

Wirkungsgradmodell rotierender Verdrängerpumpen auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

eingereichte

D I S S E R T A T I O N

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Christian Philipp Schänzle

aus Esslingen am Neckar

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer
Tag der Einreichung:	13.10.2020
Tag der mündlichen Prüfung:	16.12.2020

Darmstadt 2020

D 17

Schänzle, Christian: Wirkungsgradmodell rotierender Verdrängerpumpen auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen.

Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUpriints: 2021

urn:nbn:de:tuda-tuprints-186238

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 2020

Veröffentlicht unter CC-BY-NC 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses>

Vorwort des Herausgebers

Kontext

Fluidenergiemaschinen ermöglichen Prozesse, deren Funktion durch Verben wie dosieren, versprühen oder fördern beschrieben wird. Die Funktion ist aber nur eine Seite der Medaille und ist heute tatsächlich nur eine zu erfüllende Restriktion. Die zweite Seite der Medaille ist die Qualität der Funktionserfüllung. Die Qualität wird durch das Adverb beschrieben. „Pulsationsfrei fördern“ vereint Funktion und Qualität.

Im Rahmen von Sustainable Systems Design ist die Qualität zu maximieren unter Beachtung der Restriktionen, die durch die geforderte Funktion, den Designraum sowie die physikalische Realität vorgegeben sind. Die Qualität wird durch den Aufwand, die Verfügbarkeit und die Akzeptanz beschrieben. Der Aufwand wiederum lässt sich in Energie- und Materialverbrauch - allgemein Kosten bemessen.

In der Arbeit von Herrn Schänzle steht die energetische Qualität der Funktion im Mittelpunkt. Die gesellschaftlichen Kosten hierfür sind erheblich, wenn man sich vor Augen führt, dass in etwa jedes vierte Windrad allein dem Antreiben von Fluidarbeitsmaschinen dient. Herr Schänzle hat sich in seiner Forschung mit rotierenden und translatorisch arbeitenden Verdrängerpumpen beschäftigt. Hier steht die rotierende Verdrängerpumpe im Mittelpunkt.

Notwendiges Physikalisches um Transparenz für Hersteller, Betreiber und Gesellschaft zu ermöglichen

Aus regelungstechnischer Sicht sind Fluidsysteme praktisch immer überaktuiert, d.h., sie zeigen im quasi-stationären Betrieb mit „Bremse“ und „Gaspedal“ mehr Aktoren als Freiheitsgrade. Eine reine Funktionsorientierung, die bisher vorherrschte, stellt dies nicht in Frage. Erst das oben angesprochene beschränkte Optimierungsproblem „minimiere den Energieverbrauch unter der Nebenbedingung, dass die spezifizizierte Funktion erfolgt ist“ führt dazu, dass nicht nur die Pumpe, sondern auch das System betrachtet wird.

Derzeit betrachtet die Europäische Union im Eco-Design die energetische Qualität der Komponenten, die direkt von Elektromotoren angetrieben werden. Dabei werden ordnungspolitische Instrumente genutzt, um den Markt zu beschränken. Diese Instrumente haben zumindest bei Kreiselpumpen mit der Ähnlichkeitstheorie ein physikalisches Fundament. Bei Verdrängerpumpen fehlte bisher ein analoges physikalisches Fundament.

II

Woran liegt dies? Eine Kreiselpumpe und ein Ventilator sind geometrisch und allgemein physikalisch ähnlicher als eine Zahnradpumpe und eine Schraubpumpe. Die Funktion und Qualität von Kreiselpumpe und Ventilator lassen sich bei den relevanten großen Reynolds-Zahlen rein kinematisch beschreiben. Dies gelingt bei Verdrängermaschinen nicht, da die dynamische Größe Viskosität und damit das Fördermedium für die energetische Qualität relevant ist. Alle vergangenen Versuche einer einheitlichen energetischen Qualitätsbewertung von Verdrängermaschinen der vergangenen Dekaden sind daher als gescheitert zu bewerten.

Die Wissenschaft ist auf dem Weg immer feiner granular zu werden. Wenn es um Marktregulierung auf der einen Seite und die praktische Anwendbarkeit von wissenschaftlicher Erkenntnis auf der anderen geht, dann ist diese Richtung vom Groben zum Feinen nicht die passende Richtung.

Herr Schänzle geht den umgekehrten Weg. Er geht von Daten zur Erkenntnis und entwickelt eine „Brille“, die für möglichst viele Pumpentypen passt. Diese Brille ist – so die Erwartung – von Nutzen, um die energetische Qualität von Pumpen für die unterschiedlichen Stakeholder (i) Hersteller, (ii) Betreiber und (iii) Gesellschaft zu bewerten. Um Vertrauen in die Metrik zur Bewertung der energetischen Qualität von Funktionseinheiten zu gewährleisten, ist Nachvollziehbarkeit und wissenschaftliches Arbeiten Voraussetzung.

Methoden

Herr Schänzle nutzt in seiner Arbeit drei wissenschaftliche Methoden. Erstens, die Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitstheorie, die schon Fourier nutzte und ihr axiomatisches Fundament durch Bridgman erhalten hat, der „die absolute Bedeutung relativer Größen“ als Axiom formulierte.

Verdrängerpumpen einer Baureihe sind nicht geometrisch ähnlich, d.h., sie haben unterschiedliche Gestalt. Herr Schänzle berücksichtigt dies. Unvollständige Ähnlichkeit in der Reynoldszahl oder Mach-Zahl ist bei Turbomaschinen bekannt. Bei Verdrängerpumpen dominiert die unvollständige Ähnlichkeit in der Gestalt selbst in einer Baureihe.

Herr Schänzle nutzt zweitens, die Unsicherheitsquantifizierung von Daten und Modellen. Es ist besonders positiv herauszustellen, dass Herr Schänzle nicht nur die Datenunsicherheit quantifiziert, sondern auch die Modellunsicherheit. Damit arbeitet Herr Schänzle im Umfeld des Sonderforschungsbereiches SFB 805 mit dem Thema „Beherrschen von Unsicherheit“.

Herr Schänzle nutzt drittens, die von ihm aufgenommenen experimentellen Daten von insgesamt acht Pumpen. Bei den Zahnradpumpen untersuchte er eine Baureihe. Um den Einfluss der Viskosität zu untersuchen, hat Herr

Schänzle vier verschiedene Öle bei unterschiedlichen Temperaturen untersucht. Damit sind 32 verschiedene Versuchsaufbauten in zwei Kreisläufen mit vier Ölbehältern realisiert worden. Insgesamt hat Herr Schänzle 1250 Betriebspunkte aufgenommen, Wiederholungsmessungen nicht mitgerechnet. Die Dimensionsanalyse und das Modell nutzt Herr Schänzle sehr geschickt „zur Befreiung vom Diktat des Partikulären“ [Prof. E. Becker, TU Darmstadt].

Fazit

Die wissenschaftliche Methode, die von Galilei eingeführt wurde, hat die Elemente

- Beobachtung der Natur [und Technik] in einem Laborexperiment
- Abstraktion und Konzentration auf Relevanz
- Modellbildung und Validierung im „Dialog mit der Natur [und der Technik]“ [Prigogine]

Als Sprache dient Galilei die Mathematik. Das Ergebnis von Wissenschaft ist Erkenntnis und Vertrauen in die Erkenntnis. Damit ist die Arbeit von Herrn Schänzle eine ingenieurwissenschaftliche Arbeit im eigentlichen Sinne. Das Ergebnis der Arbeit ist eine Brille, die für alle drei genannten Stakeholder (i) Hersteller, (ii) Betreiber und (iii) Gesellschaft von Nutzen sein wird.

Darmstadt, im Dezember 2020

Peter Pelz

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fluidsystemtechnik der Technischen Universität Darmstadt. Während dieser Zeit habe ich die Unterstützung vieler Menschen erfahren, denen ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz danke ich sehr herzlich für den Rückhalt und das Vertrauen, die er mir und meiner Arbeit entgegengebracht, und den Freiraum, den er mir für die Gestaltung meiner Forschungsaktivitäten ermöglicht hat. Seine inspirierende Sichtweise auf die Modellierung von Fluidsystemen gemäß den Prinzipien Einfachheit, Klarheit und Kreativität haben diese Arbeit maßgeblich geprägt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer bin ich für die freundliche Übernahme des Koreferats und das Interesse an meiner Arbeit sehr dankbar. Herrn Dr.-Ing. Hannes Lünzmann danke ich für den freundschaftlichen Gedankenaustausch und den motivierenden Zuspruch für meine Forschung.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Fluidsystemtechnik danke ich für die vielen unvergesslichen Momente während meiner Tätigkeit am Institut. Für die fachlichen Diskussionen und fruchtbaren Gespräche, die zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen haben, danke ich insbesondere den Herren Dr.-Ing. Gerhard Ludwig, Dr.-Ing. Ibrahim Budde, Dr.-Ing. Tobias Corneli, Maximilian Kuhr und Nils Preuß. Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern der Werkstatt, die mich beim Prüfstands Aufbau und den zahlreichen Umbauten unterstützt haben.

Den Studierenden Nils Strömer, Jan Lemmer, Kris Jost, Manuel Metzger, Jan Stifter und Martin Hock, die mich im Rahmen ihrer studentischen Arbeiten und Hiwi-Tätigkeiten mit größtem Engagement unterstützt haben, danke ich ebenfalls sehr herzlich.

Mein größter Dank richtet sich an meine Frau Christine und meine Eltern Jörg und Waltraud Schänzle, ohne deren Unterstützung und stetigen Rückhalt diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Diese Arbeit ist meinen Großeltern gewidmet.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den in ihr ausdrücklich genannten Hilfen, selbständig verfasst habe.

Darmstadt, im Oktober 2020
Christian Schänzle

Kurzfassung

Der Wirkungsgrad von rotierenden Verdrängerpumpen wird im Rahmen der allgemeinen Bemühungen um Energieeffizienz zukünftig an Bedeutung gewinnen. Eine zentrale Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang der Berechnung des Wirkungsgradverhaltens von rotierenden Verdrängerpumpen zu, sowohl hinsichtlich möglicher legislativer Anforderungen als auch durch Bestrebungen auf Anwenderseite, den Energieverbrauch von Verdrängerpumpen bei der Anlagenplanung zu berücksichtigen und zu optimieren. Dazu bedarf es physikalisch basierter und einfach anwendbarer Modelle. Darunter werden stationäre OD-Modelle verstanden, die das Wirkungsgradverhalten mit algebraischen Gleichungen in Abhängigkeit der relevanten Einflussgrößen beschreiben.

In diesem Kontext wird in dieser Arbeit die Frage nach Ähnlichkeitsbeziehungen gestellt, die sich für die Wirkungsgradmodellierung rotierender Verdrängerpumpen sinnvoll anwenden lassen. Zur Beantwortung werden sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen an den drei Pumpentypen dreispindlige Schraubpumpe, Außenzahnradpumpe und zweiflügelige Drehkolbenpumpe durchgeführt.

Der Schwerpunkt der theoretischen Untersuchungen ist die Herleitung problemspezifischer dimensionsloser Größen mittels Dimensionsanalyse, anhand derer der Wirkungsgrad für die verschiedenen Pumpentypen einheitlich dargestellt werden kann. Ferner werden zwei semi-axiomatische Modelle für die volumetrischen und mechanisch-hydraulischen Verluste aufgestellt, auf deren Grundlage das Wirkungsgradverhalten bei quantifizierter Modellunsicherheit vorhergesagt werden kann.

Die Messung von stationären Kennfeldern an Baureihen von Schrauben- und Zahnradpumpen sowie an einer einzelnen Drehkolbenpumpe mit insgesamt vier unterschiedlichen Hydraulikölen stellen die experimentellen Untersuchungen dar. Im Rahmen der Modellvalidierung werden die Abweichungen der Modellvorhersagen anhand der experimentellen Vergleichsdaten sowie die Unsicherheit der Modellvorhersagen über ein Vertrauensintervall dargestellt, diskutiert und abschließend bewertet.

Abstract

The efficiency of rotary displacement pumps will become more important due to the ongoing efforts to reduce energy consumption. In this context, modeling the efficiency of these pumps is of central importance. This requires physically based, easily applicable and stationary 0D models describing the efficiency with algebraic equations considering the relevant influencing variables.

Against this background, this doctoral thesis investigates the similarity of rotary positive displacement pump and its application to efficiency modeling. Therefore, both theoretical and experimental investigations are carried out considering the following three pump types: three spindle screw pump, external gear pump and two rotor lobe pump.

The focus of the theoretical investigations lies on the derivation of problem-specific dimensionless quantities by means of dimensional analysis. These quantities serve a uniform description of the efficiency behavior of all pump types. In addition, two semi-axiomatic models are developed both for the volumetric and mechanical hydraulic losses. These models allow the efficiency prediction including a confidence interval.

The measurements of steady-state characteristic curves on a series each of screw pumps and gear pumps as well as on a single rotary lobe pump represent the experimental investigations. On this experimental database, the model predictions as well as their confidence intervals are discussed and validated.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Wirkungsgrad bei Verdrängerpumpen	11
2.1	Wirkungsgraddefinition	12
2.2	Wirkungsgradmessung	25
2.3	Wirkungsgradmodelle	28
2.3.1	Axiomatische Modelle	29
2.3.2	Semi-axiomatische Modelle	31
2.3.3	Datengetriebene Modelle	36
2.4	Einordnung der Forschungsfrage	37
3	Wirkungsgradmodellierung auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen	41
3.1	Geometriebetrachtung	44
3.2	Dimensionsanalyse	49
3.3	Physikalische Ähnlichkeit einzelner Pumpen	55
3.4	Wirkungsgradmodell	67
3.4.1	Volumetrische Verluste	67
3.4.2	Mechanisch-hydraulische Verluste	71
3.5	Quantifizierung der Modellunsicherheit	78
4	Versuche	89
4.1	Prüffeld	89
4.1.1	Aufbau	89
4.1.2	Messtechnik	93
4.2	Versuchsdurchführung	94
4.3	Quantifizierung der Messunsicherheiten	96
5	Validierung des Wirkungsgradmodells	103
5.1	Schraubenpumpen	105
5.2	Zahnradpumpen	114
5.3	Drehkolbenpumpe	122
	Zusammenfassung und Ausblick	127
	Literatur	133

Anhang

A Dimensionslose Darstellungen	143
B Herleitung des Leckagemodells	151
C Prüfstand	153
C.1 Komponenten	153
C.2 Messsensorik	155
D Betriebsbereiche	157
E Validierungsergebnisse	163
E.1 Schraubenpumpen	163
E.2 Zahnradpumpen	167

Symbolverzeichnis

Die Symbole der ersten Spalte werden in der zweiten Spalte beschrieben. Die dritte Spalte, wenn vorhanden, gibt die Dimension als Monom mit den Basisgrößen Länge (L), Masse (M), Zeit (T) und Temperatur (Θ) an.

Lateinische Symbole

Symbol	Beschreibung	Dimension
b	Breite eines Rotors	L
B_G	Breite eines Gleitlagers	L
d	Durchmesser eines Rotors	L
h	Steigung einer Schraubenspindel	L
h_1	Enthalpieverlust durch Dissipation	$L^2 T^{-2}$
h_s	massenspezifische isentrope Enthalpie	$L^2 T^{-2}$
H_s	isentrope Enthalpie	$M L^2 T^{-2}$
$H_{s,e}$	effektive isentrope Enthalpie	$M L^2 T^{-2}$
h_t	massenspezifische Totalenthalpie	$L^2 T^{-2}$
$h_{t,s}$	massenspezifische isentrope Totalenthalpie	$L^2 T^{-2}$
L	Modellparameter des Leckagemodells	
m	Exponent des Leckagemodells	
M	Maßstabsfaktor	
\dot{m}	Massenstrom	$M T^{-1}$
M_C	druckabhängiges Reibmoment	$M L^2 T^{-2}$
M_{const}	betriebsgrößenunabhängiges und konstantes Reibmoment	$M L^2 T^{-2}$
m_e	effektiv geförderte Fluidmasse	M
m_F	geförderte Fluidmasse je Umdrehung	M
M_{hyd}	hydraulisches Moment	$M L^2 T^{-2}$
M_μ	Reibmoment durch viskose Reibung	$M L^2 T^{-2}$
m_{Q-n}	Steigung der Ausgleichgeraden zwischen Volumenstrom und Drehzahl	L^3
M_S	Wellenmoment	$M L^2 T^{-2}$
M_e	Reibmoment durch Trägheitsverluste	$M L^2 T^{-2}$
m_{tot}	Fluidmasse im Totvolumen	M
n	Drehzahl	T^{-1}
N	Anzahl von Messungen bzw. physikalischer Größen	

N_y	Anzahl von unabhängigen Messgrößen für abgeleitete Messgrößen	
N_M	Anzahl von Modellparametern	
p	statischer Druck	$M L^{-1} T^{-2}$
\bar{p}	mittlerer Druck im Gleitlager	$M L^{-1} T^{-2}$
P_{loss}	Verlustleistung durch Leckage und Reibung	$M L^2 T^{-3}$
P_S	Wellenleistung	$M L^2 T^{-3}$
p_U	Umgebungsdruck	$M L^{-1} T^{-2}$
q	beliebige physikalische Größe	
\dot{Q}	Wärmestrom	$M L^2 T^{-3}$
Q	gemessener Volumenstrom	$L^3 T^{-1}$
Q_e	effektiver Volumenstrom	$L^3 T^{-1}$
Q_{th}	theoretischer Volumenstrom	$L^3 T^{-1}$
r	Anzahl von Basisgrößen	
R_C	Modellparameter für Coulomb'sche Reibung	
R_G	Wellenradius im Gleitlager	L
R_μ	Modellparameter für viskose Reibung	
R_e	Modellparameter für Trägheitsverluste	
RMSE	Modellfehler bzw. Root Mean Square Error	
s	empirische Standardabweichung	
\bar{s}	mittlere Spalthöhe	L
T	Temperatur	Θ
$t_{95\%}$	t-Faktor der Student'schen Verteilung für ein 95% Konfidenzintervall	
v	massenspezifisches Volumen	$L^3 M^{-1}$
V	experimentell bestimmtes Verdrängervolumen	L^3
V_e	effektives Fördervolumen	L^3
V_g	geometrisches Verdrängervolumen	L^3
V_{gesamt}	gesamtes Volumen eines gefüllten Verdrängerraums	L^3
V_{th}	theoretisches Verdrängervolumen	L^3
V_{tot}	Totvolumen	L^3
$V_{\text{tot,e}}$	Differenz zwischen komprimiertem und entspanntem Totvolumen	L^3
W	Reibungskraft im Gleitlager	$M L^1 T^{-2}$

Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung	Dimension
δ	Messunsicherheit von der Dimension der Messgröße	
Δ	Differenz	
δV	Abweichung vom theoretischen Verdrängervolumen	L
Δp	statische Druckdifferenz	M L ⁻¹ T ⁻²
η	Wirkungsgrad	
κ	Nachgiebigkeit	M ⁻¹ L ¹ T ²
κ_i	Längenverhältnis	
μ	dynamische Viskosität	M L ⁻¹ T ⁻¹
ν	kinematische Viskosität	L ² T ⁻¹
Ω	Winkelgeschwindigkeit	T ⁻¹
Π	dimensionsloses Produkt	
ρ	Dichte	M L ⁻³
ψ_G	relatives Lagerspiel im Gleitlager	

Indices**Symbol Beschreibung**

1	Zustand 1, Eingang der Verdrängermaschine
2	Zustand 2, Ausgang der Verdrängermaschine
DP	Drehkolbenpumpe
kal	Kalibration
L	Leckage
max	maximal
mh	mechanisch-hydraulisch
min	minimal
ref	Referenz
S	Shaft (Welle)
SP	Schraubenpumpe
stat	statistisch
sys	systematisch
vol	volumetrisch
ZP	Zahnradpumpe

Abkürzungen**Symbol Beschreibung**

UKF	Umpump-Kühl-Filtereinheit
GUM	Guide to the expression of uncertainty in measurement

Dimensionslose Kennzahlen

Symbol	Beschreibung
$M_{\text{const}}^+ := \frac{M_{\text{const}}}{\Delta p V}$	dimensionsloser konstanter Reibmomentanteil
$M_{\text{mh}}^+ := \frac{M_{\text{mh}}}{\Delta p V}$	spezifisches Reibmoment
$Q_{\text{L}}^+ := \frac{Q_{\text{L}}}{\nu V^{1/3}}$	spezifische Leckage
$Re := \frac{n V^{2/3}}{\nu}$	Reynolds-Zahl
$So := \frac{\bar{p}}{\Omega \mu} \psi_{\text{G}}^2$	Sommerfeld-Zahl eines Gleitlagers
$\Delta p^+ := \frac{\Delta p V^{2/3}}{\nu^2 \rho}$	spezifischer Druck
$\kappa_{d_{\text{ZP}}} := \frac{d_{\text{ZP}}}{V^{1/3}}$	Längenverhältnis
$\mu_{\text{G}} := \frac{W}{2 \bar{p} R_{\text{G}} B_{\text{G}}}$	Reibungszahl eines Gleitlagers
$\psi := \frac{\bar{s}}{V^{1/3}}$	relativer Spalt
$\psi := \frac{\bar{s}}{d_{\text{ZP}}}$	relativer Spalt bei Zahnradpumpen

Kapitel 1

Einleitung

Rotierende Verdrängerpumpen sind eine Untergruppe der Fluidenergiemaschinen und zeichnen sich durch ihre mechanische Wirkungsweise und ihr statisches Arbeitsprinzip aus. Darunter versteht man, dass der Energieaustausch zwischen Maschine und Fluid auf der Basis einer Volumenänderungsarbeit im geschlossenen Kontrollraum sowie einer Verschiebearbeit, dem „Verdrängen“, in den Kontrollraum hinein und aus dem Kontrollraum heraus stattfindet¹. Der Begriff „Pumpe“ umfasst dabei zwei weitere wichtige Merkmale: Die Richtung des Energieaustausches von Maschine zu Fluid, also die Erhöhung der Fluidenergie, und die Einschränkung der Fluide auf im Wesentlichen tropfbare Flüssigkeiten². Der „Verdränger“ bewegt sich bei diesen Pumpen rotierend und wird daher auch als Rotor bezeichnet, im Gegensatz zu oszillierenden Verdrängerpumpen, bei denen die rotierende Bewegung der Antriebswelle durch ein Getriebe in eine Translationsbewegung des „Verdrängers“ umgewandelt wird.

Die Funktion einer rotierenden Verdrängerpumpe besteht also darin, eine Flüssigkeit entgegen einer Druckdifferenz zwischen Ein- und Auslass der Pumpe zu fördern. Diese Druckdifferenz tritt auf, um bei der Bewegung von Flüssigkeiten in Leitungen die entstehenden Reibungsverluste oder eine vorliegende geodätische Höhendifferenz zu überwinden. Die Druckdifferenz

¹ FISTER, *Physikalische Voraussetzungen, Kenngrößen, Elementarstufen der Strömungs- und Verdrängermaschinen*, ([18], 1984)

² Tropfbare Flüssigkeiten werden im allgemeinen Sprachgebrauch als Flüssigkeiten bezeichnet. Sie unterscheiden sich von Gasen insofern, dass bei gleicher relativer Volumenänderung sehr viel größere Volumenänderungsarbeit notwendig ist und sie durch Kondensation eine freie Oberfläche bilden, vgl. SPURK UND AKSEL ([80], S.2-4, 2007). Flüssigkeit-Gas- und Flüssigkeit-Feststoff-Gemische spielen für Pumpen grundsätzlich eine wichtige Rolle, finden in dieser Arbeit jedoch keine Berücksichtigung. Im Folgenden wird Flüssigkeit und Fördermedium als Synonym verwendet.

nimmt zu, wenn beispielsweise Flüssigkeiten zusätzlich in Druckbehälter gefüllt oder zur Kraftübertragung in der Mobilhydraulik verwendet werden. Neben dieser grundlegenden Funktion ergeben sich aus den jeweiligen Einsatzbereichen und speziellen Anwendungsgebieten weitere spezifische Anforderungen an Verdrängerpumpen. Zwei einschlägige Beispiele hierzu sind das pulsationsarme Fördern³ und das Fördern mit hoher Präzision⁴. Schänzle u. a.⁵ geben einen Überblick über die vielen anwendungsrelevanten Anforderungen an rotierende Verdrängerpumpen, die ursächlich für die große Vielfalt⁶ an spezifischen konstruktiven Ausführungen sind. Diese spezifischen Ausführungen werden im Folgenden als Pumpentypen bezeichnet. Bekannte Pumpentypen sind Zahnradpumpen, Schraubepumpen, Flügelzellenpumpen, Exzentrerschneckenpumpen und Drehkolbenpumpen.

Bei der Auswahl eines Pumpentyps stellen die Lebenszykluskosten neben einer uneingeschränkten Funktionserfüllung und einer möglichst optimalen Realisierung der anwendungsrelevanten Anforderungen, ein weiteres entscheidendes Bewertungskriterium dar. Die Lebenszykluskosten beschreiben den Aufwand einer Verdrängerpumpe über die gesamte Lebensdauer und setzen sich dabei im Wesentlichen aus den Investitionskosten, Betriebskosten und Instandhaltungskosten zusammen. Die Betriebskosten sind an dieser Stelle gleichbedeutend mit den Kosten für den Energieverbrauch der Pumpe und bestimmen die gesamten Lebenszykluskosten maßgeblich⁷. Der Energieverbrauch wird hierbei durch die anwendungsspezifisch geforderte hydraulische Leistung sowie den Wirkungsgrad, der aus dem Verhältnis von nutzbarer hydraulischer Leistung und zugeführter mechanischer Leistung gebildet wird, bestimmt. Der Wirkungsgrad stellt somit die maßgebliche Größe für die Bewertung des Aufwands dar.

Neben den anwendungsrelevanten Anforderungen und dem Wirkungsgrad kommt mit der Akzeptanz ein drittes Bewertungskriterium hinzu. Damit ist ganz allgemein die gesellschaftliche Akzeptanz gemeint, die sich beispielsweise durch Regulierung des Marktzugangs von Pumpen ausdrücken kann.

³ Kühlschmiermittel in Werkzeugmaschinen müssen möglichst pulsationsarm gefördert werden; daher kommen bei gleichzeitig hohen Drücken häufig Schraubepumpen zum Einsatz.

⁴ Wird auch als Dosieren bezeichnet und ist in vielen Prozessen notwendig, beispielsweise bei der Additivdosierung zur Kunststoffaufbereitung.

⁵ SCHÄNZLE, LUDWIG UND PELZ, „ERP Positive Displacement Pumps – Physically Based Approach Towards an Application-Related Efficiency Guideline“, ([65], 2016)

⁶ VETTER, *Rotierende Verdrängerpumpen für die Prozeßtechnik*, ([93], 2006)

⁷ HYDRAULIC INSITUTE, *Pump life cycle costs: a guide to LCC analysis for pumping systems*, ([27], 2000)

Aus diesen drei Bewertungskriterien lässt sich nun ein spezifisches Spannungsfeld⁸ für die Auswahl rotierender Verdrängerpumpen gemäß Abbildung 1.1 darstellen. Die Kriterien Wirkungsgrad, anwendungsrelevante Anforderungen und Akzeptanz bilden dabei Eckpunkte eines Dreiecks, das das Spannungsverhältnis dieser Kriterien zueinander verdeutlicht, die üblicherweise nicht gleichermaßen optimal erfüllt werden können. Die Funktionserfüllung muss dagegen immer vollständig gewährleistet sein und stellt damit eine notwendige Bedingung für die Auswahl einer Verdrängerpumpe dar.

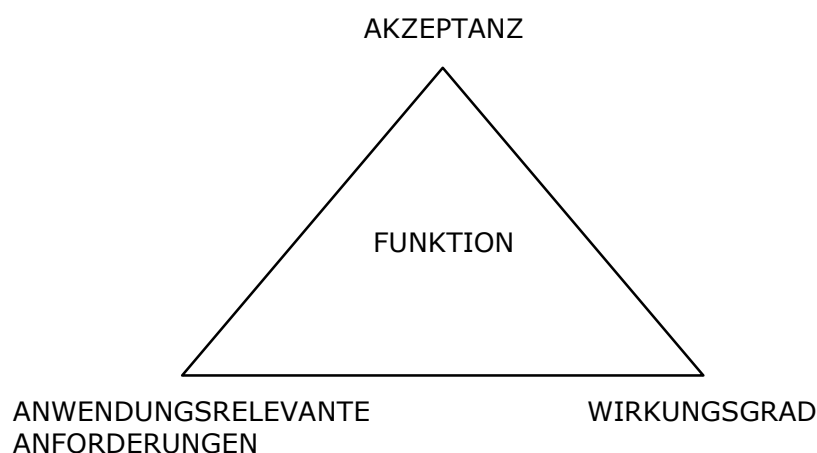


Abbildung 1.1 – Das Spannungsfeld für eine rotierende Verdrängerpumpe.

Im Folgenden wird auf die Bedeutung des Wirkungsgrads eingegangen. Sie besteht nicht nur hinsichtlich des Energieverbrauchs und die damit verbundenen Kosten für den Betreiber der Pumpe sondern auch hinsichtlich des gesamtgesellschaftlichen Ziels einer Reduzierung von CO₂-Emissionen. Detaillierte Studien, die im Rahmen der Ökodesign-Richtlinie der Europäischen Kommission durchgeführt wurden, betrachten Fluidenergiemaschinen als relevante Verbraucher elektrischer Energie⁹. In diesem Zusammenhang zeigt eine Studie des Fraunhofer-Instituts für System- und Innovationsforschung¹⁰, dass Pumpen im Jahr 2017 allein für 9% des elektrischen Energieverbrauchs in der deutschen Industrie verantwortlich waren. Da die Stromerzeugung weltweit

⁸ Im Spannungsfeld wird üblicherweise die Verfügbarkeit, die gleichbedeutend mit der Lebensdauer ist, berücksichtigt. Hier wird die Verfügbarkeit den anwendungsrelevanten Anforderungen zugerechnet.

⁹ HUGH FALKNER, *EuP Lot 11: Water pumps (in commercial buildings, drinking water pumping, food industry, agriculture)*, ([25], 2007)

¹⁰ ROHDE, *Erstellung von Anwendungsbilanzen für die Jahre 2013 bis 2017*, ([60], 2019, A.17, Tab. 126)

noch immer stark auf dem Einsatz fossiler Brennstoffe beruht, tragen Pumpen folglich erheblich zu den CO₂-Emissionen und damit zum Klimawandel und den damit verbundenen zukünftigen Kosten für die Gesellschaft bei. Vor diesem Hintergrund verfolgt die Europäische Kommission bereits seit dem Jahr 2009 ehrgeizige Ziele für die Reduzierung der CO₂-Emissionen und die Energieeinsparung von energieverbrauchsrelevanten Produkten, sogenannten „Energy related Products (ERP)“ auf Basis der Ökodesign-Richtlinie 2009/125/EG¹¹. Die in diesem Kontext entstandene Regulierungen von Wasserpumpen^{12,13}, die im Wesentlichen auf Wirkungsgradbetrachtungen basiert, zeigt eindrücklich, dass zukünftig der Wirkungsgrad für die Akzeptanz auch von Verdrängerpumpen zunehmend eine Rolle spielen wird.

Die erhöhte Aufmerksamkeit bezüglich des Wirkungsgrads von Arbeitsmaschinen im Allgemeinen und von rotierenden Verdrängerpumpen im Besonderen hat für die Pumpenhersteller zukünftig zwei Konsequenzen:

- (i) Ihre Produkte müssen hinsichtlich des Wirkungsgrads noch stärker optimiert und
- (ii) das Wirkungsgradverhalten ihrer Produkte muss transparent dargestellt werden.

Auf den zweiten Punkt soll im Folgenden näher eingegangen werden. Vor dem Hintergrund, dass der Gesetzgeber Mindestanforderungen bezüglich des Wirkungsgrads energieverbrauchsrelevanter Produkte festlegt und den betrachteten Produktbereich stetig ausweitet, besteht für Verdrängerpumpen, die im Moment von der Ökodesign-Richtlinie noch nicht betroffen sind, aufgrund ihrer hohen Stückzahlen und dem damit verbundenen relevanten Energieverbrauch eine hohe Wahrscheinlichkeit, mittelfristig in den Fokus der Europäischen Kommission zu geraten. Das neue Ziel der EU-Kommission¹⁴, Europa bis

¹¹EUROPEAN PARLIAMENT, COUNCIL OF THE EUROPEAN UNION, *Directive 2009/125/EC of the European Parliament and of the Council of 21 October 2009 establishing a framework for the setting of ecodesign requirements for energy-related products*, ([17],)

¹²EUROPEAN COMMISSION, *Commission regulation (EC) No 641/2009 implementing Directive 2005/32/EC of the European Parliament and of the Council with regard to ecodesign requirements or glandless standalone circulators and glandless circulators integrated in products*, ([15],)

¹³EUROPEAN COMMISSION, *Commission Regulation (EU) No 547/2012 of 25 June 2012 implementing Directive 2009/125/EC of the European Parliament and of the Council with regard to ecodesign requirements for water pumps*, ([16],)

¹⁴VON DER LEYEN, *Rede zur Eröffnung der Plenartagung des Europäischen Parlaments, Ursula von der Leyen, Kandidatin für das Amt der Präsidentin der Europäischen Kommission*, ([96], 2019)

2050 zu einem klimaneutralen Kontinent zu machen, lässt dies erwarten. Bei Einbeziehung der rotierenden Verdrängerpumpen in die Ökodesign-Richtlinie muss in jedem Fall eine eingehende energetische Bewertung sowie ein möglicher¹⁵ energetischer Vergleich der verschiedenen Pumpentypen auf Basis einer nachvollziehbaren, das heißt transparenten Beschreibung des Wirkungsgrads erfolgen. Eine Transparenz des Wirkungsgradverhalten der Pumpen fordern auch die Pumpenbetreiber sowohl zur Optimierung des Energieverbrauchs bei Anlagenplanungen als auch zur Gewinnung relevanter Informationen zur Zustandsüberwachung einer Pumpe während des Betriebs.

Für die transparente Darstellung des Wirkungsgradverhaltens von rotierenden Verdrängerpumpen bedarf es physikalisch basierter und einfach anwendbarer Modelle. Darunter werden im Rahmen dieser Arbeit stationäre 0D-Modelle verstanden, die weder eine räumliche Verteilung noch eine zeitliche Abhängigkeit aufweisen. Das Wirkungsgradverhalten wird mit algebraischen Gleichungen in Abhängigkeit der relevanten Einflussgrößen beschrieben und erfordert keine Lösung mittels numerischer Methoden. Die Annahmen und Vereinfachungen, die den Modellen zugrunde liegen, müssen dabei dargestellt und begründet werden. Ferner muss die Unsicherheit der Modellaussagen quantifiziert werden. Auf diese Weise wird das Verständnis über das Wirkungsgradverhalten und dessen Abhängigkeit von den relevanten Einflussgrößen geschaffen.

¹⁵SCHÄNZLE, LUDWIG UND PELZ ([65], 2016) legen dar, dass ein energetischer Vergleich zwischen verschiedenen Pumpentypen nur in gleichen Anwendungen sinnvoll ist.

Forschungsfrage und Gliederung der Arbeit

Die Notwendigkeit von physikalisch basierten und einfach anwendbaren Wirkungsgradmodellen für rotierende Verdrängerpumpen ist unstrittig. In diesem Kontext stellt sich die Frage nach Ähnlichkeitsbeziehungen, die sich für die Wirkungsgradmodellierung rotierender Verdrängerpumpen nutzen lassen. Dabei werden durch Abstraktion und Vereinfachung der geometrischen und physikalischen Zusammenhänge die relevanten Größen identifiziert und ihre Anzahl mit der Methode der Dimensionsanalyse auf das notwendige Minimum reduziert¹⁶. Bei Strömungsmaschinen wurden Ähnlichkeitsbeziehungen durch die Untersuchungen von Otto Cordier¹⁷ in Wissenschaft und Industrie etabliert. Bei Verdrängerpumpen diskutieren Schlösser¹⁸ und Bavendiek¹⁹ die Vorteile dimensionsloser Produkte für die Wirkungsgradbeschreibung, die sich aus dem Einsetzen von Verlustmodellen in die Teilwirkungsgraddefinitionen ergeben. Ferner zeigt Bavendiek am Beispiel von Axialkolbenmaschinen, welcher Nutzen sich aus der Anwendung von geometrischen Ähnlichkeitsbeziehungen bei der Baugrößenskalierung des Wirkungsgradverhaltens ergeben kann. Daneben fanden Ähnlichkeitsbeziehungen bei Verdrängerpumpen jedoch nur wenig Beachtung und sind nicht etabliert. Mit der Erweiterung des Cordierdiagramms für Verdrängermaschinen greift Grabow^{20,21} diese vorhandene Lücke auf. Allerdings sind seine Ausführungen nicht ausreichend, da sie lediglich für ein Fördermedium mit konstanter Viskosität gelten, während Verdrängermaschinen in einem großen Viskositätsbereich eingesetzt werden. Die Anwendbarkeit von Ähnlichkeitsbeziehungen hängt nun wesentlich davon ab, ob eine vollständige physikalische Ähnlichkeit erreichbar oder mit welchen Einschränkungen eine unvollständige physikalische Ähnlichkeit gegebenenfalls verbunden ist. Auch hier dienen Strömungsmaschinen als Referenz. Dabei wird deutlich, dass üblicherweise eine vollständige physikalische Ähnlichkeit weder für eine einzelne Maschine²² noch zwischen einer Klein- und Groß-

¹⁶SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([79], 1992)

¹⁷CORDIER, „Ähnlichkeitsbeziehungen für Strömungsmaschinen“, ([11], 1953)

¹⁸SCHLÖSSER, „Ein mathematisches Modell für Verdrängerpumpen und -motoren“, ([67], 1961)

¹⁹BAVENDIEK, *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*, ([5], 1987)

²⁰GRABOW, „Das erweiterte “Cordier“-Diagramm für Fluidenergiemaschinen und Verbrennungsmotoren“, ([21], 1993)

²¹GRABOW, „Optimalbereiche von Fluidenergiemaschinen-Pumpen und Verdichter“, ([20], 2002)

²²SPURK ([79], 1992) verweist in Abbildung 4.6 auf ROTZOLL ([61], 1958).

ausführung²³ zu erreichen ist. In diesem Fall sind Umrechnungen auf Basis von Modellen notwendig, die die unvollständige physikalische Ähnlichkeit berücksichtigen, um das Wirkungsgradverhalten vorhersagen zu können. Dies wird als Aufwertung oder Skalierung des Wirkungsgradverhaltens bezeichnet und war in den vergangenen Jahrzehnten ständiger Forschungsgegenstand bei Strömungsmaschinen²⁴.

Vor diesem Hintergrund lautet die Forschungsfrage dieser Arbeit:

Wie kann das Wirkungsgradverhalten rotierender Verdrängerpumpen auf der Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen modelliert werden?

Die Beantwortung dieser Forschungsfrage erfordert sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit an den drei Pumpentypen dreispindlige Schraubepumpe, Außenzahnrادpumpe und zweiflügelige Drehkolbenpumpe durchgeführt werden²⁵, vgl. Abbildung 1.2. Während bei den Schraubepumpen und Zahnrادpumpen jeweils eine typische Baureihe untersucht wird, beschränkt sich die Untersuchung bei den Drehkolbenpumpen auf eine einzelne Pumpe.

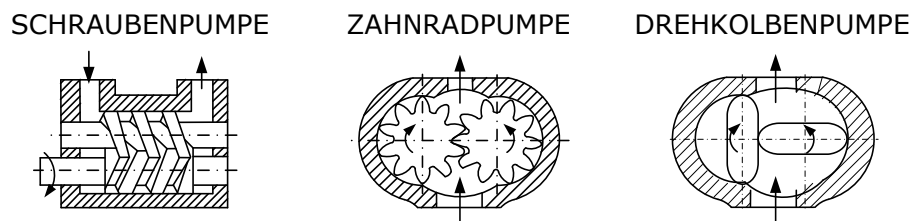


Abbildung 1.2 – Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten rotierenden Verdrängerpumpentypen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in folgende weitere Kapitel:

In Kapitel 2 wird ein Überblick über den Stand der Forschung zum Wirkungsgradverhalten von Verdrängerpumpen gegeben, sofern er für diese Arbeit von Bedeutung ist. Im Fokus stehen dabei zum einen die anhaltende Diskussion über die Definition des Wirkungsgrads sowie dessen experimentelle Messung und die damit verbundenen Unsicherheiten und zum anderen stationäre 0D-Wirkungsgradmodelle von Verdrängerpumpen, die auf der Modellierung der

²³SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([79], 1992)

²⁴STONJEK ([83], 2016) gibt einen Überblick in Kap 1.2.

²⁵Die Pumpentypen werden im Folgenden verkürzt als Schraubepumpe, Zahnrادpumpe und Drehkolbenpumpe bezeichnet.

volumetrischen und mechanisch-hydraulischen Verluste basieren. Die Forschungsfrage wird abschließend vor dem Hintergrund des aktuellen Stands der Forschung eingeordnet.

In Kapitel 3 werden theoretische Untersuchungen der Ähnlichkeitsbeziehungen bei den drei betrachteten rotierenden Verdrängerpumpentypen durchgeführt. Mit Hilfe der Dimensionsanalyse werden problemspezifische dimensionslose Größen definiert, anhand derer der Wirkungsgrad dargestellt werden kann. In diesem Zusammenhang werden zudem die unvollständige geometrische Ähnlichkeit sowie die begrenzte Anwendbarkeit der physikalischen Ähnlichkeit diskutiert. Aus diesem Grund werden zwei semi-axiomatische Modelle für die volumetrischen und mechanisch-hydraulischen Verluste hergeleitet, auf deren Grundlage das Wirkungsgradverhalten beschrieben und vorhergesagt, das heißt skaliert²⁶ werden kann. Abschließend wird das Vorgehen zur Quantifizierung der Unsicherheit der Modellvorhersagen vorgestellt, in der nicht nur die Modellabweichung zu den für die Modellkalibration benötigten Messdaten, sondern zusätzlich auch deren Messunsicherheit berücksichtigt wird.

In Kapitel 4 werden die experimentellen Untersuchungen erläutert, in deren Rahmen die stationären Kennfelder an den beiden Baureihen von Schraubenpumpen und Zahnradpumpen sowie der einzelnen Drehkolbenpumpe in unterschiedlichen Betriebsbereichen gemessen werden. Dabei werden zunächst der Prüfstands Aufbau und die verwendete Messtechnik näher beschrieben. Anschließend wird die Versuchsdurchführung erläutert und das Vorgehen zur Quantifizierung der Messunsicherheiten dargestellt. Erwähnenswert ist an dieser Stelle die Variation der kinematischen Viskosität bei nahezu gleichbleibender Temperatur, die bei den durchgeführten Messungen in einem Bereich von 11 bis 88 cSt²⁷ variiert wird.

In Kapitel 5 werden die Validierungsergebnisse der semi-axiomatischen Verlustmodelle vorgestellt und im Rahmen von drei Fallstudien diskutiert. Folgende Fragen stehen dabei im Fokus der Validierung:

- (i) Wie groß sind die Abweichungen der Modellvorhersagen?
- (ii) Wie groß ist die Unsicherheit der Modellvorhersagen?

Die Abweichungen der Modellvorhersagen wird anhand von experimentellen Vergleichsdaten diskutiert. Die Unsicherheit der Modellvorhersagen wird über ein 95 % Konfidenzintervall dargestellt und bewertet.

Abschließend werden die wichtigsten Erkenntnisse und Kernaussagen dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeiten

²⁶Skalieren ist hier gleichbedeutend mit extrapolieren.

²⁷engl.: *centistokes*, 1 cSt = 10^{-6} m²/s

im Zusammenhang mit dem in dieser Arbeit entwickelten Wirkungsgradmodell für rotierende Verdrängerpumpen gegeben.

Kapitel 2

Wirkungsgrad bei Verdrängerpumpen

Seit den 1940er Jahren sind Wirkungsgraduntersuchungen bei Verdrängermaschinen Gegenstand einer Vielzahl von wissenschaftlichen Veröffentlichungen. In diesem Kapitel werden daher nur die wichtigsten Entwicklungen und Erkenntnisse aus diesen Untersuchungen, sofern sie einen Bezug zur vorliegenden Arbeit haben, dargestellt.

Zunächst wird in Kapitel 2.1 auf die Definition des Wirkungsgrads eingegangen und der aktuelle wissenschaftliche Diskurs hierzu aufgegriffen bevor in Kapitel 2.2 die wesentlichen Methoden der Wirkungsgradmessung vorgestellt werden. Anschließend werden in Kapitel 2.3 die wichtigsten Entwicklungen der Wirkungsgradmodellierung von Verdrängerpumpen dargestellt und diskutiert. Dabei werden ausschließlich stationäre 0D-Modelle behandelt, die das Wirkungsgradverhalten auf Basis der volumetrischen Verluste, im Folgenden als Leckage bezeichnet, und der mechanisch-hydraulischen Verluste, im Folgenden als Reibmoment bezeichnet, beschreiben. Abschließend erfolgt in Kapitel 2.4 die Einordnung der Forschungsfrage im Hinblick auf den vorgestellten aktuellen Stand der Forschung.

2.1 Wirkungsgraddefinition

Für die Betrachtung und Bewertung des Energiewandlungsprozesses in einer Verdrängerpumpe wird die Annahme getroffen, dass die Maschine im zeitlichen Mittel stationär arbeitet¹. Dann lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik für im zeitlichen Mittel stationäre Vorgänge

$$\dot{m}\Delta h_t = P_s + \dot{Q}. \quad (2.1)$$

Dabei ist der Massenstrom mit \dot{m} bezeichnet, die Differenz der massenspezifischen Totalenthalpie zwischen Pumpenaustritt und Pumpeneintritt mit Δh_t sowie die mechanische Wellenleistung mit P_s und der Wärmestrom mit \dot{Q} . Für Arbeitsmaschinen sind P_s und Δh_t jeweils größer Null, für Kraftmaschinen jeweils kleiner Null.

Der für Verdrängerpumpen etablierte Wirkungsgrad η ist der isentrope Wirkungsgrad, der als Verhältnis des Produkts aus Massentrom und massenspezifischer isentroper Totalenthalpieänderung $\Delta h_{t,s}$ und der Wellenleistung definiert ist und unter der Voraussetzung einer adiabaten² Maschine verwendet wird:

$$\eta := \frac{\dot{m}\Delta h_{t,s}}{P_s}. \quad (2.2)$$

Durch die Aufteilung der massenspezifischen Totalenthalpiedifferenz Δh_t in den isentropen Anteil $\Delta h_{t,s}$ und einen Verlustanteil h_l ergibt sich die weitere Identität des isentropen Wirkungsgrads

$$\eta := 1 - \frac{\dot{m}h_l}{P_s}. \quad (2.3)$$

Gleichung (2.3) verdeutlicht, dass der Wirkungsgrad ein Maß für die dissipativen Leistungsverluste $P_{\text{loss}} = \dot{m}h_l$ in Verdrängerpumpen darstellt.

Nimmt man weiter an, dass sich das Fördermedium näherungsweise inkompressibel verhält, die Elastizität und das Spiel der mechanischen Teile vernachlässigbar ist und keine externe Leckage auftritt, gilt für den isentropen Wirkungsgrad

$$\eta := \frac{Q\Delta p}{P_s} = \frac{Q\Delta p}{2\pi M_s n} \quad (2.4)$$

¹ Im Folgenden werden fast ausschließlich zeitlich gemittelte Größen betrachtet. Aus diesem Grund wird auf die Darstellung von zeitlich gemittelten Größen mit $\bar{\square}$ verzichtet. Zeitlich abhängige Größen werden mit $\tilde{\square}$ dargestellt.

² Wärmeisoliert, d. h. für den Wärmestrom gilt $\dot{Q} = 0$ bzw. in der Praxis ist er vernachlässigbar klein.

mit der Druckdifferenz Δp der Pumpe, dem Volumenstrom³ Q und der Wellenleistung P_s als Produkt des Wellenmoments M_s und der Drehzahl n . Diese Definition wird unter den getroffenen Annahmen auch durch die ISO 4391⁴ vorgegeben, welche die Kenngrößen für Pumpen und Motoren der Fluidtechnik normiert und in der Industrie angewendet wird. Erweitert man Gleichung (2.4) durch das Verdrängervolumen⁵ V im Zähler und Nenner, kann der Gesamtwirkungsgrad in die Teilwirkungsgrade volumetrischer Wirkungsgrad η_{vol} und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad η_{mh} unterteilt werden:

$$\begin{aligned}\eta &:= \frac{Q\Delta p}{2\pi M_s n} \frac{V}{V} = \eta_{\text{vol}}\eta_{\text{mh}}, \\ \eta_{\text{vol}} &:= \frac{Q}{nV}, \\ \eta_{\text{mh}} &:= \frac{\Delta p V}{2\pi M_s}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Diese Teilwirkungsgrade bemessen die Leckage Q_L und das Reibmoment M_{mh} einer Pumpe. Die Leckage Q_L berechnet sich dabei aus der Differenz von theoretischem Volumenstrom Q_{th} , dem Produkt aus Drehzahl n und Verdrängervolumen V , und dem gemessenem Volumenstrom Q . Das Reibmoment M_{mh} berechnet sich aus der Differenz von Wellenmoment M_s und hydraulischem Moment $M_{\text{hyd}} = \Delta p V / 2\pi$. Auf dieser Basis lassen sich die Teilwirkungsgrade auch in Abhängigkeit der beiden Verlustgrößen Leckage und Reibmoment darstellen:

$$\begin{aligned}\eta_{\text{vol}} &:= 1 - \frac{Q_L}{nV}, \\ \eta_{\text{mh}} &:= \frac{1}{1 + 2\pi M_{\text{mh}} / (\Delta p V)}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Sind die oben genannten Annahmen für den isentropen Wirkungsgrad nicht erfüllt, muss die in Gleichung 2.4 gegebene Definition des isentropen Wirkungsgrads notwendigerweise angepasst werden. Diese Anpassungen sind in

³ Aufgrund der Annahme eines inkompressiblen Fluidverhaltens gilt $Q_1 = Q_2 = Q = \text{konst.}$

⁴ ISO 4391:1984, *Hydraulic fluid power; pumps, motors and integral transmissions, parameter definitions and letter symbols*, ([29], 1984)

⁵ Unter Verdrängervolumen soll an dieser Stelle das geförderte Volumen einer Verdrängerpumpe bei einer Umdrehung und einer Druckdifferenz von 0 bar verstanden werden. Dieses Verdrängervolumen kann nicht exakt, sondern nur unter Unsicherheit experimentell bestimmt werden.

der ISO 4391 jedoch nur unzureichend enthalten. Ivantysyn und Ivantysynova⁶ geben hierzu einen ausführlichen Überblick. Dieser bekanntermaßen offene Punkt der ISO 4391 wurde durch Achten u. a.⁷ im Jahr 2019 aufgegriffen und in Form einer kritischen Bewertung der ISO 4409:2007⁸ zusammengefasst. Dabei wird insbesondere die Vernachlässigung der Kompressibilität des Fördermediums kritisiert, was bei vorhandenem Totvolumen und hohen Differenzdrücken einer Pumpe zu einer falschen Berechnung der am Fluid verrichteten Arbeit und in der Folge zu einer fehlerhaften Berechnung der mechanisch-hydraulischen Verluste und des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads führt. Aus diesem Grund führen sie eine neue Definition des Gesamtwirkungsgrads sowie des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads ein. Gleichzeitig wird die Sinnhaftigkeit des volumetrischen Wirkungsgrads in Frage gestellt und auf dessen Definition vollständig verzichtet. Achten u. a.⁷ argumentieren dabei aus der Anwendersicht von Axialkolbenpumpen. Diese Sichtweise wird jedoch rotierenden Verdrängerpumpen, die (i) bei geringeren Drücken eingesetzt werden, (ii) üblicherweise kein oder ein vernachlässigbar kleines Totvolumen besitzen und bei denen (iii) volumetrische Verluste häufig entscheidend für den Wirkungsgrad sind, nicht gerecht. Eine sinnvolle Definition des isentropen Wirkungsgrads, die die Kritikpunkte an der Wirkungsgraddefinition der ISO 4391 aufgreift und allen Verdrängerpumpen unter Berücksichtigung der Kompressibilität des Fördermediums sowie des Totvolumens gerecht wird, wird im Folgenden hergeleitet.

