)$$

mit positiv definiter Matrix  $\mathbf{Q}_d$ . Das System hat dann die Ljapunov-Funktion

$$v(\mathbf{x}, p) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_d \mathbf{x} + qp^2. \quad (43)$$

Für den Entwurf wird von einem zulässigen Zustandsregler  $\mathbf{k}_1$  ausgegangen. Daraufhin werden die restlichen Parameter  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{R}_d$ ,  $q$ ,  $\mu$ ,  $\mu_0$  und  $P$  unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (42) mittels eines Suchverfahrens optimiert.

### 3 Lineare Zustandsbeobachter für nichtlineare Regelgesetze

Wenn ein herkömmlicher linearer Luenberger-Beobachter für ein System mit weicher SVR verwendet wird, ergeben sich in der allgemeinen Darstellung die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\tilde{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (44)$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{\mathbf{x}}$  den geschätzten Zustandsvektor und  $\mathbf{l}$  den Beobachtervektor. Die Struktur ist in Bild 4 dargestellt.

Da das Regelungssystem (44) nichtlinear ist, stellt sich die Frage nach der Stabilität der Ruhelage  $(\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}}^T)^T = \mathbf{0}$ . Allgemein gesehen handelt es sich bei weichen SVR um nichtlineare Regelgesetze für lineare Systeme. Luenberger zeigte bereits in [17] für solche Systeme folgenden Satz:

**Satz 1** ([17]). *Das System*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (45)$$

mit einem nichtlinearen Regelgesetz  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , welches uniform lipschitzstetig sei, sei global asymptotisch stabil. Es habe eine Ljapunov-Funktion mit den Eigenschaften

$$v(\mathbf{0}) = 0, \quad (46)$$

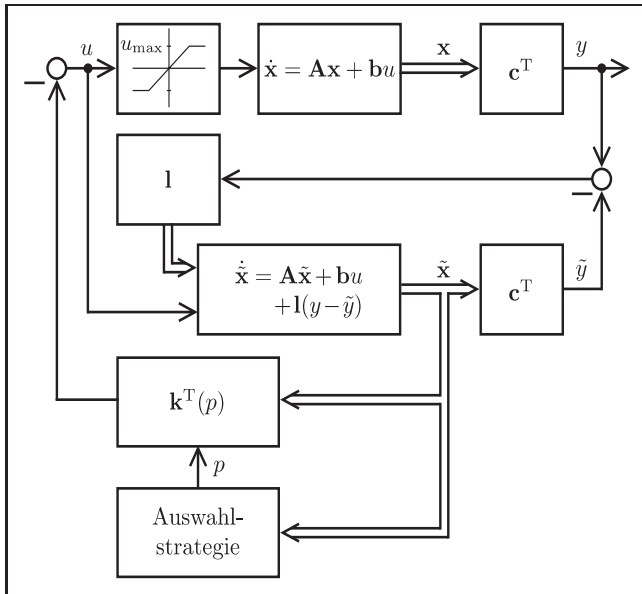
$$v(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (47)$$

$$v(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad \text{für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \quad (48)$$

$$\dot{v}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (49)$$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \frac{-\dot{v}(\mathbf{x})}{\|\partial v / \partial \mathbf{x}\|} = +\infty. \quad (50)$$





**Bild 4:** Blockschaltbild eines linearen Systems mit weicher strukturvariabler Regelung und einem Luenberger-Beobachter.

Wenn alle Eigenwerte der Beobachtermatrix  $A - LC$  in der linken Halbebene liegen, so ist das Gesamtsystem mit Beobachter

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (51)$$

ebenfalls global asymptotisch stabil.

Bedingung (50) ist eine recht schwache Voraussetzung und ist beispielsweise für alle Ljapunov-Funktionen mit quadratischer Form erfüllt.

Bei genauer Betrachtung des Satzes 1 und der zugehörigen Beweisführung stellt man einige Einschränkungen fest. Zunächst einmal gilt er nur für global asymptotisch stabile Systeme. Systeme mit Stellgrößenbeschränkung, wie hier betrachtet, sind aber im Allgemeinen nicht global, sondern nur lokal asymptotisch stabil, weil instabile Systeme nicht für jede Anfangsbedingung mit einer beschränkten Stellgröße stabilisiert werden können. Außerdem muss die Nichtlinearität statisch sein, was Regler mit dynamischer Strukturveränderung ausschließt.

Im Weiteren wird ein ähnlicher Stabilitätssatz wie Satz 1 für weiche SVR hergeleitet.

## 4 Stabilitätsbeweise für weiche SVR mit Beobachter

### 4.1 Vorbemerkungen

#### 4.1.1 Exponentielle Stabilität

Im Folgenden spielt der Begriff der *exponentiellen Stabilität* eine wichtige Rolle. Er soll deshalb an dieser Stelle näher beleuchtet werden.