Zunächst werden hierfür folgende Annahmen über die Maschine und das Fördermedium getroffen:

- (i) Die Verdrängermaschine wird als adiabat und ideal starr betrachtet.
- (ii) Der Massenstrom von Pumpeneingang und Pumpenaustritt ist gleich. Das bedeutet, dass keine externe Leckage auftritt⁹.
- (iii) Die Kompression des Fördermediums wird als isentrop angenommen und für die Berechnung der Volumenänderungsarbeit eine gemittelte isentro-

⁶ IVANTYSYN UND IVANTYSYNOVA, *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*, ([34], 1993)

⁷ ACHTEN U. A., „Measuring the Losses of Hydrostatic Pumps and Motors: A Critical Review of ISO4409: 2007“, ([1], 2019)

⁸ Die Kritik ist an die ISO 4409:2007 ([30], 2007) gerichtet, wobei dort lediglich der Messvorgang genormt und die Definition der Wirkungsgrade aus ISO 4391 ([29], 1984) übernommen werden. Im Jahr 2019 wurde eine neue Fassung der ISO 4409 ([31], 2019) veröffentlicht, die jedoch keine neue Wirkungsgraddefinition enthält.

⁹ Falls konstruktionsbedingt eine externe Leckage vorliegt, kann diese zum Pumpeneingang zurückgeführt werden. Damit ist sie nicht von einer internen Leckage unterscheidbar.

pe Nachgiebigkeit κ verwendet. Ferner wird der folgende Zusammenhang zwischen Volumen V und Druck p des Fördermediums

$$\kappa := -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (2.7)$$

linearisiert, sodass

$$\kappa \approx -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (2.8)$$

gilt¹⁰.

- (iv) Ein- und Austrittsquerschnitt der Pumpe sind identisch, sodass die Änderung der kinetischen Energie vernachlässigbar ist. Die Änderung der potentiellen Energie wird ebenfalls als vernachlässigbar klein angenommen.
- (v) Das experimentell bestimmte Verdrängervolumen besteht aus einem Verdränger- und Schleppanteil, die nicht getrennt voneinander bestimmt werden können. Am Schleppanteil wird keine Volumenänderungs- und Verschiebearbeit verrichtet. Dieser Anteil wird im Folgenden vernachlässigt¹¹.

Aufgrund der getroffenen Annahmen muss nun der Zähler des isentropen Wirkungsgrads aus Gleichung (2.2), das Produkt aus Massenstrom \dot{m} und der massenspezifischen isentropen Totalenthalpie $\Delta h_{t,s}$, bestimmt werden. Die massenspezifische isentrope Totalenthalpie $\Delta h_{t,s}$ ist für den hier behandelten Fall gleich der massenspezifischen isentropen Enthalpie Δh_s . Aus Anschaulichkeitsgründen soll im Weiteren die isentrope Enthalpiedifferenz ΔH_s betrachtet werden. Mit der Definition des gemittelten Massenstroms

$$\dot{m} := \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{m}(t) dt \quad (2.9)$$

in Abhängigkeit des zeitabhängigen Massenstroms \tilde{m} ergibt sich mit der Zykluszeit $T = 1/n$ für den gemittelten Massenstrom die Darstellung

$$\dot{m} = nm_F \quad (2.10)$$

als Produkt der geförderten Fluidmasse m_F je Umdrehung und der Drehzahl n . Damit entspricht

$$\dot{m} \Delta h_s = n \Delta H_s. \quad (2.11)$$

¹⁰Ivantysyn und Ivantysynova ([34], 1993) geben an, dass der dadurch entstehende Fehler vernachlässigbar klein ist.

¹¹Näheres zum Verdrängervolumen ab Seite 20.

Abbildung 2.1 stellt das Indikatordiagramm für eine ideale¹² Verdrängerpumpe mit Totvolumen V_{tot} unter den oben genannten Annahmen dar. Das Totvolumen ergibt sich aus der Konstruktion einer Verdrängerpumpe und muss auf Basis der geometrischen Pumpenabmessungen berechnet werden. Das Verdrängervolumen V ist das experimentell bestimmte Verdrängervolumen, welches bei der Druckdifferenz $\Delta p = 0$ und einer Umdrehung gefördert wird¹¹.

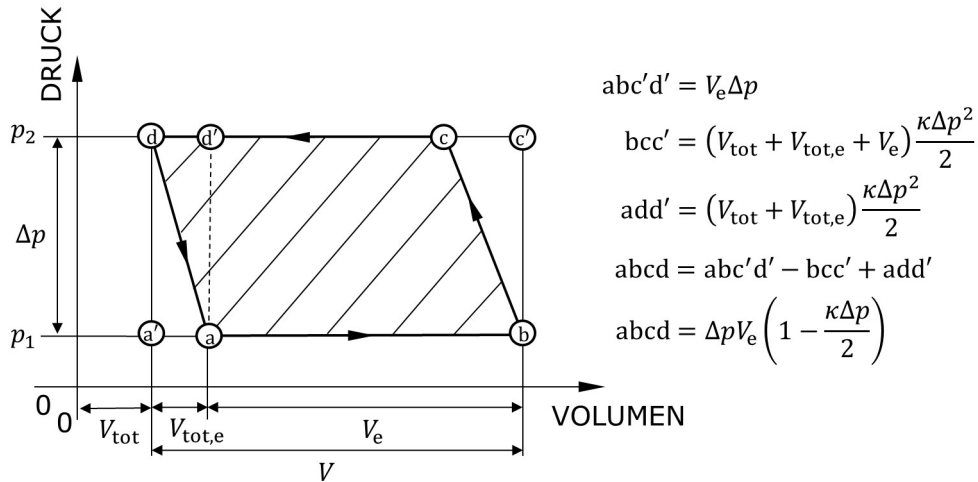


Abbildung 2.1 – Indikatordiagramm für eine ideale Verdrängerpumpe und eine kompressible Flüssigkeit.

Bei vorhandenem Totvolumen und einer Druckdifferenz $\Delta p > 0$ verkleinert sich das pro Umdrehung geförderte Volumen. Beim Erreichen des oberen Totpunkts (d) mit dem Druck p_2 entspannt sich das Totvolumen vor dem erneuten Befüllen des Verdrängerraums auf das Druckniveau p_1 ($d \rightarrow a$). Die Differenz zwischen komprimiertem und entspanntem Totvolumen wird $V_{\text{tot,e}}$ bezeichnet. Das effektiv förderbare Volumen V_e ergibt sich somit zu

$$V_e = V - V_{\text{tot,e}}. \quad (2.12)$$

Unter Anwendung von Gleichung (2.8) ist

$$V_{\text{tot,e}} = V_{\text{tot}} \kappa |\Delta p|. \quad (2.13)$$

Damit ist das effektive Verdrängervolumen V_e mit dem experimentell bestimmten Verdrängervolumen V , dem geometrisch berechneten Totvolumen

¹²Da die isentrope Enthalpieänderung aus dem Indikatordiagramm bestimmt werden soll, werden Verluste nicht betrachtet.

V_{tot} , der gemittelten isentropen Kompressibilität κ und der Druckdifferenz Δp berechenbar.

Bei Beginn des Verdrängerzyklus mit Druck p_1 strömt das Fluid mit dem effektiven Verdrängervolumen V_e in den Verdrängerraum (d→a). Im Verdrängerraum befindet sich dann das Gesamtvolumen $V_{\text{gesamt}} = V_{\text{tot}} + V_{\text{tot,e}} + V_e$. Dieses Volumen wird anschließend auf den Druck p_2 komprimiert (b→c). Auf dem Druckniveau p_2 wird das Fördermedium aus dem Verdrängerraum geschoben, bis der obere Totpunkt erreicht ist (c→d). Abschließend entspannt sich das Totvolumen, wie bereits dargestellt.

Die isentrope Enthalpiedifferenz ΔH_s des Fördermediums bei einem idealen Verdrängerzyklus wird durch die schraffierte Fläche mit den Eckpunkten abcd beschrieben und entspricht der am Fördermedium verrichteten Arbeit. Diese Fläche ergibt sich aus der Berechnung folgender weiterer Flächen, die jeweils durch deren Eckpunkte beschrieben werden, zu

$$abcd = abc'd' - bcc' + add'. \quad (2.14)$$

Jede Fläche kann einfach anhand der Kantenlängen berechnet werden. Die Kantenlängen entsprechen der Druckdifferenz Δp , dem effektiven Verdrängervolumen V_e sowie der Volumenänderung durch Kompression (b→c) oder Expansion (d→a). Die Volumenänderung durch Kompression bzw. Expansion berechnet sich anhand von Gleichung (2.8). Somit ergibt sich für die Flächen

$$\begin{aligned} abc'd' &= \Delta p V_e, \\ bcc' &= (V_{\text{tot}} + V_{\text{tot,e}} + V_e) \frac{\kappa \Delta p^2}{2}, \\ add' &= (V_{\text{tot}} + V_{\text{tot,e}}) \frac{\kappa \Delta p^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Fläche $add' = ada'$ wird aus Sicht einer Kompression des entspannten Totvolumens $V_{\text{tot}} + V_{\text{tot,e}}$ berechnet (a→d). Da die Zustandsänderungen des Fördermediums als isentrop angenommen werden, darf sich die Volumenänderungsarbeit der Expansion des komprimierten Totvolumens (d→a) von der Volumenänderungsarbeit der Kompression des entspannten Totvolumens (a→d) betragsmäßig nicht unterscheiden. Aufgrund des linearisierten Zusammenhangs zwischen Volumen und Druck aus Gleichung (2.8) ergibt sich jedoch eine Abweichung der Beträge der Volumenänderungsarbeiten für Kompression und Expansion:

$$\begin{aligned} \text{Expansion}(d \rightarrow a) &= V_{\text{tot}} \kappa \Delta p^2, \\ \text{Kompression}(a \rightarrow d) &= (V_{\text{tot}} + V_{\text{tot,e}}) \kappa \Delta p^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Diese Abweichung ist durch die Linearisierung begründet. Der Linearisierungsfehler, der sowohl bei der Kompression als auch bei der Expansion vorliegt, wird von Ivantysyn und Ivantysynova¹³ im Bereich praxisrelevanter Drücke als vernachlässigbar klein dargestellt und daher weiter nicht betrachtet.

Für die isentrope Enthalpieänderung ΔH_s (abcd) des Fördermediums mit der Masse¹⁴ $m_e = V_e \varrho_1$ ergibt sich dann aus den Gleichungen (2.15) und (2.16)

$$\text{abcd} = \Delta p V_e \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2} \right). \quad (2.17)$$

Aufgrund der internen Leckage wird sich der gemessene Massenstrom $\dot{m} = nm_F$ (vgl. Gl. (2.10)) von dem effektiven Massenstrom nm_e unterscheiden. Aus diesem Grund wird wieder die massenspezifische isentrope Enthalpiedifferenz Δh_s betrachtet, die sich als

$$\Delta h_s = \frac{\Delta H_{s,e}}{m_e} = \frac{\Delta p}{\varrho_1} \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2} \right). \quad (2.18)$$

berechnet. Dieser funktionale Zusammenhang lässt sich unter den vorliegenden Annahmen ebenfalls aus dem massenspezifischen Indikator diagramm, in dem der Druck p über dem massenspezifischen Volumen v aufgetragen wird, entsprechend Abbildung 2.2 herleiten. Die massenspezifische isentrope Enthalpiedifferenz von Zustand 1 zu 2 ergibt sich dabei direkt als

$$\Delta h_s = \int_1^2 v dp = \frac{\Delta p}{\varrho_1} \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2} \right). \quad (2.19)$$

Die isentrope Enthalpieänderung ΔH_s (abcd) erhält man dann durch Multiplizieren mit den entsprechenden Fluidmassen des Totvolumens $m_{\text{tot}} = \varrho_1 V_{\text{tot}}$ sowie des effektiv geförderten Volumens $m_e = \varrho_1 V_e$ als

$$\begin{aligned} \text{abcd} &= \Delta H_s = (m_e + m_{\text{tot}}) \Delta h_s - m_{\text{tot}} \Delta h_s, \\ &= m_e \Delta h_s, \\ &= \Delta p V_e \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

¹³IVANTYSYN UND IVANTYSYNOVA, *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*, ([34], 1993)

¹⁴Dichte am Pumpeneingang ist $\varrho_1 = \varrho(p_1)$.

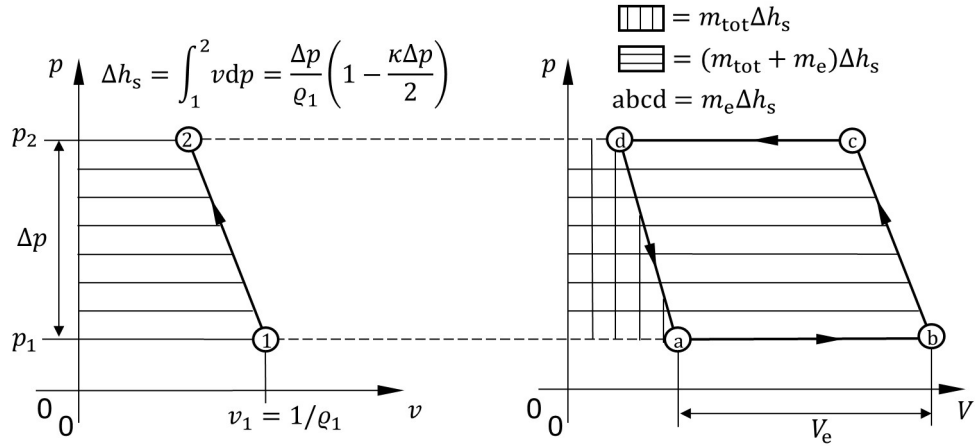


Abbildung 2.2 – Massenspezifisches Indikatordiagramm für eine ideale Verdrängerpumpe und eine kompressible Flüssigkeit.

Für die Definition des isentropen Wirkungsgrads nach Gleichung (2.2) gilt somit

$$\eta := \frac{\dot{m} \Delta h_s}{P_s} = \frac{Q_1 \Delta p}{P_s} \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2} \right). \quad (2.21)$$

Der Massenstrom $\dot{m} = \rho_1 Q_1$ berechnet sich aus dem Volumenstrom Q_1 und der Dichte ρ_1 am Pumpeneingang. Da der Volumenstrom üblicherweise am Pumpenausgang gemessen wird, kann dieser Volumenstrom Q_2 gemäß Gleichung (2.8)

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1 - \kappa \Delta p} \quad (2.22)$$

umgerechnet werden.

Auf Basis von Gleichung (2.21) lassen sich nun Teilwirkungsgrade ableiten, die einen physikalisch sinnvollen Maßstab zur Bemessung der volumetrischen und mechanisch-hydraulischen Verluste darstellen:

- (i) Die Leckage Q_L stellt die Differenz zwischen effektivem Volumenstrom $Q_e = nV_e$ und gemessenem Volumenstrom am Pumpeneingang Q_1 dar. Dabei entstehen die Leistungsverluste $P_{\text{loss,v}} = \Delta p Q_L$.
- (ii) Das Reibmoment M_{mh} berechnet sich aus der Differenz von Wellenmoment M_s und hydraulischem Moment $M_{\text{hyd}} = \Delta p V_e / (2\pi) (1 - \kappa \Delta p / 2)$. Dabei entstehen die Leistungsverluste $P_{\text{loss,mh}} = 2\pi M_{\text{mh}} n$.

Durch die Erweiterung von Gleichung (2.21) mit dem effektiven Verdrängervolumen V_e im Zähler und Nenner und der Wellenleistung $P_s = 2\pi M_s n$ ergibt sich für den isentropen Wirkungsgrad

$$\eta := \frac{Q_1}{nV_e} \frac{\Delta p V_e}{2\pi M_s} \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2}\right) \quad (2.23)$$

und die Teilwirkungsgrade volumetrischer Wirkungsgrad η_{vol} und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad η_{mh}

$$\begin{aligned} \eta_{\text{vol}} &:= \frac{Q_1}{nV_e} = 1 - \frac{Q_L}{nV_e}, \\ \eta_{\text{mh}} &:= \frac{\Delta p V_e}{2\pi M_s} \left(1 - \frac{\kappa \Delta p}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{2\pi}{1 - \kappa \Delta p / 2} \frac{M_{\text{mh}}}{\Delta p V_e}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Zusammengefasst liegen mit den Gleichungen (2.21) und (2.24) nun Definitionen des Gesamtwirkungsgrads und der Teilwirkungsgrade vor, welche die energetische Qualität von Verdrängerpumpen mit Totvolumen im Kontext der getroffenen Annahmen physikalisch sinnvoll bemessen. Wird das Totvolumen vernachlässigbar klein und kann aufgrund niedriger Druckdifferenzen über der Pumpe von einem inkompressiblen Verhalten des Fördermediums ausgegangen werden, sind $V_e = V$ und $\kappa \Delta p \ll 1$ und es gelten die Wirkungsgraddefinitionen der ISO 4391 gemäß den Gleichungen (2.4) und (2.5).

Bedeutung des Verdrängervolumens

Das Verdrängervolumen ist für die Definition der Teilwirkungsgrade (vgl. Gl. (2.12) und (2.24)) und für die Berechnung der Leckage Q_L und des Reibmoments M_{mh} eine bestimmende Größe. Da die Wirkungsgradmodellierung wiederum auf der Modellierung dieser beiden Verluste basiert¹⁵, ist die möglichst genaue Bestimmung des Verdrängervolumens besonders wichtig.

Das Verdrängervolumen ist definiert als das geförderte Volumen einer Verdrängerpumpe bei einer Umdrehung und bei einer Druckdifferenz von 0 bar. Da der Betrieb einer Pumpe unter diesen Bedingungen jedoch nicht möglich ist, kann das Verdrängervolumen nicht direkt gemessen werden. Schlösser und Hilbrands¹⁶ bezeichnen es daher als das theoretische Verdrängervolumen¹⁷ V_{th} , welches durch Berechnungen abgeschätzt werden muss.

¹⁵vgl. Kap. 2.3

¹⁶SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Das theoretische Hubvolumen von Verdrängerpumpen“, ([70], 1963)

¹⁷Schlösser und Hilbrands nennen es in ihrer Veröffentlichung das theoretische Hubvolumen. Hubvolumen und Verdrängervolumen sind hier synonym.

Unter der Annahme, dass das theoretische Verdrängervolumen V_{th} einer Verdrängerpumpe bekannt sei, lässt sich der Einfluss einer Abweichung δV vom theoretischen Verdrängervolumen, beispielsweise durch eine ungenaue Berechnung, einfach veranschaulichen. Verwendet man ein Verdrängervolumen, welches sich aus der Summe des theoretischen Verdrängervolumens V_{th} und der Abweichung δV zusammensetzt

$$V = V_{\text{th}} \pm \delta V \quad (2.25)$$

dann ergibt sich für die Leckage

$$Q_{\text{L}} = nV - Q = nV_{\text{th}} \pm n\delta V - Q \quad (2.26)$$

und das Reibmoment

$$M_{\text{mh}} = M_{\text{S}} - \frac{\Delta p V}{2\pi} = M_{\text{S}} - \frac{\Delta p V_{\text{th}}}{2\pi} \mp \frac{\Delta p \delta V}{2\pi} \quad (2.27)$$

Aus den Gleichung (2.26) und (2.27) wird ersichtlich, dass eine Abweichung vom theoretischen Verdrängervolumen im Fall der Leckage zu einer linearen Drehzahlabhängigkeit der Leckage und im Fall des Reibmoments zu einer linearen Druckabhängigkeit des Reibmoments führen. Diese Abhängigkeiten können jedoch prinzipiell auch aus physikalisch begründeten Verlusten herühren. In Exzentrerschneckenpumpen bilden sich beispielsweise bei höheren Drehzahlen Spalte, die in den Walkvorgängen zwischen den Förderelementen und der Relaxationszeit des Elastomerstators begründet sind¹⁸. Auf diese Weise entsteht eine drehzahlabhängige Leckage. Die in Wälzlagern entstehenden Coulomb'sche Reibungsverluste führen dagegen zu einem druckabhängigen Reibmoment. Aus diesem Grund lässt sich der Einfluss einer Abweichung vom theoretischen Verdrängervolumen nicht ohne Weiteres erkennen.

Dies unterstreicht die Bedeutung einer sinnvollen Methode zur Abschätzung¹⁹ des theoretischen Verdrängervolumens. Seit Beginn der systematischen Wirkungsgradbetrachtungen von Verdrängermaschinen durch Wilson²⁰ ist dieses

¹⁸WIRTH, „Zur hydraulischen und tribologischen Modellierung von Exzentrerschneckenpumpen“, ([100], 1993)

¹⁹Unter Abschätzung wird die Berechnung unter Angabe eines Vertrauensintervalls verstanden. Im Folgenden wird dies als Berechnung bezeichnet.

²⁰WILSON, *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*, ([98], 1950)

Thema Gegenstand zahlreicher Untersuchungen^{21,22,23,24,25}. Danach gibt es im Wesentlichen zwei unterschiedliche Methoden, das theoretische Verdrängervolumen zu berechnen. Zum einen kann die Berechnung auf Basis der geometrischen Maße einer Pumpe erfolgen. Dies wird als geometrisches Verdrängervolumen V_g bezeichnet. Für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Pumpentypen Zahnradpumpe, Schraubpumpe und Drehkolbenpumpe geben Molly²⁶, Thurner²⁷ und Vetter²⁸ analytische Berechnungsvorschriften an. Zum anderen kann eine Berechnung des theoretischen Verdrängervolumens auf Basis von experimentellen Messwerten des Volumenstroms bei unterschiedlichen Drehzahlen und möglichst geringen Druckdifferenzen über der Pumpe durchgeführt werden. Dies wird als gemessenes beziehungsweise experimentell bestimmtes Verdrängervolumen V bezeichnet. Hauptkritikpunkt an der Verwendung des geometrischen Verdrängervolumens ist die Ungenauigkeit durch Fertigungsunsicherheiten, die nach Schlösser und Hilbrands²⁹ 2 % bis 3 % betragen können. Das experimentell bestimmte Verdrängervolumen soll das theoretische Verdrängervolumen dagegen mit höherer Genauigkeit abschätzen. Für die Ermittlung des experimentell bestimmten Verdrängervolumens gibt es zwei etablierte Methoden, auf die im Folgenden kurz eingegangen wird:

- (i) Methode nach ISO 8426³⁰
- (ii) Methode nach Toet^{23,31}

²¹WILSON, *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*, ([98], 1950)

²²SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Das theoretische Hubvolumen von Verdrängerpumpen“, ([70], 1963)

²³TOET, „Die Bestimmung des theoretischen Hubvolumens von hydrostatischen Verdrängerpumpen und -motoren aus volumetrischen Messungen“, ([90], 1970)

²⁴POST, „Models for steady-state performance of hydraulic pumps: determination of displacement“, ([58], 1996)

²⁵KIM, KALBFLEISCH UND IVANTYSYNOVA, „The effect of cross porting on derived displacement volume“, ([40], 2014)

²⁶MOLLY, „Die Zahnradpumpe mit evolventischen Zähnen“, ([47], 1958)

²⁷THURNER, „Last und Lastausgleich zyklidenverzahnter Schraubepumpen“, ([89], 2013)

²⁸VETTER, *Rotierende Verdrängerpumpen für die Prozeßtechnik*, ([93], 2006)

²⁹SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Das theoretische Hubvolumen von Verdrängerpumpen“, ([70], 1963)

³⁰ISO 8426:2008, *Hydraulic fluid power – Positive displacement pumps and motors – Determination of derived capacity*, ([32], 2008)

³¹TOET U. A., „The Determination of the Theoretical Stroke Volume of Hydrostatic Positive Displacement Pumps and Motors from Volumetric Measurements“, ([91], 2019)

Die Methode nach ISO 8426 geht auf Wilson³² zurück. Auf der Basis gemessener Volumenströme bei verschiedenen Differenzdrücken einer Pumpe wird mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Ausgleichsgerade zwischen Volumenstrom und Differenzdrücken bei konstanter Drehzahl ermittelt und auf diese Weise der Y-Achsenabschnitt bestimmt. Dieser Wert wird als Schätzwert für den theoretischen Volumenstrom verwendet. Das Verdrängervolumen V ergibt sich dann aus dem Quotienten von theoretischem Volumenstrom Q_{th} und Drehzahl n . Ivantysyn und Ivantysynova³³ schlagen ergänzend die Mittelung der berechneten Verdrängervolumen über verschiedene Drehzahlen vor. Abbildung 2.3 stellt die Methode nach ISO 8426 graphisch dar.

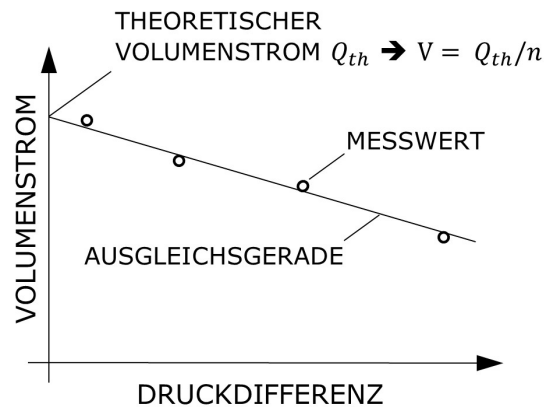


Abbildung 2.3 – Methode nach ISO 8426 zur experimentellen Bestimmung des Verdrängervolumens.

Auch die Methode nach Toet^{34,35} geht ursprünglich auf Wilson zurück und wurde anschließend von Schlösser und Hilbrands³⁶ und von Toet weiterentwickelt. Bei dieser Methode wird im ersten Schritt der gemessene Volumenstrom über den verschiedenen Drehzahlen bei jeweils gleichen Differenzdrücken der Pumpe aufgetragen. Dabei wird der üblicherweise vorliegende lineare Zusammenhang zwischen Volumenstrom und Drehzahl ersichtlich. Mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wird die Steigung m_{Q-n} dieses

³²WILSON, *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*, ([98], 1950)

³³IVANTYSYN UND IVANTYSYNOVA, *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*, ([34], 1993)

³⁴TOET, „Die Bestimmung des theoretischen Hubvolumens von hydrostatischen Verdrängerpumpen und -motoren aus volumetrischen Messungen“, ([90], 1970)

³⁵TOET U. A., „The Determination of the Theoretical Stroke Volume of Hydrostatic Positive Displacement Pumps and Motors from Volumetric Measurements“, ([91], 2019)

³⁶SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Das theoretische Hubvolumen von Verdrängerpumpen“, ([70], 1963)

linearen Zusammenhangs für unterschiedliche Differenzdrücke bestimmt. Im zweiten Schritt wird die Steigung m_{Q-n} über den verschiedenen Differenzdrücken aufgetragen. Auch hier wird Toet zufolge ein annähernd linearer Zusammenhang erwartet. Dieser Zusammenhang wird wieder durch eine Ausgleichsgerade, die durch die Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt wird, dargestellt und auf dieser Basis zu einem Druck von 0 bar extrapoliert. Der y-Achsenabschnitt stellt nach Toet den genauesten Schätzwert für das theoretische Verdrängervolumen dar. Abbildung 2.4 stellt die Methode nach Toet graphisch dar.

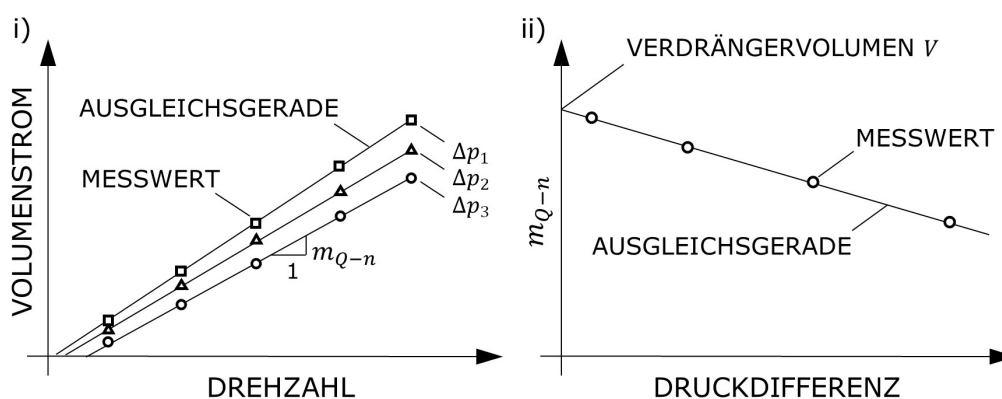


Abbildung 2.4 – Methode nach Toet zur experimentellen Bestimmung des Verdrängervolumens.

Toet führt aus, dass sich das Verdrängervolumen aus einem Verdrängeranteil und einem Mitschleppanteil³⁷ zusammensetzt, die auf Basis von experimentellen Messungen jedoch nicht zu trennen sind. An diesem Mitschleppanteil wird genau genommen keine Arbeit im Sinne einer Verdrängung verrichtet. Dieser Sachverhalt wird in der Literatur aufgrund des geringen Einflusses und weiterer Vereinfachungen, abgesehen bei Costa und Sepehri³⁸ nicht weiter erwähnt.

³⁷Dies stellt das Volumen in Spalten dar, das durch viskose Reibung von Saug- zur Druckseite mitgeschleppt wird.

³⁸COSTA UND SEPEHRI, „Understanding overall efficiency of hydrostatic pumps and motors“, ([13], 2018)

In der Wissenschaft ist die Methode nach Toet etabliert. Die beiden Hauptkritikpunkte^{39,40,41} an der Methode ISO 8426 sind, dass zum einen eine Drehzahlabhängigkeit der ermittelten Verdrängervolumen vorliegt und zum anderen bei Verdrängerpumpen üblicherweise kein linearer Zusammenhang zwischen Volumenstrom und Druckdifferenz einer Pumpe im niedrigen Druckbereich besteht, sodass die Extrapolation auf Basis einer Ausgleichsgeraden zur Abschätzung des theoretischen Volumenstroms zwangsläufig zu ungenauen Ergebnissen führt. Dies wurde im Rahmen der Untersuchungen von Pelz und Schänzle⁴² ebenfalls festgestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher die Methode nach Toet angewendet.

2.2 Wirkungsgradmessung

Es gibt zwei Methoden den Wirkungsgrad einer Verdrängerpumpe zu messen:

- (i) Die mechanische Messung nach ISO 4409⁴³ und
- (ii) die thermodynamische Messung.

Im Folgenden werden beide Messmethoden erläutert⁴⁴ und gegenübergestellt. Die mechanische⁴⁵ Messung nach ISO 4409 bezieht sich auf die Wirkungsgraddefinition der ISO 4391⁴⁶ (vgl. Gl. (2.4)), die somit die zu messenden Größen vorgibt. Diese Größen sind die Wellenleistung, die sich aus der Messung des Drehmoments und der Drehzahl ergibt, die Druckdifferenz und der Volu-

³⁹TOET, „Die Bestimmung des theoretischen Hubvolumens von hydrostatischen Verdrängerpumpen und -motoren aus volumetrischen Messungen“, ([90], 1970)

⁴⁰IVANTYSYN UND IVANTYSYNOVA, *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*, ([34], 1993)

⁴¹POST, „Models for steady-state performance of hydraulic pumps: determination of displacement“, ([58], 1996)

⁴²PELZ UND SCHÄNZLE, *Experimentelle Validierung eines typenunabhängigen Wirkungsgradmodells von Verdrängerpumpen*, ([56], 2020)

⁴³ISO 4409:2019-07, *Hydraulic fluid power - Positive-displacement pumps, motors and integral transmissions - Methods of testing and presenting basic steady state performance*, ([31], 2019)

⁴⁴Für detaillierte Informationen, beispielsweise Messanordnung und -genauigkeit, Umgebungsbedingungen oder theoretische Betrachtungen, wird auf die Quellen verwiesen.

⁴⁵Diese Bezeichnung ist darauf zurückzuführen, dass notwendigerweise die mechanische Wellenleistung gemessen werden muss.

⁴⁶ISO 4391:1984, *Hydraulic fluid power; pumps, motors and integral transmissions, parameter definitions and letter symbols*, ([29], 1984)

menstrom⁴⁷ der wärmeisolierten Pumpe. Diese Messmethode ist mit einigem Aufwand verbunden, der sich insbesondere aus der aufwendigen Drehmomentmessung ergibt. Während zu Beginn der Wirkungsgraduntersuchungen die Messgenauigkeit der Messinstrumente begrenzt war, lassen sich heutzutage diese Messgrößen mit einer hohen Präzision bestimmen. In diesem Zusammenhang wiesen schon Schlösser und Müller⁴⁸ 1969 darauf hin, dass bei der Vergleichbarkeit von Messergebnissen, die auf unterschiedlichen Prüfständen gewonnen wurden, der Messgenauigkeit eine große Bedeutung zukommt. Ferner zeigt Manrig⁴⁹, dass bei der Messung des Wirkungsgrads im Teillastbereich einer Pumpe trotz sehr genauer Messinstrumente nicht unerhebliche Messunsicherheiten entstehen können. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Genauigkeit der meisten Messinstrumente vom Messbereich abhängt und dementsprechend die relative Genauigkeit der Messung bei kleiner werdenden Messgrößen abnimmt. Für die Bestimmung der Teilwirkungsgrade spielt zudem die Unsicherheit bei der Bestimmung des Verdrängervolumens eine weitere wesentliche Rolle.

Bei der thermodynamischen Messmethode wird anstatt der Wellenleistung die Totalenthalpieänderung des Fördermediums bestimmt, die bei einer wärmeisolierten Maschine gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik identisch sind. Die Totalenthalpieänderung lässt sich bei Kenntnis der Fluideigenschaften, Wärmekapazität, Wärmeausdehnungskoeffizient und Kompressibilität ausschließlich durch die Messung der Temperatur- und Druckdifferenz zwischen Pumpeneingang und Pumpenausstritt berechnen. Somit lässt sich der Wirkungsgrad ausschließlich aus gemessenen thermodynamischen Zustandsgrößen berechnen. Diese Messmethode, die auf Barbillon und Poirson⁵⁰ zurückgeht, ist bei der Wirkungsgradmessung von Wasserturbinen sehr verbreitet, da die hier zu messenden mechanischen Leistungen für Prüfstandsmessungen in der Regel zu groß sind. Dies macht eine Wirkungsgradmessung der Wasserturbine im eingebauten Zustand erforderlich, die durch diese Messmethode einfach umzusetzen ist.

Ab den 1960er Jahren wurde die thermodynamische Messmethode auf Verdrän-

⁴⁷Der Volumenstrom kann grundsätzlich vor oder nach der Pumpe gemessen werden. Wenn sehr hohe Differenzdrücke über der Pumpe vorliegen, muss der Volumenstrom entsprechend mit der Kompressibilität verrechnet werden. In der Regel wird der Volumenstrom nach der Pumpe gemessen.

⁴⁸SCHLÖSSER UND MÜLLER, „Was sind die Aussagen unserer Prüfstandsmessungen wert?“, ([72], 1969)

⁴⁹MANRING, „Measuring Pump Efficiency: Uncertainty Considerations“, ([44], 2005)

⁵⁰BARBILLON UND POIRSON, „Sur une méthode thermométrique de mesure du rendement des turbines hydrauliques“, ([3], 1920)

gerpumpen angewendet und untersucht^{51,52,53,54}. Dabei wurde insbesondere auf die Bedeutung der Fluideigenschaften hingewiesen, da diese maßgeblich für die Messunsicherheit bei dieser Methode verantwortlich sind. Neuere Untersuchungen^{55,56} zeigen, dass sich im Vergleich zur mechanischen Messung mit dieser Messmethode grundsätzlich vergleichbare Ergebnisse bei vergleichbarer Messunsicherheit erzielen lassen. Neben der vorgenannten Messunsicherheit liegt ein wesentlicher Nachteil dieser Methode darin, dass die Bestimmung der Teilwirkungsgrade sowie eine Trennung der Verluste in Leckage und Reibmoment nicht möglich ist. Für die Validierung von Verlustmodellen sind diese Messungen daher nicht nutzbar. Aus diesen Gründen hat sich die thermodynamische Messmethode bei Verdrängerpumpen nicht durchgesetzt. In Tabelle 2.1 sind die Vor und Nachteile der beiden Messmethoden gegenübergestellt.

Tabelle 2.1 – Vergleich der beiden Methoden zur Wirkungsgradmessung.

Messmethode	Vorteile	Nachteile
mechanische Messung nach ISO 4409	<ul style="list-style-type: none"> • hohe Messgenauigkeit • Teilwirkungsgrade bestimmbar • etablierte Methode 	<ul style="list-style-type: none"> • hoher Aufwand • online Messungen im Betrieb aufwendig
thermodynamische Messung	<ul style="list-style-type: none"> • niedrige Kosten • geringer Aufwand • online Messungen im Betrieb möglich 	<ul style="list-style-type: none"> • abhängig von Fördermediumseigenschaften • keine Teilwirkungsgrade bestimmbar • hohe Messunsicherheit bei kleiner Temperaturdifferenz

⁵¹BRAND, „Thermodynamische Verfahren zur Messung des Wirkungsgrades von hydraulischen Maschinen“, ([7], 1968)

⁵²SCHLÖSSER UND WITT, „Thermodynamisches Messen des Gesamtwirkungsgrades an hydrostatischen Antrieben“, ([73], 1973)

⁵³WITT, „Die Berechnung physikalischer und thermodynamischer Kennwerte von Druckflüssigkeiten, sowie die Bestimmung des Gesamtwirkungsgrades an Pumpen unter Berücksichtigung der Thermodynamik für die Druckflüssigkeit“, ([101], 1974)

⁵⁴THOMA, „Thermodynamische Fragen zum Wirkungsgrad hydrostatischer Maschinen“, ([88], 1975)

⁵⁵DALLA LANA UND NEGRI, „A New Evaluation Method for Hydraulic Gear Pump Efficiency through Temperature Measurements“, ([14], 2006)

⁵⁶CASOLI U. A., „Overall Efficiency Evaluation of a Hydraulic Pump With External Drainage Through Temperature Measurements“, ([10], 2018)

2.3 Wirkungsgradmodelle

Die ersten systematischen Untersuchungen zur Wirkungsgradmodellierung von Verdrängerpumpen gehen auf Wilson⁵⁷ in den 1940er Jahren zurück. Dabei ist die Modellierung der Leckage und des Reibmoments die Grundlage für die Beschreibung der Teilwirkungsgrade gemäß Gleichung (2.24). Durch Multiplikation der Teilwirkungsgrade ergibt sich ein Modell für den Gesamtwirkungsgrad.

Durch die große Bedeutung von Verdrängerpumpen für eine Vielzahl von Anwendungen ist die Wirkungsgradmodellierung bis heute Gegenstand der Forschung. Dabei sind die Modellierungsansätze immer feingranularer und maschinenspezifischer geworden. Von stationären 0D-Modellen geht der Trend hin zu instationären 3D-Modellen, die mittels numerischer Simulation und unter Betrachtung der Fluid-Struktur-Interaktion berechnet werden.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf stationären 0D-Modellen, also einfach rechenbaren Modellen, die das Wirkungsgradverhalten mit algebraischen Gleichungen in Abhängigkeit der Einflussgrößen beschreiben und keine Lösung mittels numerischer Methoden erfordern. Einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit bilden die Untersuchungen an den Pumpentypen Schraubpumpe, Zahnradpumpe und Drehkolbenpumpe.

Die ausführlichste Übersicht zu 0D-Wirkungsgradmodellen von Verdrängerpumpen geben Kohmäscher u. a.⁵⁸ und Hall⁵⁹, wobei Halls Untersuchung auf Leckagemodelle begrenzt ist. Kohmäscher u. a. unterteilen die bestehenden Modelle in physikalische, analytische und numerische Modelle. Auch wenn diese Einteilung häufig übernommen wird, soll diese im Folgenden angepasst werden.

Verlustmodelle, die auf dem Impulssatz beruhen sind axiomatisch begründet. Durch die Anwendung des Materialgesetzes einer Newton'schen Flüssigkeit, die genaue Kenntnis der Spaltgeometrie und die Festlegung passender Randbedingungen durch die Betriebsgrößen Druckdifferenz Δp und Drehzahl n der Pumpe, lassen sich Modelle für die Leckage und das Reibmoment entwickeln. Diese Modelle werden im Folgenden als *axiomatische* Modelle bezeichnet.

Da die detaillierte Beschreibung von Spaltgeometrien in Verdrängerpumpen mit einer hoher Unsicherheit verbunden ist, wird in einem weiteren Modellansatz, der die axiomatischen Modelle als Grundlage hat, auf die

⁵⁷WILSON, *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*, ([98], 1950)

⁵⁸KOHMAESCHER U. A., „Improved loss modeling of hydrostatic units: Requirement for precise simulation of mobile working machine drivelines“, ([41], 2007)

⁵⁹HALL, „Statistical analysis of multiple hydrostatic pump flow loss models“, ([22], 2014)

Beschreibung der Spaltgeometrien verzichtet und stattdessen werden dimensionslose Modellparameter eingeführt. Diese Modellparameter ergeben sich aus den geometrischen Verhältnissen sowie Druckverlustbeiwerten. Lediglich das Verdrängervolumen wird als einzige charakteristische geometrische Größe verwendet. Die dimensionslosen Modellparameter müssen auf Basis von Messungen an Pumpen bestimmt, das heißt kalibriert werden. Die Wirkungsgradmodelle sind daher jeweils nur für diejenige Pumpe gültig, deren Messdaten zur Kalibration verwendet wurden. Zusammengefasst beruhen diese Modelle auf einer axiomatischen Betrachtung, die den funktionalen Zusammenhang zwischen den Betriebsgrößen Druckdifferenz Δp und Drehzahl n der Pumpe, den Mediumseigenschaften dynamische Viskosität ν und Dichte ρ sowie dem Verdrängervolumen V herstellt. Durch die Nutzung von Messdaten für die Kalibration der dimensionslosen Modellparameter kann also auf die detaillierte Beschreibung der Spaltgeometrien verzichtet werden. Diese Modelle werden im Folgenden als *semi-axiomatische* Modelle bezeichnet.

Neben den beiden vorgenannten Modellenansätzen gibt es einen weiteren Ansatz, der nicht auf dem Impulssatz und einem Materialgesetz beruht, sondern lediglich eine große Anzahl von Messdaten einer Pumpe verwendet, um das Wirkungsgradverhalten dieser Pumpe zu approximieren. Hierfür müssen ausgefeilte numerischen Methoden angewendet werden. Diese Modelle werden im Folgenden als *datengetriebene* Modelle bezeichnet.

2.3.1 Axiomatische Modelle

Einen umfassenden Überblick des Forschungsstands zur Wirkungsgradmodellierung von Verdrängerpumpen für das Jahr 1950 gibt Wilson⁶⁰ in seinem Buch „Positive-Displacement Pumps and Fluid Motors“. Da frühere Untersuchungen sehr pumpenspezifisch waren und üblicherweise auf Erfahrungen und der heuristischen Methode von Versuch und Irrtum⁶¹ beruhten, wird mit ihm der Beginn von systematischen Wirkungsgraduntersuchungen an Verdrängerpumpen verbunden. Wilson stellte allgemein gültige Modelle für die Leckage und das Reibmoment in Verdrängermaschinen auf, die auf einer laminaren Spaltströmung sowie den viskosen Reibungsverlusten in Spalten, den Coulomb’schen Reibungsverlusten in Wälzlagern und einem konstanten Reibmomentanteil durch Vorspannung in Dichtungen beruhen. Als Modellvariable werden die Betriebsgrößen Druckdifferenz und Drehzahl der Pumpe, die dynamische Viskosität des Fördermediums und pumpenspezifische geometrische Spaltmaße verwendet. Sein Modell wandte er am Beispiel einer

⁶⁰WILSON, *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*, ([98], 1950)

⁶¹engl.: trial and error.

Flügelzellenpumpe an. Abbildung 2.5 stellt die grundsätzliche Funktionsweise der axiomatischen Modelle mit ihren Eingangs- und Ausgangsgrößen dar.

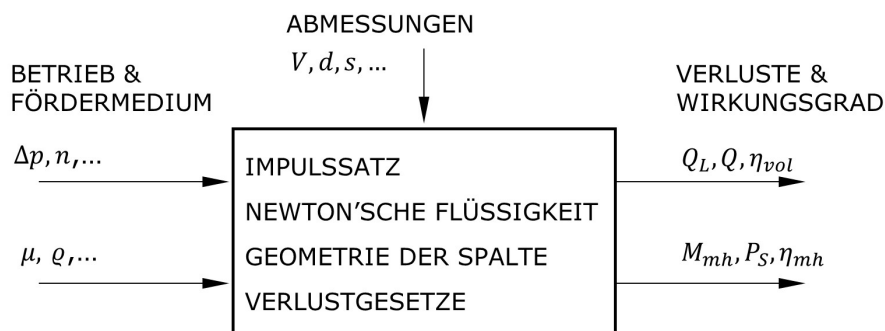


Abbildung 2.5 – Prinzipielle Funktionsweise axiomatischer 0D-Wirkungsgradmodelle für Verdrängermaschinen.

Gleichzeitig weist Wilson auf die Bedeutung der Spaltgeometrien bei der Anwendung seines Modells hin. Diese sind für die Berechnung der Verluste entscheidend. Die Spaltgeometrien und Spaltmaße sind dem Fertigungseinfluss unterworfen und können sich zudem durch das vorhandene Spiel von Maschinenbauteilen während des Betriebs verändern. Außerdem existieren komplexe Spaltgeometrien, deren Einfluss auf die Leckage und das Reibmoment nur unter weitreichenden Vereinfachungen näherungsweise bestimmt werden kann. Dies kann ein Grund dafür sein, dass es nach den Untersuchungen von Wilson, im Vergleich zu semi-axiomatischen Modellen, wenige weitere Veröffentlichungen zu axiomatischen 0D-Modellen für Verdrängermaschinen gegeben hat.

Umfangreiche Untersuchungen an Schraubepumpen wurden ab 1992 durch Wincek⁶², Geimer⁶³ und Vetter^{64,65} durchgeführt. Der Schwerpunkt ihrer Arbeiten liegt hauptsächlich auf der Modellierung des Förderverhaltens von Schraubepumpen bei mehrphasigen Strömungen sowie auf der Untersuchung der Betriebsgrenze, die durch den Beginn von Mischreibung zwischen Spindel und Gehäuse definiert wird. Für die unterschiedlichen Spalte zwischen den Förderkammern von Schraubepumpen werden jeweils separate Modelle

⁶²WINCEK, „Zur Berechnung des Förderverhaltens von Schraubenspindelpumpen bei der Förderung von Flüssigkeits/Gas-Gemischen“, ([99], 1992)

⁶³GEIMER, „Meßtechnische Untersuchung und Erstellung von Berechnungsgrundlagen zur Ermittlung der Einsatzgrenze dreispindliger Schraubepumpen“, ([19], 1995)

⁶⁴VETTER U. A., „Multiphase pumping with twin-screw pumps-understand and model hydrodynamics and hydroabrasive wear“, ([92], 2000)

⁶⁵VETTER, *Rotierende Verdrängerpumpen für die Prozeßtechnik*, ([93], 2006)

aufgestellt. Die Leckage wird dabei als laminare Drosselströmung oder als turbulente Blendenströmung abgebildet. In jüngerer Zeit befassten sich Corneli u. a.⁶⁶ in ihren Untersuchungen mit der Komplexität von Spaltgeometrien bei dreispindligen Schraubepumpen.

An Drehkolbenpumpen wurden Untersuchungen von Surek^{67,68} durchgeführt, die sich jedoch lediglich auf das Förderverhalten dieser Pumpen und damit auf die Modellierung der Leckage anhand einer laminaren Spaltströmung beschränkten. Der Schwerpunkt der Forschung betraf somit die Funktion dieser Pumpen, nämlich das Förderverhalten sowie deren Verfügbarkeit, das heißt das Verschleißverhalten. Der Gesamtwirkungsgrad spielte bei diesen Untersuchungen dagegen eine untergeordnete Rolle.

2.3.2 Semi-axiomatische Modelle

Wilson⁶⁹ zeigt in seinen Untersuchungen zur axiomatischen Modellierung der Verluste in Verdrängermaschinen, dass die relevanten geometrischen Maße durch das Verdrängervolumen und konstante dimensionslose Modellparameter ersetzt werden können. Ferner stellt er dar, wie sich diese Modellparameter aus den Messdaten von Pumpen gewinnen lassen. Damit legte er den Grundstein für die weiteren Untersuchungen zu semi-axiomatischen Modellen. Abbildung 2.6 stellt die grundsätzliche Funktionsweise der semi-axiomatischen Modelle mit ihren Eingangs- und Ausgangsgrößen dar.

Auf dieser Basis wurden überaus umfangreiche Wirkungsgraduntersuchungen von Schlösser^{70,71,72,73,74,75} in den 1960er Jahren an unterschiedlichen Pumpen-

⁶⁶CORNELI U. A., „Experimental studies on the volumetric efficiency of triple screw pumps“, ([12], 2014)

⁶⁷SUREK, „Spalströme in rotierenden Verdrängerpumpen“, ([86], 1993)

⁶⁸SUREK, „Optimale Drehzahlen und untere Grenzdrehzahlen rotierender Verdrängerpumpen“, ([85], 1993)

⁶⁹WILSON, *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*, ([98], 1950)

⁷⁰SCHLÖSSER, „Meten aan verdringerpompen“, ([69], 1957)

⁷¹SCHLÖSSER, „Ein mathematisches Modell für Verdrängerpumpen und -motoren“, ([67], 1961)

⁷²SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Der volumetrische Wirkungsgrad von Verdrängerpumpen“, ([74], 1963)

⁷³SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Über den hydraulisch-mechanischen Wirkungsgrad von Verdrängerpumpen“, ([71], 1965)

⁷⁴SCHLÖSSER UND MÜLLER, „Was sind die Aussagen unserer Prüfstandsmessungen wert?“, ([72], 1969)

⁷⁵SCHLÖSSER, „Eine Maßstab-Theorie zur Voraussage des Verhaltens von Mitgliedern einer Familie hydraulischer Verdrängermaschinen“, ([68], 1970)

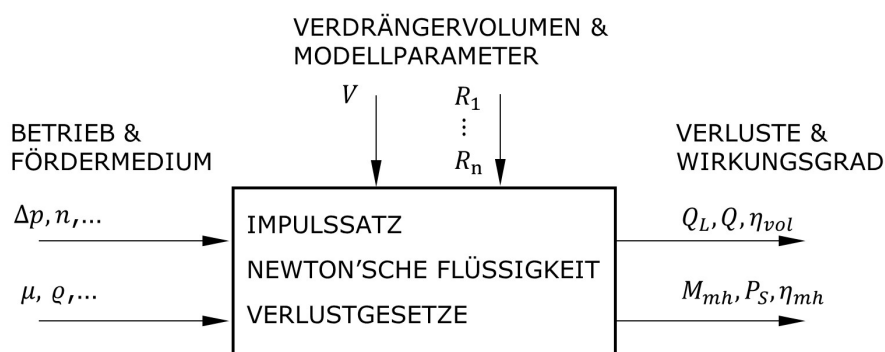


Abbildung 2.6 – Prinzipielle Funktionsweise semi-axiomatischer 0D-Wirkungsgradmodelle für Verdrängermaschinen.

typen durchgeführt. Er ergänzte das laminare Leckagemodell von Wilson um einen turbulenten Strömungsanteil und geht dabei von parallelgeschalteten Spalten aus. Das Reibmomentmodell ergänzte er um einen trägheitsdominierten Verlustterm, in dem die Verluste zusammengefasst sind, die unter anderem beim Ein- und Ausströmen des Fördermediums in und aus dem Verdrängerraum entstehen und zu einem Druckverlust führen. Die Dichte des Fördermediums wird in diesem Verlustterm berücksichtigt und wird somit eine zusätzliche Modellvariable.

Neben dieser Ergänzung der Modelle diskutierte Schlösser auch die Unsicherheiten der Modelle, die in den Modellannahmen begründet sind. Dazu gehört die Annahme einer näherungsweise isothermen Spaltströmung sowie die Annahme, dass die Höhe der Spalte unabhängig von den Betriebsgrößen und damit konstant ist. In den Spalten führt die dissipierte Energie durch viskose Reibung zur Erwärmung des Fördermediums. Insbesondere bei Fördermedien mit einer hohen Viskosität und damit hohen Scherspannungen ist dies relevant. Der lokale Temperaturanstieg des Fördermediums in den Spalten führt dort zu einer Verringerung der Viskosität. Dies hat eine Zunahme der Leckage und eine Verringerung des Reibmoments zur Folge und führt infolgedessen zu Modellabweichungen. In diesem Zusammenhang wies Schlösser darauf hin, dass darin die Abhängigkeit der dimensionslosen Modellparameter von den Betriebsgrößen begründet sei.

Ferner erkannte Schlösser in seinen Untersuchungen die Vorteile der dimensionslosen Produkte, die sich aus dem Einfügen der Verlustmodelle in die Teilwirkungsgrade ergeben. In seinem Wirkungsgradmodell ergeben sich die dimensionslosen Größen

$$\lambda = \frac{2\pi\mu n}{\Delta p}, \quad \sigma = \frac{2\pi n \sqrt[3]{V/(2\pi)}}{\sqrt[3]{2\Delta p/\rho}}. \quad (2.28)$$

die er in einen Zusammenhang mit den bekannten dimensionslosen Größen Sommerfeldzahl $So = \lambda$, Eulerzahl $Eu = 1/\sigma^2$ und Reynoldszahl $Re = \sigma^2/\lambda$ stellt. Mit den dimensionslosen Produkten λ und σ lässt sich das Wirkungsgradverhalten anhand von lediglich zwei Modellvariablen beschreiben. Die Anzahl der Modellvariablen wird dadurch von fünf dimensionsbehafteten Größen, aus denen die dimensionslosen Größen gebildet werden, auf zwei dimensionslose Produkte reduziert.

Neben den genannten Untersuchungen entwickelte Schlösser zudem eine Maßstabtheorie⁷⁶ für Baureihen von Verdrängermaschinen. Im Mittelpunkt steht dabei die Darstellung der sich ändernden Spalthöhen in Abhängigkeit des Verdrängervolumens, also der Baugröße von Verdrängermaschinen. Hierzu führte er Parameterstudien durch, die auf der Annahme beruhten, dass sich die Spalthöhe in Abhängigkeit des Verdrängervolumens kontinuierlich und unterproportional ändert. Eine Bestätigung seiner Theorie anhand von Messdaten von Verdrängermaschinenbaureihen wurde von ihm jedoch nicht veröffentlicht.

Daneben untersuchte Kordak⁷⁷ den Einfluss der Baugröße bei Axialkolbenpumpen in Form einer praxisüblichen dezimalgeometrischen Stufung der Hauptabmessungen. Dabei betrachtete er den Einfluss der Baugröße auf die Kenngrößen einer idealen Verdrängerpumpe, also beispielsweise Drehmoment und Förderstrom. Einen Bezug zu den Verlusten in diesen Pumpen stellte er dagegen nicht her. Solch einen Zusammenhang zwischen Änderung des Verdrängervolumens und den Verlusten stellte erstmals Bavendiek⁷⁸ auf. Im Rahmen seiner detaillierten Verlustanalyse von Axialkolbenpumpen schräger Bauweise wendet er die Überlegungen von Kordak auf seine Verlustmodelle an. Auf diese Weise zeigt er, dass, ausgehend von einer Modellpumpe, eine Skalierung des Wirkungsgradverhaltens in Abhängigkeit der Baugröße möglich ist. Seine Modellvalidierung anhand von vier unterschiedlichen Baugrößen erzielt gute Ergebnisse.

Im Anschluss an die umfangreichen Untersuchungen von Schlösser, die stets unterschiedliche Pumpentypen im Blick hatten, richtete sich der Fokus nach-

⁷⁶SCHLÖSSER, „Eine Maßstab-Theorie zur Voraussage des Verhaltens von Mitgliedern einer Familie hydraulischer Verdrängermaschinen“, ([68], 1970)

⁷⁷KORDAK, „Ähnlichkeitswerte in dezimalgeometrischer Stufung bei Axialkolbeneinheiten“, ([42], 1973)

⁷⁸BAVENDIEK, *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*, ([5], 1987)

folgender Untersuchungen insbesondere auf Kolbenmaschinen axialer Bauart, die in der Fluidtechnik und der Mobilhydraulik eine große Bedeutung haben. Nennenswerte Modellerweiterungen sind die Berücksichtigung eines verstellbaren Verdrängervolumens bei Kolbenpumpen durch Thoma⁷⁹ sowie die Berücksichtigung der Gehäuseausdehnung und der Temperaturänderung des Fördermediums in den Spalten bei langsamlaufenden Radialkolbenmotoren durch Muschelknautz⁸⁰. Das Reibmomentenmodell ergänzte Muschelknautz⁸¹ im Rahmen seiner Untersuchungen um einen Verlustanteil, der die Mischreibung in hydrodynamischen und hydrostatischen Gleitlagern beschreibt. Dabei greift er die umfangreichen Untersuchungen von Vogelpohl⁸² an Gleitlagern auf und führt zur Beschreibung der Mischreibung einen Exponentialansatz in Abhängigkeit der Sommerfeldzahl ein. Dieser Modellansatz hat auch für rotierende Verdrängermaschinen eine große Bedeutung, da diese Pumpen ebenfalls in Betriebsbereichen eingesetzt werden können, in denen Mischreibung auftritt. Trotzdem wurde dieser Mischreibungsansatz nachfolgend nicht auf rotierende Verdrängermaschinen übertragen.

Bavendiek⁸³ führte eine überaus detaillierte Verlustanalyse an einer Axialkolbenmaschine in Schrägachsenbauweise durch, in der alle Spalte separat betrachtet werden. Von den insgesamt 6 dimensionslosen Modellparametern im Modell von Schlösser erhöht sich die Anzahl im Modell von Bavendiek auf 19 dimensionslose Modellparameter⁸⁴. Jeong⁸⁵ führte diese detaillierte Betrachtung weiter fort. Abbildung 2.7 stellt die relevanten Verlustmechanismen der Leckagemodelle und Reibmomentmodelle der genannten Untersuchungen zu semi-axiomatischen Modelle zusammenfassend dar.

Die bisher behandelten Modelle verwenden konstante dimensionslose Modellparameter. Wie bereits erwähnt, erkannte jedoch schon Schlösser, dass sich diese Modellparameter in Abhängigkeit des Betriebspunktes der Verdrän-

⁷⁹THOMA, „Mathematische Modelle und die effektive Leistung hydrostatischer Maschinen und Getriebe“, ([87], 1970)

⁸⁰MUSCHELKNAUTZ, „Volumetrische Verluste an hydrostatischen Verdrängermaschinen“, ([49], 1974)

⁸¹MUSCHELKNAUTZ, „Das Anfahrtsverhalten hydrostatischer Verdrängermaschinen“, ([48], 1975)

⁸²VOGELPOHL, „Die Stribeck-Kurve als Kennzeichen des allgemeinen Reibungsverhaltens geschmierter Gleitflächen“, ([95], 1954)

⁸³BAVENDIEK, *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*, ([5], 1987)

⁸⁴BAVENDIEK, *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*, ([5], 1987, S. 46, Tab. 3.3)

⁸⁵JEONG, „A novel performance model given by the physical dimensions of hydraulic axial piston motors: model derivation“, ([35], 2007)

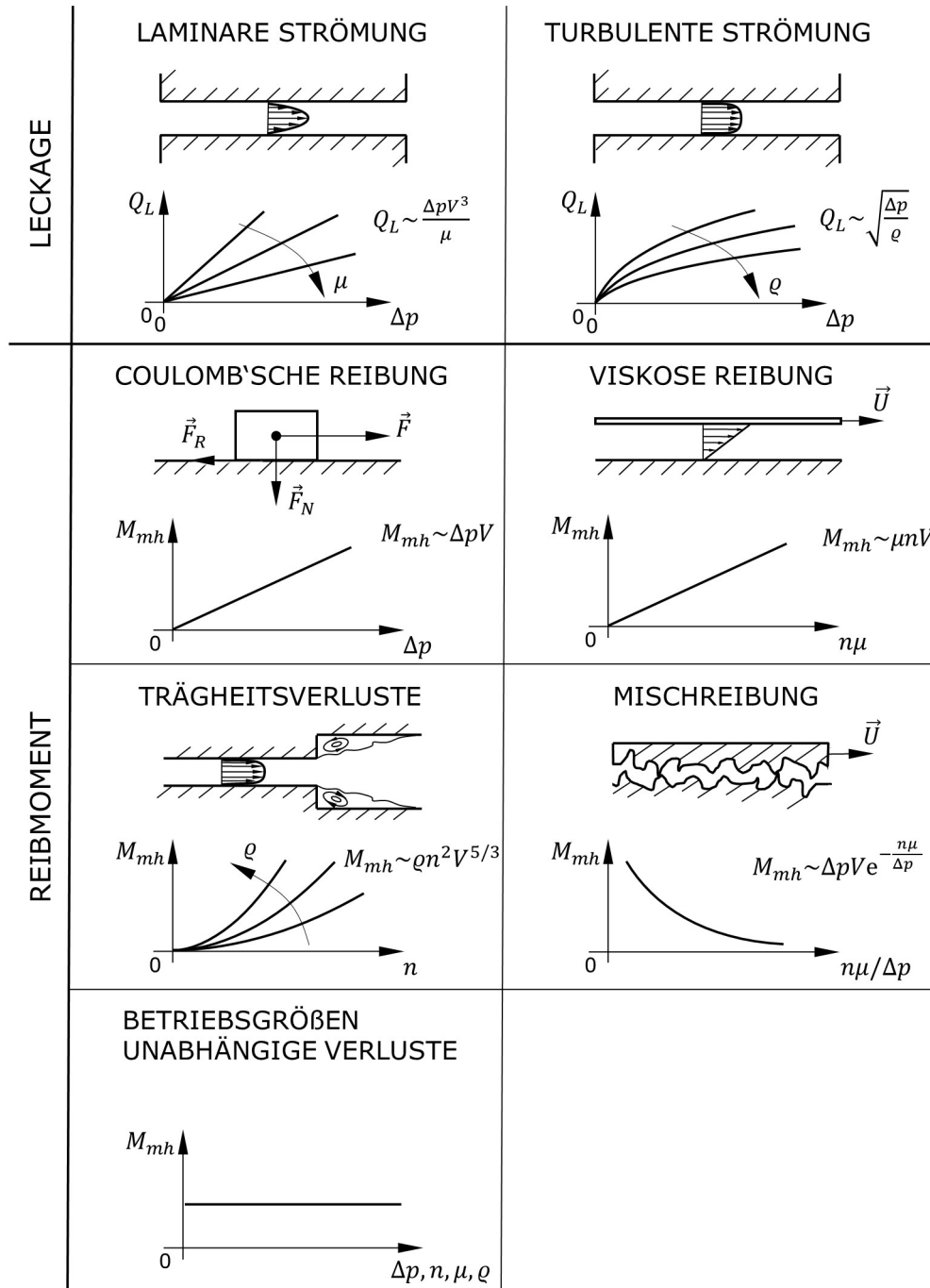


Abbildung 2.7 – Relevante Verlustmechanismen für die Leckage und das Reibmoment, die durch semi-axiomatische Modelle berücksichtigt werden.

germaschine ändern können. Diese Erkenntnis diente als Grundlage weiterer Untersuchungen^{86,87,88}, in denen die Modellparameter der bisher genannten Wirkungsgradmodelle zusätzlich in Abhängigkeit der Betriebsgrößen, wie beispielsweise Druckdifferenz oder Drehzahl, beschrieben werden. Diese Abhängigkeiten wurden rein empirisch und ohne physikalischen Zusammenhang bestimmt. Auch dieses Vorgehen führt zu einer steigenden Anzahl von Modellparametern, die mittels Messdaten kalibriert werden müssen. In diesem Zusammenhang ist kritisch anzumerken, dass bei diesen Untersuchungen die Einflüsse der Temperaturerhöhung des Fördermediums in Spalten oder der Übergang von viskoser Reibung zu Mischreibung unberücksichtigt bleiben und diese physikalischen Verlusteffekte möglicherweise durch die empirische Beschreibung der Modellparameter kompensiert werden.

2.3.3 Datengetriebene Modelle

Ein datengetriebener Modellansatz für die Beschreibung der Leckage und des Reibmoments in Verdrängermaschinen ist unabhängig vom physikalischen Verständnis und nutzt lediglich Messdaten. Umfangreiche Untersuchungen^{89,90,91,92} zur Anwendung solcher Modelle wurden ebenfalls überwiegend an Axialkolbenmaschinen durchgeführt. Da diese Modelle nicht physikalisch motiviert sind, spielen Sie im Rahmen dieser Arbeit keine Rolle und werden im Weiteren nicht betrachtet.

⁸⁶ZAROTTI UND NERVEGNA, „Pump efficiencies: approximation and modeling“, ([103], 1982)

⁸⁷RYDBERG, „On performance optimization and digital control of hydrostatic drives for vehicle applications“, ([62], 1983)

⁸⁸MCCANDLISH UND DOREY, „The mathematical modelling of hydrostatic pumps and motors“, ([45], 1984)

⁸⁹IVANTYSYN UND IVANTYSYNOVA, *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*, ([34], 1993)

⁹⁰HUHTALA UND VILENIUS, „Comparison of steady state models of hydraulic pump“, ([26], 1997)

⁹¹BAUM, „Einsatzpotentiale neuronaler Netze bei der CAE-Tool unterstützten Projektierung fluidtechnischer Antriebe“, ([4], 2001)

⁹²ORTWIG, „New method of numerical calculation of losses and efficiencies in hydrostatic power transmissions“, ([51], 2002)

2.4 Einordnung der Forschungsfrage

Während Ähnlichkeitsbeziehungen bei Strömungsmaschinen (vgl. Kap. 1) seit langem etabliert sind, zeigt die einschlägige Literatur, dass Ähnlichkeitsbetrachtungen bei Verdrängerpumpen nur eine untergeordnete Rolle spielen. Insbesondere Schlösser⁹³ und Bavendiek⁹⁴ diskutieren bei Verdrängermaschinen die Vorteile der dimensionslosen Produkte für die Wirkungsgradbeschreibung, die sich aus dem Einsetzen der Verlustmodelle in die Teilwirkungsgraddefinitionen ergeben. Ferner zeigt Bavendiek am Beispiel von Axialkolbenmaschinen, welche Vorteile sich aus der Anwendung von geometrischen Ähnlichkeitsbeziehungen bei der Baugrößenskalierung des Wirkungsgradverhaltens ergeben. Schlösser⁹⁵ und Bavendiek weisen in diesem Zusammenhang darauf hin, dass in der Änderung der Spalthöhen in Abhängigkeit des Verdrängervolumens die wesentlichen Unsicherheiten bezüglich der Baugrößenskalierung liegen. Für rotierende Verdrängerpumpen finden sich dagegen in der Literatur keine derartig validierten Untersuchungen. Mit der vorliegenden Arbeit soll daher ein Beitrag geleistet werden, diese Lücke zu schließen. Die Forschungsfrage dieser Arbeit lautet daher:

Wie kann das Wirkungsgradverhalten rotierender Verdrängerpumpen auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen modelliert werden?

Im Rahmen der Literaturrecherche haben sich zudem wichtige Erkenntnisse zum Validierungsumfang und zur Quantifizierung der Unsicherheit der Modellvorhersagen bestehender Untersuchungen ergeben, die der Bearbeitung dieses Themas einen weiteren Impuls verleihen.

Validierungsumfang bestehender Untersuchungen

Nachdem in den 1960er Jahren der Fokus der Wirkungsgraduntersuchungen auf unterschiedlichen Pumpentypen lag, wurden in der Folgezeit überwiegend Kolbenmaschinen untersucht. Die weiterentwickelten Wirkungsgradmodelle, die prinzipiell auch auf andere Pumpentypen übertragbar sind, wurden demnach vorwiegend an Kolbenmaschinen validiert, wobei häufig lediglich der Druck- und Drehzahleinfluss auf die Verluste betrachtet wurde. Dementsprechend wurde der Einfluss der Viskosität auf die Verluste häufig nicht experimentell validiert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine belastbare Aussage

⁹³SCHLÖSSER, „Ein mathematisches Modell für Verdrängerpumpen und -motoren“, ([67], 1961)

⁹⁴BAVENDIEK, *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*, ([5], 1987)

⁹⁵SCHLÖSSER, „Eine Maßstab-Theorie zur Voraussage des Verhaltens von Mitgliedern einer Familie hydraulischer Verdrängermaschinen“, ([68], 1970)

bezüglich des Viskositätseinflusses auf die Verluste, beispielsweise durch den Tausch des Prüfstandsmediums, mit großem Aufwand verbunden ist. Wird eine Variation der Viskosität über die Temperaturänderung des Prüfstandsmediums erreicht, muss gewährleistet werden, dass die Temperaturänderung keinen Einfluss auf die Spaltmaße der untersuchten Verdrängermaschine hat.

Quantifizierung der Unsicherheit der Modellvorhersagen

Während die Unsicherheit bei Wirkungsgradmessungen umfassend untersucht und quantifiziert wurde, gibt es bezüglich der Quantifizierung der Unsicherheit der Verlustmodelle vergleichsweise wenige Veröffentlichungen. In diesem Sinne sind Darstellungen von Modellvorhersagen mit Vertrauensintervall⁹⁶ selten. Ferner wurde die Messunsicherheit der zur Modellkalibration verwendeten Messdaten nicht betrachtet.

Lediglich Hall⁹⁷ führt eine umfassende statistische Analyse der Leckagemodelle durch und stellt fest, dass es bei Modellen mit einer hohen Anzahl von Modellparametern zur Überanpassung⁹⁸ des Modells kommt. Infolgedessen verlieren Verlustterme ihre physikalische Bedeutung. Pelz⁹⁹ verweist in diesem Zusammenhang auf Heinrich Hertz¹⁰⁰ und das Prinzip der Einfachheit, auch als Occams Rasiermesser¹⁰¹ bekannt. Zwei Modelle, die dem gleichen Zweck dienen, können beide gleich konsistent und gleich gültig sein, sich aber in der Anzahl der Annahmen unterscheiden. Häufig tendieren Wissenschaftler dazu, Modelle immer nuancierter zu gestalten, wodurch die Gefahr besteht, das Wesen eines technischen Systems aus dem Fokus zu verlieren.

Vor dem Hintergrund der Forschungsfrage und der beiden vorgenannten Themen werden im Rahmen dieser Arbeit für die drei Verdrängerpumpentypen Schraubenpumpe, Zahnradpumpe und Drehkolbenpumpe Wirkungsgradmodelle entwickelt. Bei der Validierung dieser Modelle liegt der Schwerpunkt auf folgenden Aspekten:

- (i) Wie groß sind die Abweichungen der Modellvorhersagen?
- (ii) Wie groß ist die Unsicherheit der Modellvorhersagen?

⁹⁶KAURANNE U. A., „Applicability of pump models for varying operational conditions“, ([39], 2003)

⁹⁷HALL, „Statistical analysis of multiple hydrostatic pump flow loss models“, ([22], 2014)

⁹⁸ engl.: overfitting.

⁹⁹ PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([54], 2021)

¹⁰⁰HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik*, ([23], 1894)

¹⁰¹PAQUÉ, *Das Pariser Nominalistenstatut*, ([52], 1970)

Die Abweichungen der Modellvorhersagen werden anhand von experimentellen Vergleichsdaten diskutiert. Besonderer Fokus liegt dabei auf der Vorhersage des Viskositätseinflusses auf das Verlustverhalten der Pumpen.

Die Unsicherheit der Modellvorhersagen wird durch ein 95 % Konfidenzintervall dargestellt, das nicht nur auf der Modellabweichung zu den für die Modellkalibration benötigten Messdaten sondern auch auf deren Messunsicherheit beruht.

Experimentelle und theoretische Ergebnisse dieser Arbeit wurden bereits mehrfach auf wissenschaftlichen Konferenzen veröffentlicht^{102,103,104,105,106,107,108}. Gemeinsam mit den studentischen Arbeiten¹⁰⁹, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, bilden sie die Grundlage für die vorliegende Arbeit.

¹⁰²PELZ, LUDWIG UND SCHÄNZLE, *Funktionsrelevante Wirkungsgradbeschreibung von Verdrängermaschinen*, ([55], 2016)

¹⁰³SCHÄNZLE, LUDWIG UND PELZ, „ERP Positive Displacement Pumps – Physically Based Approach Towards an Application-Related Efficiency Guideline“, ([65], 2016)

¹⁰⁴SCHÄNZLE, CORNELI UND PELZ, „A Similarity based Efficiency Model of Spindle Screw Pumps“, ([63], 2018)

¹⁰⁵SCHÄNZLE, STÖRMER UND PELZ, „Modeling the Efficiency of External Gear Pumps Based on Similarity Considerations“, ([66], 2018)

¹⁰⁶SCHÄNZLE U. A., „ERP Positive Displacement Pumps - Experimental Validation of a Type-Independent Efficiency Model“, ([64], 2019)

¹⁰⁷PREUSS U. A., „From notebooks to data-pipelines - the Darmstadt approach to handling measurement data and metadata“, ([59], 2019)

¹⁰⁸PELZ UND SCHÄNZLE, *Experimentelle Validierung eines typenunabhängigen Wirkungsgradmodells von Verdrängerpumpen*, ([56], 2020)

¹⁰⁹Abschlussarbeiten von B. Ioshchikhes [28], N. Störmer [84], K. Jost [37], M. Metzger [46], J. Stifter [82] und M. Hock [24].

Kapitel 3

Wirkungsgradmodellierung auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen

Eine wichtige Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten theoretischen Untersuchungen von Ähnlichkeitsbeziehung rotierender Verdrängerpumpen stellt das Buch „Dimensionsanalyse in der Strömungslehre“ von Spurk¹ dar. Es dient daher als Vorlage für eine einleitende Darstellung der allgemeinen mathematischen Beschreibung von Ähnlichkeitsbeziehungen. Spurk weist darauf hin, dass die eigentliche Herausforderung bei der Anwendung von Ähnlichkeitsbeziehungen in der richtigen Auswahl physikalischer Größen zur Beschreibung eines physikalischen Problems sowie in der sinnvollen Definition dimensionsloser Produkte besteht. Damit verbunden ist als wesentliches Element die Reduktion eines physikalischen Problems auf seine wesentlichen physikalischen Zusammenhänge, um auf diese Weise die relevanten Einflussgrößen zu identifizieren. Das sinngemäße Zitat von Spurk² „Die Aussagen der Ähnlichkeitsbeziehungen werden um so schärfer sein, je weniger dimensionslose Produkte im gesuchten Zusammenhang auftreten“ stellt die Leitlinie für die folgenden Untersuchungen an rotierenden Verdrängerpumpen dar.

Für die Beschreibung von Ähnlichkeitsbeziehungen bildet das Bridgman-Postulat³ der „absoluten Bedeutung relativer Größen“ die wesentliche Grundlage. Dieses Postulat besagt, dass bei einem existierenden Zusammenhang

¹ SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([79], 1992)

² Spurk spricht an diese Stelle von Modelltheorie anstatt Ähnlichkeitsbeziehungen ([79], 1992, Kap.3, S.64).

³ BRIDGEMAN, *Dimensional Analysis*, ([8], 1922)

von N veränderlichen physikalischen Größen q_i mit

$$\text{Fn}(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0, \quad (3.1)$$

die im Maßsystem enthaltene Information irrelevant ist. Als Maßsystem wird üblicherweise das SI-Maßsystem bestehend aus Basisgrößen und Basiseinheiten festgelegt. Folglich lässt sich der Zusammenhang nach Gleichung (3.1) auch äquivalent wie folgt darstellen:

$$\text{Fn}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-r}) = 0. \quad (3.2)$$

Π_j stellen dabei dimensionslose Produkte dar, die gemäß des Buckingham Π -Theorems⁴ aus den physikalischen Größen q_i , die der Beschreibung des physikalischen Problems dienen, gebildet werden. Die Anzahl der dimensionslosen Produkte ist hierbei im Gegensatz zu den N physikalischen Größen um die Zahl r reduziert. Auf diese Weise kann ein physikalisches Problem in dimensionsloser Schreibweise mit einer geringeren Anzahl an Veränderlichen beschrieben werden.

r entspricht dabei der kleinstmöglichen Anzahl auftretender Basisgrößen des betrachteten physikalischen Problems. Die dimensionslosen Produkte lassen sich nun über Potenzprodukte folgendermaßen berechnen

$$\Pi_j = \prod_{i=1}^N q_i^{k_{(j),i}}, \quad (i = 1 \dots N), \quad (j = 1 \dots N - r) \quad (3.3)$$

Die Exponenten $k_{(j),i}$ müssen dabei für jedes dimensionslose Produkte Π_j über ein linear unabhängiges Gleichungssystem, das sich unter der Berücksichtigung der Dimensionsformeln der physikalischen Größen q_i ergibt, bestimmt werden⁵. Da das Gleichungssystem unterbestimmt ist, gibt es keine eindeutige Lösung. Aus diesem Grund müssen zunächst Unbekannte frei gewählt werden, um zu einer eindeutigen Lösung zu gelangen. Dadurch umfasst der Lösungsraum grundsätzlich beliebig viele dimensionslose Produkte, die jedoch ineinander überführt werden können.

Gleichung (3.2) bildet damit die Grundlage der Ähnlichkeitsbeziehungen. Aufgelöst nach einem dimensionslosen Produkt ergibt sich

$$\Pi_1 = \text{fn}(\Pi_2, \dots, \Pi_{N-r}) \quad (3.4)$$

mit $N - r - 1$ unabhängigen dimensionslosen Veränderlichen und einer abhängigen dimensionslosen Veränderlichen Π_1 . Aus Gleichung (3.4) ist ersichtlich,

⁴ BUCKINGHAM, „On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations“, ([9], 1914)

⁵ Das detaillierte Vorgehen wird von Spurk ([79], 1992) in Kap. 1.5 beschrieben

dass sich Π_1 nicht ändert, wenn die übrigen dimensionslosen Größen gleich bleiben. Dies gilt auch, wenn sich die dimensionsbehafteten Größen q_i ändern. Ist dieser Sachverhalt für zwei unterschiedliche Zustände eines physikalischen Problems gegeben⁶, liegt eine vollständige physikalische Ähnlichkeit vor. Diese vollständige physikalische Ähnlichkeit lässt sich nun auch ohne Kenntnis des funktionalen Zusammenhangs zwischen den dimensionslosen Produkten aus Gleichung (3.4) vorteilhaft nutzen.

Am Beispiel der vorausgesetzten physikalischen Ähnlichkeit zwischen einer Klein- und Großausführung einer hypothetischen Maschine soll der Nutzen erläutert werden⁷. Ausgehend von N physikalischen Größen q_i , die einen physikalischen Zusammenhang der Kleinausführung beschreiben, ergibt sich

$$\text{Fn}(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0. \quad (3.5)$$

Die physikalischen Größen bei der Großausführungen werden im Folgenden mit q'_i bezeichnet. Die Verhältnisse der physikalischen Größen zwischen Klein- und Großausführung werden mit

$$q'_i = M_i q_i \quad (3.6)$$

auf Basis der Maßstabsfaktoren M_i beschrieben. Wird nun, der physikalischen Ähnlichkeit entsprechend, die Gleichheit der dimensionslosen Produkte der Kleinausführung Π_j und Großausführung Π'_j mit $\Pi_j = \Pi'_j$ gefordert, folgt aus den Gleichung (3.3) und (3.6)

$$\prod_{i=1}^N q_i^{k_{(j),i}} = \prod_{i=1}^N q_i'^{k_{(j),i}} = \prod_{i=1}^N q_i^{k_{(j),i}} \prod_{i=1}^N M_i^{k_{(j),i}} \quad (3.7)$$

und es gilt im Weiteren

$$\prod_{i=1}^N M_i^{k_{(j),i}} = 1, \quad (j = 1 \dots N - r). \quad (3.8)$$

Hierbei ist angenommen, dass die Exponenten $k_{(j),i}$ bereits mithilfe des Buckingham Π -Theorems bestimmt und daher bekannt sind. Durch Logarithmieren erhält man das linear unabhängige Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^N k_{(j),i} \ln(M_i) = 0, \quad (j = 1 \dots N - r). \quad (3.9)$$

⁶ Zwei unterschiedliche Zustände unterscheiden sich dadurch, dass sich physikalische Größen bei identischem Maßsystem in ihren Maßzahlen unterscheiden.

⁷ In Kap. 3.3 wird der Nutzen am Beispiel der rotierenden Verdrängerpumpen diskutiert.

Dieses Gleichungssystem hat N unbekannte Maßstabsfaktoren und $N - r$ Gleichungen. Die Lösung des Gleichungssystems wird erst bei Festlegung von r Maßstabsfaktoren eindeutig. Im Falle der betrachteten Klein- und Großausführung kann nun bei vollständiger geometrischer Ähnlichkeit ein Maßstabsfaktor auf Basis der veränderten geometrischen Größenverhältnisse festgelegt werden. Weitere $r - 1$ Maßstabsfaktoren sind dann entsprechend sinnvoll festzulegen, sodass alle Maßstabsfaktoren der physikalischen Größen (vgl. (3.6)) erreicht werden können.

Zieht man, wie bereits in Kapitel 1, Strömungsmaschinen als Referenz heran, erkennt man, dass Ähnlichkeitsbeziehungen in der Praxis üblicherweise nicht ohne Einschränkung nutzbar sind. Zum einen liegt dies an der geometrischen Ähnlichkeit, die schwer umzusetzen ist⁸, zum anderen können sich Maßstabsfaktoren ergeben, die experimentell nicht realisiert werden können. Man spricht dann von unvollständiger geometrisch beziehungsweise unvollständiger physikalischer Ähnlichkeit.

Vor dem Hintergrund dieser allgemeinen Betrachtung werden in diesem Kapitel zunächst die Geometrie der im Fokus stehenden rotierenden Verdrängerpumpen, Schraubenpumpe, Zahnradpumpe und Drehkolbenpumpe, analysiert. Anschließend werden mittels der Dimensionsanalyse problemspezifische dimensionslose Produkte definiert, die das Verlustverhalten der Pumpen beschreiben. Auf Grundlage der dimensionslosen Produkte wird die physikalische Ähnlichkeit für einzelne Pumpen untersucht und die Anwendung von Maßstabsfaktoren zur Vorhersage des Wirkungsgradverhalten der Pumpen diskutiert. Aufgrund der Anwendungsgrenzen der Maßstabsfaktoren werden im Anschluss zwei semi-axiomatische Modelle für die volumetrischen und mechanisch-hydraulischen Verluste hergeleitet, anhand derer das Wirkungsgradverhalten skaliert werden kann. Abschließend wird das Vorgehen zur Quantifizierung der Modellunsicherheit vorgestellt.

3.1 Geometriebetrachtung

Die folgenden Geometriebetrachtungen basieren auf den dieser Arbeit zugrunde liegenden Pumpen. Dennoch sind diese Betrachtungen grundlegender Art, sodass sie prinzipiell auch auf gleichartige Pumpentypen anderer Hersteller übertragbar sind.

In Abbildung 3.1 sind die drei untersuchten Pumpentypen mit den wesent-

⁸ Beispielsweise kann das Längenverhältnis aus Spaltmaß und Durchmesser eines Rotors nicht für beliebige Rotordurchmesser konstant gehalten werden. Spurk ([79], 1992) nennt das Maßstabeffekte.

lichen geometrischen Größen und Spalten dargestellt. Bei allen drei Pumpentypen existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Spalte, die sowohl für die Leckage als auch das Reibmoment und somit für den Wirkungsgrad relevant sind. Die bestimmenden geometrischen Größen dieser Pumpentypen, die üblicherweise im Rahmen von Pumpenbaureihen variiert werden, sind die Durchmesser der Rotoren (Zahnrad d_{ZP} , Antriebsschraubenspindel d_{SP} , Drehkolben d_{DP}) sowie deren Breite (Zahnrad b_{ZP} , Antriebsschraubenspindel⁹ b_{SP} , Drehkolben¹⁰ b_{DP}). Bei Schraubepumpen kommt mit der Steigung der Spindeln h_{SP} noch eine weitere bestimmende geometrische Größe hinzu. Neben diesen wesentlichen geometrischen Abmessungen gibt es für jeden Pumpentyp aber noch weitere relevante Größen¹¹, die jedoch innerhalb einer Baugruppe, so wie im Fall der hier untersuchten Pumpentypen, meistens identisch sind oder zu den oben genannten Größen in einem festen Verhältnis stehen.

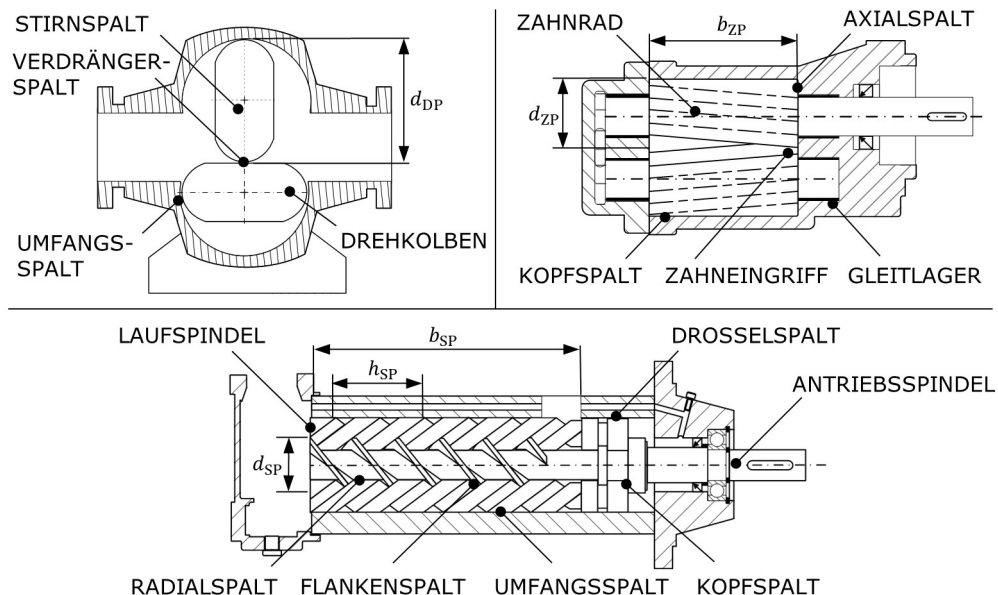


Abbildung 3.1 – Geometrie der untersuchten Pumpentypen.

Das Verdrängervolumen V stellt neben den genannten geometrischen Größen eine weitere wesentliche charakteristische Größe für Verdrängerpumpen

⁹ Bei Schraubepumpen wird üblicherweise von der Länge und nicht von der Breite der Spindeln gesprochen. Aus Gründen der Konsistenz wird hier jedoch der Begriff Breite auch für Spindeln verwendet.

¹⁰ Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Drehkolbenpumpe in Abb. 3.1 nur in Vorderansicht gezeigt. Die Breite über die Stirnfläche ist konstant.

¹¹ Für detaillierte Informationen zur Geometrie der Pumpentypen wird auf Molly [47], Thurner [89] und Vetter [93] verwiesen.

dar. Für die untersuchten Pumpentypen gelten auf Basis der geometrischen Beziehungen folgende Zusammenhänge¹¹

$$V_{\text{SP}} \propto d_{\text{SP}}^2 h_{\text{SP}}, \quad V_{\text{ZP}} \propto d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}}, \quad V_{\text{DP}} \propto d_{\text{DP}}^2 b_{\text{DP}}. \quad (3.10)$$

Als charakteristische Länge dieser Pumpen wird im Folgenden zunächst jeweils der Durchmesser ausgewählt. Alle Längenmaße der Pumpen lassen sich mit dieser charakteristischen Länge ins Verhältnis setzen und damit Längenverhältnisse κ_i definieren, wobei der Index i für die unterschiedlichen charakteristischen Längen der Pumpen steht. Relevante Längenverhältnisse sind somit $\kappa_b = b/d$ und $\kappa_h = h/d$. Eine geometrische Ähnlichkeit verschiedener Baugrößen von Pumpen liegt vor, wenn κ_i unabhängig von der Baugröße ist und daher $\kappa_i = \kappa'_i$ gilt.

Im Folgenden werden nun die Spalte der Pumpen näher betrachtet. Die Spalte ergeben sich aus unterschiedlichen Nennmaßen bei Rotoren und Gehäusen sowie deren Passungen. Bei der überwiegenden Anzahl der Spalte sind Welle-Bohrung-Passungen relevant. Bei identischer Toleranzklasse ändert sich die Toleranz stufenförmig in Abhängigkeit des Nennmaßes. Innerhalb eines Nennmaßbereichs ist die Toleranz konstant.

Die Spaltweiten, die sich während des Betriebs der Pumpen ergeben, hängen bei den betrachteten Pumpen vom jeweiligen Betriebszustand ab. Bei Zahnradpumpen und Schraubepumpen sind die Zahnräder und Laufspindeln über Gleitlager¹² fixiert während bei Drehkolbenpumpen die Drehkolben mit Spannsätzen auf den Antriebswellen befestigt sind. Im Betrieb wirken nun, entsprechend den Belastungen der Pumpen, unterschiedlich starke Kräfte auf die Zahnräder, Laufspindeln und Drehkolben ein, die dazu führen, dass sich die axialen und radialen Positionen dieser Elemente gegenüber dem lastfreien Zustand ändern. Damit ändern sich auch die Spaltweiten in Abhängigkeit des Betriebszustands der Pumpen.

Wie bereits in Kapitel 2.3 im Rahmen der Verlustmodellierung dargelegt, ist der Einfluss der Spalte auf die Verluste und damit den Wirkungsgrad einer Pumpe vielschichtig. Mit der folgenden grundlegenden Modellannahme wird dieser Komplexität begegnet:

M-I Die Summe aller Spalteinflüsse einer Pumpe kann repräsentativ durch einen einzigen Spalt mit der mittleren Spalthöhe \bar{s} abgebildet werden.

Diese mittlere Spalthöhe \bar{s} stellt eine abstrakte Größe dar und kann nicht geometrisch berechnet werden. In Analogie zu Gleitlagern entspricht sie dem mittleren Lagerspiel.

¹²Bei den betrachteten Schraubepumpen erfüllt der Umfangsspalt die Funktion eines Gleitlagers.

Auf Basis der bisherigen Geometriebetrachtungen sind in Tabelle 3.1 die relevanten Längenmaße der untersuchten Pumpen aufgeführt¹³. Bei Zahnradpumpen werden 4 unterschiedliche Baugrößen (ZP I-IV), bei Schraubepumpen 3 unterschiedliche Baugrößen (SP I-III) und bei Drehkolbepumpen eine einzelne Drehkolbenpumpe (DP) untersucht.

Tabelle 3.1 – Geometrische Maße der Pumpen.

Pumpe	d in mm	b in mm	h in mm	V in cm ³	κ_b	κ_h
ZP I	42.3	41	-	30.9	0.97	-
ZP II	42.3	52	-	39.3	1.23	-
ZP III	42.3	65	-	49.6	1.54	-
ZP IV	42.3	82	-	63.3	1.94	-
SP I	32	134	64	30.4	4.18	2
SP II	38	160	76	50.0	4.21	2
SP III	45	189	90	82.8	4.20	2
DP	111	48	-	347.4	0.43	-

Aus Tabelle 3.1 ist direkt ersichtlich, dass die geometrische Ähnlichkeit bei Zahnradpumpen nicht gegeben ist, da sich innerhalb der Baureihe die Zahnradbreite ändert, während der Zahnraddurchmesser konstant bleibt. Daher ist κ_b innerhalb der Baureihe nicht konstant und eine notwendige Bedingung für die geometrische Ähnlichkeit nicht erfüllt. Bei den Schraubepumpen können dagegen sowohl κ_h und κ_b als konstant angenommen werden. Um eine endgültige Aussage über die geometrischen Ähnlichkeit bei den Zahnrad- und Schraubepumpen machen zu können, werden im Folgenden die Spalte unter Berücksichtigung der Modellannahme $M-I$ näher betrachtet.

Bei den Zahnradpumpen sind die Welle-Bohrung-Passungen sowie die Durchmesser und die Breiten der Gleitlager innerhalb der Baureihe identisch und folglich auch deren Toleranzen. Lediglich durch die unterschiedliche Breite der Zahnräder ändert sich die Toleranz für den Axialspalt (vgl. Abb. 3.1).

Bei der Schraubepumpenbaureihe werden die mittleren Spaltweiten der einzelnen Spalte durch die Nennmaße der Innen- und Außendurchmesser der Spindeln sowie den Bohrungsdurchmesser, den Achsabstand der Spindeln und die jeweiligen Toleranzen anhand der Welle-Bohrung-Passungen vorgegeben. Dabei sind die Spaltweiten, die allein durch die Nennmaße der Bauteile vorgegeben werden, für alle drei Schraubepumpen gleich und damit

¹³Das Verdrängervolumen V wurde mittel der Methode von Teot ([90]), 1970) experimentell bestimmt, vgl. Kap. 2.1, S.20 ff.

unabhängig von der Baugröße¹⁴. Des Weiteren kann festgestellt werden, dass die Innen- und Außendurchmesser der Antriebsspindeln und der Laufspindeln überwiegend in Nennmaßbereichen liegen, in denen die Toleranz, aufgrund der Verwendung identischer Passungen, gleich ist.

Vor diesem Hintergrund wird eine zweite Modellannahme getroffen:

MII Die mittlere Spalthöhe \bar{s} einer Pumpe ist für die betrachteten Zahnradpumpenbaureihe und Schraubepumpenbaureihe im lastfreien Zustand unabhängig von der Baugröße bzw. dem Verdrängervolumen V .

Bei dieser Annahme wird vernachlässigt, dass das Istmaß aller relevanten Längenmaße einer Pumpe innerhalb des Toleranzfeldes liegt. Bei der Modellannahme *M-II* handelt es sich somit um eine starke Vereinfachung, da sich die Toleranzen in der gleichen Größenordnung bewegen wie die Spaltweiten, die sich allein aus den Differenzen der Nennmaße aller relevanten Längenmaße ergeben.

Vor dem Hintergrund dieser Spaltanalyse und der Modellannahme *M-II* kann festgestellt werden, dass auch für die Schraubepumpen keine vollständige geometrische Ähnlichkeit vorliegt. Abbildung 3.2 stellt den qualitativen Verlauf von $\kappa_{\bar{s}}$ über dem Verdrängervolumen der betrachteten Schraubepumpen- und Zahnradpumpenbaureihe dar.

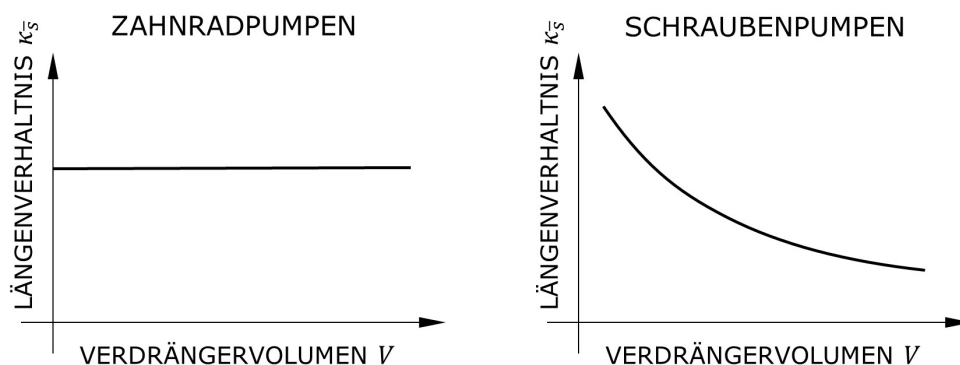


Abbildung 3.2 – Abhängigkeit des Längsverhältnisses $\kappa_{\bar{s}}$ vom Verdrängervolumen (Baugröße).

Durch die nachgewiesene unvollständige geometrische Ähnlichkeit bei der Zahnradpumpen- und Schraubepumpenbaureihe, ist für diese Pumpenbaureihen auch keine vollständige physikalische Ähnlichkeit erreichbar. Eine

¹⁴Genaue Angaben der Nennmaße können aus Gründen der Vertraulichkeit nicht genannt werden.

Vorhersage des Wirkungsgradverhalten der Pumpenbaureihen allein durch Berücksichtigung der Maßstabsfaktoren (vgl. Gl. (3.6)) ist daher nicht möglich. Stattdessen wird ein Modell benötigt, das einen mathematischen Zusammenhang zwischen den bestimmenden geometrischen Größen einer Pumpe und ihrem Wirkungsgrad herstellt. Wie bereits oben dargelegt, sind die bestimmenden geometrischen Größen bei Zahnradpumpen der Durchmesser d_{ZP} , die Breite b_{ZP} und die mittlere Spalthöhe \bar{s}_{ZP} , bei Schraubepumpen der Durchmesser d_{SP} und die mittlere Spalthöhe \bar{s}_{SP} . Mit einem derartigen Modell, das in Kapitel 3.4 entwickelt wird, kann das Wirkungsgradverhalten in Abhängigkeit der Baugröße skaliert werden.

3.2 Dimensionsanalyse

Eine wichtige Grundlage für die Dimensionsanalyse ist es, dass die Teilwirkungsgrade und der Gesamtwirkungsgrad in Abhängigkeit der Verluste dargestellt werden können (vgl. Kap. 2.1). Gegenstand der Dimensionsanalyse sind daher die Verluste in rotierenden Verdrängerpumpen, die Leckage und das Reibmoment als abhängige Veränderliche sowie deren relevante Einflussgrößen als unabhängige Veränderliche. Leckage und Reibmoment werden dabei getrennt betrachtet, da sie durch unterschiedliche physikalische Wirkprinzipien entstehen. Die relevanten Einflussgrößen werden auf Basis der Literaturrecherche in Kapitel 2.3 identifiziert. Auf dieser Grundlage werden mittels der Dimensionsanalyse geeignete dimensionslose Produkte definiert, auf deren Basis die physikalische Ähnlichkeit einzelner Pumpe untersucht werden können. Dabei werden die unterschiedlichen Pumpentypen einheitlich betrachtet.

An dieser Stelle wird auf Basis der bei den Untersuchungen vorliegenden Druck- und Temperaturbereiche (vgl. Kapitel 4.2) der Pumpen eine weitere wesentliche Modellannahme getroffen:

M-III Das Fördermedium verhält sich näherungsweise inkompressibel und die mittlere Spalthöhe \bar{s} einer Pumpe ist unabhängig von Betriebsgrößen und daher sowohl für eine einzelne Pumpe als auch für die betrachteten Baureihen konstant.