**Definition 1.** ([13]). Das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (52)$$

habe die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Diese Ruhelage ist exponentiell stabil, wenn positive Konstanten  $c$ ,  $k$ , und  $\lambda$  existieren, sodass

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\|\mathbf{x}(0)\|e^{-\lambda t}, \quad \text{für alle } \|\mathbf{x}(0)\| < c. \quad (53)$$

Exponentielle Stabilität ist ein strengeres Kriterium als asymptotische Stabilität. Eine Trajektorie muss sich nicht nur asymptotisch der Ruhelage nähern, sondern dies exponentiell schnell tun. Es gibt Systeme, die asymptotisch stabil aber nicht exponentiell stabil sind. Wenn man beispielsweise das System  $\dot{x} = -x^3$  betrachtet, stellt man fest, dass dessen Zeitlösung,

$$x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{2tx(0)^2 + 1}}, \quad (54)$$

zwar asymptotisch gegen 0 konvergiert, aber keine obere Schranke in der Form von Gl. (53) existiert.

Exponentielle Stabilität kann an Hand einer Ljapunov-Funktion nachgewiesen werden. Diese muss dazu aber bestimmte Bedingungen erfüllen, wie folgender Satz zeigt.

**Satz 2** ([13]). Es sei  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eine Ruhelage des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (55)$$

und  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung dieser Ruhelage. Wenn eine stetig differenzierbare Funktion  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit den Eigenschaften

$$k_1\|\mathbf{x}\|^a \leq v(\mathbf{x}) \leq k_2\|\mathbf{x}\|^a, \quad (56)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq -k_3\|\mathbf{x}\|^a, \quad (57)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , wobei  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $a$  beliebige positive Konstanten sind, dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  exponentiell stabil auf  $\mathcal{D}$ .

Satz 2 kann auch umgekehrt werden:

**Satz 3** ([11; 13; 16]). Es sei  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eine Ruhelage des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (58)$$

wobei  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist,  $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < r\}$  und  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{x}\|$  über  $\mathcal{D}$ ,  $L > 0$ . Seien  $r_0$ ,  $k$  und  $\lambda$  positive Konstanten mit der Eigenschaft  $r_0 < r/k$  und sei  $\mathcal{D}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < r_0\}$ . Wenn dann das System Ungleichung (53) für exponentielle Stabilität mit diesen Konstanten erfüllt, existiert eine Funktion  $v : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

$$c_1\|\mathbf{x}\|^2 \leq v(\mathbf{x}) \leq c_2\|\mathbf{x}\|^2,$$

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq -c_3\|\mathbf{x}\|^2,$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}\right\| \leq c_4\|\mathbf{x}\|, \quad (59)$$

mit positiven Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$ .

Bei exponentieller Stabilität ist also die Existenz einer Ljapunov-Funktion mit den Eigenschaften (59) gesichert.

Das Ergebnis ist allerdings nicht konstruktiv, d.h. eine konkrete Ljapunov-Funktion kann mittels Satz 3 nicht bestimmt werden. Für lineare Systeme gilt jedoch

**Satz 4** ([5]). *Ein lineares System ist genau dann exponentiell stabil, wenn es asymptotisch stabil ist.*

Dies ist plausibel, wenn man bedenkt, dass für stabile lineare Systeme immer eine quadratische Ljapunov-Funktion existiert.

Für die in Abschnitt 2 vorgestellten Regler ergibt sich daher intuitiv, dass diese zu exponentieller Stabilität der Ruhelage führen. Sie werden ja so entworfen, dass sie schneller ausregeln als ein linearer Regler, der nach Satz 4 die Ruhelage in jedem Fall exponentiell stabilisiert. Wie die folgenden Sätze zeigen, ist die Ruhelage einer stabilen weichen SVR nach einem der drei Konzepte aus Abschnitt 2 immer exponentiell stabil.

**Satz 5.** *Die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eines linearen Systems, geregelt mit einer impliziten weichen SVR, d.h. mit dem Regelgesetz (9) und der Auswahlstrategie (14), ist exponentiell stabil.*

**Satz 6.** *Die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eines linearen Systems, geregelt mit einer weichen SVR mit variabler Sättigung, d.h. mit dem Regelgesetz (31) und der Auswahlstrategie (32), ist exponentiell stabil.*

**Satz 7.** *Die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eines linearen Systems, geregelt mit einer dynamischen weichen SVR, d.h. mit dem Regelgesetz (37) und der Auswahlstrategie (38), ist exponentiell stabil.*

*Beweise.* Siehe Anhang. □

#### 4.2 Beobachter für einen weichen strukturvariablen Regelkreis mit statischem Auswahlgesetz

Gegeben sei eine lineare Regelstrecke mit einem weichen strukturvariablen Regler, welcher ein eindeutiges, statisches Auswahlgesetz verwendet – wie im Fall der impliziten weichen SVR und der weichen SVR mit variabler Sättigung. Die Systemgleichung lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p(\mathbf{x})))\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (60)$$

Es wird vorausgesetzt, dass der geschlossene Regelkreis (60) auf einer Umgebung  $\mathcal{D}$  des Ursprungs exponentiell stabil ist. Dann existiert nach Satz 3 eine quadratisch abschätzbare Ljapunov-Funktion,  $v(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , mit den Eigenschaften (59).