Vor dem Hintergrund dieser Modellannahme berechnen sich die Leckage Q_L und das Reibmoment M_{mh} zu

$$\begin{aligned} Q_L &= nV - Q, \\ M_{mh} &= M_s - \frac{\Delta p V}{2\pi} \end{aligned} \tag{3.11}$$

und die Teilwirkungsgraddefinitionen aus Gleichung (2.24) vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}\eta_{\text{vol}} &= \frac{Q}{nV} = 1 - \frac{Q_L}{nV}, \\ \eta_{\text{mh}} &= \frac{\Delta p V}{2\pi M_S} = \frac{1}{1 + 2\pi \frac{M_{\text{mh}}}{\Delta p V}}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Leckage

Für die Identifikation der relevanten physikalischen Einflussgrößen auf die Leckage Q_L werden zunächst die Betriebsgrößen sowie die Eigenschaften des Fördermediums betrachtet. Auf Grundlage der Literaturrecherche in Kap. 2.3 und mit den in Abbildung 2.7 dargestellten Verlustmechanismen werden die Betriebsgrößen Druckdifferenz Δp , kinematische Viskosität ν und Dichte ρ berücksichtigt. Der Einfluss der Drehzahl n auf die Leckage wird in der Literatur als vernachlässigbar klein dargestellt, weswegen die Drehzahl nicht berücksichtigt wird. Diese Auswahl von Einflussgrößen führt bezüglich der Leckage zu folgender Modellannahme:

M-IV Die Leckage basiert auf einer rein druckgetriebenen Strömung, die weder rein laminar noch rein turbulent ist. Ferner wird für die Leckage näherungsweise eine isotherme Strömung angenommen, sodass die Temperatur als Einflussgröße nicht betrachtet wird.

Als geometrische Größen werden bei allen Pumpentypen das Verdrängervolumen V sowie die mittlere Spalthöhe \bar{s} berücksichtigt. Wie bereits dargestellt, ist das Verdrängervolumen eine wesentliche charakteristische Größe, die für die Definition der Teilwirkungsgrade und die Berechnung der Verluste relevant ist (vgl. Gl. (3.11) und (3.12)). Im Fall der betrachteten Schraubenspumpen und der einzelnen Drehkolbenpumpe wird daher, anders als bei den detaillierten Geometriebetrachtungen, das Verdrängervolumen mit $V^{1/3}$ anstatt des Durchmessers d_{SP} bzw. d_{DP} als charakteristische Länge gewählt. Bei Zahnradpumpen ist neben dem Zahnradradius d_{ZP} auch die Zahnradbreite b_{ZP} für die Geometrie charakteristisch. Aus diesem Grund wird $V^{1/3}$ anstatt der Zahnradbreite berücksichtigt und $\kappa_{d_{\text{ZP}}} := d_{\text{ZP}}/V^{1/3}$ als weiteres charakteristisches Längenverhältnis für Zahnradpumpen definiert¹⁵.

¹⁵Auf Basis von Gl. (3.10) kann das Längenverhältnis $\kappa_{d_{\text{ZP}}} = d_{\text{ZP}}/V^{1/3}$ auch als Längenverhältnis zwischen d_{ZP} und b_{ZP} mit $\kappa_{d_{\text{ZP}}} \propto (d_{\text{ZP}}/b_{\text{ZP}})^{1/3}$ dargestellt werden.

Für die Bestimmung der dimensionslosen Produkte wird in Tabelle 3.2 zunächst die Dimensionsmatrix der Leckage und ihrer Einflussgrößen im $[LMT]$ -System als Basisgrößensystem dargestellt.

Tabelle 3.2 – Dimensionsmatrix für die Leckage.

	Q_L	Δp	ν	ϱ	V	\bar{s}
L	3	-1	2	-3	3	1
M	0	1	0	1	0	0
T	-1	-2	-1	0	0	0

Mithilfe des Buckingham Π -Theorems lassen sich aus diesen 6 dimensionsbehafteten Größen 3 dimensionslose Produkte definieren. Um anhand der dimensionslosen Produkte zu einer verständlichen Darstellung zu gelangen, wird an dieser Stelle gefordert, dass die Leckage Q_L und die Druckdifferenz Δp jeweils linear sowie nicht gemeinsam in einem dimensionslosen Produkt vorkommen. Damit ergeben sich die dimensionslosen Produkte

$$Q_L^+ := \frac{Q_L}{\nu V^{1/3}}, \quad \Delta p^+ := \frac{\Delta p V^{2/3}}{\nu^2 \varrho}, \quad \psi := \frac{\bar{s}}{V^{1/3}}, \quad (3.13)$$

mit der spezifischen Leckage Q_L^+ als abhängige Veränderliche sowie dem spezifischen Druck Δp^+ und dem relativen Spalt ψ als unabhängige Veränderliche. Für Zahnradpumpen ist zudem das Längenverhältnis $\kappa_{d_{ZP}}$ relevant.

Somit gelten für die betrachteten Schraubepumpen der Zusammenhang

$$Q_L^+ = Q_L^+(\Delta p^+, \psi) \quad (3.14)$$

und für die betrachteten Zahnradpumpen der Zusammenhang

$$Q_L^+ = Q_L^+(\Delta p^+, \psi, \kappa_{d_{ZP}}). \quad (3.15)$$

Der jeweilige funktionale Zusammenhang ist dabei noch unbekannt und kein Ergebnis der Dimensionsanalyse. Durch das Einsetzen der Gleichungen (3.14) und (3.15) in die Definition des volumetrischen Wirkungsgrads η_{vol} aus Gleichung (3.12) ergibt sich für den volumetrischen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{vol}} = 1 - \frac{1}{Re} Q_L^+, \quad Re := \frac{n V^{2/3}}{\nu} \quad (3.16)$$

mit der pumpenspezifischen Reynolds-Zahl Re , die auch von Strömungsmaschinen bekannt ist. Somit kann der volumetrische Wirkungsgrad als Funktion

der beiden dimensionslosen Größen Δp^+ und Re sowie der relevanten Längenverhältnisse dargestellt werden und stellt so ein weiteres Ergebnis der Dimensionsanalyse dar.

Wird nur eine einzelne Pumpe betrachtet, wie dies unter anderem bei der Drehkolbenpumpe der Fall ist, sind die Längenverhältnisse ψ und $\kappa_{d_{\text{ZP}}}$ konstant. Die Gleichungen (3.14) und (3.15) vereinfachen sich dann für alle drei Pumpentypen zu

$$Q_{\text{L}}^+ = Q_{\text{L}}^+(\Delta p^+). \quad (3.17)$$

Reibmoment

Für die Identifikation der relevanten physikalischen Einflussgrößen auf das Reibmoment M_{mh} werden, vergleichbar den Betrachtungen bei der Leckage, zunächst wiederum die Betriebsgrößen und die Fördermediumseigenschaften betrachtet. Auf Grundlage der Ergebnisse der Literaturrecherche in Kap. 2.3 und den in Abbildung 2.7 dargestellten Verlustmechanismen werden dementsprechend die Betriebsgrößen Druckdifferenz Δp , Drehzahl n , kinematische Viskosität ν und Dichte ρ berücksichtigt. Diese Auswahl von Einflussgrößen führt bezüglich des Reibmoments zu folgender Modellannahme:

M-V Das Reibmoment setzt sich aus Coulomb'schen Reibverlusten, viskoser Reibung und Trägheitsverlusten zusammen. Zudem können Mischreibungsverluste in gewissen Betriebsbereichen¹⁶ auftreten. Ferner wird auch für das Reibmoment näherungsweise ein isothermes Verhalten des Fördermediums in den Spalten angenommen.

Für die geometrischen Größen und deren Längenverhältnisse werden die bei der Leckage angestellten Betrachtungen übernommen. Für die Bestimmung der dimensionslosen Produkte wird in Tabelle 3.3 die Dimensionsmatrix des Reibmoments und seiner Einflussgröße im $[LMT]$ -System als Basisgrößensystem dargestellt.

Tabelle 3.3 – Dimensionsmatrix für das Reibmoment.

	M_{mh}	Δp	n	ν	ρ	V	\bar{s}
L	2	-1	0	2	-3	3	1
M	1	1	0	0	1	0	0
T	-2	-2	-1	-1	0	0	0

¹⁶Mischreibung tritt in den Gleitlagern der Pumpe auf. Maßgeblich ist daher die Sommerfeld-Zahl eines Gleitlagers (vgl. VOGELPOHL [94]).

Mithilfe des Buckingham II-Theorems lassen sich aus diesen 7 dimensionsbehafteten Größen 4 dimensionslose Produkte definieren. Auch wenn für das Reibmoment unterschiedliche Verlustmechanismen relevant sind, haben die viskosen Reibungsverluste bei den betrachteten rotierenden Verdrängerpumpen eine besondere Bedeutung. Diese Verluste resultieren insbesondere aus den Gleitlagern in den Schrauben- und Zahnradpumpen sowie aus den engen Spalten der Drehkolbenpumpe. Aus diesem Grund wird für die Entdimensionierung des Reibmoments die bekannte Darstellung aus den Untersuchungen von Vogelpohl¹⁷ aufgegriffen und entsprechend auf Verdrängerpumpen angepasst. Ferner sind im Rahmen der Dimensionsanalyse der Leckage mit dem spezifischen Druck Δp^+ und der Reynolds-Zahl Re schon zwei dimensionslose Produkte festgelegt. Um die Anzahl an dimensionslosen Produkten für den Gesamtwirkungsgrad möglichst gering zu halten, ist deren Verwendung auch im Zusammenhang mit dem Reibmoment sinnvoll.

Damit ergeben sich die dimensionslosen Produkte

$$M_{\text{mh}}^+ := \frac{M_{\text{mh}}}{\Delta p V}, \quad \Delta p^+ := \frac{\Delta p V^{2/3}}{\nu^2 \rho}, \quad Re := \frac{n V^{2/3}}{\nu}, \quad \psi := \frac{\bar{s}}{V^{1/3}}, \quad (3.18)$$

mit dem spezifischen Reibmoment M_{mh}^+ als abhängige Veränderliche sowie dem spezifischen Druck Δp^+ , der Reynolds-Zahl Re und dem relativen Spalt ψ als unabhängige Veränderliche. Für Zahnradpumpen ist zudem das Längenverhältnis κ_{dZP} relevant.

An dieser Stelle ist ein Vergleich der gewonnenen dimensionslosen Produkte mit den dimensionlosen Größen von Vogelpohl¹⁸ für Gleitlager sinnvoll. Vogelpohl beschreibt das Reibungsverhalten von Gleitlagern mit der verallgemeinerten Reibungszahl μ_G/ψ_G , die das Verhältnis aus Reibungszahl μ_G und relativem Spalt des Gleitlager ψ_G darstellt, und der Sommerfeldzahl So . Reibungszahl und Sommerfeldzahl sind definiert als

$$\mu_g := \frac{W}{2\bar{p}R_G B_G}, \quad So := \frac{\bar{p}}{\Omega\mu} \psi_G^2, \quad (3.19)$$

mit der Reibungskraft W , dem mittleren Lagerdruck \bar{p} , dem Lagerradius R_G , der Lagerbreite B_G und der Winkelgeschwindigkeit Ω . Aus pumpenspezifischer Sicht entspricht nun das spezifische Reibmoment M_{mh}^+ der Reibungszahl μ_G und das Produkt aus spezifischem Druck, Reynolds-Zahl und relativem Spalt

¹⁷VOGELPOHL, „Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze“, ([94], 1949)

¹⁸VOGELPOHL, „Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze“, ([94], 1949)

mit $\Delta p^+ \psi^2 / Re$ der Sommerfeldzahl So . Diese Analogie wird im Rahmen der Untersuchung der physikalischen Ähnlichkeit in Kapitel 3.3 angewendet.

Im Folgenden gelten somit analog zur Leckage für die betrachteten Schraubenpumpen der Zusammenhang

$$M_{\text{mh}}^+ = M_{\text{mh}}^+(\Delta p^+, Re, \psi) \quad (3.20)$$

sowie für Zahnradpumpen der Zusammenhang

$$M_{\text{mh}}^+ = M_{\text{mh}}^+(\Delta p^+, Re, \psi, \kappa_{d_{\text{ZP}}}). \quad (3.21)$$

Auch hier ist der jeweilige funktionale Zusammenhang noch unbekannt. Durch das Einsetzen der Gleichungen (3.20) und (3.21) in die Definition des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad η_{mh} aus Gleichung (3.12) ergibt sich für den mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{mh}} = \frac{1}{1 + 2\pi M_{\text{mh}}^+}. \quad (3.22)$$

Somit kann der mechanisch-hydraulische Wirkungsgrad als Funktion der beiden dimensionslosen Größen Δp^+ und Re sowie der relevanten Längenverhältnisse dargestellt werden und ist, analog zum volumetrischen Wirkungsgrad, ein weiteres Ergebnis der Dimensionsanalyse.

Wird wieder nur eine einzelne Pumpe betrachtet, wie dies bei der Drehkolbenpumpe der Fall ist, sind die Längenverhältnisse ψ und $\kappa_{d_{\text{ZP}}}$ konstant. Gleichung (3.20) und (3.21) vereinfachen sich dann für alle drei Pumpentypen zu

$$M_{\text{mh}}^+ = M_{\text{mh}}^+(\Delta p^+, Re). \quad (3.23)$$

3.3 Physikalische Ähnlichkeit einzelner Pumpen

Ausgehend von den dimensionslosen Produkten zur Beschreibung der Leckage in Gleichung (3.13) und des Reibmoments in Gleichung (3.18) kann nun die physikalische Ähnlichkeit für eine einzelne Pumpe untersucht werden. Eine physikalische Ähnlichkeit für eine Pumpe liegt dann vor, wenn für unterschiedliche Zustände der Pumpe die dimensionslosen Produkte gleich sind. Demnach gilt für die Maßstabsfaktoren der abhängigen dimensionslosen Größen spezifische Leckage Q_L^+ und spezifisches Reibmoments M_{mh}^+

$$M_{Q_L^+} = 1, \quad M_{M_{mh}^+} = 1, \quad (3.24)$$

wenn für die Maßstabsfaktoren der unabhängigen Größen die Bedingungen

$$M_{\Delta p^+} \stackrel{!}{=} 1, \quad M_{Re} \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.25)$$

erfüllt sind. Mit den Messdaten, die im Rahmen dieser Arbeit gewonnen werden, können nun die Bedingungen für das Vorliegen einer physikalischen Ähnlichkeit, die mit den Modellannahmen *M-I*, *M-III*, *M-IV* und *M-V* verknüpft sind, überprüft werden. Zunächst wird dazu die spezifische Leckage betrachtet und im zweiten Schritt das spezifische Reibmoment. Ausführliche Informationen zu den Messdaten inklusive ihrer Messunsicherheit, auf denen die folgenden Betrachtungen beruhen, finden sich in Kapitel 4. Die Betriebsbereiche der betrachteten Pumpen sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

Leckage

In den Abbildungen 3.3, 3.4 und 3.5 sind die Messwerte der spezifischen Leckage Q_L^+ über dem spezifischen Druck Δp^+ für jeweils eine Pumpe eines Pumpentyps in doppellogarithmischer Darstellung aufgetragen. Die unterschiedlichen Symbole in den Diagrammen kennzeichnen dabei die vier verschiedenen Viskositäten, bei denen die Messungen durchgeführt wurden¹⁹. Für einen bestimmten spezifischen Druck sind jeweils drei Betriebspunkte mit unterschiedlichen Drehzahlen, verteilt über den jeweiligen Drehzahlbereich, abgebildet. Aus Gründen der Anschaulichkeit sind nicht alle Messpunkte in den Abbildungen mit Fehlerbalken versehen. Die dargestellten Fehlerbalken veranschaulichen jedoch die Bandbreite der vorliegenden Messunsicherheiten ausreichend.

¹⁹Aufgrund der Temperaturschwankungen des Fördermediums variiert die Viskosität um bis zu 4% um den jeweils angegebenen Wert.

Aus den Abbildungen ist ersichtlich, dass die Messdaten bei allen Pumpen auf eine Kurve fallen und der Zusammenhang $Q_L^+(\Delta p^+)$ näherungsweise durch eine Gerade mit der Steigung m dargestellt werden kann. Aufgrund der doppellogarithmischen Darstellung entspricht die Gerade einem Potenzgesetz, in dem die Steigung m den Exponenten darstellt. Für die Schraubenpumpen ist $m = 0.79...0.84$, für Zahnradpumpen ist $m = 0.71...0.77$ und für die Drehkolbenpumpe ist $m = 0.80$.

Dies führt zur ersten Erkenntnis, dass die Modellannahmen *M-I* und *M-III* gültig sind. Die Spalteinflüsse in den drei Pumpentypen können durch einen Spalt mit der mittleren Spalthöhe \bar{s} repräsentiert werden und die mittlere Spalthöhe \bar{s} und der relative Spalt ψ sind im untersuchten Betriebsbereich unabhängig von den Betriebsgrößen. Die zweite Erkenntnis ist, dass auch die Modellannahme *M-IV*, die unter anderem die Drehzahlunabhängigkeit der Leckage beinhaltet, zutreffend ist. Die Bereiche, in denen unterschiedliche Symbole übereinander liegen, zeigen, dass im Rahmen der Messgenauigkeit eine physikalische Ähnlichkeit des Leckageverhaltens aller drei Pumpen vorliegt. Die Abbildungen 3.3 und 3.4 sind für die weiteren Pumpen der jeweiligen Baureihe repräsentativ. In Abhang A finden sich die Darstellungen für die spezifische Leckage der übrigen Pumpen.

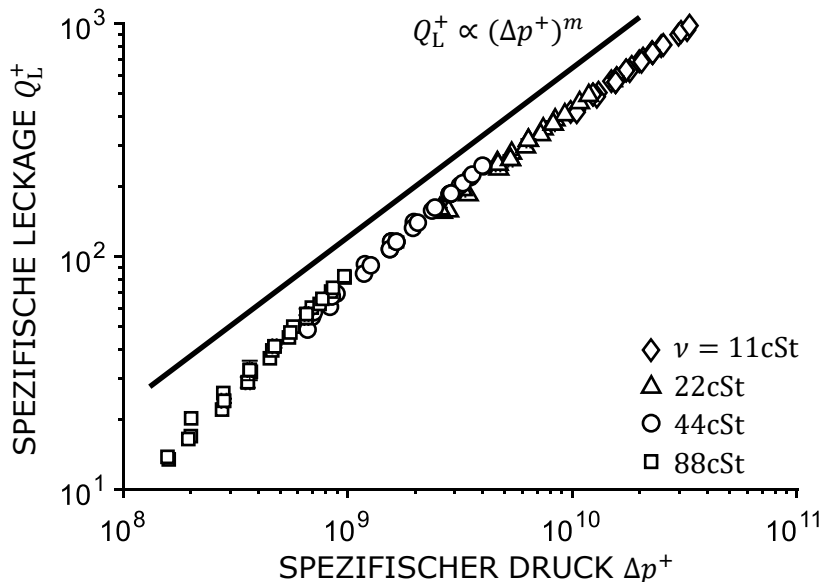


Abbildung 3.3 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Schraubenpumpe SP II mit $m = 0.77$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

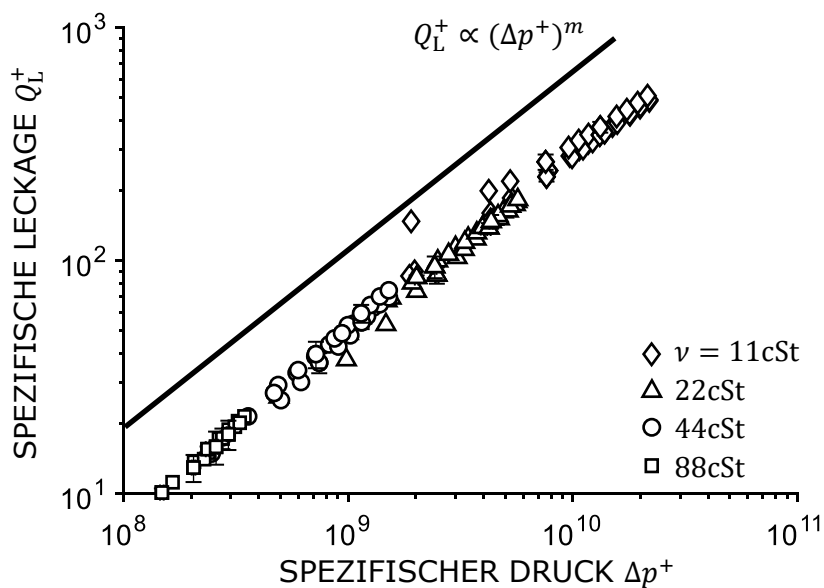


Abbildung 3.4 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Zahnradpumpe ZP I $m = 0.79$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

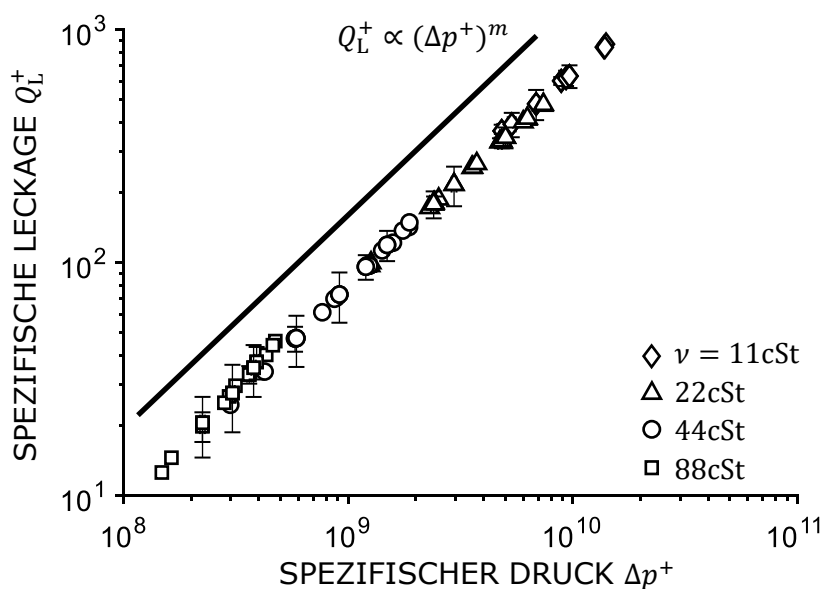


Abbildung 3.5 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Drehkolbenpumpe DP $m = 0.80$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

Auf Basis der bestätigten physikalischen Ähnlichkeit des Leckageverhaltens der betrachteten Pumpen, lassen sich nun weitere theoretische Untersuchungen für einzelne Pumpen durchführen. Ausgehend von Gleichung (3.13) und (3.17) gilt für die spezifische Leckage

$$M_{Q_L^+} = \frac{M_{Q_L}}{M_\nu M_V^{1/3}} = 1, \quad (3.26)$$

wenn

$$M_{\Delta p^+} = \frac{M_{\Delta p} M_V^{2/3}}{M_\nu^2 M_\rho} \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.27)$$

mit den Maßstabsfaktoren der dimensionsbehafteten Größen erfüllt ist. Hierbei ist $M_V = 1$ und auch für die Dichte kann näherungsweise $M_\rho = 1$ angenommen werden, da sich diese im vorliegenden Temperaturbereich sowie bei den verwendeten Prüfstandsmedien nur unwesentlich ändert.

Aus Gleichung (3.27) folgt dann

$$M_{\Delta p} = M_\nu^2. \quad (3.28)$$

In der Praxis ist nun üblicherweise der Fall relevant, dass M_ν vorgegeben wird. Dies ergibt sich daraus, dass für ein vorhandenes Prüfstandsmedium Kennfelder bei konstanter Viskosität ν_1 vorliegen. Um den Aufwand einer neuen Kennfeldmessung bei Viskosität ν_2 zu vermeiden, gilt es das vorhandene Kennfeld zu skalieren. Für die Druckdifferenzen ergibt sich mit Gleichung (3.28) der Zusammenhang

$$\Delta p_2 = M_\nu^2 \Delta p_1 \quad (3.29)$$

und für die Leckage mit Gleichung (3.26) der Zusammenhang

$$Q_{L,2} = M_\nu Q_{L,1}. \quad (3.30)$$

Nutzt man Gleichung (3.30) für die Definition des volumetrischen Wirkungsgrads nach Gleichung (3.12) berechnet sich der volumetrische Wirkungsgrad $\eta_{vol,2}$ bei der Viskosität ν_2 und der Drehzahl n_2 zu

$$\eta_{vol,2} = 1 - \frac{Q_{L,2}}{n_2 V} = 1 - \frac{Q_{L,1} M_\nu}{n_1 M_n V} \quad \text{mit } \Delta p_2 = M_\nu^2 \Delta p_1. \quad (3.31)$$

Gleichung (3.31) stellt nun das erste Ergebnis der Wirkungsgradmodellierung auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen dar. Mit dem Ergebnis der Dimensionsanalyse für die Leckage ist es möglich, das Förderverhalten von Pumpen, ausgehend von nur einer Kennlinienmessung bei einer konstanten Drehzahl und einer konstanten Viskosität, für weitere Drehzahlen und Viskositäten zu

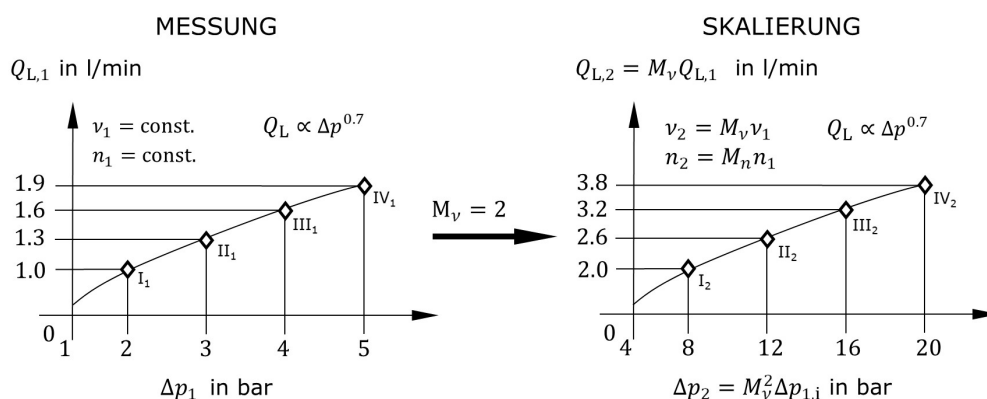


Abbildung 3.6 – Beispielhafte Anwendung der Maßstabsfaktoren zur Skalierung der Leckage mit $M_v = 2$.

skalieren. Dabei ist M_n frei wählbar. Abbildung 3.6 stellt die Skalierung der Leckage exemplarisch dar.

Für diese Skalierung gibt es jedoch zwei limitierende Faktoren. Zum einen gilt die Skalierung nur bis zu der maximalen Drehzahl, ab der es zu sogenannten Füllungsverlusten kommt. Aufgrund von Kavitation, im Fall von Hydrauliköl wird üblicherweise gelöstes Gas frei, wird der Verdrängerraum mit einem Luft-Flüssigkeitsgemisch gefüllt und der effektive Volumenstrom sinkt. Der Begriff „Verlust“ ist an dieser Stelle irreführend, da es sich dabei nicht um energetische Verluste handelt. Stattdessen entsprechen diese Füllungsverluste einer Verkleinerung des Verdrängervolumens, die in der dargelegten Modellierung nicht berücksichtigt sind.

Zum anderen kann der Maßstabsfaktor der Druckdifferenz der Pumpe aufgrund der Betriebsgrenzen nicht beliebig gewählt werden. Die maximale Druckdifferenz wird durch Mischreibung in den Gleitlagern limitiert. Die minimale Druckdifferenz ist durch den Anlagenwiderstand eines Prüfstands, auf dem die Pumpe vermessen wird, begrenzt. Gleichzeitig liegen bei niedrigen Drücken geringe Leckagen vor, sodass die relative Messunsicherheit der Leckage hoch ist (vgl. Kap. 4.3).

Insbesondere der letztgenannte Punkt stellt die Motivation für die Entwicklung eines Leckagemodells dar, das den funktionalen Zusammenhang $Q_L^+(\Delta p^+)$ mathematisch beschreibt und somit eine Skalierung des Leckageverhaltens einer Pumpe über einen, im Vergleich zur Anwendung der Maßstabsfaktoren, weiteren Bereich erlaubt. Für die Skalierung des Leckageverhaltens anhand des Verdrängervolumens ist gemäß der Erkenntnis aus den Geometriebetrachtungen der Pumpen (vgl. Kap. 3.1) ebenfalls ein funktionaler Zusammenhang $Q_L^+(\Delta p^+, \psi)$ für Schraubepumpen bzw. $Q_L^+(\Delta p^+, \psi, \kappa_{d_{zP}})$ für Zahnradpumpen

notwendig (vgl. Gl. (3.14) und (3.15)). Das Leckagemodell wird im folgenden Kapitel 3.4 hergeleitet.

Reibmoment

Im Gegensatz zur spezifischen Leckage Q_L^+ ist das spezifische Reibmoment M_{mh}^+ nicht nur vom spezifischen Druck Δp^+ sondern auch von der Reynolds-Zahl Re abhängig. Aus diesem Grund wird für die dimensionslose Darstellung des Reibmomentverhaltens der Pumpen eine Parameterstudie durchgeführt, in welcher sowohl der spezifische Druck als auch die Reynolds-Zahl jeweils unabhängig voneinander variiert werden.

Eine gewisse Einschränkung für die dimensionslose Darstellung des spezifischen Reibmoments stellt derjenige Verlustanteil des Reibmoments dar, der unabhängig von Betriebsgrößen und damit konstant ist (vgl. Kap 2.3.2 Abb. 2.7). Im Rahmen der durchgeführten Messungen zeigt sich, dass dieser Verlustanteil für die untersuchten Pumpen nicht vernachlässigbar klein ist. Da er unabhängig von den Betriebsgrößen ist, verfälscht er die dimensionslose Darstellung und wird für die folgenden Betrachtungen aus den Messwerten herausgerechnet²⁰.

Anknüpfend an die Untersuchungen von Vogelpohl²¹ an Gleitlagern wird im ersten Schritt der Parameterstudie das spezifische Reibmoment M_{mh}^+ über dem Verhältnis aus spezifischem Druck und Reynolds-Zahl $\Delta p^+/Re$ aufgetragen. Da der relative Spalt ψ für eine einzelne Pumpe als konstant angenommen wird, ist dessen Berücksichtigung in den folgenden Darstellungen nicht notwendig. Die Verläufe sind für jeweils eine Pumpe der drei Pumpentypen in doppellogarithmischen Diagrammen in den Abbildungen 3.7, 3.8 und 3.9 dargelegt. Die unterschiedlichen Symbole in den Diagrammen kennzeichnen verschiedenen Reynolds-Zahlen der Messungen²². Aus Gründen der Anschaulichkeit sind, analog zur Leckage, nicht alle Symbole in den Abbildungen mit Fehlerbalken versehen. Die dargestellten Fehlerbalken veranschaulichen jedoch auch hier die Bandbreite der vorliegenden Messunsicherheiten ausreichend.

Die Messdaten mit konstanter Reynolds-Zahl fallen bei allen Pumpen jeweils annähernd auf eine Kurve und haben den für Gleitlager typischen Verlauf

²⁰Das konstante Reibmoment wird auf Grundlage des semi-axiomatischen Reibmomentmodells (vgl. Kap. 3.4.2) und der Messdaten mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt und vom gemessenen Reibmoment abgezogen.

²¹VOGELPOHL, „Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze“, ([94], 1949)

²²Aufgrund der Temperaturschwankungen des Fördermediums variiert die Viskosität. Damit kommt es unter anderem auch zu einer Schwankung der Reynolds-Zahl, die um bis zu 5% um den jeweils angegebenen Wert variiert.

einer Geraden mit der Steigung -1. Abweichungen im Bereich niedriger spezifischer Reibmomente M_{mh}^+ werden mit der dort vergleichsweise hohen relativen Messunsicherheit in Verbindung gebracht. Aus den Darstellungen lässt sich der Zusammenhang

$$M_{\text{mh}}^+ \propto \frac{Re}{\Delta p^+} \quad (3.32)$$

ableiten. Diese Verläufe sind in Abhängigkeit der Größe der Reynolds-Zahlen dabei leicht voneinander versetzt. Für Zahnradpumpen lässt sich der Verlauf $M_{\text{mh}}^+(\Delta p^+/Re)$ in zwei Bereiche aufteilen. Der erste Bereich ist analog zu Schrauben- und Drehkolbenpumpen und entspricht nach Vogelpohl²³ dem Verlauf von Gleitlagern bei Sommerfeldzahlen kleiner 1. Im zweiten Bereich nimmt die Steigung der Kurve zu und wird für hohe Werte von $\Delta p^+/Re$ sogar positiv. Dies entspricht dem typischen Mischreibungsverhalten in Gleitlagern, in dem das Reibmoment überproportional mit dem Druck ansteigt.

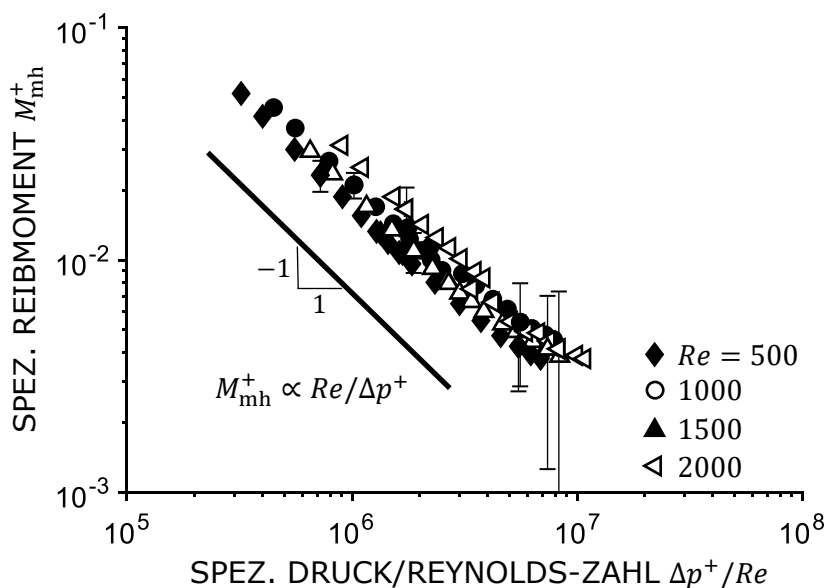


Abbildung 3.7 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Schraubpumpe SP II (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

²³VOGELPOHL, „Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze“, ([94], 1949)

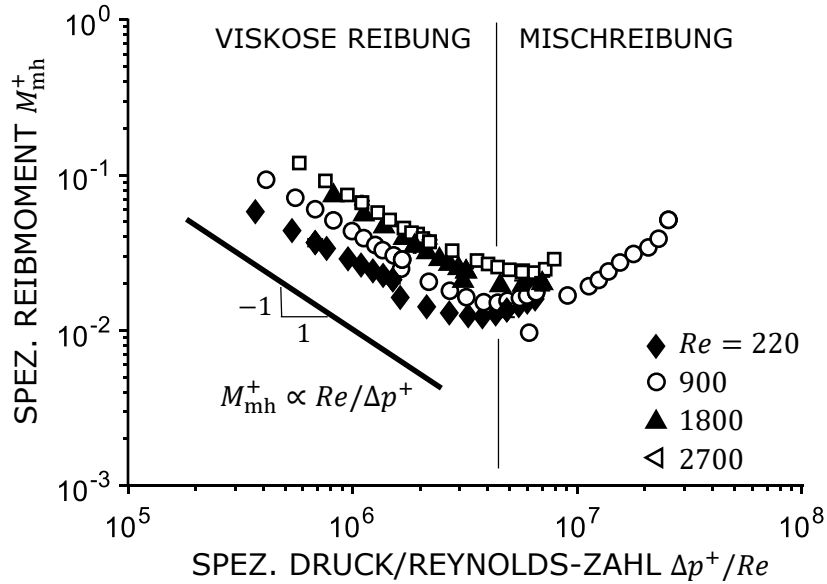


Abbildung 3.8 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Zahnradpumpe ZP I (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

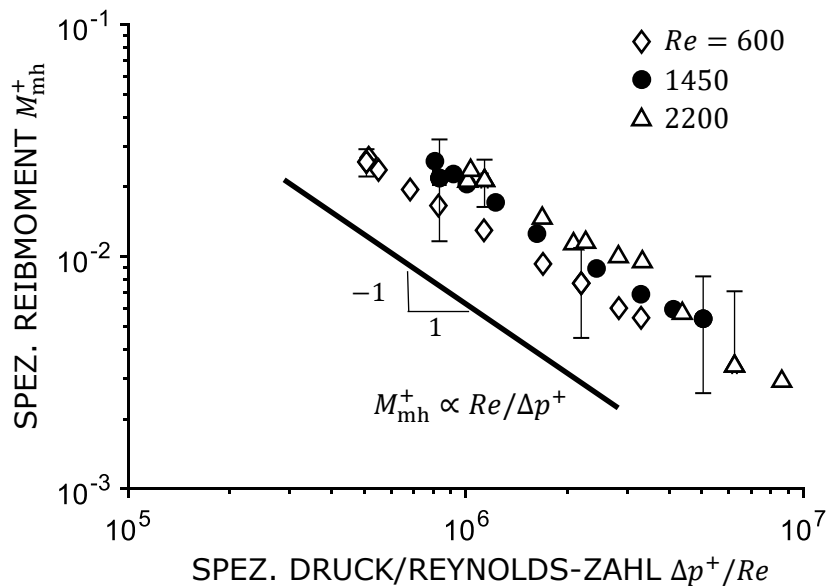


Abbildung 3.9 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Drehkolbenpumpe DP (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

Die Abbildungen 3.10, 3.11 und 3.12 zeigen für die jeweils angegebenen Pumpen das spezifische Reibmoment M_{mh}^+ über der Reynolds-Zahl für variierende spezifische Drücke Δp^+ in doppellogarithmischen Diagrammen. Die unterschiedlichen Symbole kennzeichnen in diesem Fall die verschiedenen spezifischen Drücke²⁴. Auch hier fallen die Messdaten mit konstantem spezifischem Druck jeweils auf eine Gerade, deren Steigung annähernd dem Wert 2 entspricht. Somit kann $M_{\text{mh}}^+(Re)$ für alle Pumpentypen durch einen quadratischen Ansatz dargestellt werden.

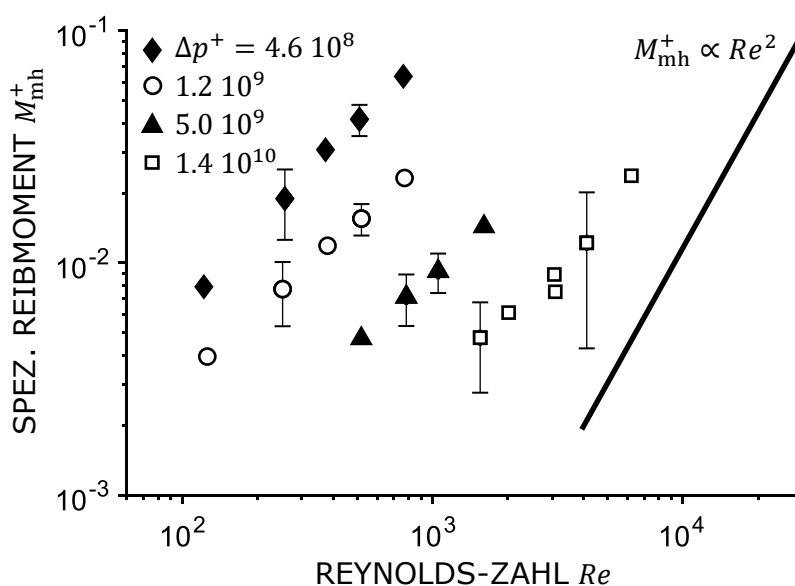


Abbildung 3.10 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynolds-Zahl Re für die Schraubpumpe SP II (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

Die Ergebnisse zeigen, dass auch für das Reibmomentverhalten im Rahmen der Messgenauigkeit die physikalische Ähnlichkeit für alle drei Pumpentypen festgestellt werden kann. Somit ist die Modellannahme $M-I$ und $M-III$ nicht nur für die Leckage sondern auch für das Reibmoment gültig. Ferner ist auch die Modellannahme $M-V$, die die Auswahl der Einflussgrößen auf das Reibmoment festlegt, zutreffend. Die Abbildungen 3.7 bis 3.12 sind auch für die weiteren Pumpen der jeweiligen Baureihe repräsentativ. In Abhang A finden sich die Darstellungen für das spezifische Reibmoment der übrigen Pumpen.

²⁴Aufgrund der Temperaturschwankungen des Fördermediums variiert die Viskosität. Damit kommt es unter anderem auch zu einer Schwankung der spezifischen Drücke, die um bis zu 5 % um den jeweils angegebenen Wert variiert.

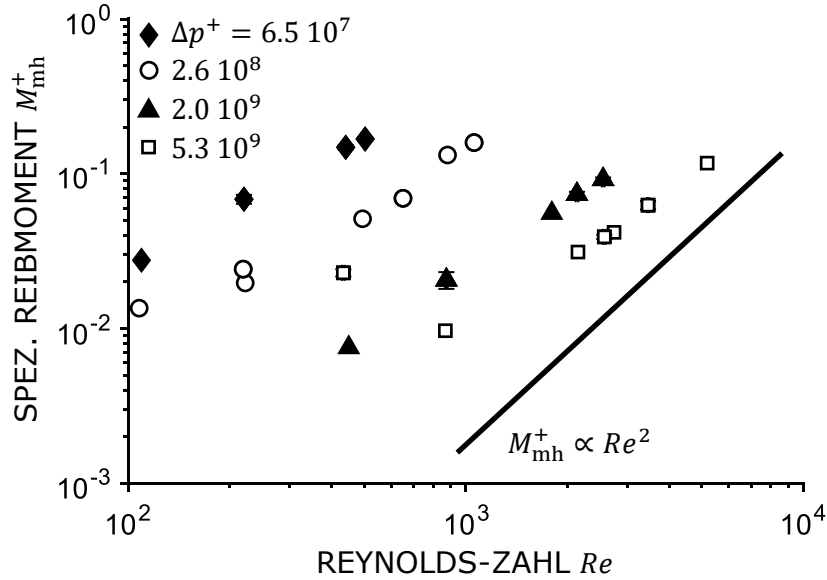


Abbildung 3.11 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynolds-Zahl Re für die Zahnradpumpe ZP I (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

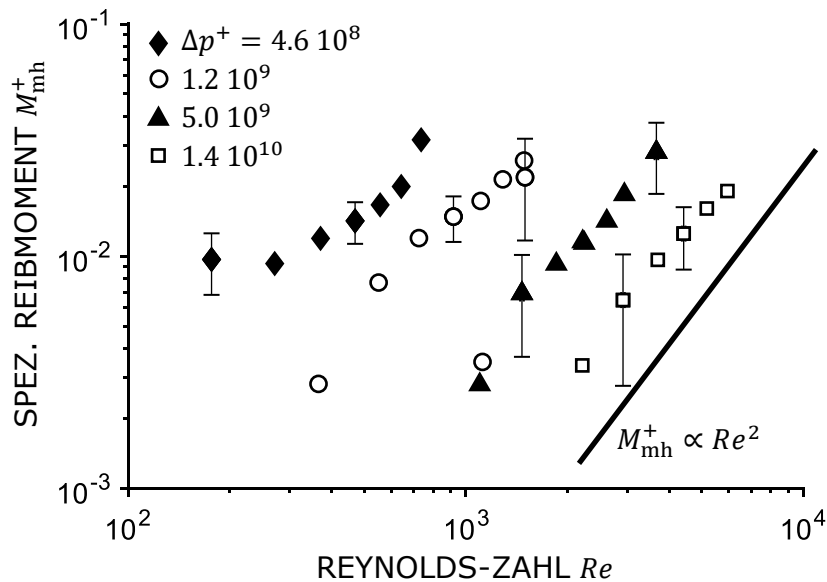


Abbildung 3.12 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynolds-Zahl Re für die DKP (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

Auf Basis der bestätigten physikalischen Ähnlichkeit des Reibmomentverhaltens der betrachteten Pumpen, lassen sich nun, analog zur Leckage, ebenfalls weitere theoretische Untersuchungen für einzelne Pumpen durchführen. Ausgehend von Gleichung (3.18) und (3.23) gilt für das spezifische Reibmoment

$$M_{M_{\text{mh}}}^+ = \frac{M_{M_{\text{mh}}}}{M_{\Delta p} M_V} = 1, \quad (3.33)$$

wenn

$$M_{\Delta p}^+ = \frac{M_{\Delta p} M_V^{2/3}}{M_\nu^2 M_e} \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{und} \quad M_{Re} = \frac{M_n M_V^{2/3}}{M_\nu} \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.34)$$

mit den Maßstabsfaktoren der dimensionsbehafteten Größen erfüllt ist. Analog zur Leckage sind $M_V = 1$ und $M_e = 1$. Aus Gleichung (3.34) folgen dann die beiden Bedingungen

$$M_{\Delta p} = M_\nu^2, \quad M_n = M_\nu. \quad (3.35)$$

Analog zur Leckage wird auch für das Reibmoment der Maßstabsfaktor M_ν festgelegt. Für die Druckdifferenzen und Drehzahlen ergeben sich mit Gleichung (3.35) die Zusammenhänge

$$\Delta p_2 = M_\nu^2 \Delta p_1, \quad n_2 = M_\nu n_1 \quad (3.36)$$

und für das Reibmoment mit Gleichung (3.33) der Zusammenhang

$$M_{M_{\text{mh}}} = M_\nu^2. \quad (3.37)$$

Aus der Definition des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads nach Gleichung (3.12) ist ersichtlich, dass das spezifische Reibmoment dort im Nenner vorkommt

$$\eta_{\text{mh}} = \frac{1}{1 + 2\pi \frac{M_{\text{mh}}}{\Delta p V}} = \frac{1}{1 + 2\pi M_{\text{mh}}^+}. \quad (3.38)$$

Mit Gleichung (3.33) folgt daher $M_{\eta_{\text{mh}}} = 1$ und $\eta_{\text{mh},1} = \eta_{\text{mh},2}$. Das ist das zweite Ergebnis der Wirkungsgradmodellierung auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen. Mit dem Ergebnis der Dimensionsanalyse für das Reibmoment ist es nun möglich, die Wellenleistung von Pumpen zu skalieren. Der mechanisch-hydraulische Wirkungsgrad bleibt bei physikalischer Ähnlichkeit des Reibmomentverhaltens gleich.

Ausgehend von einer einzelnen Kennlinienmessung bei einer konstanten Drehzahl und einer konstanten Viskosität kann das Pumpenverhalten für eine weitere Drehzahl und Viskosität vorgesagt werden. Anders als bei der Leckage, liegt beim Reibmoment mit $M_n = M_\nu$ eine Bedingung zwischen Viskosität und Drehzahl vor, aufgrund derer M_n nicht frei gewählt werden kann. Für die

Skalierung des Reibmomentverhaltens anhand der Viskosität und Drehzahl ist daher die Vermessung eines Kennfelds bestehend aus mehreren Kennlinien unterschiedlicher Drehzahlen notwendig. Ferner liegt eine Einschränkung hinsichtlich des konstanten Reibmomentanteils vor, der für die dargelegte Betrachtung aus dem Reibmoment herausgerechnet werden muss. Abbildung 3.13 stellt die Skalierung des Reibmoments exemplarisch dar.

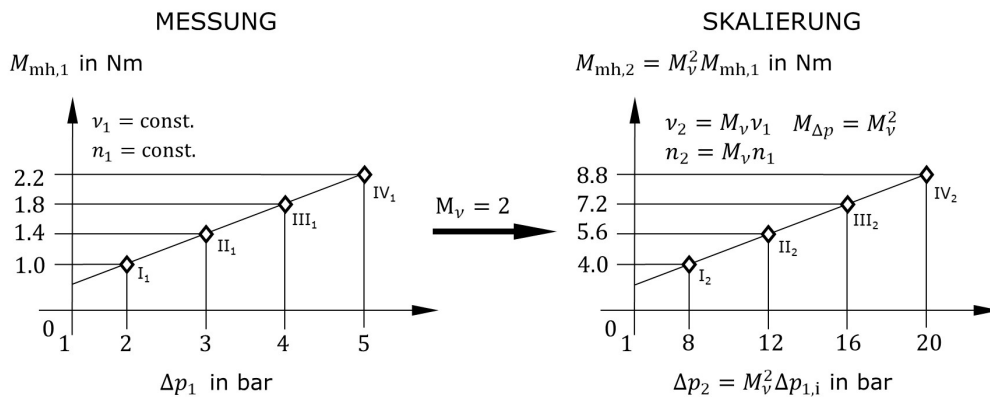


Abbildung 3.13 – Beispielhafte Anwendung der Maßstabsfaktoren zur Skalierung des Reibmoments mit $M_\nu = 2$.

Ferner gelten für die Skalierung des Reibmomentverhaltens dieselben Einschränkungen hinsichtlich Drehzahl- und Druckdifferenzvariation, die auch bei der Skalierung der Leckage vorliegen. Aus diesen Einschränkungen ergibt sich, wie bei der Leckage, die Motivation für die Entwicklung eines Reibmomentmodells, das den funktionalen Zusammenhang $M_{mh}^+(\Delta p^+, Re)$ mathematisch beschreibt und so eine Skalierung abhängig von der Viskosität und Drehzahl einer Pumpe über einen, im Vergleich zur Anwendung der Maßstabsfaktoren, weiteren Bereich erlaubt. Für die Skalierung des Reibmomentverhaltens anhand des Verdrängervolumens ist gemäß der Erkenntnis aus den Geometriebetrachtungen der Pumpen (vgl. Kap. 3.1) ebenfalls ein funktionaler Zusammenhang $M_{mh}^+(\Delta p^+, Re, \psi)$ für Schraubepumpen bzw. $M_{mh}^+(\Delta p^+, Re, \psi, \kappa_{aZP})$ für Zahnradpumpen notwendig. Das Reibmomentmodell wird im folgenden Kapitel hergeleitet.

3.4 Wirkungsgradmodell

Ein Wirkungsgradmodell für rotierende Verdrängerpumpen auf Basis einer funktionalen Beschreibung des Verlustverhaltens ist notwendig, um das Wirkungsgradverhalten anhand der Baugröße zu skalieren. Dies folgt aus der unvollständigen geometrischen Ähnlichkeit, die in Kapitel 3.1 dargestellt wird. Ferner ist die Anwendbarkeit der physikalischen Ähnlichkeit für eine einzelne Pumpe aufgrund ihrer Betriebsgrenzen beschränkt, weshalb auch ein Modell für die Skalierung des Pumpenverhaltens anhand der Viskosität notwendig ist.

Im Folgenden werden die Leckage und das Reibmoment wieder separat behandelt. Dabei werden die Pumpentypen im Rahmen der Skalierung anhand der Viskosität einheitlich behandelt während bei der Skalierung anhand des Verdrängervolumens die pumpenspezifischen Erkenntnisse aus den Geometriebetrachtungen berücksichtigt werden müssen (vgl. Kap. 3.1).

Entsprechend den Modellannahmen *M-I* bis *M-III* ist die mittlere Spalthöhe \bar{s} einer Pumpe unabhängig von Betriebsgrößen und im Fall der Schrauben- und Zahnradpumpen auch unabhängig vom Verdrängervolumen V . Die folgende Modellierung beinhaltet daher keine detaillierte Betrachtung der Geometrie sondern verfolgt einen semi-axiomatischen Modellansatz (vgl. Kap. 2.3.2).

3.4.1 Volumetrische Verluste

Die Untersuchung der physikalischen Ähnlichkeit des Leckageverhaltens der einzelner Pumpen hat als ein wesentliches Ergebnis hervorgebracht, dass das Leckageverhalten $Q_L^+ = Q_L^+(\Delta p^+)$ aller Pumpentypen näherungsweise anhand eines Potenzgesetzes dargestellt werden kann. Dieser einfache Zusammenhang soll im Folgenden für die Skalierung des Leckageverhaltens anhand der Viskosität und des Verdrängervolumens verwendet werden. Das Leckagemodell einer einzelnen Pumpe, das für alle drei Pumpentypen angewendet werden kann, lautet daher

$$Q_L^+ = L \Delta p^{+m} \quad (3.39)$$

mit den konstanten Modellparametern L und m . Diese Modellparameter müssen anhand von Messdaten bestimmt, d. h. kalibriert werden. Für den volumetrischen Wirkungsgrad ergibt sich gemäß Gleichung (3.16) folglich das Modell

$$\eta_{\text{vol}} = 1 - \frac{L}{Re} (\Delta p^+)^m. \quad (3.40)$$

Für die Skalierung des Leckageverhaltens anhand des Verdrängervolumens muss die pumpentypspezifische unvollständige geometrische Ähnlichkeit be-

rücksichtigt werden (vgl. Kap. 3.1). Zunächst wird hierfür die Schraubenpumpenbaureihe und im Anschluss die Zahnradpumpenbaureihe betrachtet.

Schraubenpumpen

Für die betrachteten Schraubenpumpen ist der Zusammenhang zwischen relativen Spalt ψ und Verdrängervolumen V gemäß Abbildung 3.2 von Relevanz. Zunächst wird jedoch eine allgemeine Modellannahme zur Berücksichtigung des relativen Spalts ψ im Leckagemodell nach Gleichung (3.39) getroffen:

M-VI Der spezifische Förderdruck Δp^+ und der relative Spalt ψ sind nicht unabhängig voneinander sondern treten gemeinsam im Produkt $\Delta p^+ \psi^3$ auf, sodass

$$Q_L^+ = L(\Delta p^+ \psi^3)^m \quad (3.41)$$

gilt.

Dies ist analog zum Einfluss des relativen Spalts ψ auf die Tragfähigkeit eines Gleitlagers, die mit der Sommerfeldzahl So beschrieben wird. Hier tauchen die spezifische Traglast und das Quadrat des relativen Lagerspalts nur als Produkt, aber nicht unabhängig voneinander auf. Die dritte Potenz des relativen Spalts ψ wird dabei den Grenzfällen einer rein laminaren und einer rein turbulenten Kanalströmung gerecht²⁵. Für den laminaren Fall ist $m = 1$ und für den turbulenten Fall ist $m = 0.5$. Entspricht das Strömungsregime nicht diesen Grenzfällen ist $0.5 < m < 1$.

Für Schraubenpumpen liegt die unvollständige geometrische Ähnlichkeit darin begründet, dass die mittlere Spalthöhe \bar{s} gemäß Modellannahme *M-II* konstant und unabhängig von der Baugröße ist und daher nicht mit der charakteristischen Länge $V^{1/3}$ skaliert. Der Zusammenhang aus Abbildung 3.2 für Schraubenpumpen kann nun einfach auf den relativen Spalt übertragen werden. Mit $\bar{s} = \text{const.}$ folgt

$$\psi \propto \frac{1}{V^{1/3}}. \quad (3.42)$$

Pelz u. a.²⁶ führen für einen pumpentypübergreifenden Vergleich die Spaltklasse ψ/ψ_{ref} ein, die auch an dieser Stelle sinnvoll angewendet werden kann. Zunächst wird eine Referenzpumpe mit V_{ref} und ψ_{ref} festgelegt. Der relative

²⁵Eine ausführliche Betrachtung der Grenzfälle einer laminaren und turbulenten Strömung findet sich in Anhang B.

²⁶PELZ, SCHÄNZLE UND CORNELI, „Ähnlichkeitsbeziehungen bei Verdrängermaschinen – eine einheitliche Wirkungsgradmodellierung“, ([57], 2016)

Referenzspalt wird für diese Pumpe als $\psi_{\text{ref}} := 1$ definiert²⁷. Die weiteren Pumpen der Baureihe werden zu dieser Pumpe ins Verhältnis gesetzt und lassen sich über die Spaltklasse mit

$$\frac{\psi}{\psi_{\text{ref}}} = \left(\frac{V_{\text{ref}}}{V} \right)^{1/3} = M_V^{-1/3} \quad (3.43)$$

beschreiben. Auf Grundlage dieser relativen Betrachtung mit dem Ergebnis aus Gleichung (3.43) und der Annahme $M_{\Delta p^+} = 1$ ergibt sich für das Leckagemodell der betrachteten Schraubenpumpenbaureihe

$$\begin{aligned} M_{Q_L^+} &= \left(\frac{\psi}{\psi_{\text{ref}}} \right)^{3m_{\text{ref}}} = M_V^{-m_{\text{ref}}}, \\ Q_L^+ &= L_{\text{ref}} \left(\frac{\Delta p^+}{M_V} \right)^{m_{\text{ref}}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

mit den Modellparametern L_{ref} und m_{ref} der Referenzpumpe. An dieser Stelle wird angenommen, dass der Modellparameter m für alle Pumpen einer Baureihe konstant ist. Die Ergebnisse aus Kapitel 3.3 zeigen, dass diese Annahme näherungsweise gültig und damit gerechtfertigt ist. Da $\psi_{\text{ref}} := 1$ ist, wird ψ_{ref} in Gleichung (3.44) nicht mehr aufgeführt. Für den volumetrischen Wirkungsgrad folgt dann

$$\eta_{\text{vol}} = 1 - \frac{L_{\text{ref}}}{Re} \left(\frac{\Delta p^+}{M_V} \right)^{m_{\text{ref}}}. \quad (3.45)$$

Mit den Gleichungen (3.44) und (3.45) liegen nun ein Leckagemodell und ein Modell für den volumetrischen Wirkungsgrad vor, die eine Schraubenpumpenbaureihe unter den gegebenen Modellannahmen und Geometriebetrachtungen beschreiben.

Zahnradpumpen

Für die Zahnradpumpenbaureihe werden die theoretischen Überlegungen der Modellannahme *M-VI* übernommen. Der wesentliche Unterschied zu der Schraubenpumpenbaureihe liegt darin, dass die unvollständige geometrische Ähnlichkeit nicht nur im Zusammenhang mit dem mittleren Spalt \bar{s} , sondern auch hinsichtlich der Zahnradbreite b_{zP} und dem Zahnradradius d_{zP}

²⁷Die mittlere Spalthöhe \bar{s} kann nicht geometrisch berechnet werden. Da sie als konstant angenommen wird, kann ihr ein beliebiger Wert zugeordnet werden, der sich dann lediglich in dem Wert des Modellparameters L widerspiegelt.

besteht. Kein Verhältnis dieser Längenmaße mit der charakteristischen Länge $V^{1/3}$ ist innerhalb der betrachteten Zahnradpumpenbaureihe konstant. Zusammengefasst basieren die geometrischen Zusammenhänge auf den Modellannahmen *M-I* und *M-II* sowie Gleichung (3.10) und ergeben wie folgt

$$\begin{aligned}
 \bar{s} &:= \text{const.}, \\
 d_{\text{ZP}} &= \text{const.}, \\
 V &\propto d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}}, \\
 \psi &:= \frac{\bar{s}}{V^{1/3}}, \\
 \kappa_{d_{\text{ZP}}} &:= \frac{d_{\text{ZP}}}{V^{1/3}} = \left(\frac{d_{\text{ZP}}}{b_{\text{ZP}}} \right)^{1/3}.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Wie bereits bei der Dimensionsanalyse dargelegt (vgl. Kap. 3.2), werden für die Zahnradpumpenbaureihe $V^{1/3}$, d_{ZP} und \bar{s} als charakteristische Längenmaße festgelegt. Neben den aus der Dimensionsanalyse bekannten Längenverhältnissen ψ und $\kappa_{d_{\text{ZP}}}$ ergibt sich mit dem zahnradspezifischen relativen Spalt $\psi_{\text{ZP}} := \bar{s}/d_{\text{ZP}}$ ein weiteres Längenverhältnis, dass für die Skalierung des Verlustverhaltens anhand des Verdrängervolumens vorteilhaft ist. Für den zahnradspezifischen relativen Spalt gilt innerhalb der Baureihe

$$\psi_{\text{ZP}} := \frac{\bar{s}}{d_{\text{ZP}}} = \frac{\psi}{\kappa_{d_{\text{ZP}}}} = \text{const.} \tag{3.47}$$

Die wesentliche Änderung der Zahnradpumpengeometrie innerhalb der Baureihe besteht daher lediglich in der Änderung der Zahnradbreite b_{ZP} und folglich für $\kappa_{d_{\text{ZP}}}$.

Der funktionale Zusammenhang aus Modellannahme *M-VI* mit Gleichung (3.41) wird für Zahnradpumpen wie folgt angepasst

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{L}}^+ \kappa_{d_{\text{ZP}}}^2 &= L \left[\Delta p^+ \kappa_{d_{\text{ZP}}}^2 \left(\frac{\psi}{\kappa_{d_{\text{ZP}}}} \right)^3 \right]^{m_{\text{ref}}}, \\
 \frac{Q_{\text{L}}}{\nu b_{\text{ZP}}} &= L \left[\frac{\Delta p d_{\text{ZP}}^2}{\nu^2 \rho} \left(\frac{\bar{s}}{d_{\text{ZP}}} \right)^3 \right]^{m_{\text{ref}}}.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Gleichung (3.48) entspricht damit, analog zur Schraubenpumpenbaureihe, den Grenzfällen einer laminaren und turbulenten Kanalströmung, bei der die Breite variiert. Der Ansatz einer relativen Betrachtung, wie mit der Spaltklasse bereits bei der Schraubenpumpenbaureihe angewendet, ist auf dieser

Grundlage auch für Zahnradpumpen nützlich. Dafür wird eine Referenzpumpe mit entsprechenden Referenzverdrängervolumen V_{ref} festgelegt. Die relative Betrachtung auf Basis von Gleichung (3.48) und die Annahme $M_{\Delta p^+} = 1$ führen dann zu dem Leckagemodell der betrachteten Zahnradpumpenbaureihe

$$\begin{aligned} M_{Q_L^+} M_V^{-2/3} &= M_V^{-2m_{\text{ref}}/3}, \\ Q_L^+ &= M_V^{2/3(1-m_{\text{ref}})} L_{\text{ref}} (\Delta p^+)^{m_{\text{ref}}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

mit den Modellparametern L_{ref} und m_{ref} der Referenzpumpe sowie $M_V = V/V_{\text{ref}}$. Gleichzeitig gilt $M_V = M_{\text{bZP}}$. In Gleichung (3.49) wird dabei vorausgesetzt, dass die Maßstabsfaktoren der unabhängigen Einflussgrößen der Leckage zu 1 gesetzt sind. Analog zu Schraubenpumpen wird hierbei vorausgesetzt, dass der Modellparameter m für alle Pumpen einer Baureihe konstant ist. Die Ergebnisse der Zahnradpumpen aus Kapitel 3.3 zeigen, dass diese Annahme näherungsweise gültig ist. Für den volumetrischen Wirkungsgrad folgt damit

$$\eta_{\text{vol}} = 1 - M_V^{2/3(1-m_{\text{ref}})} \frac{L_{\text{ref}}}{Re} (\Delta p^+)^{m_{\text{ref}}}. \quad (3.50)$$

Mit den Gleichungen (3.49) und (3.50) liegen nun ein Leckagemodell und ein Modell für den volumetrischen Wirkungsgrad vor, die eine Zahnradpumpenbaureihe unter den gegebenen Modellannahmen und Geometriebetrachtungen beschreiben.

3.4.2 Mechanisch-hydraulische Verluste

Die Modellierung des Reibmoments basiert auf der Hypothese, dass sich die verschiedenen mechanischen und hydraulischen Verlustmechanismen nicht gegenseitig beeinflussen. Diese Hypothese ist als Froudsche Hypothese bekannt, benannt nach William Froude, dem Begründer der Modelltheorie im Schiffsbau²⁸. Auf dieser Hypothese basieren auch die bestehenden semi-axiomatischen Modelle (vgl. Kap. 2.3.2).

Die Untersuchungen der physikalischen Ähnlichkeit des Reibmomentverhaltens der einzelnen Pumpen hat als ein wesentliches Ergebnis hervorgebracht, dass für das spezifische Reibmoment aller Pumpentypen die gleichen funktionalen Zusammenhänge mit dem spezifischen Druck und der Reynolds-Zahl bestehen. Daher werden die folgende Betrachtungen zunächst allgemein angestellt. Für die Skalierung des Verlustverhaltens anhand des Verdrängervolumens sind dagegen wieder die pumpentypspezifischen Geometriebetrachtungen zu berücksichtigen.

²⁸NEWMAN, *Marine Hydrodynamics*, ([50], 1977)

Trotz der Erkenntnisse aus den dimensionslosen Darstellungen des Reibmoments (vgl. Abb. 3.7 bis 3.12) lassen sich daraus, im Gegensatz zur Leckage, keine einfachen funktionalen Zusammenhänge ableiten. Aus diesem Grund wird der semi-axiomatische Modellansatz von Hilbrands und Schlösser²⁹ für die Modellierung des Reibmoments verwendet. Das Reibmoment besteht in diesem Fall aus einer Linearkombination aus dem betriebsgrößenunabhängigen Reibmoment M_{const} , dem druckabhängigen Reibmoment M_C , dem viskositätsabhängigen Reibmoment M_μ und dem trägheitsdominierten Reibmoment M_e . Dabei basiert M_C auf Coulomb'schen Reibverlusten, wie sie bspw. in Wälzlagern oder dem Zahneingriff bei Zahnradpumpen³⁰ entstehen, M_μ auf der viskosen Reibung in engen Spalten zwischen Rotoren und Gehäuse und M_e auf den trägheitsabhängigen Druckverlusten des Förderstroms, bspw. durch Querschnittsänderungen (Carnotverluste).

Ein weiterer Verlustmechanismus, der bei Betrachtung des dimensionslosen Reibmoments bei Zahnradpumpen erkennbar ist, besteht in den Mischreibungsverlusten. Diese Verluste spielen jedoch nur bei Zahnradpumpen eine Rolle und werden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Ferner werden Betriebsbereiche rotierender Verdrängerpumpen durch Hersteller üblicherweise so vorgegeben, dass Mischreibungsverluste nicht auftreten. Eine Übersicht über die genannten Verlustgrößen und deren Abhängigkeiten ist in Kapitel 2.3.2 in Abbildung 2.7 dargestellt. Die einzelnen Verlustanteile berechnen sich demnach zu

$$\begin{aligned} M_{\text{const}} &= \text{const.}, \\ M_C &= R_C \Delta p V, \\ M_\mu &= R_\mu \frac{\nu \varrho n V}{\psi}, \\ M_e &= R_e \varrho n^2 V^{5/3}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

Hierbei sind die Modellparameter R_C , R_μ und R_e konstante dimensionslose Modellparameter, die anhand von Messdaten kalibriert werden müssen. Alle Modellparameter müssen zudem größer als null sein, um eine physikalische Bedeutung zu haben.

²⁹SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Der volumetrische Wirkungsgrad von Verdrängerpumpen“, ([74], 1963)

³⁰Für die Beschreibung der Verluste im Zahneingriff bei Zahnradpumpen verweisen ZARDIN u. A. ([102], 2019) auf ISO/TR 14179-1:2001 ([33], 2001).

Auf dieser Grundlage wird die nächste Modellannahme für das Reibmomentverhalten der betrachteten rotierenden Verdrängerpumpen getroffen:

M-VII Die Modellparameter R_C , R_μ und R_e werden als konstant angenommen.

Das allgemeine Reibmomentmodell lautet folglich

$$\begin{aligned} M_{\text{mh}} &= M_{\text{const}} + M_C + M_\mu + M_e, \\ M_{\text{mh}} &= M_{\text{const}} + R_C \Delta p V + R_\mu \frac{\nu \varrho n V}{\psi} + R_e \varrho n^2 V^{5/3}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

In Gleichung (3.52) sind alle aus der Literatur bekannten und wesentlichen Verlustmechanismen berücksichtigt. Dabei besteht die Möglichkeit, dass bei gewissen Pumpentypen einzelne Verlustmechanismen vernachlässigbar klein sind. In diesem Zusammenhang zeigt Hall³¹ in seiner statistischen Analyse von Leckagemodellen für Verdrängerpumpen, dass es durch die Berücksichtigung von vernachlässigbar kleinen Verlusttermen zu einer Überanpassung von Modellen kommen kann. Die Modellparameter und Verlustterme werden gegebenenfalls negativ und verlieren ihre physikalische Bedeutung. Im Rahmen der Modellvalidierung werden die einzelnen Verlustterme bei allen Pumpentypen auf Basis einer graphischen Auswertung der Messdaten bewertet und auf diese Weise vernachlässigbare Verlustterme identifiziert und gegebenenfalls bei der Skalierung des Verlustverhaltens der Pumpen nicht berücksichtigt.

Durch die Entdimensionierung der dimensionsbehafteten Darstellung des Reibmomentmodells in Gleichung (3.52) mit $\Delta p V$ erhält man für die einzelnen Verlustanteile des Reibmoments jeweils eine dimensionslose Darstellung mit

$$\begin{aligned} M_{\text{const}}^+ &= \frac{M_{\text{const}}}{\Delta p V}, \\ M_C^+ &= R_C, \\ M_\mu^+ &= R_\mu \frac{\nu \varrho n}{\Delta p \psi} = R_\mu \frac{Re}{\Delta p^+ \psi}, \\ M_e^+ &= R_e \frac{\varrho n^2 V^{2/3}}{\Delta p} = R_e \frac{Re^2}{\Delta p^+}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Der gesuchte funktionale Zusammenhang des spezifischen Reibmoment M_{mh}^+ ergibt sich damit zu

$$M_{\text{mh}}^+ = M_{\text{const}}^+ + R_C + R_\mu \frac{Re}{\Delta p^+ \psi} + R_e \frac{Re^2}{\Delta p^+}. \quad (3.54)$$

³¹HALL, „Statistical analysis of multiple hydrostatic pump flow loss models“, ([22], 2014)

Werden vor diesem Hintergrund die Abbildungen 3.7 bis 3.12 erneut betrachtet, wird der Zusammenhang aus Gleichung (3.54) ersichtlich. Für den mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad ergibt sich das Modell

$$\eta_{\text{mh}} = \frac{1}{1 + 2\pi M_{\text{mh}}^+},$$

$$\eta_{\text{mh}} = \frac{1}{1 + 2\pi \left(M_{\text{const}}^+ + R_{\text{C}} + R_{\mu} \frac{Re}{\Delta p^+ \psi} + R_e \frac{Re^2}{\Delta p^+} \right)}. \quad (3.55)$$

Da für eine einzelne Pumpe der relative Spalt $\psi = \text{const.}$ ist, kann er in diesem Fall zu 1 gesetzt werden. Mit den Modellen des volumetrischen und mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad aus den Gleichungen (3.40) und (3.55) kann nun ein Modell für den Gesamtwirkungsgrad einer Pumpe aufgestellt werden:

$$\eta = \eta_{\text{vol}} \eta_{\text{mh}},$$

$$\eta = \frac{1 - \frac{L}{Re} (\Delta p^+)^m}{1 + 2\pi \left(M_{\text{const}}^+ + R_{\text{C}} + R_{\mu} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_e \frac{Re^2}{\Delta p^+} \right)}. \quad (3.56)$$

Für die Skalierung des Reibmoments und des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads anhand des Verdrängervolumens muss, analog zur Leckage, wieder die pumpentypspezifische unvollständige geometrische Ähnlichkeit berücksichtigt werden (vgl. Kap. 3.1). Zunächst erfolgt dies bezüglich der Schraubenspumpenbaureihe und anschließend bezüglich der Zahnradpumpenbaureihe.

Schraubenspumpen

Für die betrachteten Schraubenspumpen ist, analog zur Leckage, der Zusammenhang zwischen relativem Spalt ψ und Verdrängervolumen V gemäß Abbildung 3.2 entscheidend. Für die Skalierung des Reibmoments in Abhängigkeit des Verdrängervolumens werden daher die theoretischen Überlegungen der Leckage übernommen und der Zusammenhang zwischen Spaltklasse und Maßstabsfaktor des Verdrängervolumens nach Gleichung (3.43) mit $\psi/\psi_{\text{ref}} = M_{\text{V}}^{-1/3}$ verwendet.

Ferner muss eine Annahme bezüglich der Höhe des konstanten Reibmomentanteils bei Schraubenspumpen getroffen werden. Dieser Anteil ist aus den Messdaten ersichtlich, kann jedoch nicht eindeutig einem bestimmten Bauteil einer Schraubpumpe zugeordnet werden. Möglicherweise wird er durch das Wälzlager der Antriebsspindel hervorgerufen, das bei den betrachteten

Schraubenpumpen nahezu lastfrei ist. Für den konstanten Reibmomentanteil wird daher die Annahme $M_{\text{const}} \propto V^{1/3}$ getroffen.

Für die Skalierung des Reibmoments anhand des Verdrängervolumens wird zunächst wieder eine Referenzpumpe mit V_{ref} und $\psi_{\text{ref}} := 1$ festgelegt. Analog zur Leckage wird auf dieser Grundlage wieder eine relative Betrachtung der einzelnen Verlustanteile des Reibmoments wie folgt durchgeführt:

$$\begin{aligned} M_{M_{\text{const}}}^+ &= M_V^{-2/3}, \\ M_{M_C}^+ &= 1, \\ M_{M_\mu}^+ &= \left(\frac{\psi}{\psi_{\text{ref}}} \right)^{-1} = M_V^{1/3}, \\ M_{M_\rho}^+ &= 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Das Reibmomentmodell der Schraubenpumpenbaureihe ergibt sich damit zu

$$M_{\text{mh}}^+ = M_{\text{const}}^+ M_V^{-2/3} + R_{C,\text{ref}} + M_V^{1/3} R_{\mu,\text{ref}} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_{\rho,\text{ref}} \frac{Re^2}{\Delta p^+}. \quad (3.58)$$

mit den Modellparametern $R_{C,\text{ref}}$, $R_{\mu,\text{ref}}$ und $R_{\rho,\text{ref}}$ sowie dem konstanten Reibmomentanteil M_{const} der Referenzpumpe. Da $\psi_{\text{ref}} := 1$ ist, wird ψ_{ref} in Gleichung (3.58) nicht mehr aufgeführt. Für den mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad folgt dann

$$\eta_{\text{mh}} = \frac{1}{1 + 2\pi \left(M_{\text{const}}^+ M_V^{-2/3} + R_{C,\text{ref}} + M_V^{1/3} R_{\mu,\text{ref}} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_{\rho,\text{ref}} \frac{Re^2}{\Delta p^+} \right)}. \quad (3.59)$$

Unter Berücksichtigung des Modells für den volumetrischen Wirkungsgrad für Schraubenpumpen nach Gleichung (3.45) ergibt sich dann für den Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \frac{1 - \frac{L_{\text{ref}}}{Re} \left(\frac{\Delta p^+}{M_V} \right)^{m_{\text{ref}}}}{1 + 2\pi \left(M_{\text{const}}^+ M_V^{-2/3} + R_{C,\text{ref}} + M_V^{1/3} R_{\mu,\text{ref}} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_{\rho,\text{ref}} \frac{Re^2}{\Delta p^+} \right)}. \quad (3.60)$$

Mit den Gleichungen (3.58), (3.59) und (3.60) liegen nun ein Reibmomentmodell, ein Modell den für mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad und ein Gesamtwirkungsgradmodell vor, die eine Schraubenpumpenbaureihe unter den gegebenen Modellannahmen und Geometriebetrachtungen beschreiben.

Zahnradpumpen

Für die Berücksichtigung der unvollständigen geometrischen Ähnlichkeit bei den betrachteten Zahnradpumpen werden die einzelnen Verlustanteile des Reibmoments gemäß Gleichung (3.51) in Abhängigkeit des Zahnraddurchmessers d_{ZP} , der Zahnradbreite b_{ZP} und $\kappa_{d_{\text{ZP}}} := d_{\text{ZP}}/V^{1/3}$ wie folgt dargestellt

$$\begin{aligned}
 M_{\text{const}} &= \text{const.}, \\
 M_{\text{C}} &= R_{\text{C}} \Delta p d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}}, \\
 M_{\mu} &= R_{\mu} \frac{\nu \varrho n d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}}}{\psi_{\text{ZP}}} = R_{\mu} \nu \varrho n d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}} \frac{\kappa_{d_{\text{ZP}}}}{\psi}, \\
 M_{\varrho} &= R_{\varrho} \varrho n^2 d_{\text{ZP}}^4 b_{\text{ZP}}.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Die beiden zwei wesentlichen Unterschiede zur bisherigen allgemeinen Darstellung liegen in der Berücksichtigung des zahnradspezifischen relativen Spalts ψ_{ZP} im viskositätsabhängigen Reibmomentanteil M_{μ} sowie die Anpassung der geometrischen Größen von $V^{5/3}$ zu $d_{\text{ZP}}^4 b_{\text{ZP}}$ im trägheitsabhängigen Reibmomentanteil M_{ϱ} . Die Verwendung von $\psi_{d_{\text{ZP}}} := \bar{s}/d_{\text{ZP}}$ ergibt sich aus der Analogie zu Gleitlagern. Für die betrachtete Zahnradpumpenbaureihe gilt $\psi_{d_{\text{ZP}}} = \text{const.}$ Der trägheitsabhängige Reibmomentverlust ergibt sich aus den trägheitsabhängigen Druckverlusten des Förderstroms Δp_{ϱ} für die der Zusammenhang

$$\Delta p_{\varrho} \propto \varrho u_{\text{ref}}^2 \tag{3.62}$$

mit der Referenzgeschwindigkeit u_{ref} des Förderstroms gilt. Für die Referenzgeschwindigkeit gilt wiederum der näherungsweise der Zusammenhang

$$u_{\text{ref}} \propto \frac{nV}{A_{\text{ref}}} \tag{3.63}$$

mit der Referenzfläche $A_{\text{ref}} \propto d_{\text{ZP}} b_{\text{ZP}}$. Damit ergibt sich für die Referenzgeschwindigkeit $u_{\text{ref}} \propto n d_{\text{ZP}}$ und somit die entsprechende Darstellung des trägheitsabhängigen Reibmomentanteils gemäß Gleichung (3.61). Durch die Entdimensionierung mit $d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}}$ ergeben sich die dimensionslosen Verlustanteile

entsprechend zu

$$\begin{aligned}
M_{\text{const}}^+ &= \frac{M_{\text{const}}}{\Delta p d_{\text{ZP}}^2 b_{\text{ZP}}}, \\
M_{\text{C}}^+ &= R_{\text{C}}, \\
M_{\mu}^+ &= R_{\mu} \frac{Re}{\Delta p^+ \psi_{d_{\text{ZP}}}} = R_{\mu} \frac{Re \kappa_{d_{\text{ZP}}}}{\Delta p^+ \psi}, \\
M_{\rho}^+ &= R_{\rho} \frac{\rho n^2 d_{\text{ZP}}^{2/3}}{\Delta p} = R_{\rho} \kappa_{d_{\text{ZP}}}^2 \frac{Re^2}{\Delta p^+}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Auch bei den Zahnradpumpen ist ein konstanter Reibmomentanteil aus den Messdaten ersichtlich, der nicht eindeutig einem bestimmten Bauteil zugeordnet werden kann. Aufgrund des konstanten Zahnrad- und Antriebswellendurchmessers wird für den konstanten Reibmomentanteil angenommen, dass er unabhängig vom Verdrängervolumen und damit für die gesamte Baureihe identisch ist.

Für die Skalierung des Reibmoments anhand des Verdrängervolumens wird, analog zu den Schraubepumpen, zunächst wieder eine Referenzpumpe V_{ref} festgelegt und auf dieser Grundlage eine relative Betrachtung der einzelnen Verlustanteile des Reibmoments durchgeführt. Die relative Betrachtung unter Voraussetzung, dass die Maßstabsfaktoren der unabhängigen Einflussgrößen auf die Verluste zu 1 gesetzt sind, ergibt

$$\begin{aligned}
M_{M_{\text{const}}^+} &= M_{\text{V}}^{-1}, \\
M_{M_{\text{C}}^+} &= 1, \\
M_{M_{\mu}^+} &= 1, \\
M_{M_{\rho}^+} &= M_{\text{V}}^{-2/3}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Das Reibmomentmodell der Zahnradpumpenbaureihe ergibt sich damit zu

$$M_{\text{mh}}^+ = M_{\text{const}}^+ M_{\text{V}}^{-1} + R_{\text{C,ref}} + R_{\mu,\text{ref}} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_{\rho,\text{ref}} M_{\text{V}}^{-2/3} \frac{Re^2}{\Delta p^+}. \tag{3.66}$$

mit den Modellparametern $R_{\text{C,ref}}$, $R_{\mu,\text{ref}}$ und $R_{\rho,\text{ref}}$ sowie dem konstanten Reibmomentanteil M_{const}^+ der Referenzpumpe. Da der zahnradspezifische relative Spalt $\psi_{d_{\text{ZP}}} = \text{const.}$ ist, wird er in Gleichung (3.66) nicht mehr aufgeführt. Für den mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad folgt dann

$$\eta_{\text{mh}} = \frac{1}{1 + 2\pi \left(M_{\text{const}}^+ M_{\text{V}}^{-1} + R_{\text{C,ref}} + R_{\mu,\text{ref}} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_{\rho,\text{ref}} M_{\text{V}}^{-2/3} \frac{Re^2}{\Delta p^+} \right)}. \tag{3.67}$$

Unter Berücksichtigung des Modells für den volumetrischen Wirkungsgrad für Zahnradpumpen nach Gleichung (3.50) ergibt sich dann für den Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \frac{1 - M_V^{2/3(1-m_{\text{ref}})} \frac{L_{\text{ref}}}{Re} (\Delta p^+)^{m_{\text{ref}}}}{1 + 2\pi \left(M_{\text{const}}^+ M_V^{-1} + R_{C,\text{ref}} + R_{\mu,\text{ref}} \frac{Re}{\Delta p^+} + R_{e,\text{ref}} M_V^{-2/3} \frac{Re^2}{\Delta p^+} \right)}. \quad (3.68)$$

Mit den Gleichungen (3.66), (3.67) und (3.68) liegen nun ein Reibmomentmodell, ein Modell den für mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad und ein Gesamtwirkungsgradmodell vor, die eine Zahnradpumpe unter den gegebenen Modellannahmen und Geometriebetrachtung beschreiben.

3.5 Quantifizierung der Modellunsicherheit

Die in Kapitel 3.4 hergeleiteten Modelle stellen einen mathematischen Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen, das sind die Betriebsgrößen Druckdifferenz Δp und Drehzahl n , die Fördermediumseigenschaften kinematische Viskosität ν und Dichte ρ sowie das Verdrängervolumen V mit dem Maßstabsfaktor M_V , und den gewünschten Ausgangsgrößen, nämlich den Teilwirkungsgraden η_{vol} und η_{mh} und dem Gesamtwirkungsgrad η , her. Diese Modelle sind bisher deterministisch, d. h. die Ergebnisse der Modelle sind Funktionswerte in Abhängigkeit der Eingangsgrößen, über deren Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit deren Unsicherheit keine Kenntnis vorliegt. Ohne die Kenntnis dieser Unsicherheit ist eine Modellvorhersage jedoch unvollständig. Die Angabe der Unsicherheit der Modellvorhersage in Form eines 95% Konfidenzintervalls ist daher im Sinne einer transparenten Ergebnisdarstellung zwingend notwendig. Die im Rahmen dieser Arbeit hergeleiteten Modelle weisen zwei Quellen der Unsicherheit auf:

- (i) Die Modellunsicherheit aufgrund der getroffenen Modellannahmen *M-I* bis *M-VII*, die für das Aufstellen der mathematischen Zusammenhänge der Verlustmodelle notwendig sind.
- (ii) Die Datenunsicherheit in Form der Messunsicherheit derjenigen Messdaten, die für die Kalibration der Modellparameter verwendet werden.

Die Quantifizierung der Datenunsicherheit wird ausführlich in Kapitel 4.3 behandelt. Der Fokus dieses Kapitels liegt daher auf der Quantifizierung der Modellunsicherheit, in der die Datenunsicherheit mit berücksichtigt wird. Im ersten Schritt werden nochmals alle Modellannahmen dargestellt, aus denen

die Modellunsicherheit resultiert. Im zweiten Schritt wird das methodische Vorgehen zur Quantifizierung der Modellunsicherheit vorgestellt.

Modellunsicherheit

Zunächst wird die Modellunsicherheit im Kontext der Bedeutung, die Modellen als Abbild der Wirklichkeit zukommt, diskutiert. Hierfür werden die Ausführungen von Pelz u. a.³² aufgegriffen. Das Eulerdiagramm³³ in Abbildung 3.14 stellt den Zusammenhang zwischen Modell und Wirklichkeit anschaulich dar. Danach haben Modelle die Aufgabe, die relevante Wirklichkeit abzubilden. Üblicherweise wird dabei angestrebt, diese relevante Wirklichkeit möglichst genau abzubilden, wobei eine vollständige Abbildung grundsätzlich nicht erreicht werden kann. Werden Bereiche der relevanten Wirklichkeit wissentlich oder unwissentlich ignoriert, liegt für diese Bereiche sogenanntes Unwissen vor. Die Grenze zwischen Modell und der nicht abgebildeten relevanten Wirklichkeit wird dementsprechend als Modellhorizont bezeichnet. Die Daten sind Teil des Modells und können entweder Eingangsgrößen darstellen, bspw. Geometriedaten oder Betriebsdaten für Randbedingungen in axiomatischen Modellen, oder aber zur Bestimmung von Modellparametern dienen, wie dies bei den vorliegenden semi-axiomatischen Modellen der Fall ist.

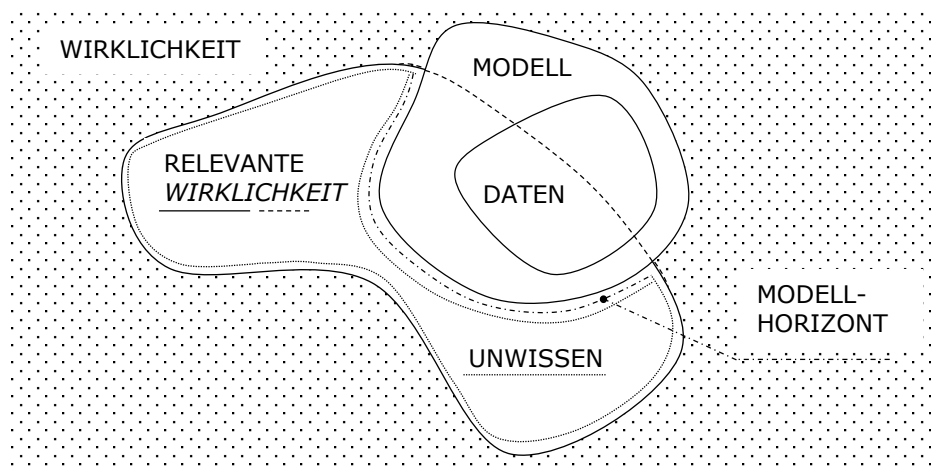


Abbildung 3.14 – Eulerdiagramm zur Darstellung des Zusammenhangs zwischen Modell und Wirklichkeit.

³²PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([54], 2021, Kap. 1 und 2)

³³PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([54], 2021, Kap. 1, Abb. 1.5)

Wird nun das Eulerdiagramm auf die Wirkungsgradmodellierung in dieser Arbeit angewendet, sind die getroffenen Modellannahmen von besonderer Bedeutung, da sie im Wesentlichen den Modellhorizont festlegen. Aus diesem Grund sind die getroffenen Modellannahmen im Folgenden nochmals zusammengestellt:

- M-I* Die Summe aller Spalteinflüsse einer Pumpe kann repräsentativ durch einen einzigen Spalt mit der mittleren Spalthöhe \bar{s} abgebildet werden.
- M-II* Die mittlere Spalthöhe \bar{s} einer Pumpe ist für die betrachteten Zahnradpumpenbaureihe und Schraubenpumpenbaureihe im lastfreien Zustand unabhängig von der Baugröße bzw. dem Verdrängervolumen V .
- M-III* Das Fördermedium verhält sich näherungsweise inkompressibel und die mittlere Spalthöhe \bar{s} einer Pumpe ist unabhängig von Betriebsgrößen und daher für eine einzelne Pumpe als auch für die betrachteten Baureihen konstant.
- M-IV* Die Leckage basiert auf einer rein druckgetriebenen Strömung, die weder rein laminar noch rein turbulent ist. Ferner wird für die Leckage näherungsweise eine isotherme Strömung angenommen, sodass die Temperatur als Einflussgröße nicht betrachtet wird.
- M-V* Das Reibmoment setzt sich aus Coulomb'schen Reibverlusten, viskoser Reibung und Trägheitsverlusten zusammen. Zudem können Mischreibungsverluste in gewissen Betriebsbereichen auftreten. Ferner wird auch für das Reibmoment näherungsweise ein isothermes Verhalten des Fördermediums in den Spalten angenommen.
- M-VI* Der spezifische Förderdruck Δp^+ und der relative Spalt ψ sind nicht unabhängig voneinander sondern treten gemeinsam im Produkt $\Delta p^+ \psi^3$ auf, sodass

$$Q_L^+ = L(\Delta p^+ \psi^3)^m \quad (3.69)$$

gilt.

- M-VII* Die Modellparameter R_C , R_μ und R_e werden als konstant angenommen.

Die Modellannahmen *M-I*, *M-III*, *M-IV* und *M-V* beziehen sich lediglich auf eine einzelne Pumpe und werden im Rahmen der Untersuchung der physikalischen Ähnlichkeit bestätigt (vgl. Kap. 3.3). Die Modellannahmen *M-II*, *M-VI* und *M-VII* werden im Rahmen der Modellvalidierung in Kapitel 5 auf ihre Gültigkeit untersucht.

Für die Modellanwendung und die Modellvalidierung sind Messdaten notwendig, die in diesem Zusammenhang zwei Aufgaben erfüllen. Zum einen dienen sie als Vergleichsdaten, mit deren Hilfe Abweichungen der Modellvorhersagen festgestellt und quantifiziert werden können. Diese Vergleichsdaten stellen mit ihrer Messunsicherheit die relevante Wirklichkeit unter (Mess-)Unsicherheit dar. Zum anderen dienen Messdaten zur Kalibration der Modellparameter und sind damit Teil des Modells (vgl. Abb. 3.14). Auch diese Daten sind mit Messunsicherheit behaftet, die für die Kalibration beachtet werden muss.

Zusammengefasst lässt sich damit feststellen, dass die Unsicherheit, mit der die Modellvorhersagen behaftet sind, ihre Ursache sowohl in der Modellunsicherheit als auch in der Datenunsicherheit haben. Die Unsicherheit in den Modellvorhersagen muss damit im Folgenden quantifiziert werden.

In Anbetracht der bisherigen Ausführungen lassen sich für das Wirkungsgradmodell folgende Aussagen treffen:

- (i) Das Wirkungsgradmodell liefert die beste Schätzung für die relevante Wirklichkeit, d. h. für die Verlustgrößen Leckage und Reibmoment sowie die Teilwirkungsgrade und den Gesamtwirkungsgrad bei vorgegebenen Betriebsbedingungen.
- (ii) Das Wirkungsgradmodell gibt den Vertrauensbereich für diese beste Schätzung in Form eines 95 % Konfidenzintervalls an.

Beide Aussagen sind für die Bewertung des Wirkungsgradmodells relevant. Im Folgenden Abschnitt wird nun das methodische Vorgehen zur Quantifizierung der Unsicherheit der Modellvorhersagen dargelegt.

Quantifizierung der Unsicherheit der Modellvorhersagen

Bei den folgenden mathematischen Betrachtungen handelt es sich überwiegend um Grundlagen der linearen Regression und Fehlerrechnung. Eingehende Abhandlungen zu diesen Themen finden sich bei Kamke³⁴ und Bailer-Jones³⁵, an deren Ausführungen sich dieses Kapitel orientiert.

Die Beschreibung der abhängigen Verlustgrößen Leckage Q_L und Reibmoment M_{mh} durch die unabhängigen Einflussgrößen Druckdifferenz Δp , Drehzahl n , kinematische Viskosität ν , Dichte ρ und Verdrängervolumen V erfolgt über funktionale Zusammenhänge, die sich aus der Modellierung ergeben.

³⁴KAMKE, *Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse, im Physikalischen Anfänger-Praktikum: Eine elementare Einführung*, ([38], 2014)

³⁵BAILER-JONES, *Practical Bayesian inference: A primer for physical scientists*, ([2], 2017)

Diese Modellierung beruht auf dem Impulssatz, einem Materialgesetz der Flüssigkeit, geometrischen Zusammenhängen und den Modellannahmen. Die unabhängigen Einflussgrößen werden durch die dimensionslosen Produkte spezifischer Druck Δp^+ , Reynolds-Zahl Re und Maßstabsfaktor des Verdrängervolumens M_V in den Modellen repräsentiert. Sie sind variabel und werden dementsprechend als Modellvariablen bezeichnet. Die Modellparameter L , M_{const} , R_C , R_μ und R_g sind dagegen konstant und ergeben sich durch den semi-axiomatischen Modellansatz. Dieser Modellansatz vernachlässigt Details der Pumpengeometrie, d. h. er verschmiert die Geometrie und fasst den Geometrieinfluss durch die vorgenannten Modellparameter zusammen. Der Modellparameter m ist Ausdruck des Strömungsregimes der Leckage, das neben der Viskosität und der in den Spalten aufgetreten Geschwindigkeiten ebenfalls von der Spaltgeometrie abhängt. Um die semi-aximotischen Modelle anwenden zu können ist es erforderlich, diese Modellparameter anhand von Messdaten, die im Folgenden als Kalibrationsdaten bezeichnet werden, zu bestimmen bzw. zu kalibrieren (vgl. Daten in Abb. 3.14).

Die folgenden Betrachtungen werden lediglich anhand der Leckage veranschaulicht. Die Darstellungen sind für das Reibmoment übertragbar, werden jedoch aufgrund der höheren Anzahl von Modellparametern wesentlich umfangreicher und daher an dieser Stelle nicht dargestellt.

Da die Modellparameter linear in den Modellen auftreten, wird für ihre Bestimmung die lineare Regression mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate angewendet. Das Leckagemodell wird für diesen Zweck in logarithmierter³⁶ Form dargestellt, sodass sich für eine einzelne Pumpe gemäß Gleichung (3.39)

$$\lg Q_L^+ = \hat{L} + m \lg \Delta p^+ \quad (3.70)$$

mit $\hat{L} = \lg L$ ergibt. Die logarithmierte Form kann entsprechend pumpenspezifisch für die Baugrößenskalierung erweitert werden.

Dafür werden die logarithmierten dimensionslosen Größen mit $\hat{Q}_L^+ := \lg Q_L^+$ und $\Delta \hat{p}^+ := \lg \Delta p^+$ bezeichnet. Für die Implementierung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wird die Software MATLAB verwendet. Für die Berechnungen der Unsicherheitsfortpflanzung wird die open-source Matlabbibliothek METAS UncLib von Zeier u.a.³⁷ verwendet.

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate basiert auf der Minimierung der Summe der Fehlerquadrate (die Quadrate der Residuen) zwischen Modell und Messdaten und hat dementsprechend die Zielfunktion Z mit

³⁶ \log_{10} wird als \lg bezeichnet.

³⁷ZEIER, HOFFMANN UND WOLLENSACK, „Metas.UncLib —a measurement uncertainty calculator for advanced problems“, ([104], 2012)

$$Z = \sum_{i=1}^N \left(\hat{Q}_{L,i}^+ - \hat{L} - m \Delta \hat{p}_i^+ \right)^2. \quad (3.71)$$

$\Delta \hat{p}_i^+$ und $\hat{Q}_{L,i}^+$ sind die Mittelwerte der dimensionslosen Messgrößen für N betrachtete Betriebspunkte und stellen die Kalibrationsdaten dar. Auf dieser Grundlage werden im nächsten Schritt die Modellparameter \hat{L} und m bestimmt, sodass die Zielfunktion minimal wird. Das Optimierungsproblem lässt sich als Ableitung der Zielfunktion in Gleichung (3.71) nach den Modellparametern \hat{L} und m formulieren, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial m} &= -2 \sum_{i=1}^N \Delta \hat{p}_i^+ \left(\hat{Q}_{L,i}^+ - \hat{L} - m \Delta \hat{p}_i^+ \right) \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial \hat{L}} &= -2 \sum_{i=1}^N \left(\hat{Q}_{L,i}^+ - \hat{L} - m \Delta \hat{p}_i^+ \right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

gilt. Gleichung (3.72) ist analytisch lösbar und die Modellparameter ergeben sich zu

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum_{i=1}^N \hat{Q}_{L,i}^+ \left(\Delta \hat{p}_i^+ - \overline{\Delta \hat{p}^+} \right)}{\sum_{i=1}^N \left(\Delta \hat{p}_i^+ - \overline{\Delta \hat{p}^+} \right)^2}, \\ \hat{L} &= \overline{\hat{Q}_L^+} - m \overline{\Delta \hat{p}^+} \end{aligned} \quad (3.73)$$

mit den Mittelwerten

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \hat{p}^+} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \hat{p}_i^+, \\ \overline{\hat{Q}_L^+} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{Q}_{L,i}^+ \end{aligned} \quad (3.74)$$

Die auf diese Weise bestimmten Modellparameter stellen die besten Schätzer dar und können nun für die deterministischen Vorhersagen des Leckagemodells verwendet werden. Ferner ist aus den Gleichungen (3.73) und (3.74) ersichtlich, dass für die Bestimmung der Unsicherheit der Modellparameter³⁸ $\sigma_{\hat{L}}$ und σ_m lediglich die Messunsicherheiten von $(\delta \Delta \hat{p}_i^+)$ und $(\delta \hat{Q}_{L,i}^+)$ berücksichtigt werden müssen und daher mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung berechnet werden können.

³⁸Die Unsicherheit der Modellparameter wird mit σ , die Unsicherheit von Messgrößen dagegen mit δ bezeichnet.

An dieser Stelle werden nun zwei Vereinfachungen getroffen, die für die weiteren Betrachtungen hilfreich sind, wobei im Rahmen dieser Arbeit lediglich Vereinfachung (i) umgesetzt wird³⁹:

- (i) Die Messunsicherheit ($\delta\Delta\hat{p}_i^+$) wird im Rahmen der Fehlerfortpflanzung vernachlässigt. Wie in Kapitel 4.3 dargelegt, ist die Messunsicherheit der abgeleiteten Verlustgrößen Leckage und Reibmoment im Vergleich zu den direkten Messgrößen bestimmend. Aus diesem Grund wird lediglich die Messunsicherheit der dimensionslosen Verlustgrößen, in diesem Fall der logarithmierten spezifischen Leckage ($\delta\hat{Q}_L^+$), berücksichtigt.
- (ii) Die Messunsicherheit ($\delta\hat{Q}_{L,i}^+$) wird als konstant angenommen und mit ($\delta\hat{Q}_L^+$) bezeichnet. Dies kann näherungsweise sowohl für die logarithmierte spezifische Leckage \hat{Q}_L^+ und die logarithmierte Messunsicherheit ($\delta\hat{Q}_L^+$) als auch für das Reibmoment M_{mh} (vgl. Kap.4.3) angenommen werden. Ferner kann das Reibmoment in dimensionsbehafteter Form nach Gleichung (3.52) oder in dimensionsloser Form gemäß Gleichung (3.54) kalibriert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird das dimensionsbehaftete Reibmomentmodell für die Kalibrierung der Modellparameter verwendet.

Auf dieser Basis berechnet sich die Unsicherheit⁴⁰ der Modellparameter zu

$$\begin{aligned}\sigma_m^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial m}{\partial \hat{Q}_L^+} \right)^2 (\delta\hat{Q}_{L,i}^+)^2 = \frac{(\delta\hat{Q}_L^+)^2}{\sum_{i=1}^N (\Delta\hat{p}_i^+ - \overline{\Delta\hat{p}^+})^2}, \\ \sigma_L^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{Q}_L^+} \right)^2 (\delta\hat{Q}_{L,i}^+)^2 = (\delta\hat{Q}_{L,i}^+)^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\overline{\Delta\hat{p}^+}^2}{\sum_{i=1}^N (\Delta\hat{p}_i^+ - \overline{\Delta\hat{p}^+})^2} \right).\end{aligned}\tag{3.75}$$

Die Unsicherheit des Leckagemodells $\sigma_{\hat{Q}_L^+}$ ergibt sich wiederum durch Fehler-

³⁹Vereinfachung (ii) dient der besseren Anschaulichkeit. Die Fehlerfortpflanzung variierender Messunsicherheiten stellt mit der verwendeten Software keine Herausforderung dar.