Die lineare Strecke mit weicher SVR (60) wird nun um einen Beobachter mit dem Zustandsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  ergänzt, sodass das gesamte Regelungssystem von den folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\tilde{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \\ p &= S(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ oder } S(\tilde{\mathbf{x}}, p) = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Eine alternative Möglichkeit ist die Darstellung in den Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$  und dem Schätzfehler  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p(\tilde{\mathbf{x}})))\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{e} \\ &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{e} \\ p &= S(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ oder } S(\tilde{\mathbf{x}}, p) = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Wie man sieht, kann man den nichtlinearen Anteil der Dynamik von  $\tilde{\mathbf{x}}$  in dieser Darstellung mit  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  beschreiben. Die Dynamik von  $\mathbf{e}$  ist dagegen vollständig linear und bei entsprechender Auslegung von  $\mathbf{l}$  auch stabil. Der Schätzfehler  $\mathbf{e}$  verschwindet also für  $t \rightarrow \infty$  und dementsprechend gilt dann  $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$ . Aus diesem Grund erscheint es plausibel, dass die Ruhelage des ganzen Regelystems stabil ist. Dennoch muss diese plausible Annahme bewiesen werden, was im Folgenden geschieht.

Die Betrachtungen beschränken sich auf vollständige Beobachter, sie sind aber auf reduzierte Beobachter übertragbar.

**Satz 8.** *Eine lineare Regelstrecke sei wie in Gleichung (60) mit einem weichen strukturvariablen Regler geregelt, dessen statisches Auswahlgesetz für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_1 \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist. Die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des geschlossenen Regelkreises sei exponentiell stabil mit einem Einzugsgebiet  $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$ .*

*Wenn dann alle Eigenwerte der Beobachtermatrix  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  einen negativen Realteil haben, ist die Ruhelage des Systems (62) asymptotisch stabil mit einem Einzugsgebiet*

$$\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}^{2n}. \quad (63)$$

*Dabei ist  $\mathcal{D}_1$  die Menge aller  $(\tilde{\mathbf{x}}^T \ \mathbf{e}^T)^T$ , für die das Auswahlgesetz definiert ist:*

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \mid \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{K}_1 \right\}. \quad (64)$$

*Beweis.* Die Ljapunov-Funktion  $v(\mathbf{x})$  für den Regelkreis ohne Beobachter, deren Existenz durch Satz 3 gesichert ist, soll als Funktion von  $\tilde{\mathbf{x}}$  als Bestandteil einer Ljapunov-Funktion  $\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e})$  für System (62) verwendet werden. Dabei kann man die Eigenschaften (59) durch Einsetzen von  $\tilde{\mathbf{x}}$  an Stelle von  $\mathbf{x}$  entsprechend übernehmen:

$$c_1 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 \leq v(\tilde{\mathbf{x}}) \leq c_2 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad (65)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq -c_3 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad (66)$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right\| \leq c_4 \|\tilde{\mathbf{x}}\|, \quad (67)$$

mit positiven Konstanten  $c_1, c_2, c_3$  und  $c_4$ .

Zur Funktion  $v(\tilde{\mathbf{x}})$ , die für das Gesamtsystem keine Ljapunov-Funktion ist, wird eine positive quadratische Form von  $\mathbf{e}$ , multipliziert mit einer positiven Konstanten  $\xi$ , hinzuaddiert:

$$\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}) = v(\tilde{\mathbf{x}}) + \xi \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}. \quad (68)$$

Dabei ist  $\mathbf{P}$  eine symmetrische Matrix, welche die Ljapunov-Gleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) = -\mathbf{Q} \quad (69)$$

mit einer positiv definiten Matrix  $\mathbf{Q}$  erfüllt. Im Folgenden wird gezeigt, dass  $\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e})$  eine Ljapunov-Funktion des Gesamtsystems mit Beobachter ist.

Die Forderung, dass die Matrix  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, stellt sicher, dass die Matrix  $\mathbf{P}$  in Gl. (69) positiv definit ist, d. h.

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (70)$$

Zusammen mit Eigenschaft (65) ergibt sich deshalb, dass  $\tilde{v}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  die ersten beiden Bedingungen für asymptotische Stabilität nach der direkten Methode von Ljapunov [11; 18] erfüllt:

$$\tilde{v}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0, \quad (71)$$

$$\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}) > 0 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2 \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (72)$$

Nun muss noch nachgewiesen werden, dass auch die dritte Bedingung für asymptotische Stabilität, nämlich

$$\dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}) < 0 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (73)$$

erfüllt ist. Mit der Systemdynamik (62) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}) &= \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \xi \mathbf{e}^T ((\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)) \mathbf{e} \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{e}) - \xi \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{e} - \xi \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (74)$$