⁴⁰BAILER-JONES ([2], 2017) merkt an, dass die Modellparameter linear im Modell auftreten und die Glieder höherer Ordnung null sind. Die Fehlerfortpflanzung ist daher exakt.

fortpflanzung der Unsicherheit der Modellparameter zu

$$\begin{aligned}
\sigma_{\hat{Q}_L^+}^2 &= \left(\frac{\partial \hat{Q}_L^+}{\partial m} \right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \hat{Q}_L^+}{\partial \hat{L}} \right)^2 \sigma_{\hat{L}}^2 + 2 \frac{\partial \hat{Q}_L^+}{\partial m} \frac{\partial \hat{Q}_L^+}{\partial \hat{L}} \text{cov}(m, \hat{L}), \\
&= \sigma_{\hat{L}}^2 + \Delta \hat{p}^{+2} \sigma_m^2 + 2 \Delta \hat{p}^+ \text{cov}(m, \hat{L}) \quad \text{mit} \quad \text{cov}(m, \hat{L}) = -\overline{\Delta \hat{p}^+} \sigma_m^2 \\
&= \sigma_{\hat{L}}^2 + \Delta \hat{p}^{+2} \sigma_m^2 - 2 \Delta \hat{p}^+ \overline{\Delta \hat{p}^+} \sigma_m^2, \\
&= (\delta \hat{Q}_L^+)^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(\Delta \hat{p}^+ - \overline{\Delta \hat{p}^+})^2}{\sum_{i=1}^N (\Delta \hat{p}_i^+ - \overline{\Delta \hat{p}^+})^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Dabei stellt $\Delta \hat{p}^+$ die Modellvariable dar, für die die Modellvorhersage \hat{Q}_L^+ mit der Unsicherheit $\sigma_{\hat{Q}_L^+}$ getroffen wird. Durch Berücksichtigung des Student'schen t -Faktor $t_{95\%}$, der sich aus der Anzahl der Betriebspunkte N der Kalibrationsdaten sowie der Größe des Vertrauensintervalls ergibt, ergibt sich das 95 % Konfidenzintervall der Modellvorhersage mit

$$(\delta \hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}} = t_{95\%} \sigma_{\hat{Q}_L^+} = t_{95\%} (\delta \hat{Q}_L^+) \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(\Delta \hat{p}^+ - \overline{\Delta \hat{p}^+})^2}{\sum_{i=1}^N (\Delta \hat{p}_i^+ - \overline{\Delta \hat{p}^+})^2}} \tag{3.77}$$

Gleichung (3.77) stellt nun das Ergebnis der Quantifizierung der Modellunsicherheit $(\delta \hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}}$ unter den beiden getroffenen Vereinfachungen dar. Für das Reibmomentmodell gilt eine entsprechende Vorgehensweise⁴¹.

Folgende Abhängigkeiten für die Modellunsicherheit $(\delta \hat{Q}_L^+)$ sind aus Gleichung (3.77) ersichtlich:

1. Das 95 % Konfidenzintervall $(\delta \hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}}$ ist abhängig von der Messunsicherheit $(\delta \hat{Q}_{L,i}^+)$ der für die Kalibration verwendeten Messdaten. Im Fall einer konstanten Messunsicherheit $(\delta \hat{Q}_{L,i}^+) = (\delta \hat{Q}_L^+) = \text{const.}$ liegt eine proportionale Abhängigkeit vor.
2. Das 95 % Konfidenzintervall $(\delta \hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}}$ wird größer, je stärker sich die Modellvariable $\Delta \hat{p}^+$ von $\overline{\Delta \hat{p}^+}$ (entspricht dem Mittelpunkt der Kalibrationsdaten) unterscheidet. Dies entspricht daher der Entfernung der Modellanwendung, oder der Extrapolation, von den Kalibrationsdaten.
3. Das 95 % Konfidenzintervall $(\delta \hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}}$ wird kleiner, je mehr Messdaten N für die Kalibration verwendet werden.

⁴¹Aufgrund der annähernd konstanten Messfehler wird keine Gewichtung der Zielfunktion auf Basis der Messunsicherheiten mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate vorgenommen.

Bisher beruht die Unsicherheit des Leckagemodells $\sigma_{Q_L^+}$ aus Gleichung (3.76) im Wesentlichen auf der Unsicherheit ($\delta\hat{Q}_{L,i}^+$) der für die Kalibration verwendeten Messdaten. In diesem Zusammenhang wird von Kamke⁴² darauf hingewiesen, dass es trotz geringen Messunsicherheiten zu Modellabweichungen kommen kann, wenn der funktionale Zusammenhang im Rahmen der Modellierung unpassend gewählt wird. Aus diesem Grund muss im Rahmen der Kalibrierung auch der Modellfehler⁴³, im Folgenden als RMSE bezeichnet, betrachtet und mit den Messunsicherheiten ($\delta\hat{Q}_{L,i}^+$) verglichen werden. Der Modellfehler berechnet sich für das Leckagemodell zu

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (\hat{Q}_{L,i}^+ - \hat{L} - m\Delta\hat{p}_i^+)^2}{N - N_M}} \quad (3.78)$$

mit der Anzahl N_M an Modellparametern. Für das Leckagemodell ist daher $N_M = 2$.

Für den Vergleich wird die Größe χ^2 eingeführt, die sich im Fall von Kalibrationsdaten mit unterschiedlichen Messunsicherheiten ($\delta\hat{Q}_{L,i}^+$) zu

$$\chi^2 = \text{RMSE}^2(N - N_M) \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{(\delta\hat{Q}_{L,i}^+)^2}}{N} \quad (3.79)$$

und für konstante Messunsicherheiten ($\delta\hat{Q}_L^+$) zu

$$\chi^2 = \frac{\text{RMSE}^2(N - N_M)}{(\delta\hat{Q}_L^+)^2} \quad (3.80)$$

berechnet. Anhand des χ^2 -Wertes können nunmehr drei Fälle unterschieden werden:

- (i) $\chi^2 \approx n - N_R$:
Der Modellfehler RMSE ist allein auf die Messunsicherheit ($\delta\hat{Q}_L^+$) der Kalibrationsdaten zurückzuführen und muss nicht berücksichtigt werden. Es gilt die Gleichung (3.77).
- (ii) $\chi^2 < n - N_R$
Die Messunsicherheit ($\delta\hat{Q}_L^+$) der Kalibrationsdaten ist für das Vertrauensintervall $(\delta\hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}}$ bestimmend und größer als der Modellfehler RMSE.

⁴²KAMKE, *Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse, im Physikalischen Anfänger-Praktikum: Eine elementare Einführung*, ([38], 2014)

⁴³In der Literatur findet man unterschiedliche Bezeichnungen. Üblich ist Varianz oder Standardabweichung des Modells. Im Englischen wird es als „Root Mean Square Error“ (RMSE) bezeichnet.

Der Modellfehler muss nicht berücksichtigt werden und es gilt die Gleichung (3.77).

(iii) $\chi^2 > n - N_R$

Der Modellfehler ist größer als die Messunsicherheit und muss daher berücksichtigt werden. Dementsprechend muss $(\delta\hat{Q}_L^+)$ aus Gleichung (3.77) mit dem Faktor $\sqrt{\chi^2/(N - N_M)}$ multipliziert und auf diese Weise korrigiert werden, sodass

$$(\delta\hat{Q}_L^+)_{\text{Modell}} = t_{95\%} \sqrt{\chi^2/(N - N_M)} (\delta\hat{Q}_L^+) \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(\Delta\hat{p}^+ - \overline{\Delta\hat{p}^+})^2}{\sum_{i=1}^N (\Delta\hat{p}_i^+ - \overline{\Delta\hat{p}^+})^2}} \quad (3.81)$$

gilt. In diesem Fall werden sowohl der Modellfehler RMSE, der der quantifizierten Modellunsicherheit des Datenbereichs im Eulerdiagramm in Abbildung 3.14 entspricht, als auch die Messunsicherheit der Kalibrationsdaten $(\delta\hat{Q}_L^+)$ berücksichtigt.

Im Rahmen der Modellvalidierung des Leckagemodells und Reibmomentmodells trifft überwiegend der Fall $\chi^2 < n - N_R$ zu. Dies liegt daran, dass der Betriebsbereich, in dem die Messdaten für die Kalibration gewonnen werden (vgl. Datenbereich des Modells in Abb. 3.14), üblicherweise möglichst klein gewählt wird. Dies ist für semi-axiomatische Modelle wünschenswert, weil ein Mehr an Kalibrationsdaten zum einen einen höheren Aufwand bedeutet und zum anderen das Modell in Richtung datengetriebene Modellierung verschiebt. Im übrigen ist es nachvollziehbar, dass ein kleiner Betriebsbereich und damit auch ein kleinerer Kalibrationsbereich durch ein Modell besser abgebildet wird und dementsprechend der Modellfehler klein ausfällt. Aus diesem Grund liegt der Fokus der Modellvalidierung auf zwei Aspekten:

- (i) Wie groß sind die Abweichungen der Modellvorhersagen?
- (ii) Wie groß ist die Unsicherheit der Modellvorhersagen?

In den Abweichungen der Modellvorhersagen (bester Schätzer) von den experimentellen Vergleichswerten spiegelt sich, vor dem Hintergrund eines geringen RMSE-Wertes bei der Kalibration, die Güte der Modellierung. In der Unsicherheit der Modellvorhersagen durch das 95 % Konfidenzintervall spiegelt sich die Vertrauenswürdigkeit der Vorhersage. Diese Vertrauenswürdigkeit liegt im vorliegenden Fall jedoch nicht in der Modellgüte begründet sondern, wie bereits dargestellt, in der Anzahl der Betriebspunkte für die Kalibration, der Messunsicherheit der Kalibrationsdaten sowie der „Entfernung“ des Betriebsbereichs, für den eine Modellvorhersage getroffen werden soll, zu dem Betriebsbereich, aus dem die Kalibrationsdaten stammen.

Abschließend wird ein letzter Punkt aufgegriffen, der im Rahmen der Reibmomentmodellierung (vgl. Kap. 3.4.2) anhand der verschiedenen Verlustterme gemäß Gleichung (3.51) relevant ist. Im Rahmen der Modellvalidierung muss überprüft werden, ob für einzelne Pumpentypen Verlustterme vernachlässigbar klein sind. Pelz⁴⁴ verweist in diesem Zusammenhang auf das Prinzip der Einfachheit, auch als Occams Rasiermesser⁴⁵ bekannt (vgl. Kap. 2.4). Prinzipiell kann mittels der p-Werte die statistische Signifikanz der über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmten Modellparameter bestimmt werden⁴⁶. Jedoch wird der p-Wert als alleiniges Entscheidungskriterium für die Berücksichtigung eines Verlustterms nicht empfohlen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einfluss der Verlustterme daher auf Basis einer graphischen Auswertung bewertet und auf dieser Basis über deren Berücksichtigung entschieden.

⁴⁴PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([54], 2021, Kap. 1)

⁴⁵PAQUÉ, *Das Pariser Nominalistenstatut*, ([52], 1970)

⁴⁶WASSERSTEIN UND LAZAR, „The ASA Statement on p -Values: Context, Process, and Purpose“, ([97], 2016)

Kapitel 4

Versuche

Stationäre Wirkungsgradmessungen von Verdrängerpumpen haben in der Industrie eine große Bedeutung. Aus diesem Grund sind der dafür notwendige Prüfaufbau, die Messgrößen und die Messdurchführung in der ISO-Norm 4409 standardisiert. Auch für wissenschaftliche Untersuchungen stellt diese Norm die wichtigste Grundlage dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher die Vorgaben der ISO 4409:2007¹ umgesetzt².

In diesem Kapitel werden zunächst der Aufbau des Prüffelds sowie die verwendete Messtechnik vorgestellt. Anschließend wird auf die Versuchsdurchführung eingegangen und abschließend die Fehlerrechnung zur Bestimmung der Messunsicherheiten erläutert.

4.1 Prüffeld

4.1.1 Aufbau

Wie bereits dargelegt, werden im Rahmen dieser Arbeit die drei rotierenden Verdrängerpumpentypen Schraubenpumpe, Zahnradpumpe und Drehkolbenpumpe untersucht. Da sich diese Pumpen insbesondere bei den Anschlüssen von Pumpeneintritt und Pumpenausritt und den jeweils für sie erforderlichen Pumpenhalterungen sowie in betrieblicher Hinsicht bei der Leistungsaufnahme und den Betriebsdruckbereichen unterscheiden, wurden für die

¹ ISO 4409:2007, *Hydraulic fluid power – Positive displacement pumps, motors and integral transmissions – Methods of testing and presenting basic steady state performance*, ([30], 2007)

² Im Jahr 2019 wurde eine neue Ausgabe der ISO 4409 ([31], 2019) veröffentlicht, die für die Versuche jedoch nicht mehr angewendet werden konnte. Der einzige relevante Unterschied liegt in der Vorgabe einer Abtastfrequenz der Messsensoren.

Untersuchungen zwei verschiedene Prüfstände aufgebaut. Diese Prüfstände bilden zusammen mit vier Öltanks, in denen die im Rahmen der Untersuchungen als Prüfstandsmedien eingesetzten unterschiedlichen Hydrauliköle lagern, das Prüffeld. Abbildung 4.1 zeigt die hydraulischen Schaltpläne der beiden Prüfstände mit den relevanten Messsensoren und Messgrößen für die Wirkungsgradmessung.

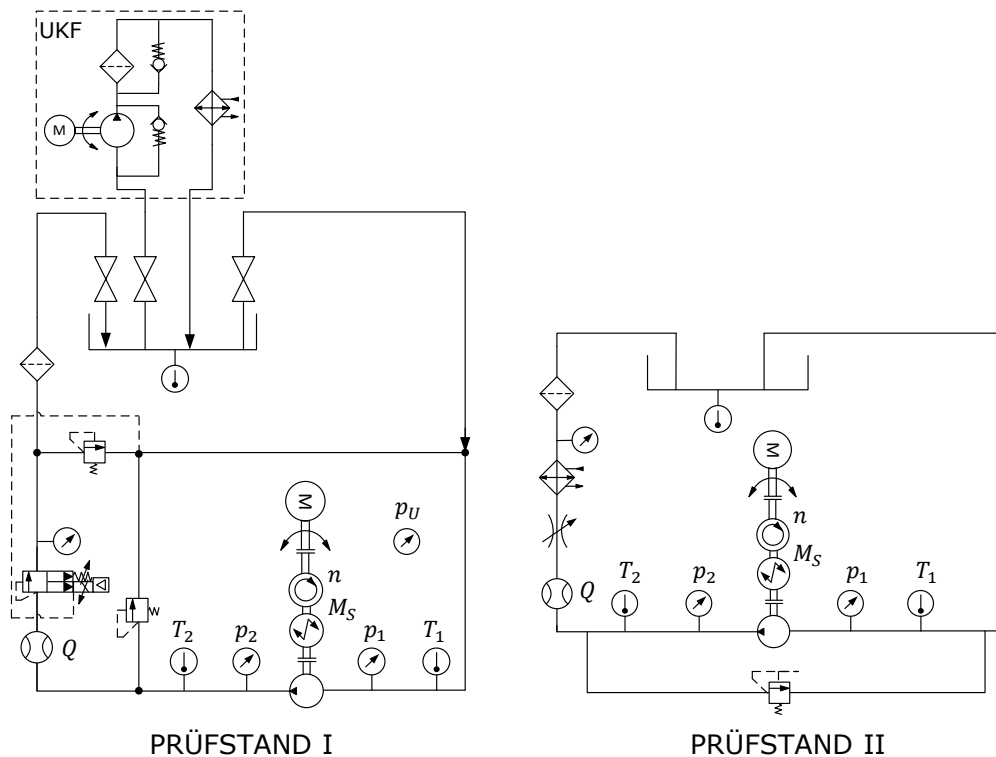


Abbildung 4.1 – Hydraulische Schaltpläne der beiden Prüfstände.

Beide Prüfstände bestehen aus den in ISO 4409 vorgegebenen Komponenten. Zentrales Element ist der Antriebsstrang, bestehend aus Frequenzumrichter, E-Motor und Drehmomentenmesswelle. Über den Antriebsstrang wird die Pumpe drehzahlvariabel angetrieben und das Drehmoment M_S sowie die Drehzahl n für die Bestimmung der mechanischen Leistung P_s an der Pumpenwelle gemessen. Am Pumpeneintritt und Pumpenausritt werden die Drücke p_1 und p_2 sowie die Temperaturen T_1 und T_2 des Prüfstandsmediums gemessen. Da bei Prüfstand I der Drucksensor am Pumpenausritt im Gegensatz zu den anderen Absolutdrucksensoren ein Relativdrucksensor³ ist, muss zur Bestimmung der Druckdifferenz über der Pumpe noch zusätzlich

³ Der Relativdrucksensor misst die Druckdifferenz zum Umgebungsdruck.

der Umgebungsdruck p_U gemessen werden. Unmittelbar nach der Pumpe wird zudem der Volumenstrom Q mittels eines Schraubenspindelzählers bestimmt. Zusammen mit der Druckdifferenz über der Pumpe lässt sich so die hydraulische Leistung und der Wirkungsgrad der Pumpe bestimmen (vgl. Kap 2 Gl. (2.21)). Dabei wird der Einfluss der Kompressibilität aufgrund der niedrigen Betriebsdruckbereiche der Pumpen (vgl. Tab. 4.1) vernachlässigt.

Neben dem Antriebsstrang und der Messsensorik verfügen die beiden Prüfstände über ein einstellbares Druckventil, um den Differenzdruck Δp an der Pumpe zu variieren. Bei Prüfstand I wird für die Untersuchungen an den Schraubenspumpen ein Proportionaldruckbegrenzungsventil, bei Prüfstand II für die Untersuchungen an den Zahnradpumpen ein Drosselventil und für die Untersuchungen an der Drehkolbenpumpe ein elektrischer Kugelhahn als Drossel verwendet. Ferner enthalten beide Prüfstände ein Druckbegrenzungsventil zum Schutz vor Überlast, einen Leitungsfiter zur Filtration von Partikeln, eine Umpump-Kühl-Filtereinheit (UKF) beziehungsweise einen Wärmetauscher für die Regelung der Prüfstandsmediumtemperatur und einen Tank als Reservoir für das Prüfstandsmedium. Die Abbildungen (4.2) und (4.3) zeigen die Prüfstands-aufbauten für die drei untersuchten Pumpentypen.

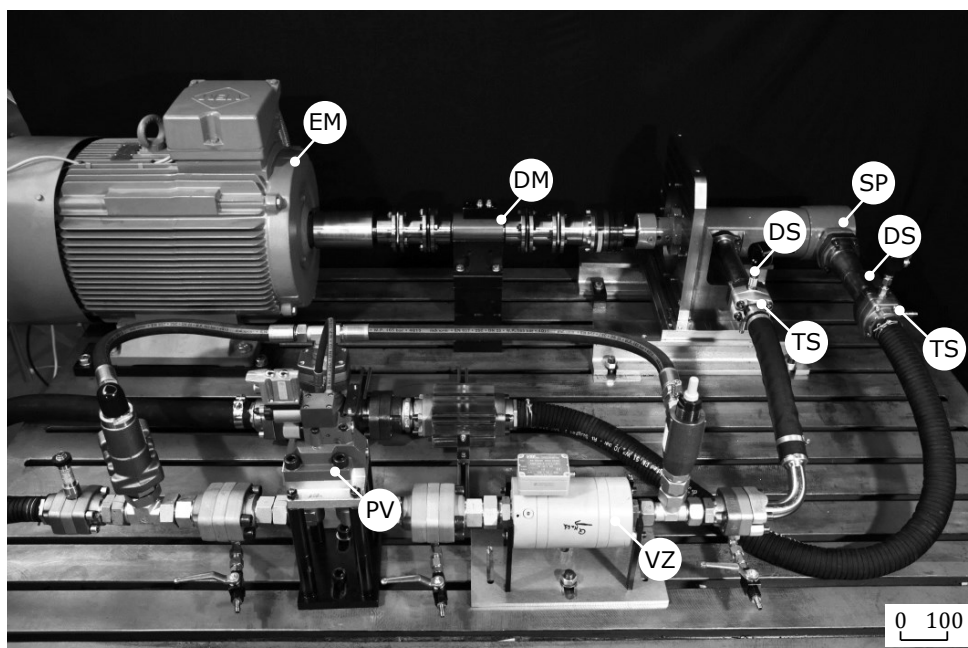
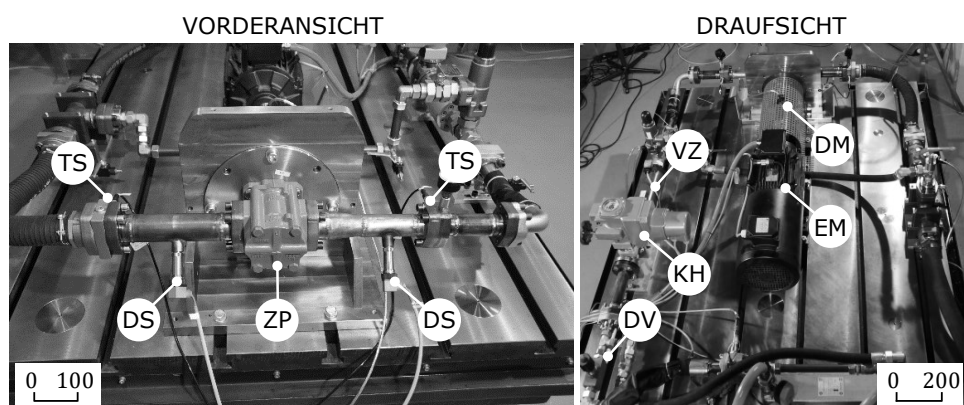
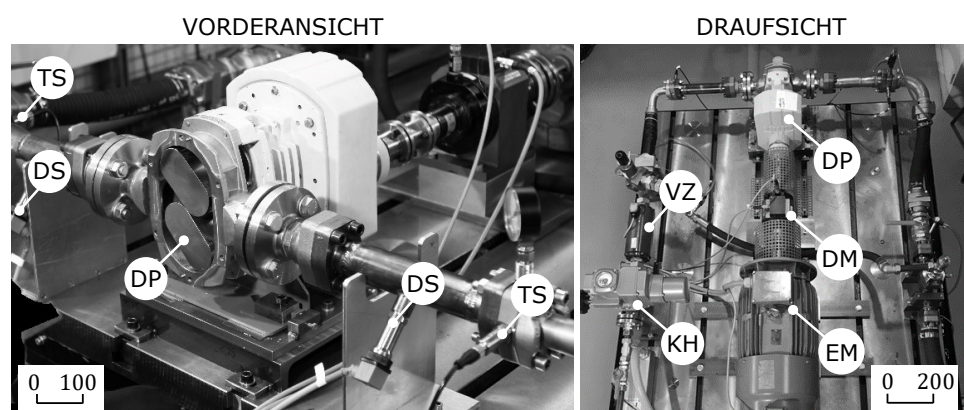


Abbildung 4.2 – Prüfstand I für Wirkungsgradmessungen an Schraubenspumpen. EM: Elektrischer Motor, DM: Drehmomentenmesswelle, SP: Schraubpumpe, DS: Drucksensor, TS: Temperatursensor, VZ: Volumenstromsensor, PV: Proportionaldruckventil.



(a) Zahnradpumpe



(b) Drehkolbenpumpe

Abbildung 4.3 – Prüfstand II für Wirkungsgradmessungen an Zahnrad- und Drehkolbenpumpen. EM: Elektrischer Motor, DM: Drehmomentenmesswelle, SP: Schraubpumpe, DS: Drucksensor, TS: Temperatursensor, VZ: Volumenströmsensor, KH: Elektrischer Kugelhahn, DV: Drosselventil.

Um die Modellvalidierung in einem möglichst großen Viskositätsbereich durchführen zu können, werden vier verschiedene Hydrauliköle mit Nennviskositäten (bei 40 °C) von 10, 22, 44 und 100 cSt als Prüfstandsmedien eingesetzt. Auf diese Weise kann der Einfluss der Viskosität bei konstanter Temperatur untersucht werden. Abbildung 4.4 zeigt die vier Tanks des Prüffelds für die unterschiedlichen Hydrauliköle und die UKF.

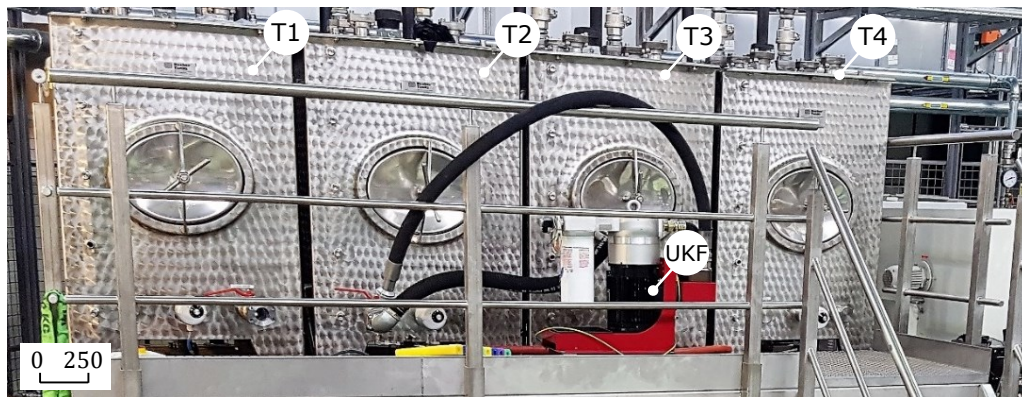


Abbildung 4.4 – Öltanks (T1-T4) für die vier verschiedenen Hydrauliköle und die Umpump-Kühl-Filtereinheit (UKF).

Eine Übersicht über die verwendeten Prüfstandskomponenten findet sich in Anhang C.1 in den Tabellen C.1, C.2 und C.3.

4.1.2 Messtechnik

Die im Rahmen der Versuche eingesetzte Messtechnik sowie die ermittelten Messgrößen (vgl. Abb. 4.1) sind konform zur ISO 4409. Die Drücke und Temperaturen vor und nach der Pumpe werden mittels piezoresistiven Sensoren bzw. Pt-100 Widerstandsthermometern gemessen. Mit einer Drehmomentenmesswelle zwischen Pumpe und E-Motor wird das Drehmoment und die Drehzahl an der Pumpenwelle gemessen. Der Drehmomentsensor basiert dabei auf dem DMS-Prinzip. Die Drehzahl wird anhand der gemessenen Impulse je Umdrehung von einer Drehzahlsonde bestimmt. Der Volumenstrom der Pumpe wird mit einem Schraubenspindelzähler gemessen.

Die ISO 4409 teilt die zum Einsatz kommende Messtechnik in drei Genauigkeitsklassen, abhängig von der maximalen Messabweichung des Messinstruments bezogen auf den Messwert, ein⁴. Im Rahmen der durchgeführten

⁴ Klasse A: $\leq 0.5\%$ MW; Klasse B: $\leq 1\%$ MW bzw. $\leq 1.5\%$ MW; Klasse C: $\leq 2\%$ MW bzw. $\leq 2.5\%$ MW; MW: Messwert.

Messungen wurde überwiegend die Genauigkeitsklasse A erreicht. Bei Messungen im Teillastbetrieb der Pumpen, das bedeutet bei geringeren Drücken und dementsprechend niedrigen Drehmomenten, verringerte sich die Genauigkeit der Druck- und Drehmomentmessungen weitestgehend auf Klasse B.

Die Messung der Temperatur ist für die Wirkungsgradbestimmung selbst zunächst nicht maßgeblich und dient lediglich der Überprüfung der stationären Versuchbedingungen. Allerdings lässt sich anhand der Temperatur die Viskosität und die Dichte des Prüfstandsmediums am Pumpeneintritt und Pumpenausritt berechnen. Da die Viskosität und die Dichte wichtige Eingangsgrößen des Leckage- und Reibmomentmodells darstellen, wird das Temperaturverhalten der verwendeten Hydrauliköle mit einem hochgenauen Kapillarviskosimeter und Tensiometer bestimmt.

Eine Übersicht über die auf den beiden Prüfständen eingesetzte Messtechnik, deren Messbereiche und maximale Messabweichungen findet sich in Anhang C.2 in den Tabellen C.4, C.5 und C.6.

4.2 Versuchsdurchführung

Die Betriebsbereiche der drei untersuchten Pumpentypen unterscheiden sich insbesondere hinsichtlich ihres Betriebsdruck- und Leistungsbereichs. In Tabelle 4.1 sind die untersuchten Betriebsbereiche der Pumpen⁵ dargestellt.

Tabelle 4.1 – Betriebsbereiche der Pumpentypen.

Betriebsgröße	Drehkolben- pumpe	Zahnrad- pumpe	Schrauben- pumpe
Druckdifferenz Δp	0 – 6 bar	0 – 24 bar	8 – 45 bar
Drehzahl n	300 – 800 rpm	500 – 3600 rpm	500 – 3000 rpm
Volumenstrom Q	25 – 250 l/min	5 – 220 l/min	10 – 240 l/min
Drehmoment M_S	4 – 40 Nm	0 – 30 Nm	4 – 70 Nm

Innerhalb dieser Betriebsbereiche werden für jede Pumpe Wirkungsgradmessungen durchgeführt und dabei jeweils Kennfelder aufgenommen, die aus durchschnittlich 160 Betriebspunkten bestehen. Jeder Betriebspunkt im Kennfeld wird durch die Drehzahl und die Druckdifferenz der Pumpe sowie durch die kinematische Viskosität des Fördermediums eindeutig definiert und

⁵ Der maximale Differenzdruck und die maximale Drehzahl der Pumpen wurden vom Hersteller vorgegeben.

durch die in Kapitel 4.1.2 genannten Messgrößen vollständig beschrieben. Insgesamt werden somit bei der Messung der Kennfelder für jede Pumpe durchschnittlich 160 Betriebspunkte bei

- 4 verschiedenen Viskositäten,
- 5 verschiedenen Drehzahlen je Viskosität und
- 8 verschiedenen Differenzdrücken je Drehzahl aufgenommen.

Die Betriebspunkte der Pumpen sind dabei gleichmäßig über die in Tabelle 4.1 angegebenen Druckdifferenz- und Drehzahlbereiche verteilt. Bei den Messungen wird der Mittelwert aus Pumpeneintritts- und Pumpenaustritts-temperatur zwischen 36 Grad Celsius und 44 Grad Celsius so variiert, dass sich für die Viskosität der vier unterschiedlichen Hydrauliköle bei den Untersuchungen die Werte von 11, 22, 44 und 88 cSt einstellen, die damit jeweils um ein Vielfaches voneinander auseinanderliegen. Die mittlere Temperatur für eine Kennfeldmessung bei einem einzelnen Hydrauliköl liegt in einem Bereich von ± 1 °C. Auf diese Weise ist es möglich, den Viskositätseinfluss auf den Wirkungsgrad ohne den Störeinfluss der Temperatur zu untersuchen. Dieser Störeinfluss wurde bei Vergleichsmessungen an Schraubepumpen bei unterschiedlicher Temperatur und annähernd gleicher Viskosität und Dichte des Prüfstandsmediums festgestellt und ist auf die unterschiedlichen Werkstoffpaarungen von Spindeln (Edelstahl) und Gehäuse (Aluminium) zurückzuführen. Eine Übersicht der insgesamt gemessenen Betriebspunkte aller untersuchten Pumpen findet sich in Anhang D.

Auf Basis der Wirkungsgradmessungen wird auch das Verdrängervolumen jeder Pumpe experimentell bestimmt und hierfür die Methode von Toet^{6,7} angewendet (vgl. Kap 2.1). Das Verdrängervolumen wird zunächst jeweils für eine konstante Viskosität bestimmt und dann der Mittelwert aus den vier viskositätsabhängigen Verdrängervolumen berechnet. Die Abweichungen der viskositätsabhängigen Verdrängervolumen vom Mittelwert liegen unter 0.5 %. Ferner wird für das Verdrängervolumen, auf Grundlage des in Kapitel 3.5 dargestellten Vorgehens, das 95 % Konfidenzintervall bestimmt.

Neben den Wirkungsgradmessungen werden weitere umfangreiche Messungen des Viskositäts-Temperatur- und Dichte-Temperatur-Verhaltens der vier Hydrauliköle durchgeführt. Diese Messungen sind nach jedem Wechsel des Prüfstandsmediums notwendig, um den Einfluss einer Durchmischung aufgrund

⁶ TOET, „Die Bestimmung des theoretischen Hubvolumens von hydrostatischen Verdrängerpumpen und -motoren aus volumetrischen Messungen“, ([90], 1970)

⁷ TOET U. A., „The Determination of the Theoretical Stroke Volume of Hydrostatic Positive Displacement Pumps and Motors from Volumetric Measurements“, ([91], 2019)

von Hydraulikölrückständen im Prüfstand und des dadurch veränderten Temperaturverhaltens zu berücksichtigen. Dabei wird das Viskositäts-Temperatur-Verhalten durch eine Arrhenius-Gleichung⁸ und das Dichte-Temperatur-Verhalten durch einen linearen Zusammenhang beschrieben. In den Abbildungen D.1, D.2, D.3 und D.4 in Anhang D finden sich beispielhaft die Messergebnisse der Temperaturverläufe der Hydrauliköle bei Beginn der Untersuchungen.

4.3 Quantifizierung der Messunsicherheiten

Die Quantifizierung der Messunsicherheiten bei den Wirkungsgradmessungen ist im Rahmen dieser Arbeit in zweierlei Hinsicht von besonderer Bedeutung. Zum einen ist sie für den Vergleich der Modellvorhersagen mit den Wirkungsgradmessungen im Rahmen der Validierung wichtig und zum anderen stellt die Messunsicherheit ein Maß für die Unsicherheit derjenigen Daten dar, die für die Kalibration des semi-axiomatischen Leckage- und Reibmomentmodells verwendet werden. Dementsprechend beeinflusst die Messunsicherheit auch die Unsicherheit der Modellvorhersagen (vgl. Kap. 3.5).

Im Folgenden wird die Berechnung der Messunsicherheit gemessener und abgeleiteter Größen dargelegt, die sich am Leitfaden für den Ausdruck von Unsicherheit bei Messgrößen (GUM) der Joint Committee for Guides in Metrology⁹ orientiert. Für die Fehlerrechnung werden dabei folgende Annahmen getroffen:

- Die Messwerte einer Messgröße in einem Betriebspunkt sind normalverteilt und die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung kann angewendet werden.
- Bei der Fehlerfortpflanzung für berechnete Größen sind die Fehler höherer Ordnung vernachlässigbar klein; daher werden nur Fehler erster Ordnung betrachtet.
- Die Messwerte sind unkorreliert.

Das Messergebnis einer Messgröße x ergibt sich demnach aus dem empirischen Mittelwert \bar{x} und der Messunsicherheit (δx) eines Datensatzes $\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ mit der Anzahl N Messungen zu

$$x = \bar{x} \pm (\delta x). \quad (4.1)$$

⁸ LOGAN, „The Origin and Status of the Arrhenius Equation“, ([43], 1982)

⁹ JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, *Evaluation of Measurement Data — Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ([36], 2008). Eine weitere Quelle sind BLOCHOWICZ UND LAERI, *Einführung in die Messdatenanalyse für das Physikalische Grundpraktikum*, ([6], 2011) mit ihrer Zusammenfassung des GUM.

Der Mittelwert \bar{x} berechnet sich dabei zu

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.2)$$

Die Messunsicherheit (δx) setzt sich aus der statistischen Messunsicherheit $(\delta x)_{\text{stat}}$ und einer systematischen Messunsicherheit $(\delta x)_{\text{sys}}$ zusammen. Die statistische Messunsicherheit resultiert aus zufälligen Schwankungen der Messgröße, die nicht eliminiert werden können. Ihr wird durch häufiges Wiederholen der Messung und der Mittelwertbildung begegnet. Ein Beispiel für eine statistische Messunsicherheit stellt das elektronische Rauschen dar.

Die systematische Messunsicherheit beeinflusst dagegen alle Messwerte des Datensatzes gleichermaßen und kann nicht durch Wiederholen der Messung reduziert werden. Ein Beispiel hierfür ist das nichtlineare Verhalten eines Messensors, das durch ein lineares Modell angenähert und dargestellt wird. Über die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Messunsicherheit liegen üblicherweise keine Informationen vor. Im GUM werden diese beiden Messunsicherheiten als Typ A und Typ B Unsicherheiten bezeichnet. Im Folgenden wird deren Berechnung dargestellt.

Statistische Messunsicherheit

Die statistische Messunsicherheit des Mittelwerts berechnet sich zu

$$(\delta x)_{\text{stat}} = \frac{t_{95\%}}{\sqrt{N}} s(x). \quad (4.3)$$

Hierbei ist $t_{95\%}$ der Student'sche t-Faktor, der sich aus der Anzahl der Messwerte N des Datensatzes sowie der Größe des Vertrauensintervalls ergibt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Messunsicherheit über ein 95 % Konfidenzintervall dargestellt. Der Student'sche Faktor berücksichtigt, dass Stichproben von normalverteilten Daten t-verteilt sind und korrigiert somit die empirische Standardabweichung $s(x)$ des Datensatzes¹⁰. Die empirische Standardabweichung $s(x)$ des Datensatzes berechnet sich demnach zu

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.4)$$

und bildet gemeinsam mit dem Vorfaktor $1/\sqrt{N}$ die Standardabweichung des Mittelwerts.

¹⁰Der Datensatz $\{x_i\}$ ist eine Stichprobe der Grundgesamtheit unendlich vieler Messungen. Für $N \rightarrow \infty$ geht die t-Verteilung in eine Normalverteilung über.

Systematische Messunsicherheit

Die systematische Messunsicherheit $(\delta x)_{\text{sys}}$ basiert im Rahmen dieser Arbeit auf den Angaben der Sensorhersteller zur maximalen Messabweichung $(\Delta x)_{\text{max}}$. Diese Messabweichung stellt eine maximale Unsicherheitsschranke dar. Über die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser systematischen Unsicherheit ist üblicherweise jedoch nichts bekannt. Aus diesem Grund wird von einer Gleichverteilung ausgegangen. Dem GUM zufolge kann eine derartige Gleichverteilung in eine Normalverteilung umgerechnet werden, die durch die Standardabweichung $s(x)_{\text{sys}}$ charakterisiert ist und sich aus der maximalen Messabweichung gemäß

$$s(x)_{\text{sys}} = \frac{(\Delta x)_{\text{max}}}{\sqrt{3}} \quad (4.5)$$

berechnet. Die systematische Messunsicherheit $(\delta x)_{\text{sys}}$ stellt nun das 95 % Konfidenzintervall dar und berechnet sich dementsprechend zu

$$(\delta x)_{\text{sys}} = 1.96 s(x)_{\text{sys}}. \quad (4.6)$$

Gesamte Messunsicherheit

Die gesamte Messunsicherheit (δx) einer Messgröße berechnet sich dann zu

$$(\delta x) = \sqrt{(\delta x)_{\text{stat}}^2 + (\delta x)_{\text{sys}}^2}. \quad (4.7)$$

Eine abgeleitete (berechnete) Größe y wird über einen bekannten funktionalen Zusammenhang gemäß

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_{N_y}) \quad (4.8)$$

von N_y unterschiedlichen Messgrößen x_j beschrieben¹¹. Die Messunsicherheit (δy) der abgeleiteten Messgröße wird auf Basis der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet. Folglich berechnet sich die Messunsicherheit der abgeleiteten Größe zu

$$(\delta y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_y} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} (\delta x_j) \right)^2}. \quad (4.9)$$

¹¹Im Gegensatz zur Mittelwert- und Standardabweichungsberechnung aus Gl. (4.2) und (4.4) steht der Index j hier für die Nummerierung unterschiedlicher Messgrößen und nicht für unterschiedliche Messungen.

Bewertung der Messunsicherheit

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Mehrzahl der Messgrößen mit Messinstrumenten gemessen, die ein analoges Messsignal zur Verfügung stellen. Das Messsignal wird in diesem Fall mit einer Frequenz von 500 Hz über 5 Sekunden abgetastet¹². Somit stehen je Betriebspunkt 2500 Messwerte pro Messgröße zur Verfügung, aus denen die statistische Messunsicherheit einer Messgröße berechnet wird (vgl. (4.3)). Aufgrund der hohen Anzahl an Messwerten ist die relative statistische Messunsicherheit $(\delta x)_{\text{stat}}/\bar{x}$ der Messgrößen üblicherweise sehr klein. Ausschlaggebend für die gesamte Messunsicherheit der Messgrößen und der abgeleiteten Größen sind daher die von den Sensorherstellern angegebenen maximalen Messabweichungen, aus denen die systematischen Messunsicherheiten berechnet werden (vgl. (4.5) und (4.6)). Für die relative Messunsicherheit einer Messgröße gilt daher näherungsweise

$$\frac{(\delta x)}{x} \propto \frac{(\Delta x)_{\text{max}}}{x}. \quad (4.10)$$

Im Fall des Volumenstroms und der Drehzahl ist die relative Messunsicherheit annähernd konstant, da die maximale Messabweichung vom Messwert x abhängt. Im Fall des Differenzdrucks und des Drehmoments hängt die maximale Messabweichung vom Messbereich ab und ist konstant. Die relative Messunsicherheit dieser Messgrößen steigt somit bei kleiner werdenden Messwerten an.

Neben der Betrachtung der direkten Messgrößen ist es an dieser Stelle erforderlich, sich auch mit den abgeleiteten Messgrößen zu befassen. Von besonderem Interesse sind dabei die Leckage Q_L , die spezifische Leckage Q_L^+ , das Reibmoment M_{mh} und das spezifische Reibmoment M_{mh}^+ , die wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned} Q_L &= nV - Q, \\ Q_L^+ &= \frac{Q_L}{\nu V^{1/3}}, \\ M_{\text{mh}} &= M_S - \frac{\Delta p V}{2\pi}, \\ M_{\text{mh}}^+ &= \frac{M_{\text{mh}}}{\Delta p V}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

¹²Die Anzahl der Messwerte beim Volumenstromsensor und der Drehzahlsonde hängt aufgrund der Messprinzipien von der Größe des Messwerts ab.

Auf Basis von Gleichung (4.11) lassen sich nun die wesentlichen Abhängigkeiten der Messunsicherheiten der abgeleiteten Größen darstellen:

$$\begin{aligned}
(\delta Q_L) &\propto (\Delta Q)_{\max} \propto Q \propto n, \\
(\delta Q_L^+) &\propto (\delta Q_L), \\
(\delta M_{\text{mh}}) &\propto \sqrt{(M_S)_{\max}^2 + \left(\frac{(\Delta p_2)_{\max} V}{2\pi}\right)^2}, \\
(\delta M_{\text{mh}}^+) &\propto \sqrt{\left(\frac{(\Delta M_S)_{\max}}{\Delta p V}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta p_2)_{\max} M_S}{\Delta p^2 V}\right)^2} \\
&\propto \sqrt{\left(\frac{(M_S)_{\max}}{M_S}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta p_2)_{\max}}{\Delta p}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Aus diesen Abhängigkeiten lassen sich folgende Schlüsse für die relative Messunsicherheit der abgeleiteten Messgrößen ziehen:

- Da die Leckage Q_L unabhängig von der Drehzahl n (vgl. Kap. 3.3) ist, steigt die relative Messunsicherheit $(\delta Q_L)/Q_L$ mit zunehmender Drehzahl proportional an. Gleiches gilt für die relative Messunsicherheit der spezifischen Leckage $(\delta Q_L)/Q_L^+$.
- Die Messunsicherheit des Reibmoments (δM_{mh}) ist von der maximalen Messabweichung des Drehmomentsensors $(\Delta M_S)_{\max}$ und des Drucksensors am Pumpenaustritt¹³ $(\Delta p_2)_{\max}$ abhängig und daher konstant. Bei geringen Reibmomenten M_{mh} , die bei niedrigen Drehzahlen und niedrigen Viskositäten vorliegen, steigt die relative Messunsicherheit des Reibmoments $(\delta M_{\text{mh}})/M_{\text{mh}}$ daher an.
- Die Messunsicherheit des spezifischen Reibmoments (δM_{mh}^+) ergibt sich aus der relativen systematischen Messunsicherheit des Drehmoments $(M_S)_{\max}/M_S$ und des Drucksensors am Pumpenaustritt $(\Delta p_2)_{\max}/\Delta p$. Diese nimmt insbesondere bei geringen Differenzdrücken (hier liegen auch geringe Drehmomente vor) zu. Die relative Messunsicherheit des spezifischen Reibmoments $(\delta M_{\text{mh}}^+)/M_{\text{mh}}^+$ steigt somit ebenfalls bei abnehmenden Differenzdrücken an. Ferner steigt sie bei geringen Reibmomenten, die bei niedrigen Drehzahlen und niedrigen Viskositäten vorliegen, ebenfalls an.

¹³Die Messunsicherheit der Druckdifferenz $(\delta \Delta p)$ ist aufgrund des größeren Messbereich im Wesentlichen von der maximalen Messabweichung des Drucksensors am Pumpenaustritt $(\Delta p_2)_{\max}$ abhängig.

Diese Schlussfolgerungen bilden eine wichtige Grundlage für die Interpretation der relativen Messunsicherheit der abgeleiteten Messgrößen. Die relative Messunsicherheit wird in den Ergebnisabbildungen durch das Verhältnis eines Fehlerbalkens zum jeweiligen Messwert dargestellt. Auf Basis der dargestellten Abhängigkeiten lassen sich somit variierende Messunsicherheiten, die insbesondere in den Abbildungen der dimensionslosen Größen vorkommen, nachvollziehen und bewerten.

Ergänzend sei noch erwähnt, dass im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen stichprobenartig Wiederholungsmessungen bei allen Pumpentypen an unterschiedlichen Tagen durchgeführt wurden. Diese Wiederholungsmessungen bestanden aus Kennlinienmessungen bei einer geringeren Anzahl unterschiedlicher Drehzahlen und bei einer konstanten Viskosität. Dabei wurden folgende Einflüsse untersucht:

- Zeitspanne der Messung.
- Hysterese, das heißt Betriebspunkte wurden sowohl von höherem als auch von niedrigerem Betriebsdruck aus angefahren.
- Montage der Pumpen, das heißt bei den Schraubepumpen und der Drehkolbenpumpe wurden die Spindelsätze bzw. die Drehkolben aus- und eingebaut.

Als Ergebnis dieser Untersuchung kann festgestellt werden, dass keiner der untersuchten Einflüsse signifikant ist und alle mehrfach gemessenen Betriebspunkte im Rahmen der Messunsicherheit übereinstimmen.

Kapitel 5

Validierung des Wirkungsgradmodells

Im Rahmen der Untersuchung der physikalischen Ähnlichkeit einzelner Pumpen in Kapitel 3.3 wird gezeigt, inwieweit die Ähnlichkeitsbeziehungen unter Verwendung der Maßstabsfaktoren für die Vorhersage des Pumpenverhaltens genutzt werden können. Die Grenzen der Ähnlichkeitsbeziehungen liegen dabei zum einen bei der Extrapolation in weit entfernte Betriebsbereiche und zum anderen bei der Skalierung des Pumpenverhaltens anhand des Verdrängervolumens, die in der unvollständigen geometrischen Ähnlichkeit begründet ist. In Kapitel 3.4 werden daher semi-axiomatische Modelle für die Leckage und den volumetrischen Wirkungsgrad sowie für das Reibmoment und den mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad hergeleitet, die in diesem Kapitel validiert werden. Im Rahmen der Modellvalidierung werden folgende drei Fallstudien betrachtet:

- (i) Die Skalierung des Leckageverhaltens und des volumetrischen Wirkungsgrads für einzelne Pumpen anhand der Viskosität.

Als Kalibrationsdaten für die Modelle werden zum einen das Kennfeld bei der Viskosität $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt und zum anderen das Kennfeld bei der Viskosität $\nu_{\text{kal}} = 22$ cSt der jeweils betrachteten Pumpe verwendet. Als Vergleichsdaten für die Validierung dienen die Daten aus dem Kennfeld der jeweiligen Pumpe bei $\nu = 88$ cSt. Die Skalierung des Leckageverhaltens der Pumpen wird somit bei 4- bzw. 8-facher Viskosität betrachtet. Im Kontext der Anwendung von Maßstabsfaktoren für die Skalierung des Pumpenverhaltens wird durch den Zusammenhang $M_{\Delta p}^2 = M_\nu$ deutlich, dass dies in diesem Fall mit einer 16- bzw. 64-fachen Druckdifferenz über der Pumpe einher gehen würde (vgl. Kap. 3.3), die für die betrachteten Pumpen unter den gegebenen Betriebsgrenzen nicht umsetzbar ist.

- (ii) Die Skalierung des Reibmomentverhaltens und des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads für einzelne Pumpen anhand der Viskosität. Als Kalibrationsdaten für die Modelle werden, im Unterschied zur Leckage, die Kennfelder bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt und bei 22 cSt der jeweils betrachteten Pumpe gemeinsam verwendet. Dies bedeutet, dass in diesem Fall der Betriebsbereich für die Kalibration größer ist. Dies liegt darin begründet, dass bei einer Kalibration bei lediglich einer Viskosität der trägheitsrelevante Verlustterm M_e , im speziellen der Modellparameter R_e , bei allen Pumpen statistisch nicht signifikant und dementsprechend vernachlässigbar ist. Betrachtet man einen größeren Betriebsbereich bei unterschiedlichen Viskositäten, sind M_e und R_e dagegen wieder relevant und es werden durch ihre Berücksichtigung deutlich bessere Ergebnisse erzielt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich die viskosen- und trägheitsdominierten Verlustterme M_μ und M_e bei konstanter Viskosität trotz ihrer linearen bzw. quadratischen Abhängigkeit von der Drehzahl stark gleichen. In diesem Zusammenhang werden auch die anderen Verlustanteile des Reibmoments dementsprechend untersucht und überprüft.

Die Vergleichsdaten für die Validierung stammen auch hier aus dem Kennfeld der jeweiligen Pumpe bei $\nu = 88$ cSt. Somit wird hier die Skalierung des Reibmomentverhaltens der Pumpen bei 4-facher Viskosität betrachtet.

- (iii) Die Skalierung des Verlust- und Wirkungsgradverhaltens von Schraubepumpen und Zahnradpumpen anhand des Verdrängervolumens. Dabei wird die jeweils kleinste Pumpe der Baureihe als Referenzpumpe verwendet und für ihre Kalibration die Kennfelder bei den Viskositäten $\nu_{\text{kal}} = 44$ cSt und 88 cSt verwendet. Als Vergleichsdaten für die Validierung dienen die Daten aus den Kennfeldern der übrigen Pumpen der Schraubepumpen- und Zahnradpumpenbaureihe bei $\nu = 44$ cSt.

Der Schwerpunkt bei den Fallstudien liegt nun auf folgenden beiden Aspekten:

- (i) Wie groß sind die Abweichungen der Modellvorhersagen?
- (ii) Wie groß ist die Unsicherheit der Modellvorhersagen?