Mit Hilfe der Eigenschaften (66) und (67) und dem Rayleigh-Quotienten<sup>3</sup> von  $\mathbf{Q}$  kann dieser Ausdruck abgeschätzt werden zu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}) &\leq -c_3 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 + c_4 \|\tilde{\mathbf{x}}\| \|\mathbf{l}\mathbf{c}^T\| \|\mathbf{e}\| - \xi \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \|\mathbf{e}\|^2 \\ &= - \left( \sqrt{c_3} \|\tilde{\mathbf{x}}\| - \frac{c_4}{2\sqrt{c_3}} \|\mathbf{l}\mathbf{c}^T\| \|\mathbf{e}\| \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{c_4^2}{4c_3} \|\mathbf{l}\mathbf{c}^T\|^2 - \xi \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \right) \|\mathbf{e}\|^2. \end{aligned} \quad (77)$$

<sup>3</sup> Als Rayleigh-Quotient einer symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$  und eines Vektors  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  bezeichnet man den Ausdruck

$$R(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (75)$$

Der Rayleigh-Quotient genügt der Ungleichung

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{A}\}. \quad (76)$$

Dabei bezeichnet  $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$  ( $\lambda_{\max}\{\mathbf{A}\}$ ) den kleinsten (größten) Eigenwert der Matrix  $\mathbf{A}$ .

Bei Wahl von  $\xi$  mit

$$\xi > \frac{c_4^2 \|\mathbf{l}\mathbf{c}^T\|^2}{4c_3 \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}} \quad (78)$$

ist

$$\dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}) < 0 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2 \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (79)$$

erfüllt und die lokale asymptotische Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  mit Einzugsgebiet  $\mathcal{D}_2$  damit gegeben.  $\square$

Satz 8 sichert die Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des Regelkreises, ist aber nicht konstruktiv bezüglich des Einzugsgebiets  $\mathcal{D}_2$  der Ruhelage. Es ist zwar möglich, mittels der Ljapunov-Funktion  $\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e})$  das Gebiet  $\mathcal{D}_2$  anzunähern, allerdings ist eine solche Näherung recht konservativ. Dies liegt daran, dass die für die Ljapunov-Funktion verwendeten Abschätzungen sehr allgemein gehalten sind.

### 4.3 Beobachter für einen weichen strukturvariablen Regelkreis mit dynamischem Auswahlgesetz

Nachdem der Beweis für die statische weiche SVR abgeschlossen ist, werden im Folgenden dynamische Auswahlgesetze untersucht, bei denen der Auswahlparameter  $p$  durch eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben ist. Die Zustandsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)) \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, p) \\ \dot{p} &= S(\mathbf{x}, p). \end{aligned} \quad (80)$$

Es wird vorausgesetzt, dass  $S(\mathbf{0}, 0) = 0$  gilt. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (81)$$

eine Ruhelage von System (80). Es wird vorausgesetzt, dass diese Ruhelage exponentiell stabil ist.

Analog zum strukturvariablen Regler mit statischem Auswahlgesetz existiert nach Satz 3 eine Funktion  $v(\mathbf{x}, p)$  mit den Eigenschaften

$$c_1 \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix} \right\|^2 \leq v(\mathbf{x}, p) \leq c_2 \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix} \right\|^2, \quad (82)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix}} \right)^T \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, p) \\ S(\mathbf{x}, p) \end{pmatrix} \leq -c_3 \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix} \right\|^2, \quad (83)$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix}} \right\| \leq c_4 \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{pmatrix} \right\|, \quad (84)$$

mit positiven Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$ .

Beim Hinzufügen des Beobachters wird der Schätzfehlervektor  $\mathbf{e}$  nicht um einen Schätzfehler von  $p$  ergänzt, da  $p$



ein berechneter Wert und deshalb exakt bekannt ist. Demnach lautet die Darstellung des Systems in den Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}$ ,  $p$  und  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{e} \\ &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, p) + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{e} \\ \dot{p} &= S(\tilde{\mathbf{x}}, p) \\ \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{e}. \end{aligned} \tag{85}$$

**Satz 9.** Eine lineare Regelstrecke sei mit einem weichen strukturvariablen Regler gemäß Gleichung (80) geregelt, dessen dynamisches Auswahlgesetz  $\dot{p} = S(\mathbf{x}, p)$  für alle  $(\mathbf{x}^T p)^T \in \mathcal{K}_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definiert ist. Die Ruhelage  $(\mathbf{x}^T p)^T = \mathbf{0}$  des geschlossenen Regelkreises sei exponentiell stabil mit dem Einzugsgebiet  $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$ .

Wenn dann alle Eigenwerte der Beobachtermatrix  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  einen negativen Realteil haben, ist die Ruhelage des Systems (85) asymptotisch stabil mit einem Einzugsgebiet

$$\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}^{2n+1}. \tag{86}$$

Dabei ist  $\mathcal{D}_1$  die Menge aller  $(\tilde{\mathbf{x}}^T p \mathbf{e}^T)^T$ , für die das Auswahlgesetz definiert ist:

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ p \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ p \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_1 \right\}. \tag{87}$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Satz 8 wird

$$\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, p, \mathbf{e}) = v(\tilde{\mathbf{x}}, p) + \xi \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} \tag{88}$$

als Ljapunov-Funktion verwendet. Diese Funktion erfüllt wie im Fall von Gleichung (68) die Ljapunov-Bedingungen (71) und (72). Es folgt der Nachweis, dass auch Bedingung (73),  $\dot{\tilde{v}} < 0$ , erfüllt ist. Zunächst einmal gilt für die zeitliche Ableitung mit Gleichung (85)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}} &= \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial v}{\partial p} \dot{p} - \xi \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, p) + \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{e} + \frac{\partial v}{\partial p} S(\tilde{\mathbf{x}}, p) - \xi \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}. \end{aligned} \tag{89}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right\| &= \sqrt{\left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}_n} \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}_n} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)^2} \\ &= \left\| \frac{\partial v}{\partial \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ p \end{pmatrix}} \right\|. \end{aligned} \tag{90}$$

Mit diesem Ergebnis in Verbindung mit Eigenschaft (84) sowie mit Eigenschaft (83) lässt sich  $\dot{\tilde{v}}$  dann abschätzen zu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, p, \mathbf{e}) &\leq -c_3 \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ p \end{pmatrix} \right\|^2 + c_4 \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ p \end{pmatrix} \right\| \|\mathbf{l}\mathbf{c}^T\| \|\mathbf{e}\| \\ &\quad - \xi \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \|\mathbf{e}\|^2. \end{aligned} \tag{91}$$

Dieses Polynom hat die gleiche Struktur wie das Polynom in Gleichung (77) im vorangehenden Beweis. Daraus folgt, dass  $\tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}, p, \mathbf{e})$  eine Ljapunov-Funktion ist, wenn  $\xi$  wie in Gleichung (78) gewählt wird.  $\square$

#### 4.4 Allgemeiner Stabilitätssatz für weiche SVR mit Beobachter

Die Sätze 8 und 9 können in folgendem Satz zusammengefasst werden.

**Satz 10.** Die Regelstrecke

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \tag{92}$$

sei vollständig steuerbar und beobachtbar. Sie werde geregelt mit einer weichen SVR

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}, \\ p &= S(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}, p) = 0 \text{ oder } \dot{p} = S(\mathbf{x}, p). \end{aligned} \tag{93}$$

Unter Verwendung eines Beobachters

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{94}$$

lautet das Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{k}^T(p)\tilde{\mathbf{x}} \\ p &= S(\tilde{\mathbf{x}}), S(\tilde{\mathbf{x}}, p) = 0 \text{ oder } \dot{p} = S(\tilde{\mathbf{x}}, p). \end{aligned} \tag{95}$$

Die Eigenwerte der Dynamik des Schätzfehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$  sind die der Matrix  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  und können durch  $\mathbf{l}$  beliebig mit negativem Realteil vorgegeben werden.

Wenn dann die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des Regelkreises ohne Beobachter exponentiell stabil ist, ist die Ruhelage  $(\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}}^T)^T = \mathbf{0}$  des Regelkreises mit Beobachter asymptotisch stabil.

Man kann demnach bei weichen SVR analog zum Separationstheorem für lineare Systeme vorgehen. Zuerst entwirft man die Regelung so, als ob alle Zustandsgrößen gemessen werden können. Danach wird der Beobachter separat entworfen und in den Regelkreis eingefügt.

Unter obigen Satz fallen die drei betrachteten weichen SVR als Spezialfälle. Es sei noch angemerkt, dass das Ergebnis sich auf andere nichtlineare Regelgesetze übertragen lässt, solange diese die Strecke exponentiell stabilisieren.

### 5 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde gezeigt, dass die Stabilität eines mit einer weichen SVR geregelten linearen Systems beim Einsatz eines Zustandsbeobachters erhalten bleibt.

Dies trifft sowohl für statische, wie auch für dynamische weiche SVR zu. In einem zukünftigen Artikel werden das nahezu zeitoptimale Ausregelverhalten und der Einsatz des Beobachters an Hand eines Beispiels illustriert.

## Anhang

Hier werden die Beweise zu den Sätzen 5, 6 und 7 angegeben. Vorab stehen noch ein Lemma und ein Satz, die für die Beweise benötigt werden.

**Lemma 1.** *Es gilt für alle  $v > 0$*

$$v \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S}(v) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{R}(v) \mathbf{x}} \geq \lambda_{\min} \{ \mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1} \}, \quad (96)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(v) &= \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(v), \\ \mathbf{W}^T \mathbf{W} &= \mathbf{R}_1, \\ \mathbf{S}(v) &= v^{-1} \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{S}_1 \mathbf{D}^{-1}(v), \\ \mathbf{S}_1 &= -\mathbf{N} \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (97)$$

$\mathbf{D}(v)$  ist wie in Gl. (10) und  $\mathbf{N}$  wie in Gl. (27) definiert.