In den Abweichungen der Modellvorhersagen (bester Schätzer) von den experimentellen Vergleichswerten spiegelt sich die Güte der Modellierung wider. In der Unsicherheit der Modellvorhersagen durch das 95 % Konfidenzintervall spiegelt sich dagegen die Vertrauenswürdigkeit der Vorhersage wider. Wie in Kap. 3.5 ausführlich dargelegt, ist die Größe des Konfidenzintervalls durch

die Anzahl der für die Kalibration verwendeten Betriebspunkte, die Messunsicherheit der Kalibrationsdaten sowie die „Entfernung“ des Betriebsbereichs, für den eine Modellvorhersage getroffen werden soll, zu dem Betriebsbereich, aus dem die Kalibrationsdaten stammen, begründet.

Im Folgenden werden zunächst die Validierungsergebnisse für die Schraubenpumpen, anschließend für die Zahnradpumpen und abschließend für die Drehkolbenpumpe vorgestellt. Die dargestellten Ergebnisse der Validierung sind für die weiteren Pumpen der jeweiligen Baureihe repräsentativ. In Anhang E finden sich die Validierungsergebnisse der übrigen Pumpen.

5.1 Schraubenpumpen

Leckage und volumetrischer Wirkungsgrad

In Abbildung 5.1 sind die Validierungsergebnisse für das Leckagemodell und das Modell des volumetrischen Wirkungsgrads im Rahmen der Skalierung des Pumpenverhaltens anhand der Viskosität für die Schraubenpumpe SP II dargestellt. Dabei sind die Leckage und der volumetrische Wirkungsgrad jeweils über der Druckdifferenz der Pumpe aufgetragen. Die unterschiedlichen Symbole in den Diagrammen kennzeichnen die Messungen bei $\nu = 88$ cSt und den drei verschiedenen Drehzahlen. Aus Gründen der Anschaulichkeit sind nicht alle Messpunkte in den Abbildungen mit Fehlerbalken versehen. Die dargestellten Fehlerbalken veranschaulichen jedoch die Bandbreite der vorliegenden Messunsicherheiten ausreichend. Die Modellvorhersagen werden jeweils durch die schwarz durchgezogenen Linie dargestellt. Die gestrichelten Linien bzw. die schwarzen Fehlerbalken stellen das 95 % Konfidenzintervall der Modellvorhersagen dar. Die verschiedenen Kalibrationsbereiche der Modelle werden in den Diagrammen mit $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt bzw. $\nu_{\text{kal}} = 22$ cSt gekennzeichnet.

Die Modelle erzielen sowohl bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ als auch bei $\nu_{\text{kal}} = 22$ gute Ergebnisse. Für $\nu_{\text{kal}} = 22$ liegen die Modelle im betrachteten Betriebsbereich weitestgehend innerhalb der Messunsicherheiten der Messdaten. Für $\nu_{\text{kal}} = 11$ überschätzt das Leckagemodell die Leckage für niedrige Drücke, sodass es in diesen Bereichen auch zu nennenswerten Abweichungen beim Modell des volumetrischen Wirkungsgrads kommt. Auffallend ist, dass die Modellverläufe flacher als der Verlauf der Messpunkte sind. Dies ist auf den Exponenten m des Leckagemodells zurückzuführen. Das Leckagemodell wird bei einer geringeren Viskosität, im Vergleich zu den Messdaten der Validierung, kalibriert. Dementsprechend wird die Leckageströmung in den Spalten turbulenter sein und der Exponent bei der Leckage näher an dem Wert 0.5 liegen. Die Ergebnisse bestätigen dies. Für $\nu_{\text{kal}} = 11$ ist $m = 0.72$ und für $\nu_{\text{kal}} = 22$

ist $m = 0.77$. Verwendet man die Validierungsdaten für die Kalibration des Modells, beträgt $m = 0.82$ und liegt somit näher an 1 und an einer Leckage, die auf einer rein laminaren Strömung beruht.

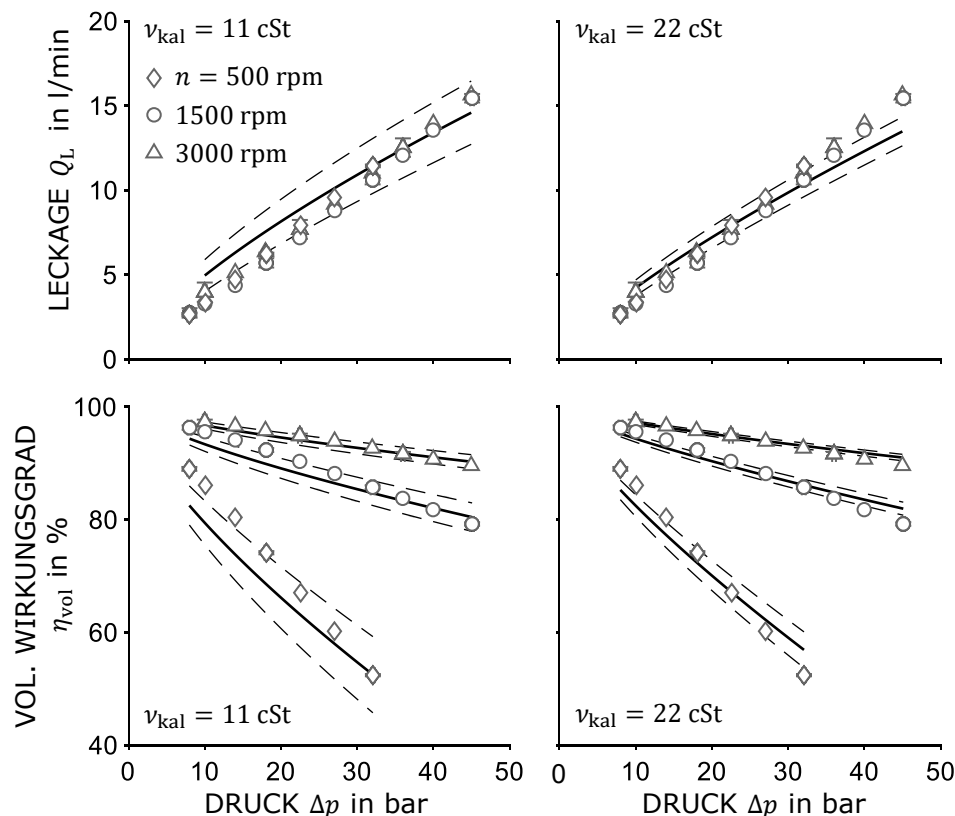


Abbildung 5.1 – Leckage Q_L über Differenzdruck Δp für die Schraubepumpe SP II bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Die schwarze Linien sind die Modelle. Die gestrichelten Linien stellen das 95 % Konfidenzintervall der Modelle dar. Für $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt sind $m = 0.72$ und $L = 10^{-4.6}$, für $\nu_{\text{kal}} = 22$ cSt sind $m = 0.77$ und $L = 10^{-5.1}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

Die Konfidenzintervalle der Modelle umschließen die Messpunkte fast uneingeschränkt, lediglich bei geringen Drücken und geringen Drehzahlen liegen die Messpunkte außerhalb der Konfidenzintervalle. Erwartungsgemäß ist das Vertrauensintervall für $\nu_{\text{kal}} = 11$ größer. Das liegt daran, dass der Kalibrationsbereich weiter vom Validierungsbereich entfernt ist.

Aufgrund der insgesamt geringen Modellabweichungen sowie der Tatsache, dass die Konfidenzintervalle die Messpunkte beinhalten, lässt sich für die Schraubepumpe SP II feststellen, dass die Modellannahme *M-VI* für den untersuchten Betriebsbereich gültig ist.

Im Folgenden werden die Validierungsergebnisse im Rahmen der Skalierung des Pumpenverhaltens anhand des Verdrängervolumens betrachtet. Die unvollständige geometrische Ähnlichkeit der Schraubenpumpenbaureihe wird durch den Zusammenhang zwischen Spaltklasse ψ/ψ_{ref} und dem Maßstabsfaktor des Verdrängervolumens M_V mit $\psi/\psi_{\text{ref}} = M_V^{-1/3}$ beschrieben. Gleichzeitig lässt sich der relative Spalt auch anhand der Messdaten der Schraubenpumpen bestimmen^{1,2}. Hierfür wird der Exponent m_{ref} des Leckagemodells der Referenzpumpe bestimmt und für die weiteren Pumpen der Baureihe vorgegeben. Auf dieser Grundlage werden im nächsten Schritt die Modellparameter L für jede einzelne Pumpe anhand ihrer Messdaten bestimmt. Bezieht man die für jede Pumpe kalibrierten Modelle wieder auf die Referenzpumpe mit L_{ref} , lässt sich der relative Spalt auf Basis von Gleichung (3.41) mit

$$\frac{\psi}{\psi_{\text{ref}}} = \left(\frac{L}{L_{\text{ref}}} \right)^{1/(3m_{\text{ref}})} \quad (5.1)$$

berechnen. Diese berechneten Werte für ψ/ψ_{ref} sind nun dem Modell in Abbildung 5.2 gegenüber gestellt. Dabei zeigt sich, dass die experimentellen Werte dem Modellverlauf folgen. Während die Modellabweichung für die Schraubenpumpe SP III sehr gering ist, liegt für die Schraubenpumpe SP II eine deutliche Abweichung vor. In diesen Abweichungen, die sich mit den Toleranzen der Spaltmaße begründen lassen, zeigt sich die Unsicherheit der Modellannahme *M-II*, dass die mittlere Spalthöhe \bar{s} für die betrachtete Baureihe konstant ist.

¹ PELZ, SCHÄNZLE UND CORNELI, „Ähnlichkeitsbeziehungen bei Verdrängermaschinen – eine einheitliche Wirkungsgradmodellierung“, ([57], 2016)

² SCHÄNZLE, CORNELI UND PELZ, „A Similarity based Efficiency Model of Spindle Screw Pumps“, ([63], 2018)

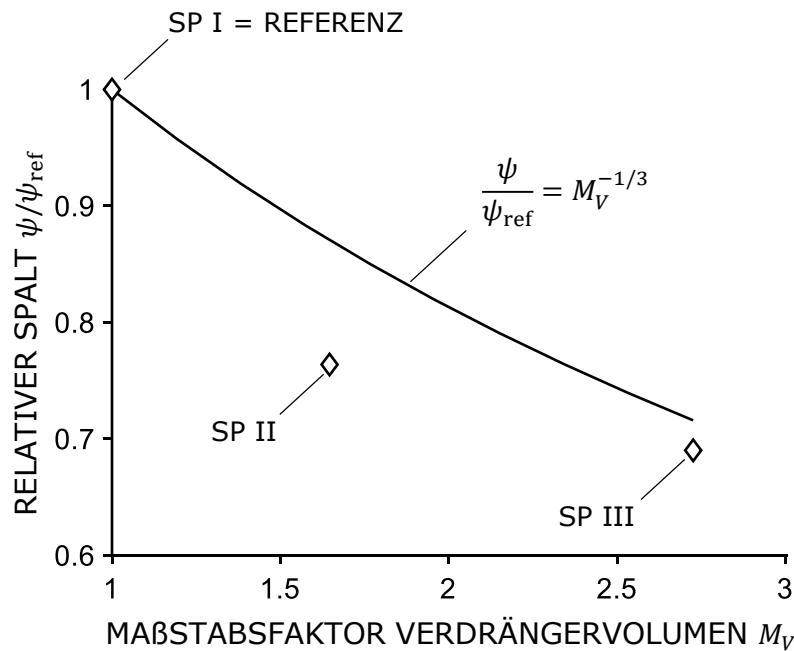


Abbildung 5.2 – Relativer Spalt ψ/ψ_{ref} über Maßstabsfaktor des Verdrängervolumens M_V für die Schraubenpumpenbaureihe und für den Kalibrationsbereich $\nu = 44$ cSt und 88 cSt. Die schwarze Linie ist das Modell. Die Marker stellen den experimentell bestimmten relativen Spalt dar.

Das Ergebnis aus Abbildung 5.2 spiegelt sich in der Genauigkeit der Modellverhersagen für die Leckage und den volumetrischen Wirkungsgrad der Schraubenpumpen SP II und SP III, die in Abbildung 5.3 dargestellt sind. Die Darstellung ist dabei identisch zur Ergebnissedarstellung der Skalierung anhand der Viskosität. Die Schraubenpumpen SP I, SP II und SP III sind dabei durch die Maßstabsfaktoren $M_V = 1, 1.65$ und 2.72 dargestellt. Für SP II wird die Leckage aufgrund der Modellabweichung des relativen Spalts leicht überschätzt, sodass es auch beim volumetrischen Wirkungsgrad zu Abweichungen kommt. Dabei liegen die Messwerte jeweils außerhalb des Konfidenzintervalls der Modelle. Bei SP III zeigt das Modell eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Messwerten. Vor dem Hintergrund der starken Vereinfachung in Modellannahme *M-II* werden die erzielten Ergebnisse der Baugrößenskalierung als positiv bewertet.

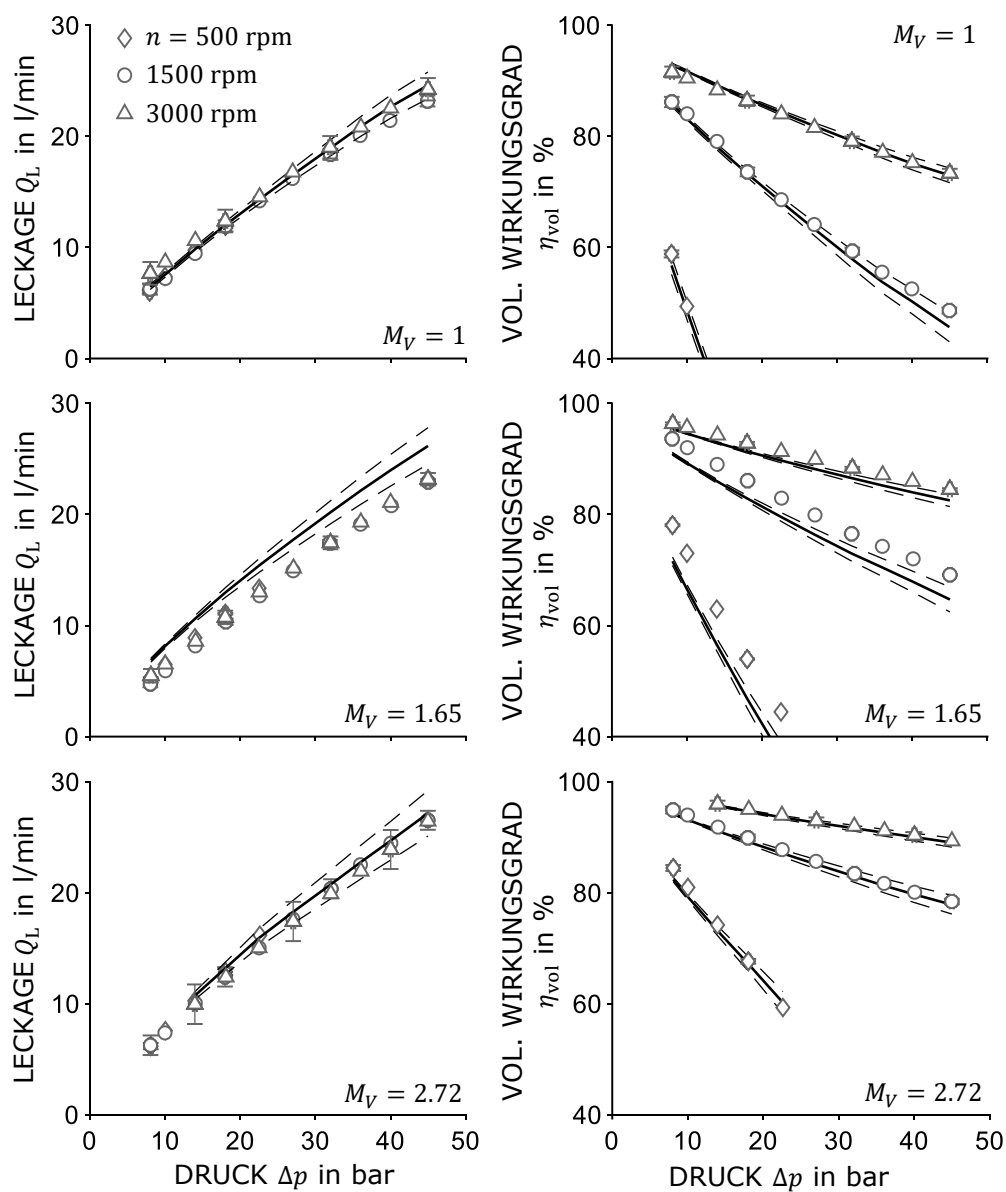


Abbildung 5.3 – Leakage Q_L und volumetrischer Wirkungsgrad η_{vol} über Differenzdruck Δp für die Schraubenpumpenbaureihe SP I, II und III mit $M_V = 1, 1.65, 2.72$ bei einer Viskosität von $\nu = 44$ cSt. Die schwarzen Linien sind die Modelle. Die gestrichelten Linien stellen die 95 % Konfidenzintervalle der Modelle dar. Die Modellparameter sind $m_{ref} = 0.78$ und $L_{ref} = 10^{-4.8}$.

Reibmoment und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad

Zunächst werden für die Schraubenpumpe SP II die unterschiedlichen Verlustterme des Reibmoments betrachtet. In Abbildung 5.4 sind hierfür zum einen die Reibmomentverläufe über dem Differenzdruck der Pumpe bei verschiedenen Drehzahlen und konstanter Viskosität als auch die gemessenen Reibmomentverläufe über der Viskosität bei verschiedenen Drücken und konstanter Drehzahl aufgetragen. Die Marker entsprechen dabei gemessenen Betriebspunkten. Die Fehlerbalken sind für die folgende Aussage nicht notwendig und daher in den Diagrammen nicht dargestellt. Aus diesen Diagrammen ist ersichtlich, dass die Abhängigkeit des Reibmoments vom Differenzdruck gegenüber der Abhängigkeit von der Drehzahl und der Viskosität vernachlässigbar klein ist. Der druckabhängige Verlustterm M_C wird für die Modellierung des Reibmoments der betrachteten Schraubenpumpen daher nicht berücksichtigt.

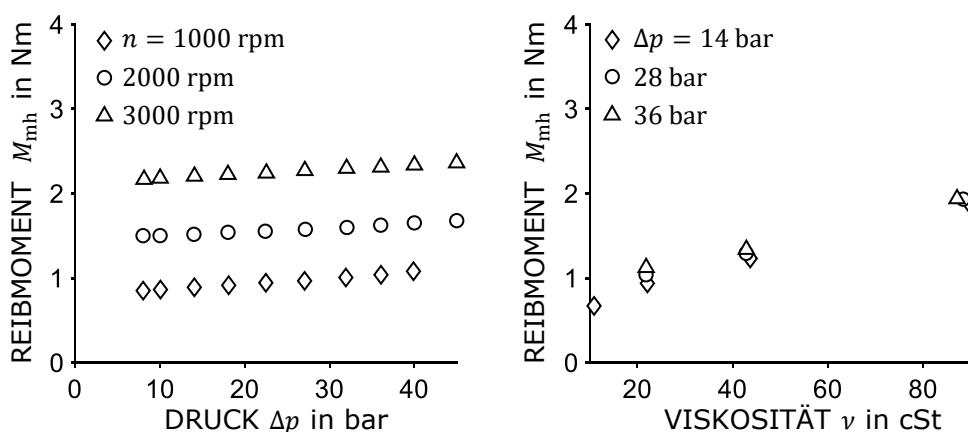


Abbildung 5.4 – Das Reibmoment M_{mh} über die Differenzdruck Δp bei $\nu = 44$ cSt und das Reibmoment M_{mh} über die Viskosität ν bei $n = 1500$ rpm für die Schraubenpumpe SP II.

Abbildung 5.5 zeigt die Validierungsergebnisse für das Reibmomentmodell und das Modell des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads für die Schraubenpumpe SP II. Dabei sind das Reibmoment und der mechanisch-hydraulische Wirkungsgrad jeweils über der Druckdifferenz der Pumpe aufgetragen. Die unterschiedlichen Symbole in den Diagrammen kennzeichnen dabei die Messungen bei $\nu = 88$ cSt und drei verschiedenen Drehzahlen, verteilt über den jeweiligen Drehzahlbereich. Aus Gründen der Anschaulichkeit sind, analog zur Leckage, nicht alle Messpunkte in den Abbildungen mit Fehlerbalken versehen. Auch hier veranschaulichen die dargestellten Fehlerbalken die Bandbreite der vorliegenden Messunsicherheiten ausreichend. Die Modellvorhersage (bester

Schätzer) sind jeweils durch die schwarz durchgezogenen Linien dargestellt. Die Vertrauensintervalle der Modellvorhersagen sind in den Abbildungen durch Fehlerbalken an der durchgezogenen Linie dargestellt und aufgrund der Vernachlässigung des druckabhängigen Verlustterms unabhängig vom Druck. Die Modelle erzielen lediglich bei der niedrigsten Drehzahl eine hohe Übereinstimmung mit den Messwerten. Bei der mittleren Drehzahl überschätzt das Modell das Reibmoment leicht und liegt am Rand der Vertrauensintervalle der Messwerte. Bei der höchsten Drehzahl überschätzt das Modell das Reibmoment deutlich, sodass es auch beim Modell des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads zu nennwerten Abweichungen kommt. Alle Messwerte liegen jeweils innerhalb der Vertrauensintervalle der Modelle. Im Fall der höchsten Drehzahl liegt neben der hohen Modellabweichung gleichzeitig ein großes Konfidenzintervall vor.

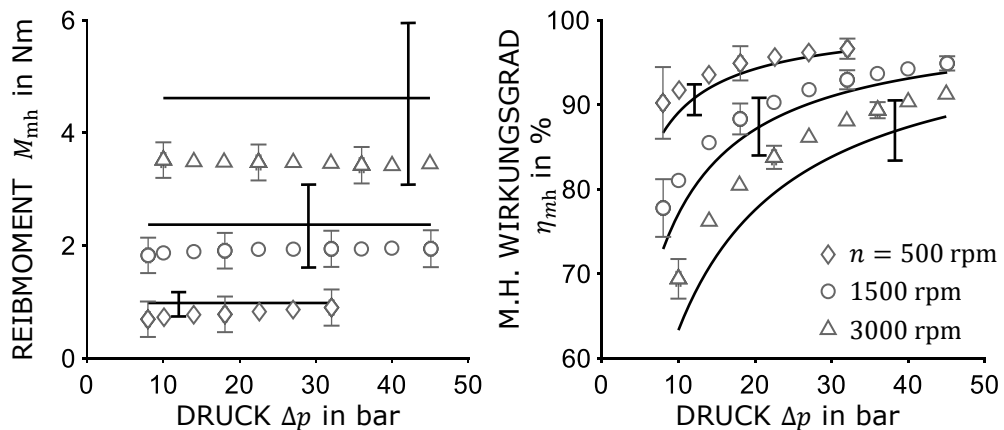


Abbildung 5.5 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Schraubepumpe SP II bei der Viskosität $\nu_{VAL} = 88$ cSt. Die schwarze Linien sind die Modelle mit $M_{const} = 0.36$ Nm, $R_\mu = 20161$, $R_\rho = 3.3$. Die schwarzen Fehlerbalken an den Modellen stellen die 95 % Konfidenzintervalle der Modelle dar. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

Aufgrund der Modellabweichungen bei der hohen Drehzahl lässt sich für die Schraubepumpe feststellen, dass die Modellannahme *M-VII* nur bis zu einem mittleren Drehzahlbereich gültig ist. Auf Basis der Ergebnisse der Untersuchung der physikalischen Ähnlichkeit des Reibmomentverhaltens ist bereits aus der Abbildung 3.10, die den Verlauf $M_{mh}^+(Re)$ bei konstantem spezifischen Druck Δp^+ darstellt, ersichtlich, dass nur annähernd ein quadratischer Verlauf vorliegt. Dieser Verlauf stellt unter anderem die Drehzahlabhängigkeit im trägheitsdominierten Verlustterm dar. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass sich der Druckverlustbeiwert der Trägheitsverluste des Förderstroms,

der dem Modellparameter R_g entspricht, bei steigender Drehzahl und daher zunehmender Reynoldszahl im Förderstrom kleiner wird.

Die Ergebnisse der Skalierung des Reibmoments und des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads anhand des Verdrängervolumens sind für die Schraubenpumpenbaureihe in Abbildung 5.6 dargestellt. Analog zur Leckage und dem volumetrischen Wirkungsgrad sind die Schraubenpumpen SP I, SP II und SP III durch die Maßstabsfaktoren $M_V = 1, 1.65$ und 2.72 dargestellt. Wie zu erkennen, wird das Reibmoment sowohl für SP II als auch für SP III bei allen Drehzahlen geringfügig unterschätzt. Auffallend dabei ist, dass die Modellabweichungen annähernd konstant sind. Betrachtet man den konstanten Reibmomentanteil der Referenzpumpe mit $M_{\text{const,ref}} = 0.01$ Nm, ist dieser vernachlässigbar klein und wird dementsprechend nicht skaliert. Die Auswertung der Messdaten für SP II und SP III ergeben jedoch Werte für $M_{\text{const}} = 0.5$ Nm und $M_{\text{const}} = 1$ Nm. Dies entspricht annähernd der Modellabweichung für SP II und SP III und stellt somit den Grund für die Abweichungen beim Reibmomentmodell als auch beim mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad dar. Vor diesem Hintergrund werden die erzielten Ergebnisse, analog zur Leckage, als positiv bewertet und die Modellannahme *M-II* für das Reibmoment als gültig angenommen. Die Skalierung des betriebsgrößenunabhängigen Verlustterms des Reibmoments ist dagegen nicht ausreichend.

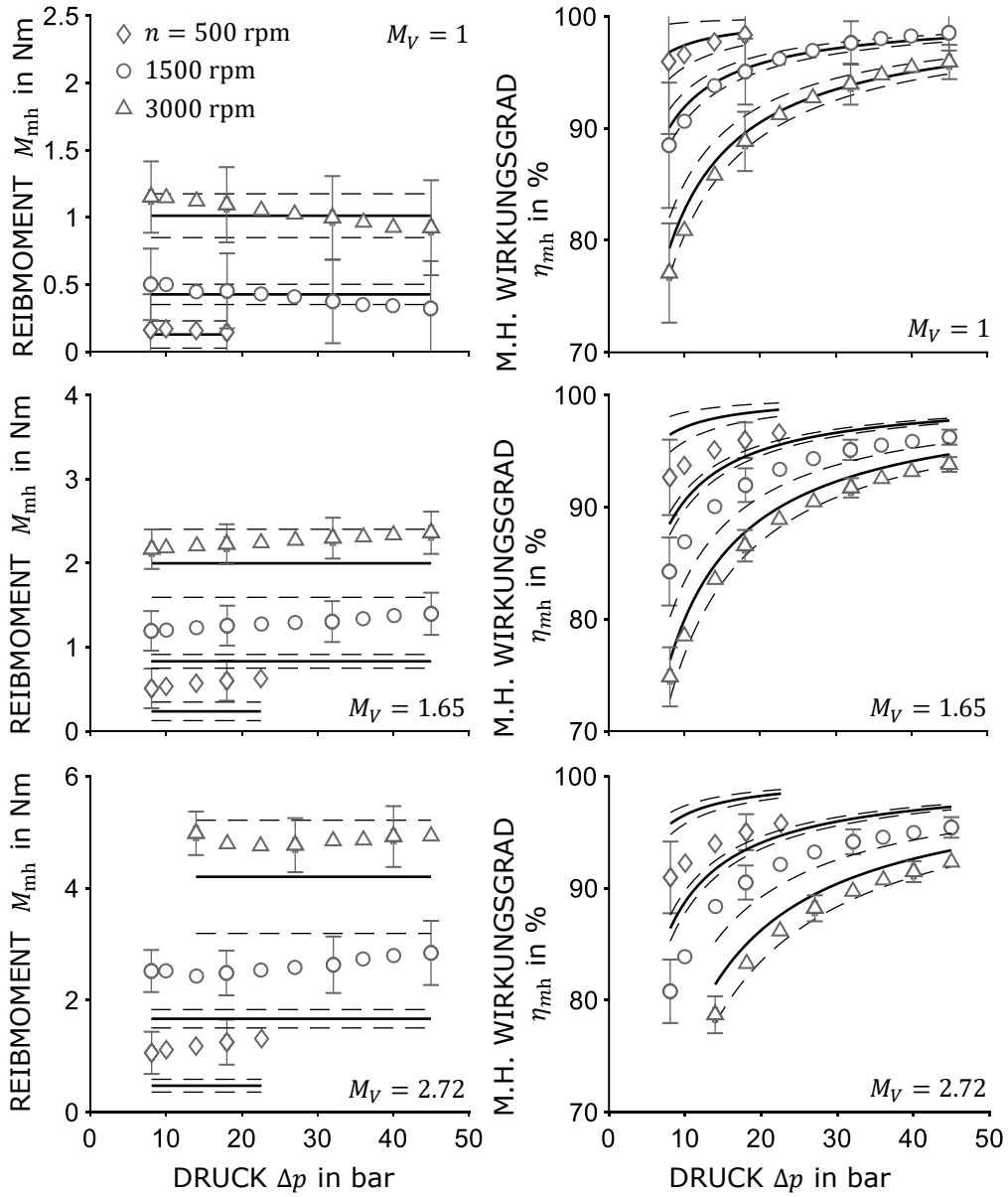


Abbildung 5.6 – Reibmoment M_{mh} und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad η_{mh} über Differenzdruck Δp für die Schraubenpumpenbaureihe SP I, II und III mit $M_V = 1, 1.65, 2.72$ bei einer Viskosität von $\nu = 44$ cSt. Die schwarzen Linien sind die Modelle. Die gestrichelten Linien stellen die 95% Konfidenzintervalle der Modelle dar. Die Modellparameter sind $M_{const,ref} = 0.01$ Nm, $R_{\mu,ref} = 12265$, $R_{\rho,ref} = 4.9$.

5.2 Zahnradpumpen

Leckage und volumetrischer Wirkungsgrad

Abbildung 5.7 zeigt die Validierungsergebnisse für das Leckagemodell und das Modell des volumetrischen Wirkungsgrads für die Zahnradpumpe ZP I. Dabei sind die Leckage und der volumetrische Wirkungsgrad jeweils über der Druckdifferenz der Pumpe aufgetragen. Die Darstellung der Diagramme ist dabei identisch zur Betrachtung der Leckage bei der Schraubepumpe SP II. Die Modelle erzielen nur bei $\nu_{\text{kal}} = 22$ sehr gute Ergebnisse und liegen im betrachteten Betriebsbereich vollständig innerhalb der Messunsicherheiten der Messdaten. Für $\nu_{\text{kal}} = 11$ überschätzt das Modell die Leckage für alle Drücke jedoch deutlich, sodass es erwartungsgemäß auch beim Modell des volumetrischen Wirkungsgrads zu deutlichen Abweichungen kommt. Betrachtet man in diesem Zusammenhang Abbildung 3.4 in der die spezifische Leckage Q_L^+ über dem spezifischen Druck Δp^+ aufgetragen ist, erkennt man, dass der Verlauf bei niedrigen Viskositäten etwas flacher verläuft, als bei hohen Viskositäten. Hier liegt die Überschätzung der Leckage bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ begründet. Die erzielten Werte der Modellparameter bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt mit $m = 0.69$ und bei $\nu_{\text{kal}} = 22$ cSt mit $m = 0.79$ bestätigen dies. Die Vertrauensintervalle der Modelle umschließen bei $\nu_{\text{kal}} = 22$ jeweils die Messpunkte. Erwartungsgemäß ist das Vertrauensintervall für $\nu_{\text{kal}} = 11$ größer. Dennoch sind die Modellabweichungen so groß, dass das Vertrauensintervall des Modells in diesem Fall die Messdaten nicht einschließt.

Aufgrund der hohen Modellabweichungen für $\nu_{\text{kal}} = 11$ sowie des dargestellten Sachverhalts kann festgestellt werden, dass die Modellannahme *M-VI* nur für den geringeren Extrapolationsbereich im untersuchten Betriebsbereich gültig ist.

Im Folgenden werden die Validierungsergebnisse im Rahmen der Skalierung des Pumpenverhaltens anhand des Verdrängervolumens betrachtet. Die unvollständige geometrische Ähnlichkeit der Zahnradpumpenbaureihe wird im Fall der Leckage durch den Skalierungsfaktor $M_V^{2/3(1-m_{\text{ref}})}$ berücksichtigt. Analog zum Vorgehen bei den Schraubepumpen kann diese Skalierung anhand der Messdaten überprüft werden. Dafür wird das Verhältnis der kalibrierten Modellparameter L der Zahnradpumpen ZP II, III und IV zum Modellparameter L_{ref} der Referenzpumpe ZP I gebildet. Diese experimentell bestimmten Werte für L/L_{ref} sind dem Skalierungsfaktor in Abbildung 5.2 gegenüber gestellt. Dabei zeigt sich, dass die experimentellen Werte vom erwarteten Modellverlauf abweichen und mit steigendem M_V abnehmen. Diese Abweichungen werden, wie bei der Schraubepumpenbaureihe, mit den Toleranzen der Spaltmaße in Verbindung gebracht und sind Ausdruck der Unsicherheit der Modellannahme

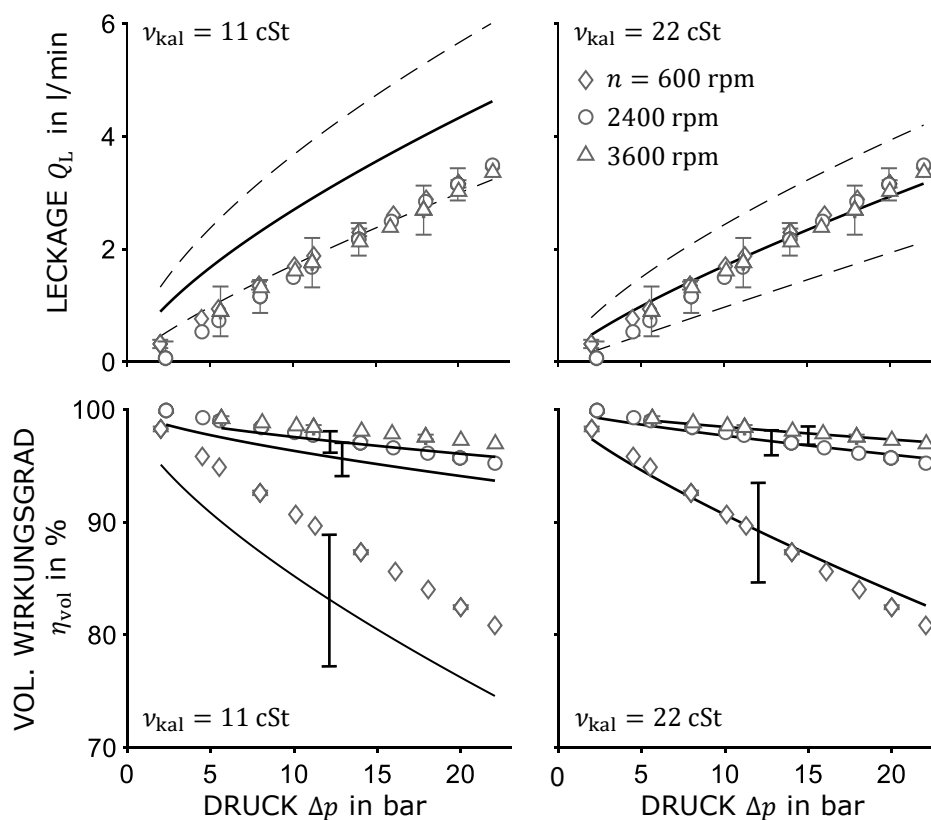


Abbildung 5.7 – Leakage Q_L über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP I bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Die schwarze Linien sind die Modelle. Die gestrichelten Linien bzw. die schwarzen Fehlerbalken an den Modellen stellen die 95% Konfidenzintervalle der Modelle dar. Für $\nu_{kal} = 11$ cSt sind $m = 0.69$ und $L = 10^{-4.4}$, für $\nu_{kal} = 22$ cSt sind $m = 0.79$ und $L = 10^{-5.4}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

M-II, dass die mittlere Spalthöhe \bar{s} für die betrachtete Baureihe konstant ist. Vor dem Hintergrund dieses Ergebnisses werden die Modellvorhersagen für die Leckage und den volumetrischen Wirkungsgrad der Zahnradpumpen ZP II, III und IV in Abbildung 5.9 betrachtet. In den Diagrammen sind die Zahnradpumpen ZP I, II, III und IV durch die Maßstabsfaktoren $M_V = 1, 1.2, 1.6$ und 2 dargestellt. Die Modellabweichung nimmt erwartungsgemäß mit steigender Baugröße zu, wobei die Leckage überschätzt und der volumetrische Wirkungsgrad unterschätzt wird. Dennoch sind die Modellabweichungen, insbesondere für ZP II und überwiegend auch für ZP III gering, sodass die Messwerte noch innerhalb der Vertrauensintervalle der Modelle liegen. Vor dem Hintergrund der starken Vereinfachung in Modellannahme *M-II* werden die erzielten Ergebnisse der Baugrößenskalierung ebenfalls als positiv bewertet.

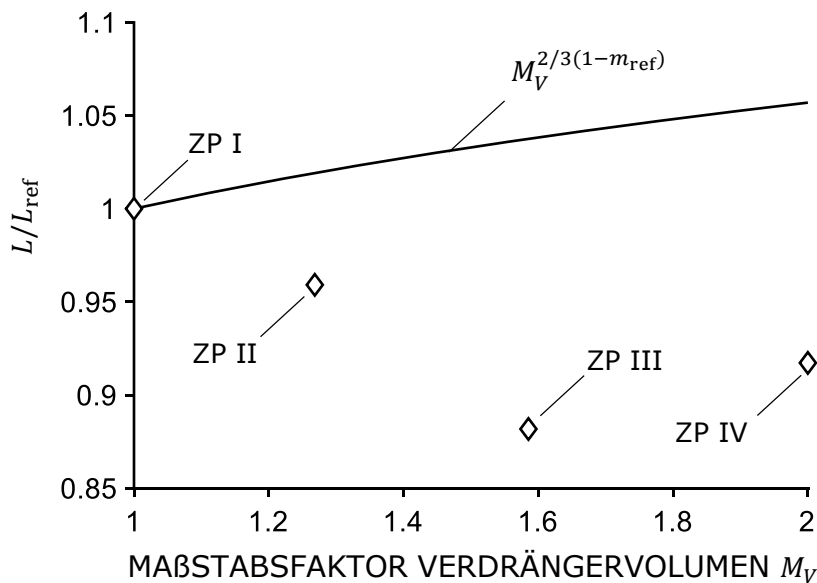


Abbildung 5.8 – Verhältnis L/L_{ref} über Maßstabsfaktor des Verdrängervolumens M_V für die Zahnradpumpenbaureihe und für den Kalibrationsbereich $\nu = 44 \text{ cSt}$ und 88 cSt . Die schwarze Linie ist das Modell mit $m_{\text{ref}} = 0.88$. Die Marker stellen das experimentell bestimmte Verhältnis L/L_{ref} dar.

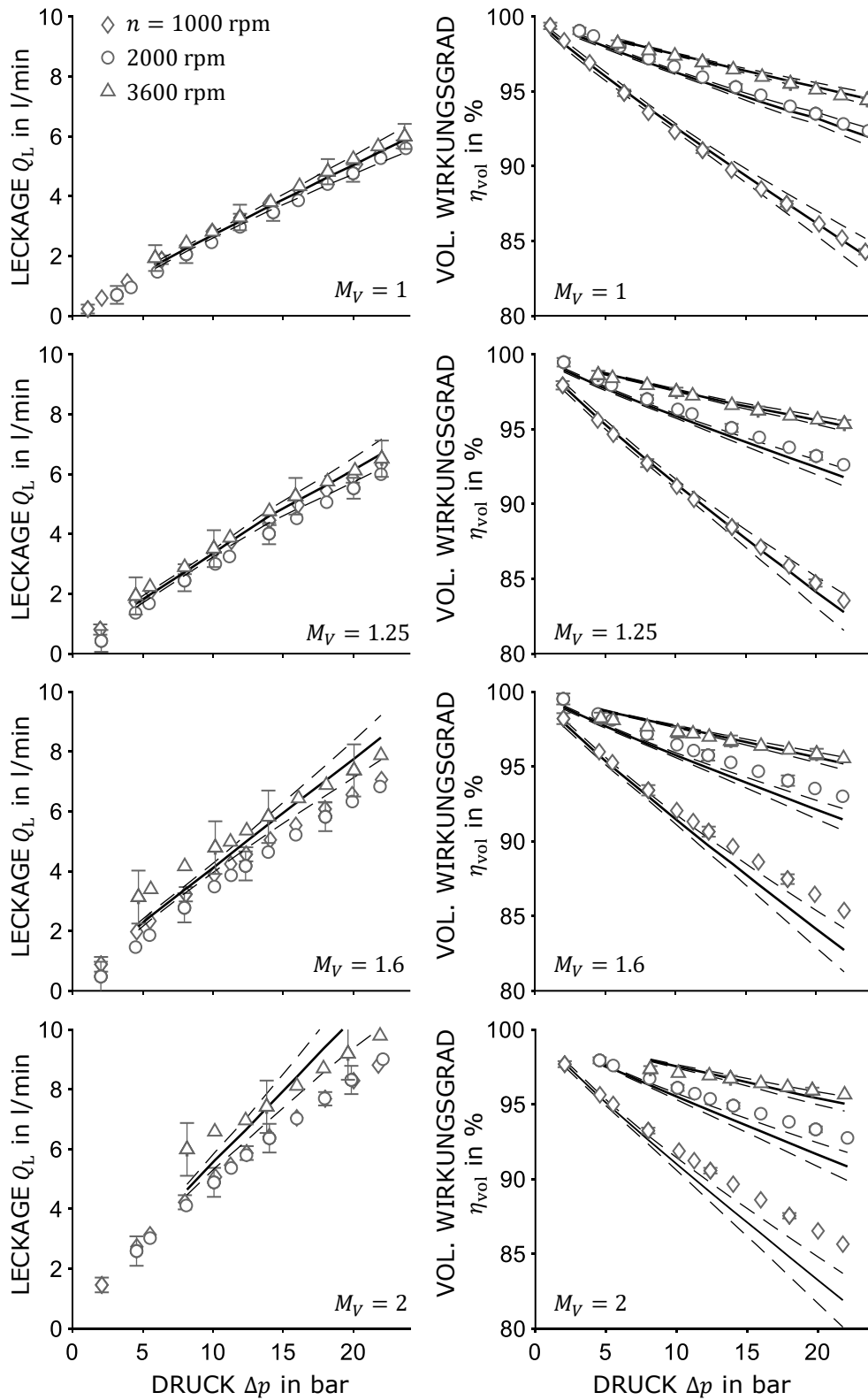


Abbildung 5.9 – Leakage Q_L und volumetrischer Wirkungsgrad η_{vol} über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpen ZP I, II, III und IV mit $M_V = 1, 1.25, 1.6$ und 2 bei einer Viskosität von $\nu = 44$ cSt. Die schwarzen Linien sind die Modelle. Die gestrichelten Linien stellen die 95 % Konfidenzintervalle der Modelle dar. Die Modellparameter sind $m_{ref} = 0.88$ und $L_{ref} = 10^{-6.2}$.

Reibmoment und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad

Analog zur Schraubepumpe SP II werden zunächst die unterschiedlichen Verlustterme des Reibmoments der Zahnradpumpe ZP I betrachtet. In Abbildung 5.10 sind hierfür zum einen die gemessene Reibmomentverläufe über dem Differenzdruck der Pumpe bei verschiedenen Drehzahlen und konstanter Viskosität als auch die gemessenen Reibmomentverläufe über der Viskosität bei verschiedenen Drücken und konstanter Drehzahl aufgetragen. Die Darstellung der Diagramme ist dabei identisch zur Betrachtung des Reibmoments bei der Schraubepumpe. Aus diesen Diagrammen ist ersichtlich, dass eine lineare Abhängigkeit des Reibmoments vom Differenzdruck besteht³. Der druckabhängige Verlustterm M_C wird für die Modellierung des Reibmoments der betrachteten Zahnradpumpen berücksichtigt. Ferner werden die Betriebspunkte, in denen Mischreibung auftritt, nicht für die Kalibration berücksichtigt. Eine weitere Einschränkung bei der Modellvalidierung der Zahnradpumpen stellt die Auswahl der Drehzahlen dar. Die Messungen der Zahnradpumpen wurden überwiegend bis Drehzahlen von 3600 rpm gemessen. Werden die Betriebspunkte bei 3600 rpm berücksichtigt, weichen die Modellvorhersagen jedoch deutlich von den Messwerten ab. Aus diesem Grund wurden die Messwerte bei Drehzahlen von 3600 rpm im Rahmen der Modellvalidierung nicht berücksichtigt. Es konnte nicht abschließend geklärt werden, weshalb diese Messwerte einen derartigen Einfluss hatten.

Abbildung 5.11 zeigt die Validierungsergebnisse für das Reibmomentmodell und das Modell des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads für die Zahnradpumpe ZP I. Die Darstellung der Diagramme ist dabei überwiegend identisch zur Schraubepumpe SP II, lediglich die Vertrauensintervalle werden mit einer gestrichelten Linie dargestellt.

Die Modelle erzielen bei allen Drehzahlen sehr gute Übereinstimmungen mit den Messwerten. Das Vertrauensintervall des Reibmomentmodells fällt im Vergleich zur Schraubepumpe deutlich geringer aus. Dies ist auf die vergleichmäßig geringe relative Messunsicherheit der Kalibrationsdaten zurückzuführen. Auch bei der Zahnradpumpe werden die Vertrauensintervalle mit zunehmender Drehzahl größer. Die Messwerte sind jeweils in den Vertrauensintervallen enthalten. Aufgrund der geringen Modellabweichung lässt sich für die Zahnradpumpe daher feststellen, dass die Modellannahme *M-VII* für den untersuchten Betriebsbereich unter Berücksichtigung der genannten Einschränkungen gültig ist.

³ ZARDIN U. A. ([102], 2019) verweisen in diesem Zusammenhang auf ISO/TR 14179-1:2001 ([33], 2001), die eine Reibungsverlust im Zahneingriff von Zahnradpumpen angibt, der linear zur Druckdifferenz einer Zahnradpumpe ist.

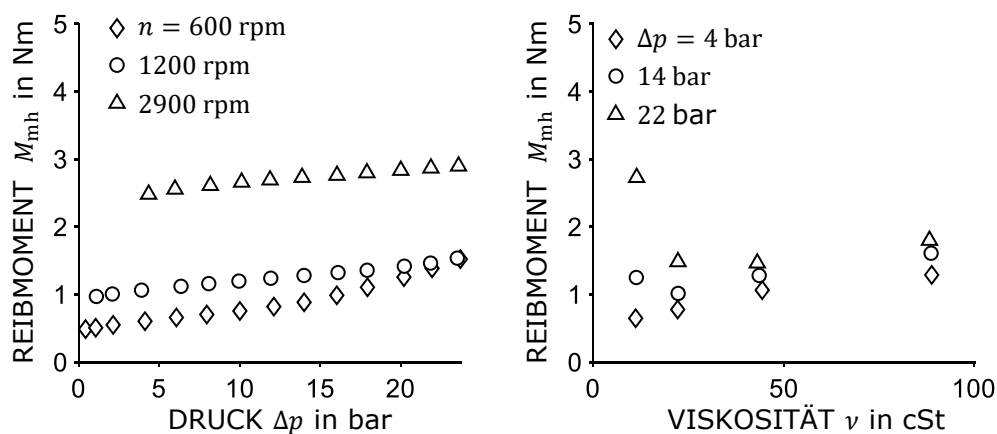


Abbildung 5.10 – Das Reibmoment M_{mh} über die Differenzdruck Δp bei $\nu = 44$ cSt und das Reibmoment M_{mh} über die Viskosität ν bei $n = 1200$ rpm für die Zahnradpumpe ZP I.

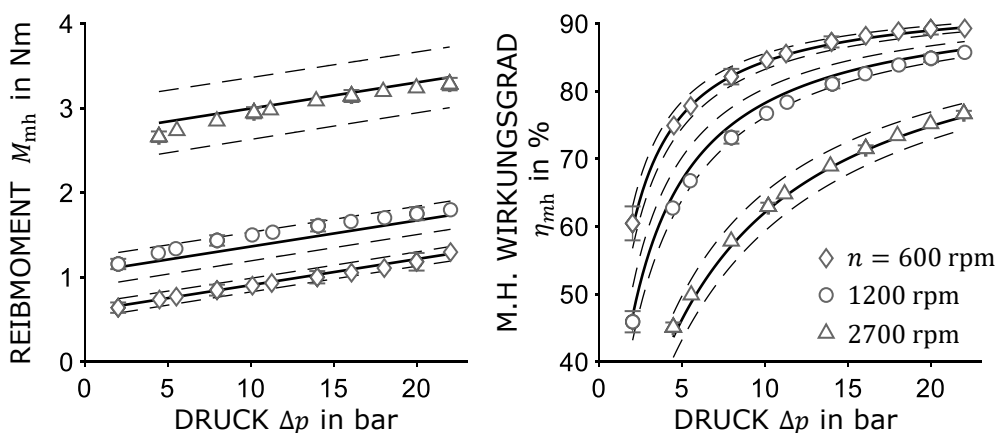


Abbildung 5.11 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP I bei der Viskosität $\nu_{VAL} = 88$ cSt. Die schwarze Linien sind die Modelle mit $M_{const} = 0.26$ Nm, $R_C = 0.01099$, $R_\mu = 10582$, $R_q = 22.5$. Die gestrichelten Linien stellen die 95 % Konfidenzintervalle der Modelle dar. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

Die Ergebnisse der Skalierung des Reibmoments und des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads anhand des Verdrängervolumens sind für die Zahnradpumpenbaureihe in Abbildung 5.12 dargestellt. Analog zur Leckage und dem volumetrischen Wirkungsgrad sind die Zahnradpumpen ZP I, II, III und IV durch die Maßstabsfaktoren $M_v = 1, 1.25, 1.6$ und 2 dargestellt. Sowohl die Drehzahlabhängigkeit als auch die Druckabhängigkeit des Reibmoments werden durch das Reibmomentmodell sehr gut abgebildet. Aus diesem Grund liegen auch beim mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrad keine wesentlichen Modellabweichungen vor. Die erzielten Ergebnisse für die Zahnradpumpenbaureihe werden daher als überaus positiv bewertet und die Modellannahme *M-II*, dass die mittlere Spalthöhe \bar{s} über die Baureihe konstant bleibt, als gültig angenommen.