*Beweis.* Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} v \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S}(v) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{R}(v) \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{S}_1 \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{x}} \\ &= \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \end{aligned} \quad (98)$$

mit der Substitution  $\mathbf{w} = \mathbf{W} \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{x}$ . Dies ist der Rayleigh-Koeffizient (siehe Fußnote 3) der Matrix  $\mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1}$ . Deshalb gilt durch Anwendung der Ungleichung (76)

$$\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \geq \lambda_{\min} \{ \mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1} \}, \quad (99)$$

wobei  $\lambda_{\min}$  den kleinsten Eigenwert bezeichnet.  $\square$

Für exponentielle Stabilität wird in Satz 2 gefordert, dass der Ausdruck

$$\dot{v} = \left( \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} \quad (100)$$

mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}$  Bedingung (57) erfüllt.

Ist  $v(\mathbf{x})$  jedoch nicht stetig differenzierbar nach  $\mathbf{x}$ , was bei der impliziten weichen SVR für  $v = \underline{p}$  der Fall ist, so kann Satz 2 nicht angewendet werden. Der Satz kann jedoch so erweitert werden, dass auch nicht differenzierbare Ljapunov-Funktionen verwendet werden können. Dies geschieht mit Hilfe der so genannten *rechten oberen Dini-Derivierten* [18]:

**Definition 2.** *Man bezeichnet*

$$D^+ v(\mathbf{x}(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(\mathbf{x}(t+h)) - v(\mathbf{x}(t))}{h} \quad (101)$$

als die rechte obere Dini-Derivierte der Ljapunov-Funktion  $v$  entlang der Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$ .

Wenn  $v(\mathbf{x})$  nach  $\mathbf{x}$  stetig differenzierbar ist, stimmen die rechte obere Dini-Derivierte und Ausdruck (100) überein.

**Satz 11** (Exponentielle Stabilität bei nicht differenzierbarer Ljapunov-Funktion). *Es sei  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  eine Ruhelage des Systems*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (102)$$

und sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung dieser Ruhelage. Wenn eine stetige Funktion  $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit den Eigenschaften

$$k_1 \|\mathbf{x}\|^a \leq v(\mathbf{x}) \leq k_2 \|\mathbf{x}\|^a \quad (103)$$

$$D^+ v(\mathbf{x}(t)) \leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^a \quad (104)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , wobei  $k_1, k_2, k_3$  und  $a$  beliebige positive Konstanten sind, dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  exponentiell stabil auf  $\mathcal{D}$ .

*Beweis.* Der Beweis basiert auf dem Beweis von Satz 2 aus [13]. Aus den Gleichungen (103) und (104) lässt sich

$$D^+ v(\mathbf{x}(t)) \leq -\frac{k_3}{k_2} v(\mathbf{x}(t)) \quad (105)$$

ableiten. Durch Anwendung des Vergleichslemmas (*comparison lemma*, [13]) erhält man daraus

$$v(\mathbf{x}(t)) \leq v(\mathbf{x}(t_0)) e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}. \quad (106)$$

Mit Hilfe der Eigenschaft (103) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \left( \frac{v(\mathbf{x}(t))}{k_1} \right)^{1/a} \\ &\leq \frac{k_2}{k_1} \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\frac{k_3}{k_2^a}(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (107)$$

woraus unmittelbar die exponentielle Stabilität erkennbar ist.  $\square$

Es folgen nun die Beweise der Sätze 5, 6 und 7.

*Beweis von Satz 5.*

Das System hat wie in Gleichung (24) dargestellt die Ljapunov-Funktion  $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ , wenn  $p$  über die implizite Gleichung (14) bestimmt wird.

Im linearen Bereich (29), d.h. in dem Bereich, wo  $\underline{p}$  verwendet wird, ist  $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$  keine Ljapunov-Funktion mehr. Deshalb wird für diesen Bereich eine explizite, quadratische Ljapunov-Funktion so gewählt, dass sie die implizite Funktion stetig fortsetzt. Dies ergibt insgesamt die Ljapunov-Funktion

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} p, & \mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \mathcal{G}(\underline{p}) \\ \underline{p} e(p) \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(\underline{p}) \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{G}(\underline{p}). \end{cases} \quad (108)$$

Diese Ljapunov-Funktion ist überall stetig, aber nicht differenzierbar bei  $v = \underline{p}$ .

Sowohl im Bereich der impliziten Regelung wie auch der linearen Regelung ist  $v(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar in  $\mathbf{x}$ , woraus

$$D^+ v(\mathbf{x}(t)) = \left( \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (109)$$

mit  $f(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)) \mathbf{x}$  folgt. Auf der Grenze zwischen beiden Bereichen, also für alle  $\mathbf{x}$ , welche  $g(\mathbf{x}, \underline{p}) = 0$  erfüllen, ist die Ljapunov-Funktion (108) stetig aber nicht differenzierbar. Ihre rechte obere Dini-Derivierte lautet

$$D^+ v(\mathbf{x}(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(\mathbf{x}(t+h)) - v(\mathbf{x}(t))}{h}. \quad (110)$$

Aufgrund der positiven Invarianz von  $\mathcal{G}(\underline{p})$  ist sichergestellt, dass aus  $\mathbf{x}(t) \in \partial\mathcal{G}(\underline{p})$  für beliebig kleine  $h > 0$  die Beziehung  $\mathbf{x}(t+h) \in \mathcal{G}(\underline{p})$  folgt. Deshalb gilt

$$D^+ v(\mathbf{x}(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v_l(\mathbf{x}(t+h)) - v_l(\mathbf{x}(t))}{h}, \quad (111)$$

wobei

$$v_l(\mathbf{x}) = \underline{p}e(\underline{p})\mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(\underline{p})\mathbf{x} \quad (112)$$

der dem linearen Bereich zugeordnete Anteil der Ljapunov-Funktion (108) ist. Die rechte obere Dini-Derivierte auf der Grenze stimmt also mit der rechten oberen Dini-Derivierten im linearen Bereich überein. Aus diesem Grund kann man die Grenze so behandeln, als ob sie zum linearen Gebiet gehört.

Wenn man für beide Bereiche exponentielle Stabilität nachweist, liegt für jedes Gebiet eine zeitlich exponentiell abfallende Obergrenze für den Betrag des Zustandsvektors vor. Es lässt sich in jedem Fall eine exponentiell abklingende Funktion finden, welche immer größer ist als diese beiden Obergrenzen. Deshalb folgt aus dem Nachweis der exponentiellen Stabilität für die einzelnen Bereiche unmittelbar die exponentielle Stabilität für das gesamte Gebiet.

#### Linearer Bereich

Für den Bereich der Regelung mit dem Reglervektor  $\mathbf{k}(\underline{p})$  ist die Regelung linear und die Ruhelage asymptotisch stabil. Das System ist somit nach Satz 4 in diesem Bereich exponentiell stabil. Wie oben angeführt ist die Grenze mit eingeschlossen.

#### Nichtlinearer Bereich

Für den nichtlinearen Bereich kann man aus Gleichung (14) folgern, dass

$$v = ve(v)\mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(v)\mathbf{x} \quad (113)$$

gilt. Daraus folgt mit  $v \in [\underline{p}, 1]$

$$\begin{aligned} \underline{p} \min_{v \in [\underline{p}, 1]} \{e(v)\} \lambda_{\min}\{\mathbf{R}_i(v)\} \|\mathbf{x}\|^2 &\leq v \\ \max_{v \in [\underline{p}, 1]} \{e(v)\} \lambda_{\max}\{\mathbf{R}_i(v)\} \|\mathbf{x}\|^2 &\geq v. \end{aligned} \quad (114)$$

Damit ist Bedingung (103) erfüllt.

Mit Hilfe der Regel zur Differenziation impliziter Funktionen ergibt sich für den implizit definierten Anteil der

Ljapunov-Funktion [1–3] mit dem Auswahlgesetz (14)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left( \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= - \left( \frac{\partial S(p = v, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}}{\partial S(p = v, \mathbf{x}) / \partial v} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= - \frac{e(v)\mathbf{x}^T \left( \hat{\mathbf{A}}(v)^T \mathbf{R}_i(v) + \mathbf{R}_i(v) \hat{\mathbf{A}}(v) \right) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T (e'(v) \mathbf{R}_i(v) - e(v) \mathbf{S}(v)) \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (115)$$

mit der positiv definiten Matrix

$$\mathbf{S}(v) = -\frac{1}{v} \mathbf{D}^{-1}(v) (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(v), \quad (116)$$

$\mathbf{N}$  wie in Gleichung (27), und

$$\hat{\mathbf{A}}(v) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v). \quad (117)$$

Aus Gleichung (115) folgt

$$\dot{v} = \frac{-\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i(v) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \left( -\frac{e'(v)}{e(v)} \mathbf{R}_i(v) + \mathbf{S}(v) \right) \mathbf{x}} \quad (118)$$

mit der negativ definiten Matrix

$$-\mathbf{Q}_i(v) = \hat{\mathbf{A}}^T(v) \mathbf{R}_i(v) + \mathbf{R}_i(v) \hat{\mathbf{A}}(v). \quad (119)$$

Mit Hilfe von Lemma 1 und Gleichung (14) erhält man schließlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \dot{v} &\leq \frac{-\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i(v) \mathbf{x}}{\left( -\frac{e'(v)}{e(v)} + \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1}\}}{v} \right) \mathbf{x}^T \mathbf{R}_i(v) \mathbf{x}} \\ &= - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i(v) \mathbf{x}}{-\frac{e'(v)}{e(v)^2} + \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1}\}}{ve(v)}} \\ &\leq - \min_{v \in [\underline{p}, 1]} \left( \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}_i(v)\}}{-\frac{e'(v)}{e(v)^2} + \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{W}^{-T} \mathbf{S}_1 \mathbf{W}^{-1}\}}{ve(v)}} \right) \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned} \quad (120)$$

Der zu minimierende Ausdruck ist immer positiv, da  $e(v) > 0$  und  $e'(v) \leq 0$  (siehe [3]), sodass auch Bedingung (104) erfüllt ist.  $\square$

*Beweis von Satz 6.* Die Funktion (34) ist eine Ljapunov-Funktion des Regelkreises (1), (31), (32) und (33). Anwenden des Rayleigh-Quotienten (75) liefert:

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{R}_v\} \|\mathbf{x}\|^2 \leq v(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{R}_v\} \|\mathbf{x}\|^2. \quad (121)$$

Da die Matrix  $\mathbf{R}_v$  positiv definit ist, sind alle Eigenwerte positiv. Damit ist Bedingung (56) für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $a = 2$  erfüllt. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \mathbf{x}^T \left( (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p))^T \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_v (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p)) \right) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_v(p) \mathbf{x} \\ &\leq - \min_{p \in [0, 1]} \{ \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}_v(p)\} \} \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned} \quad (122)$$

$\mathbf{Q}_v$  ist ebenfalls positiv definit für alle möglichen  $p$ . Damit ist auch Bedingung (57) erfüllt.  $\square$

*Beweis von Satz 7.* Die Funktion (43) ist eine Ljapunov-Funktion des Regelkreises (1), (37) und (38) (siehe [3; 7; 8]). Sie ist quadratisch und erfüllt Bedingung (56). Es gilt

$$\dot{v} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_d \mathbf{x} - 2p^2 r(p, \mathbf{x}). \quad (123)$$

Aus Gleichung (39) ergibt sich

$$0 < \mu_0 p^2 \leq p^2 r(p, \mathbf{x}) \leq \mu p^2 \quad (124)$$

und somit

$$\dot{v} \leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}_d\} \|\mathbf{x}\|^2 - \mu_0 p^2. \quad (125)$$

Daraus folgt, dass Gleichung (57) ebenfalls erfüllt ist.  $\square$

## Literatur

- [1] ADAMY, J.: *Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen*, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8. Bd. 271. VDI Verlag, 1991.
- [2] ADAMY, J.: Implicit Lyapunov Functions and Isochrones of Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 6, S. 874–879.
- [3] ADAMY, J.; FLEMMING, A.: Soft variable-structure controls: a survey. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1821–1844.
- [4] ALBERS, K.: *Syntheseverfahren für nichtlineare parameter- und strukturvariable Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen*, Universität Dortmund, Diss., 1983.
- [5] BROCKETT, R. W.: *Finite dimensional linear Systems*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [6] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen*. Bd. 1. 8. Oldenbourg, 1998.
- [7] FRANKE, D.: Strukturvariable Regelung ohne Gleitzustände. In: *Regelungstechnik* 30 (1982), Nr. 8, S. 271–276.
- [8] FRANKE, D.: Ausschöpfung von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. In: *Regelungstechnik* 30 (1982), Nr. 10, S. 348–355.
- [9] FRANKE, D.: Ein nichtlinearer dynamischer Regler mit adaptiven Eigenschaften. In: *Regelungstechnik* 31 (1983), Nr. 11, S. 369–374.
- [10] FRANKE, D.: Robust variable structure control of uncertain distributed parameter systems. In: *Control of distributed parameter systems*. Los Angeles, 1987 (Proceedings of IFAC), S. 263–268.
- [11] HAHN, W.: *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [12] HU, T.; LIN, Z.; QIU, L.: An explicit description of null controllable regions of linear systems with saturation actuators. In: *Systems & Control Letters* 47 (2002), S. 65–78.
- [13] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. 3. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [14] KIENDL, H.: *Suboptimale Regler mit abschnittsweise linearer Struktur*. New York: Springer, 1972.
- [15] KIENDL, H.; SCHNEIDER, G.: Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke  $\text{const}/s^2$  aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. In: *Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung* 20 (1972), Nr. 7, S. 289–296.
- [16] KRASOVSKII, N. N.: *Stability of Motion*. Stanford: Stanford University Press, 1963.
- [17] LUENBERGER, D. G.: Observers for Multivariable Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 11 (1966), Nr. 2, S. 190–197.
- [18] ROUCHE, N.; HABETS, P.; LALOY, M.: *Stability theory by Liapunov's direct method*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [19] SCHMITENDORF, W.; BARMISH, B. R.: Null controllability of linear systems with constrained controls. In: *SIAM Journal of Control and Optimization* 18 (1980), S. 327–345.

Manuskripteingang: 13. September 2006.



**Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy** ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, Computational Intelligence, autonome mobile Roboter.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151 16 2507, E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de



**Dipl.-Ing. Hendrik Lens** promoviert am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik im Bereich nichtlinearer Regelungen. Hauptarbeitsgebiet: weiche strukturvariable Regelungen.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: hlens@rtr.tu-darmstadt.de