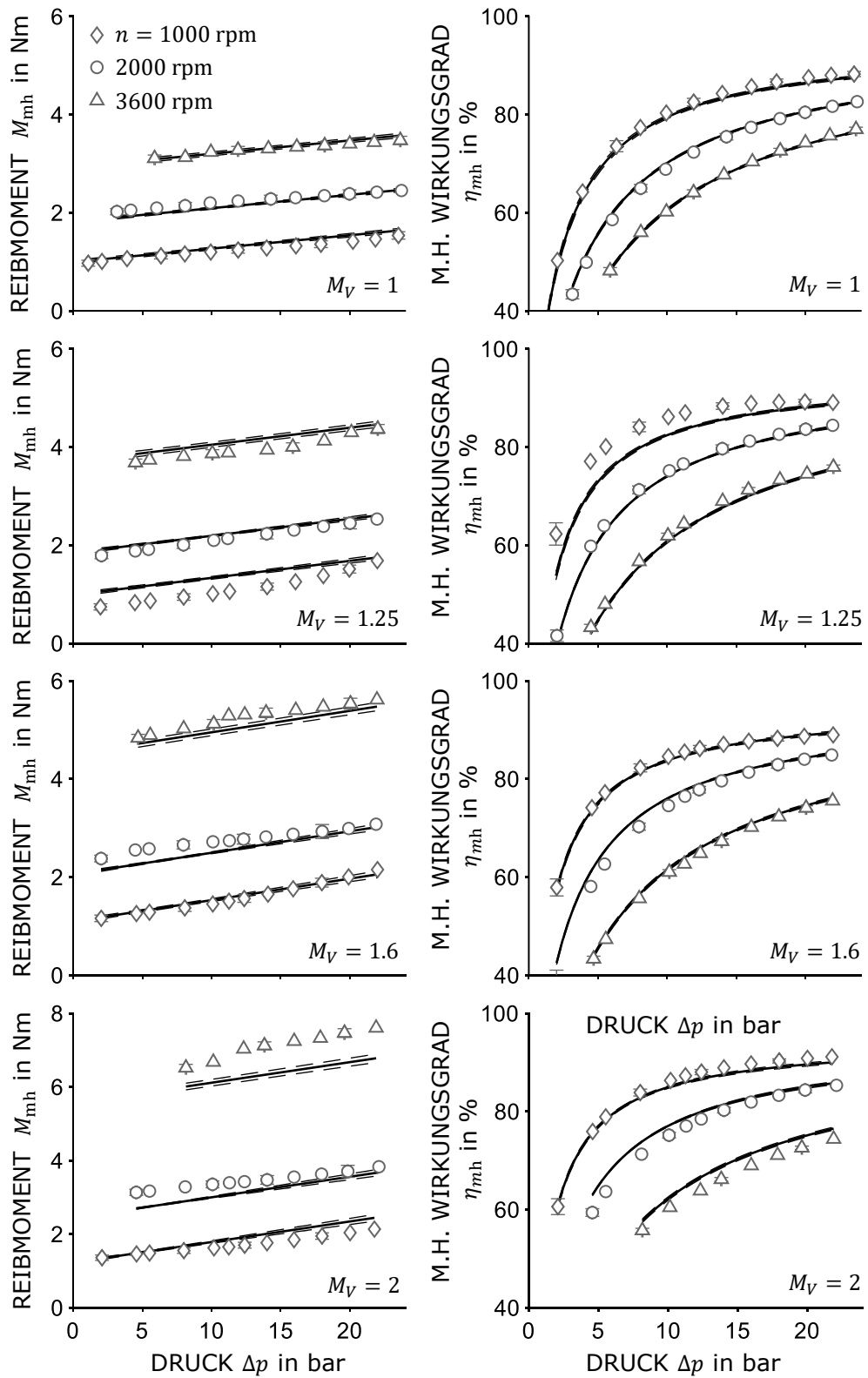


Abbildung 5.12 – Reibmoment M_{mh} und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad η_{mh} über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpenbaureihe ZP I, II, III und IV mit $M_V = 1, 1.25, 1.6$ und 2 bei einer Viskosität von $\nu = 44$ cSt. Die schwarzen Linien sind die Modelle. Die gestrichelten Linien stellen die 95 % Konfidenzintervalle der Modelle dar. Die Modellparameter sind $M_{const,ref} = 0.57$ Nm, $R_{C,ref} = 0.0088$, $R_{\mu,ref} = 10232$, $R_{\rho,ref} = 10.8$.

5.3 Drehkolbenpumpe

Leckage und volumetrischer Wirkungsgrad

Abbildung 5.13 zeigt die Validierungsergebnisse für das Leckagemodell und das Modell des volumetrischen Wirkungsgrads für die Drehkolbenpumpe DP. Dabei sind die Leckage und der volumetrische Wirkungsgrad jeweils über der Druckdifferenz der Pumpe aufgetragen. Die Darstellung der Diagramme ist dabei identisch zur Betrachtung der Leckage bei der Schraubpumpe und der Zahnradpumpe.

Die Modelle erzielen analog zur Zahnradpumpe nur bei $\nu_{\text{kal}} = 22$ sehr gute Ergebnisse und liegen im betrachteten Betriebsbereich vollständig innerhalb der Messunsicherheiten der Messdaten. Für $\nu_{\text{kal}} = 11$ überschätzt das Modell die Leckage für alle Differenzdrücke, sodass es erwartungsgemäß auch beim Modell des volumetrischen Wirkungsgrads zu nennenswerten Abweichungen kommt. Auch in diesem Fall ist aus dem Zusammenhang der spezifischen Leckage Q_L^+ über dem spezifischen Druck Δp^+ in Abbildung 3.5 zu erkennen, dass der Verlauf bei niedrigen Viskositäten etwas flacher verläuft, als bei hohen Viskositäten, und hierin die Überschätzung der Leckage bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ begründet ist. In diesem Fall liegen auch die Messdaten nur teilweise im Vertrauensintervall des Modells.

Aufgrund der hohen Modellabweichungen für $\nu_{\text{kal}} = 11$ ist die Modellannahme $M-VI$ ebenfalls nur für den geringeren Extrapolationsbereich im untersuchten Betriebsbereich gültig.

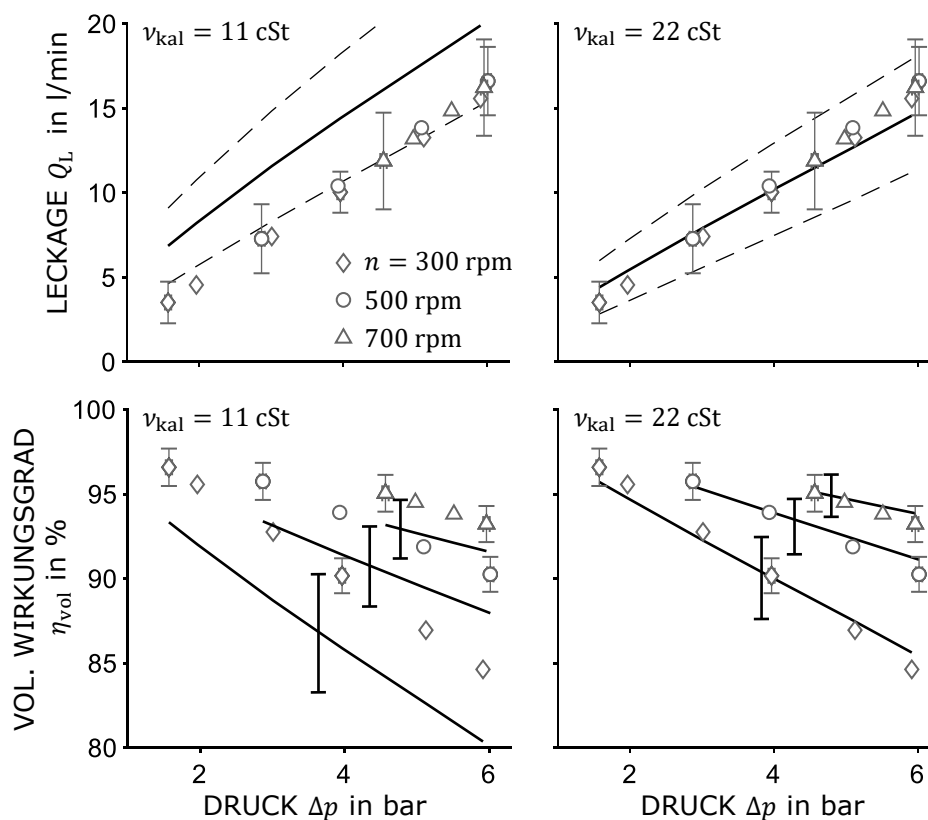


Abbildung 5.13 – Leakage Q_L über Differenzdruck Δp für die Drehkolbenpumpe DP bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Die gestrichelten Linien bzw. die schwarzen Fehlerbalken am Modell stellen die 95 % Konfidenzintervalle der Modelle dar. Für $\nu_{kal} = 11$ cSt sind $m = 0.80$ und $L = 10^{-5.2}$, für $\nu_{kal} = 22$ cSt sind $m = 0.90$ und $L = 10^{-6.2}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

Reibmoment und mechanisch-hydraulischer Wirkungsgrad

Analog zur Schraubenpumpe SP II und Zahnradpumpe ZPI werden zunächst die unterschiedlichen Verlustterme des Reibmoments der Drehkolbenpumpe DP betrachtet. In Abbildung 5.14 sind hierfür zum einen gemessene Reibmomentverläufe über dem Differenzdruck bei verschiedenen Drehzahlen und konstanter Viskosität als auch gemessene Reibmomentverläufe über der Viskosität bei verschiedenen Differenzdrücken und konstanter Drehzahl aufgetragen. Die Darstellung der Diagramme ist dabei identisch zur Schraubenpumpe und Zahnradpumpe. Aus diesen Diagrammen ist ersichtlich, dass die Abhängigkeit des Reibmoments vom Differenzdruck gegenüber der Abhängigkeit von der Drehzahl und Viskosität vernachlässigbar klein ist. Der druckabhängige Verlustterm M_C wird für die Modellierung des Reibmoments der betrachteten Drehkolbenpumpe daher nicht berücksichtigt.

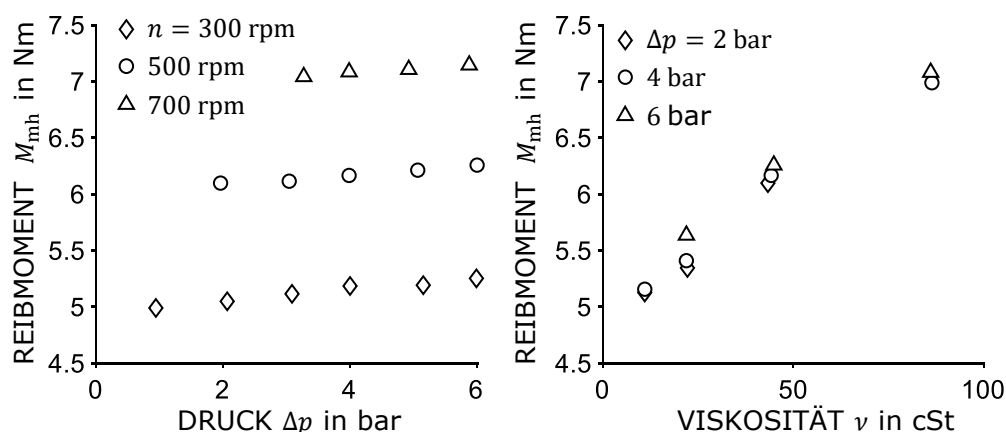


Abbildung 5.14 – Das Reibmoment M_{mh} über die Differenzdruck Δp bei $\nu = 44$ cSt und das Reibmoment M_{mh} über die Viskosität ν bei $n = 500$ rpm für die Drehkolbenpumpe DP.

Abbildung 5.15 zeigt die Validierungsergebnisse für das Reibmomentmodell und das Modell des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads für die Drehkolbenpumpe DP. Die Darstellung der Diagramme ist dabei ebenfalls identisch zu den Darstellungen des Reibmoments bei der Schraubenpumpe und der Zahnradpumpe.

Die Modelle erzielen bei der niedrigsten und mittleren Drehzahl eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Bei der höchsten Drehzahl werden die Messwerte überschätzt, jedoch liegt das Modell gerade noch am Ende des Vertrauensintervalls der Messwerte. Somit wird auch bei der Vorhersage

des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads eine gute Übereinstimmung erreicht.

Bei den Werten der Modellparameter ist bei der Drehkolbenpumpe auffällig, dass der Wert des betriebsunabhängigen Reibmoments mit 4.09 Nm besonders hoch ist. Dies ist auf den Riemenantrieb der Drehkolbenpumpe zurückzuführen, der notwendig ist, um die beiden Drehkolben synchron anzutreiben. Umfangreiche analytische Betrachtungen hierzu wurden von Stiel⁴ durchgeführt, der im Rahmen seiner Untersuchungen einen betriebsunabhängigen Reibverlust auf die Biegeverluste im Riehm zurückführt.

Die Vertrauensintervalle des Reibmomentmodells fallen, ähnlich zur Schraubenpumpe SP II, groß aus und werden mit zunehmender Drehzahl größer. Analog zur Schraubenpumpe SP II liegt die Größe des Vertrauensintervalls in der vergleichsweise großen Messunsicherheit des Reibmoments bei den Kalibrationsdaten begründet.

Aufgrund der geringen Modellabweichungen lässt sich für die Drehkolbenpumpe feststellen, dass die Modellannahme *M-VII* für den untersuchten Betriebsbereich gültig ist.

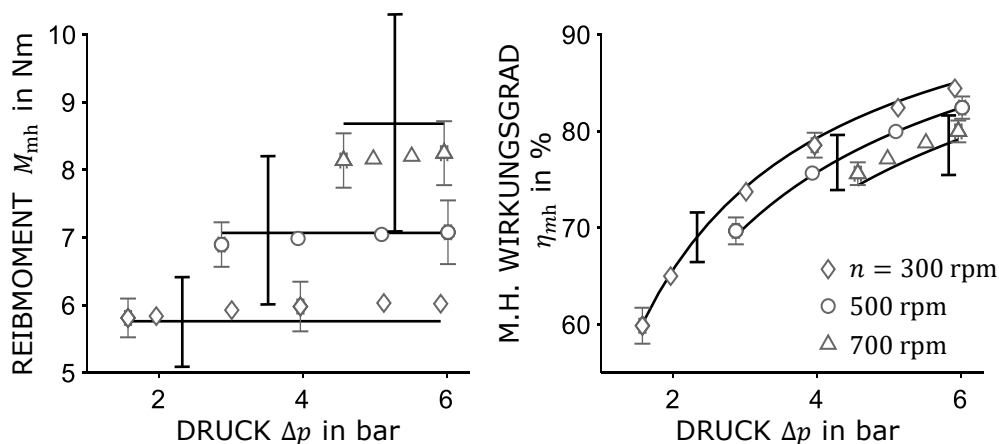


Abbildung 5.15 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Drehkolbenpumpe DP bei der Viskosität $\nu_{VAL} = 88$ cSt. Die schwarze Linien sind die Modelle mit $M_{const} = 4.09$ Nm, $R_{\mu} = 11255$, $R_{\varrho} = 6.6$. Die schwarzen Fehlerbalken am Modell stellen die 95% Konfidenzintervalle der Modelle dar. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

⁴ STIEL, *Theorie des Riemenantriebs*, ([81], 1918)

Zusammenfassung und Ausblick

Der Wirkungsgrad von rotierenden Verdrängerpumpen wird im Rahmen der allgemeinen Bemühungen um Energieeffizienz und Energieeinsparung zukünftig an Bedeutung gewinnen, sowohl hinsichtlich möglicher gesetzlicher Anforderungen an die Effizienz dieser Verdrängerpumpen als auch hinsichtlich der Bestrebungen auf Anwenderseite, den Energieverbrauch von Verdrängerpumpen bei der Anlagenplanung zu berücksichtigen und zu optimieren.

Der Berechnung des Wirkungsgradverhaltens von rotierenden Verdrängerpumpen kommt in diesem Zusammenhang eine zentrale Bedeutung zu. Dazu bedarf es physikalisch basierter und einfach anwendbarer Modelle. Darunter werden im Rahmen dieser Arbeit stationäre 0D-Modelle verstanden, die weder eine räumliche Verteilung noch eine zeitliche Abhängigkeit aufweisen. Das Wirkungsgradverhalten wird mit algebraischen Gleichungen in Abhängigkeit der relevanten Einflussgrößen beschrieben und erfordert keine Lösung mittels numerischer Methoden.

In Zusammenhang mit der Entwicklung derartiger Modelle stellt sich nun die Frage, inwieweit sich Ähnlichkeitsbeziehungen für die Wirkungsgradmodellierung rotierender Verdrängerpumpen nutzen lassen. Mit der Anwendung von Ähnlichkeitsbeziehungen lassen sich durch Abstraktion und Vereinfachung der geometrischen und physikalischen Zusammenhänge die relevanten physikalischen Größen identifizieren und ihre Anzahl mit der Methode der Dimensionsanalyse auf das notwendige Minimum reduzieren. Während Ähnlichkeitsbeziehungen bei Strömungsmaschinen seit den Untersuchungen von Otto Cordier in Wissenschaft und Industrie etabliert sind, zeigt die einschlägige Literatur, dass Ähnlichkeitsbetrachtungen bei Verdrängerpumpen nur eine untergeordnete Rolle spielen. Lediglich Schlösser¹ und Bavendiek² diskutieren bei Verdrängermaschinen die Vorteile der dimensionslosen Produkte für die Wirkungsgradbeschreibung, die sich aus dem Einsetzen der Verlust-

¹ SCHLÖSSER, „Ein mathematisches Modell für Verdrängerpumpen und -motoren“, ([67], 1961)

² BAVENDIEK, *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*, ([5], 1987)

modelle in die Teilwirkungsgraddefinitionen ergeben. Bavendiek zeigt am Beispiel von Axialkolbenmaschinen, welche Vorteile sich aus der Anwendung von geometrischen Ähnlichkeitsbeziehungen bei der Baugrößenskalierung des Wirkungsgradverhaltens ergeben. Für rotierende Verdrängerpumpen finden sich in der Literatur keine derartig validierten Untersuchungen.

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag geleistet werden, diese Lücke zu schließen. Die Arbeit widmet sich daher der Forschungsfrage:

Wie kann das Wirkungsgradverhalten rotierender Verdrängerpumpen auf Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen modelliert werden?

Für die Beantwortung dieser Forschungsfrage werden im Rahmen dieser Arbeit sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen an den drei Pumpentypen dreispindlige Schraubenpumpe, Außenzahnpumpe und zweiflügelige Drehkolbenpumpe durchgeführt. Während bei den Schraubenpumpen und Zahnpumpen jeweils eine typische Baureihe untersucht wird, beschränken sich die Untersuchungen bei den Drehkolbenpumpen auf eine einzelne Pumpe.

Zunächst wird im Rahmen theoretischer Untersuchungen die Geometrie der drei Verdrängerpumpentypen analysiert. Dabei werden durch Abstraktion und Vereinfachung der geometrischen und physikalischen Zusammenhänge die relevanten Einflussgrößen auf die Verluste und damit den Wirkungsgrad identifiziert und auf dieser Basis Modellannahmen getroffen. Dabei zeigt sich, dass die geometrische Ähnlichkeit innerhalb der betrachteten Schraubenpumpen- und Zahnpumpenbaureihe nicht gegeben ist und somit auch keine physikalische Ähnlichkeit für diese Baureihen erreicht werden kann. Während sich die unvollständige geometrische Ähnlichkeit bei Schraubenpumpen allein durch das Verhältnis von mittlerer Spalthöhe \bar{s} und Verdrängervolumen V , dargestellt durch den relativen Spalt ψ , ausdrückt, ändert sich bei der Zahnpumpenbaureihe auch das Verhältnis von Zahnraddurchmesser d_{zP} und Verdrängervolumen $V^{1/3}$ mit $\kappa_{d_{zP}}$. Aus diesem Grund wird die physikalische Ähnlichkeit lediglich für einzelne Pumpen untersucht. Hierfür werden mittels der Dimensionsanalyse, neben den genannten geometrischen Verhältnissen, die weiteren problemspezifischen dimensionslosen Produkte

$$M_{mh}^+ := \frac{M_{mh}}{\Delta p V}, \quad \Delta p^+ := \frac{\Delta p V^{2/3}}{\nu^2 \rho}, \quad Re := \frac{n V^{2/3}}{\nu} \quad (5.2)$$

definiert, die das Verlustverhalten beschreiben. Die dimensionslosen Produkte ergeben sich aus der Druckdifferenz Δp und der Drehzahl n der Pumpe, den Fördermediumseigenschaften kinematische Viskosität ν und Dichte ρ und dem Verdrängervolumen V .

Die dimensionslose Darstellung von umfangreichen experimentellen Daten aus stationären Wirkungsgradmessungen bei insgesamt vier verschiedenen Viskositäten zwischen 11 und 88 cSt zeigen, dass für alle drei Pumpentypen im Rahmen der Modellannahmen und der Messunsicherheit der Messdaten eine physikalische Ähnlichkeit vorliegt. Auf dieser Grundlage wird die Anwendung von Maßstabsfaktoren zur Vorhersage des Pumpenverhaltens diskutiert und deren einfache Umsetzung dargelegt.

Die Anwendung der Maßstabsfaktoren ist jedoch durch die Betriebsgrenzen der Pumpen beschränkt. Dies stellt neben der unvollständigen geometrischen Ähnlichkeit die Motivation für die Entwicklung eines semi-axiomatischen Leckagemodells und semi-axiomatischen Reibmomentmodells dar. Diese Modelle werden in Kapitel 3.4 hergeleitet und basieren im Fall der Leckage auf einem Potenzansatz und im Fall des Reibmoments auf dem Modell von Schlösser und Hilbrands³. Für beide Modelle werden die getroffenen Modellannahmen aus den Geometriebetrachtungen der drei Pumpentypen, die sich in einem mathematischen Zusammenhang des relativen Spalts ψ vom Maßstabsfaktor des Verdrängervolumens M_V darstellen, verwendet. Damit ist auf Basis der in dieser Arbeit hergeleiteten Modelle die Skalierung des Verlust- und Wirkungsgradverhaltens anhand der Viskosität, das in der Praxis hohe Relevanz besitzt, oder auch anhand der Baugröße, das heißt des Verdrängervolumens, möglich.

Die Modellvalidierung wird anhand der umfangreichen Messdaten, die im Rahmen dieser Arbeit gewonnen wurden, durchgeführt. Dabei werden folgende drei Fallstudien betrachtet:

- (I) Die Skalierung des Leckageverhaltens und des volumetrischen Wirkungsgrads für einzelne Pumpen anhand der Viskosität. Als Kalibrationsdaten für die Modelle werden zum einen das Kennfeld bei der Viskosität $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt und zum anderen das Kennfeld bei der Viskosität $\nu_{\text{kal}} = 22$ cSt der jeweils betrachteten Pumpe verwendet. Als Vergleichsdaten für die Validierung dienen die Daten aus dem Kennfeld der jeweiligen Pumpe bei $\nu = 88$ cSt. Die Skalierung des Leckageverhaltens der Pumpen wird somit bei 4- bzw. 8-facher Viskosität betrachtet.
- (II) Die Skalierung des Reibmomentverhaltens und des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads für einzelne Pumpen anhand der Viskosität. Als Kalibrationsdaten für die Modelle werden, im Unterschied zur Leckage, die Kennfelder bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt und bei 22 cSt der jeweils betrachteten Pumpe gemeinsam verwendet. Die Vergleichsdaten für die Validie-

³ SCHLÖSSER UND HILBRANDS, „Über den hydraulisch-mechanischen Wirkungsgrad von Verdrängerpumpen“, ([71], 1965)

rung stammen auch hier aus dem Kennfeld der jeweiligen Pumpe bei $\nu = 88$ cSt. Somit wird hier die Skalierung des Reibmomentverhaltens der Pumpen bei 4-facher Viskosität betrachtet.

- (III) Die Skalierung des Verlust- und Wirkungsgradverhaltens von Schraubepumpen und Zahnradpumpen anhand des Verdrängervolumens. Dabei wird die jeweils kleinste Pumpe der Baureihe als Referenzpumpe verwendet und für ihre Kalibration die Kennfelder bei den Viskositäten $\nu_{\text{kal}} = 44$ cSt und 88 cSt verwendet. Als Vergleichsdaten für die Validierung dienen die Daten aus den Kennfeldern der übrigen Pumpen der Schraubepumpen- und Zahnradpumpenbaureihe bei $\nu = 44$ cSt.

Die Validierungsergebnisse zeigen für Fall (I), dass das Leckagemodell für alle Pumpen bei $\nu_{\text{kal}} = 22$ sehr gute Ergebnisse erreicht. Dementsprechend werden auch die Wirkungsgradverläufe durch das Modell mit hoher Genauigkeit dargestellt. Bei $\nu_{\text{kal}} = 11$ erreicht das Leckagemodell lediglich bei Schraubepumpen eine ausreichende Übereinstimmung. Für die Zahnradpumpen und die Drehkolbenpumpe wird die Leckage dagegen teilweise sehr deutlich überschätzt. Aus diesem Grund liegen auch bei der Vorhersage des volumetrischen Wirkungsgrades nennenswerte Abweichungen vor.

Im Fall (II) zeigt die Modellvalidierung für Zahnradpumpen und die Drehkolbenpumpe überwiegend sehr gute Ergebnisse und zwischen Messdaten und Reibmomentmodell bzw. dem Modell des mechanisch-hydraulischen Wirkungsgrads liegen nur geringe Abweichungen vor. Bei den Schraubepumpen trifft dies nur bei niedrigen und mittleren Drehzahlen zu. Bei hohen Drehzahlen werden die Reibmomente dagegen deutlich überschätzt.

Im Fall (III) zeigt die Modellvalidierung sowohl für die Leckage als auch für das Reibmoment weitestgehend sehr gute Ergebnisse, die vor dem Hintergrund der starken Vereinfachung des Spalteinflusses und der hohen Unsicherheit durch Fertigungstoleranzen als überaus positiv bewertet werden.

Alle Modellvorhersagen werden mit 95 % Konfidenzintervallen dargestellt. Diese fallen überwiegend groß aus, was zum einen auf die relative Messunsicherheit des Reibmoments und der Leckage bei den Kalibrationsdaten als auch auf den großen Extrapolationsbereich zurückzuführen ist.

Vor dem Hintergrund der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse lassen sich zur Wirkungsgradmodellierung von Verdrängerpumpen folgende wesentliche Erkenntnisse hervorheben:

- (i) Auf der Grundlage von Ähnlichkeitsbeziehungen und der Dimensionsanalyse ist es möglich, das Verlust- und Wirkungsgradverhalten rotierender Verdrängerpumpen zu skalieren. Dies ist allein auf Basis der dimensionslosen Produkte, Wirkungsgraddefinitionen und Maßstabsfaktoren möglich und benötigt keine funktionalen Zusammenhänge des Verlustverhaltens der Pumpen.
- (ii) Die hergeleiteten Modelle ermöglichen die Skalierung des Leckage- und Reibmomentverhaltens über einen weiten Betriebsbereich. Dabei ist insbesondere das Leckagemodell hervorzuheben, das auf einem einfachen mathematischen Zusammenhang beruht und aus der dimensionslosen Darstellung der Leckage motiviert ist. Während eine detaillierte Spaltmodellierung sehr aufwendig ist, wird auf Basis der Dimensionsanalyse an dieser Stelle ein einfacher Zusammenhang offen gelegt, der insbesondere für Schraubepumpen sehr gute Ergebnisse in einem weiten Extrapolationsbereich erzielt.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen haben insbesondere für die Praxis eine hohe Relevanz, da sie sich einfach auf Pumpen desselben Pumpentyps übertragen lassen und für die Skalierung von Kennlinien bei unterschiedlichen Medien, Drehzahlen und Baugrößen verwendet werden können. Außerdem kann auch das methodische Vorgehen auf andere rotierende Verdrängerpumpentypen übertragen und angewendet werden.

Ferner bilden die Ergebnisse eine Grundlage für eine energetische Bewertung und einen energetischen Vergleich von Verdrängerpumpen. Auch wenn dies im Rahmen dieser Arbeit nicht dargestellt wird, zeigt das Modell eine geringe Abweichung von den Kalibrationsdaten, selbst wenn diese einen großen Betriebsbereich umfassen⁴. Somit ist das Modell nicht nur für die Vorhersage, sondern insbesondere auch für die Abbildung des Wirkungsgradverhaltens von Referenzpumpen im Rahmen einer Effizienzbewertung von Verdrängerpumpen nützlich.

Weitere Untersuchungen, die im Zusammenhang mit dieser Arbeit vorgenommen wurden, haben gezeigt, dass eine Abbildung von Fertigungsunsicherheiten auf Basis der Modellgröße relativer Spalt ψ vielversprechend ist. Ihre Berücksichtigung kann sowohl im Rahmen einer energetischen Bewertung erfolgen

⁴ PELZ UND SCHÄNZLE, *Experimentelle Validierung eines typenunabhängigen Wirkungsgradmodells von Verdrängerpumpen*, ([56], 2020)

als auch für ein Monitoring im Rahmen von werksseitigen Ausgangsprüfungen sinnvoll eingesetzt werden^{5,6}.

Ferner können einfach rechenbare Modelle, so wie sie in dieser Arbeit entwickelt wurden, auch im Rahmen der Vernetzung von Pumpen in Anlagen, mit dem Ziel eines Informationsaustauschs von Komponenten untereinander, eingesetzt werden. Gemeinsam mit Betriebsdaten aus möglichst günstigen Sensoren werden diese Modelle zu hybriden Softsensoren⁷, auf denen eine dezentrale Zustandsüberwachung basierend auf der Datenverarbeitung und Informationsgewinnung an der Pumpe über sogenannte Edge Controlling ermöglicht werden kann. Auf Basis der in dieser Arbeit hergeleiteten Modelle können aktuelle betriebliche Zustandsinformationen einer Pumpe hinsichtlich ihres Aufwands, d. h. des Energieverbrauchs bzw. der Leistungsaufnahme sowie der Funktionserfüllung bezüglich des Förderstroms, gewonnen werden. Vor diesem Hintergrund werden diese Modelle auch zukünftig, entgegen dem Trend der Forschung nach immer detaillierten Modellen, eine wichtige Rolle spielen.

⁵ PELZ UND SCHÄNZLE, *Experimentelle Validierung eines typenunabhängigen Wirkungsgradmodells von Verdrängerpumpen*, ([56], 2020)

⁶ SCHÄNZLE, STÖRMER UND PELZ, „Modeling the Efficiency of External Gear Pumps Based on Similarity Considerations“, ([66], 2018)

⁷ PELZ U. A., „Towards digitalization of hydraulic systems using soft sensor networks“, ([53], 2018)

Literatur

- [1] P. Achten, R. Mommers, T. Nishiumi, H. Murrenhoff, N. Sepehri, K. Stelson, J.-O. Palmberg und K. Schmitz. „Measuring the Losses of Hydrostatic Pumps and Motors: A Critical Review of ISO4409: 2007“. In: *ASME/BATH 2019 Symposium on Fluid Power and Motion Control*. Sarasota, Florida, USA, 2019.
- [2] C. A. L. Bailer-Jones. *Practical Bayesian inference: A primer for physical scientists*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017.
- [3] L. Barbillon und A. Poirson. „Sur une méthode thermométrique de mesure du rendement des turbines hydrauliques“. In: *La Houille Blanche* (1920), S. 217–221.
- [4] H. Baum. „Einsatzpotentiale neuronaler Netze bei der CAE-Tool unterstützten Projektierung fluidtechnischer Antriebe“. Dissertation. RWTH Aachen, 2001.
- [5] R. Bavendiek. *Verlustkennwertbestimmung am Beispiel von hydrostatischen Maschinen in Schrägachsenbauweise*. Bd. 122. Reihe7: Strömungsmechanik. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1987.
- [6] T. Blochowicz und Laeri Franco. *Einführung in die Messdatenanalyse für das Physikalische Grundpraktikum*. Hrsg. von Technische Universität Darmstadt. 2011.
- [7] F. Brand. „Thermodynamische Verfahren zur Messung des Wirkungsgrades von hydraulischen Maschinen“. In: *Technica* 26 (1968), S. 2499–2504.
- [8] P. W. Bridgeman. *Dimensional Analysis*. New Haven, USA: Yale University Press, 1922.
- [9] E. Buckingham. „On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations“. In: *Physical review* 4.4 (1914), S. 345–376.

- [10] P. Casoli, F. Campanini, A. Bedotti, M. Pastori und A. Lettini. „Overall Efficiency Evaluation of a Hydraulic Pump With External Drainage Through Temperature Measurements“. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 140.8 (2018).
- [11] O. Cordier. „Ähnlichkeitsbeziehungen für Strömungsmaschinen“. In: *BWK* 5.10 (1953), S. 337–340.
- [12] T. Corneli, N. Preuß, O. Troßmann und P. F. Pelz. „Experimental studies on the volumetric efficiency of triple screw pumps“. In: *Proceedings of International VDI Conference Screw Machines 2014*. Dortmund, Germany, 2014.
- [13] G. K. Costa und N. Sepehri. „Understanding overall efficiency of hydrostatic pumps and motors“. In: *International Journal of Fluid Power* 19.2 (2018), S. 106–116.
- [14] E. Dalla Lana und V. J. de Negri. „A New Evaluation Method for Hydraulic Gear Pump Efficiency through Temperature Measurements“. In: *SAE 2006 Commercial Vehicle Engineering Congress & Exhibition*. Chicago, USA, 2006.
- [15] European Commission. *Commission regulation (EC) No 641/2009 implementing Directive 2005/32/EC of the European Parliament and of the Council with regard to ecodesign requirements or glandless standalone circulators and glandless circulators integrated in products*.
- [16] European Commission. *Commission Regulation (EU) No 547/2012 of 25 June 2012 implementing Directive 2009/125/EC of the European Parliament and of the Council with regard to ecodesign requirements for water pumps*.
- [17] European Parliament, Council of the European Union. *Directive 2009/125/EC of the European Parliament and of the Council of 21 October 2009 establishing a framework for the setting of ecodesign requirements for energy-related products*.
- [18] W. Fister. *Physikalische Voraussetzungen, Kenngrößen, Elementarstufen der Strömungs- und Verdrängermaschinen*. Bd. 1. Fluidenergiemaschinen. Berlin: Springer, 1984.
- [19] M. H. J. Geimer. „Meßtechnische Untersuchung und Erstellung von Berechnungsgrundlagen zur Ermittlung der Einsatzgrenze dreispindliger Schraubenpumpen“. Dissertation. RWTH Aachen, 1995.
- [20] G. Grabow. „Optimalbereiche von Fluidenergiemaschinen-Pumpen und Verdichter“. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 67.3 (2002), S. 100–106.

- [21] G. H. Grabow. „Das erweiterte “Cordier”-Diagramm für Fluidenergie-maschinen und Verbrennungsmotoren“. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 59.3 (1993), S. 42–50.
- [22] S. J. Hall. „Statistical analysis of multiple hydrostatic pump flow loss models“. Master Thesis. Iowa State University, 2014.
- [23] H. Hertz. *Die Prinzipien der Mechanik*. Leipzig: JA Barth, 1894.
- [24] M. Hock. „Automatisierung der Datenverarbeitung an Pumpenprüfständen mit Matlab“. Bachelorthesis. TU Darmstadt, 2019.
- [25] Hugh Falkner. *EuP Lot 11: Water pumps (in commercial buildings, drinking water pumping, food industry, agriculture)*. Hrsg. von European Commission. 2007.
- [26] K. Huhtala und M. Vilenius. „Comparison of steady state models of hydraulic pump“. In: *Proceedings of 5th Scandinavian International Conference on Fluid Power Transmission and Motion Control, PTMC*. 1997, S. 139–156.
- [27] Hydraulic Institute. *Pump life cycle costs: a guide to LCC analysis for pumping systems*. Hrsg. von Europump and U.S. Department of Energy. 2000.
- [28] B. Ioshchikhes. „Inbetriebnahme eines Prüfstands für Kennlinienmessungen von Schraubenpumpen“. Bachelorthesis. TU Darmstadt, 2018.
- [29] ISO 4391:1984. *Hydraulic fluid power; pumps, motors and integral transmissions, parameter definitions and letter symbols*. Berlin, Germany: Beuth Verlag, 1984.
- [30] ISO 4409:2007. *Hydraulic fluid power – Positive displacement pumps, motors and integral transmissions – Methods of testing and presenting basic steady state performance*. Berlin, Germany: Beuth Verlag, 2007.
- [31] ISO 4409:2019-07. *Hydraulic fluid power - Positive-displacement pumps, motors and integral transmissions - Methods of testing and presenting basic steady state performance*. Berlin, Germany: Beuth Verlag, 2019.
- [32] ISO 8426:2008. *Hydraulic fluid power – Positive displacement pumps and motors – Determination of derived capacity*. Berlin, Germany: Beuth Verlag, 2008.
- [33] ISO/TR 14179-1:2001. *Gears — Thermal capacity — Part 1: Rating gear drives with thermal equilibrium at 95 °C sump temperature*. Berlin, Germany: Beuth Verlag, 2001.
- [34] J. Ivantysyn und M. Ivantysynova. *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*. Würzburg, Germany: Vogel, 1993.

- [35] H.-S. Jeong. „A novel performance model given by the physical dimensions of hydraulic axial piston motors: model derivation“. In: *Journal of mechanical science and technology* 21.1 (2007), S. 83–97.
- [36] Joint Committee for Guides in Metrology. *Evaluation of Measurement Data—Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. 2008.
- [37] K. Jost. „Experimentelle Validierung eines Wirkungsgradmodells für Schraubenpumpen“. Bachelorthesis. TU Darmstadt, 2018.
- [38] W. Kamke. *Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse, im Physikalischen Anfänger-Praktikum: Eine elementare Einführung*. Aachen, Germany: Shaker, 2014.
- [39] H. O. Kauranne, J. T. Kajaste, A. U. Ellman und M. T. Pietola. „Applicability of pump models for varying operational conditions“. In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Fluid Power Systems and Technology*. Washington D.C., USA, 2003, S. 45–54.
- [40] T. Kim, P. Kalbfleisch und M. Ivantysynova. „The effect of cross porting on derived displacement volume“. In: *International Journal of Fluid Power* 15.2 (2014), S. 77–85.
- [41] T. Kohmaescher, R. Rahmsfeld, H. Murrenhoff und Skirde Eckhard. „Improved loss modeling of hydrostatic units: Requirement for precise simulation of mobile working machine drivelines“. In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Design, Analysis, Control and Diagnosis of Fluid Power Systems*. 2007, S. 195–206.
- [42] R. Kordak. „Ähnlichkeitswerte in dezimalgeometrischer Stufung bei Axialkolbeneinheiten“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 17.10 (1973), S. 279–284.
- [43] S. R. Logan. „The Origin and Status of the Arrhenius Equation“. In: *Journal of Chemical Education* 59.4 (1982), S. 279–281.
- [44] N. D. Manring. „Measuring Pump Efficiency: Uncertainty Considerations“. In: *Journal of Energy Resources Technology* 127.4 (2005), S. 280–284.
- [45] D. McCandlish und R. E. Dorey. „The mathematical modelling of hydrostatic pumps and motors“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Management and engineering manufacture* 198.3 (1984), S. 165–174.

- [46] M. Metzger. „Experimentelle Validierung eines Wirkungsgradmodells für Schraubenpumpen“. Bachelorthesis. TU Darmstadt, 2019.
- [47] H. Molly. „Die Zahnradpumpe mit evolventischen Zähnen“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 2.1 (1958), S. 24–26.
- [48] H. Muschelknautz. „Das Anfahrtsverhalten hydrostatischer Verdrängermaschinen“. In: *O+P - Ölhydraulik und Pneumatik* 19.9 (1975), S. 687–694.
- [49] H. Muschelknautz. „Volumetrische Verluste an hydrostatischen Verdrängermaschinen“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 5 u. 7 (1974), S. 207–410, 535–538.
- [50] J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT Press, 1977.
- [51] H. Ortwig. „New method of numerical calculation of losses and efficiencies in hydrostatic power transmissions“. In: *International Off-Highway & Powerplant Congress*. 2002.
- [52] R. Paqué. *Das Pariser Nominalistenstatut*. Berlin, Germany: DE GRUYTER, 1970.
- [53] P. F. Pelz, I. Dietrich, C. Schänzle und N. Preuß. „Towards digitalization of hydraulic systems using soft sensor networks“. In: *11th International Fluid Power Conference*. Aachen, Germany, 2018.
- [54] P. F. Pelz, P. Groche, M. E. Pfetsch und R. Platz. *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*. Berlin, Germany: Springer, 2021.
- [55] P. F. Pelz, G. Ludwig und C. Schänzle. *Funktionsrelevante Wirkungsgradbeschreibung von Verdrängermaschinen*. Hrsg. von VDMA - Fachverband Pumpen und Systeme. 2016.
- [56] P. F. Pelz und C. Schänzle. *Experimentelle Validierung eines typenunabhängigen Wirkungsgradmodells von Verdrängerpumpen*. Hrsg. von Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. 2020.
- [57] P. F. Pelz, C. Schänzle und T. Corneli. „Ähnlichkeitsbeziehungen bei Verdrängermaschinen – eine einheitliche Wirkungsgradmodellierung“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 1 (2016), S. 104–113.
- [58] W. Post. „Models for steady-state performance of hydraulic pumps: determination of displacement“. In: *Fluid Power Systems: 9th international workshop*. University of Bath, UK, 1996, S. 339–353.

- [59] N. Preuß, C. Schänzle, G. Ludwig und P. F. Pelz. „From notebooks to data-pipelines - the Darmstadt approach to handling measurement data and metadata“. In: *Proceedings of 4rd International Rotating Equipment Conference*. Wiesbaden, Germany, 2019.
- [60] C. Rohde. *Erstellung von Anwendungsbilanzen für die Jahre 2013 bis 2017*. Hrsg. von Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen e.V. 2019.
- [61] R. Rotzoll. „Untersuchungen an einer langsamläufigen Kreiselpumpe bei verschiedenen Reynoldszahlen“. In: *Konstruktion* 10 (1958), S. 121–130.
- [62] K.-E. Rydberg. „On performance optimization and digital control of hydrostatic drives for vehicle applications“. Dissertation. Linköping University of Technology, 1983.
- [63] C. Schänzle, T. Corneli und P. F. Pelz. „A Similarity based Efficiency Model of Spindle Screw Pumps“. In: *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 425.012020 (2018).
- [64] C. Schänzle, K. Jost, J. Lemmer, M. Metzger, G. Ludwig und P. F. Pelz. „ERP Positive Displacement Pumps - Experimental Validation of a Type-Independent Efficiency Model“. In: *Proceedings of 4rd International Rotating Equipment Conference*. Wiesbaden, Germany, 2019.
- [65] C. Schänzle, G. Ludwig und P. F. Pelz. „ERP Positive Displacement Pumps – Physically Based Approach Towards an Application-Related Efficiency Guideline“. In: *Proceedings of 3rd International Rotating Equipment Conference*. Düsseldorf, Germany, 2016.
- [66] C. Schänzle, N. Störmer und P. F. Pelz. „Modeling the Efficiency of External Gear Pumps Based on Similarity Considerations“. In: *BATH/ASME 2018 Symposium on Fluid Power and Motion Control*. Bath, UK, 2018.
- [67] W. M. J. Schlösser. „Ein mathematisches Modell für Verdrängerpumpen und -motoren“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 5.4 (1961), S. 122–130.
- [68] W. M. J. Schlösser. „Eine Maßstab-Theorie zur Voraussage des Verhaltens von Mitgliedern einer Familie hydraulischer Verdrängermaschinen“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 14.1 (1970), S. 1–5.
- [69] W. M. J. Schlösser. „Meten aan verdringerpompen“. Dissertation. TU Delft, 1957.

- [70] W. M. J. Schlösser und J. W. Hilbrands. „Das theoretische Hubvolumen von Verdrängerpumpen“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 7.4 (1963), S. 133–138.
- [71] W. M. J. Schlösser und J. W. Hilbrands. „Über den hydraulisch-mechanischen Wirkungsgrad von Verdrängerpumpen“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 9.9 (1965), S. 333–338.
- [72] W. M. J. Schlösser und W. K. Müller. „Was sind die Aussagen unserer Prüfstandsmessungen wert?“ In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 13.2 (1969), S. 49–52.
- [73] W. M. J. Schlösser und K. Witt. „Thermodynamisches Messen des Gesamtwirkungsgrades an hydrostatischen Antrieben“. In: *O+P - Ölhydraulik und Pneumatik* 17.10 (1973).
- [74] W. M. Schlösser und J. W. Hilbrands. „Der volumetrische Wirkungsgrad von Verdrängerpumpen“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 7.12 (1963), S. 469–476.
- [75] Shell Deutschland Oil GmbH. *Sicherheitsdatenblatt Shell Morlina S2 BL10*. 2016.
- [76] Shell Deutschland Oil GmbH. *Sicherheitsdatenblatt Shell Tellus S2 MX 100*. 2016.
- [77] Shell Deutschland Oil GmbH. *Sicherheitsdatenblatt Shell Tellus S2 MX 22*. 2016.
- [78] Shell Deutschland Oil GmbH. *Sicherheitsdatenblatt Shell Tellus S2 MX 46*. 2017.
- [79] J. H. Spurk. *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*. Berlin: Springer, 1992.
- [80] J. H. Spurk und N. Aksel. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2007.
- [81] W. Stiel. *Theorie des Riemenantriebs*. Berlin: Springer, 1918.
- [82] J. Stifter. „Experimentelle Untersuchung von Verdrängerpumpen und Automatisierung der Datenverarbeitung“. Bachelorthesis. TU Darmstadt, 2019.
- [83] S. Stonjek. „Wirkungsgradaufwertung bei Ventilatoren“. Dissertation. TU Darmstadt, 2016.
- [84] N. Störmer. „Prüfstandinbetriebnahme und experimentelle Validierung eines Wirkungsgradmodells für Zahnradpumpen“. Masterthesis. TU Darmstadt, 2018.

- [85] D. Surek. „Optimale Drehzahlen und untere Grenzdrehzahlen rotierender Verdrängerpumpen“. In: *Konstruktion* 45.2 (1993), S. 41–47.
- [86] D. Surek. „Spalströme in rotierenden Verdrängerpumpen“. In: *Konstruktion* 45.1 (1993), S. 10–15.
- [87] J. Thoma. „Mathematische Modelle und die effektive Leistung hydrostatischer Maschinen und Getriebe“. In: *O+P-Ölhydraulik und Pneumatik* 14.6 (1970), S. 233–237.
- [88] J. Thoma. „Thermodynamische Fragen zum Wirkungsgrad hydrostatischer Maschinen“. In: *O+P – Ölhydraulik und Pneumatik* 19.2 (1975), S. 91–96.
- [89] J. Thurner. „Last und Lastausgleich zyklidenverzahnter Schraubepumpen“. Dissertation. TU Darmstadt, 2013.
- [90] G. Toet. „Die Bestimmung des theoretischen Hubvolumens von hydrostatischen Verdrängerpumpen und -motoren aus volumetrischen Messungen“. In: *O+P – Ölhydraulik und Pneumatik* 14.5 (1970), S. 185–189.
- [91] G. Toet, J. Johnson, J. Montague, K. Torres und J. Garcia-Bravo. „The Determination of the Theoretical Stroke Volume of Hydrostatic Positive Displacement Pumps and Motors from Volumetric Measurements“. In: *Energies* 12.3 (2019).
- [92] G. Vetter, W. Wirth, H. Körner und S. Pregler. „Multiphase pumping with twin-screw pumps-understand and model hydrodynamics and hydroabrasive wear“. In: *Proceedings of the 17th International Pump Users Symposium*. College Station, Texas, USA, 2000.
- [93] G. Vetter. *Rotierende Verdrängerpumpen für die Prozeßtechnik*. Essen, Germany: Vulkan-Verlag, 2006.
- [94] G. Vogelpohl. „Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze“. In: *VDI-Zeitschrift* 91.16 (1949), S. 379–384.
- [95] G. Vogelpohl. „Die Stribeck-Kurve als Kennzeichen des allgemeinen Reibungsverhaltens geschmierter Gleitflächen“. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 96.9 (1954), S. 261–268.
- [96] von der Leyen. *Rede zur Eröffnung der Plenartagung des Europäischen Parlaments, Ursula von der Leyen, Kandidatin für das Amt der Präsidentin der Europäischen Kommission*. Straßburg, 2019.

- [97] R. L. Wasserstein und N. A. Lazar. „The ASA Statement on p -Values: Context, Process, and Purpose“. In: *The American Statistician* 70.2 (2016), S. 129–133.
- [98] W. E. Wilson. *Positive-displacement Pumps and Fluid Motors*. New York, USA: Pitman Publishing Corporation, 1950.
- [99] M. Wincek. „Zur Berechnung des Förderverhaltens von Schraubenspindelpumpen bei der Förderung von Flüssigkeits/Gas-Gemischen“. Dissertation. FAU Erlangen-Nürnberg, 1992.
- [100] W. Wirth. „Zur hydraulischen und tribologischen Modellierung von Exzentrerschneckenpumpen“. Dissertation. FAU Erlangen-Nürnberg, 1993.
- [101] K. K. Witt. „Die Berechnung physikalischer und thermodynamischer Kennwerte von Druckflüssigkeiten, sowie die Bestimmung des Gesamtwirkungsgrades an Pumpen unter Berücksichtigung der Thermodynamik für die Druckflüssigkeit“. Dissertation. TU Eindhoven, 1974.
- [102] B. Zardin, E. Natali und M. Borghi. „Evaluation of the Hydro—Mechanical Efficiency of External Gear Pumps“. In: *Energies* 12.13 (2019).
- [103] G. L. Zarotti und N. Nervegna. „Pump efficiencies: approximation and modeling“. In: *Fluidics quarterly* 14.3 (1982), S. 1–20.
- [104] M. Zeier, J. Hoffmann und M. Wollensack. „Metas.UncLib —a measurement uncertainty calculator for advanced problems“. In: *Metrologia* 49.6 (2012), S. 809–815.

Anhang A

Dimensionslose Darstellungen

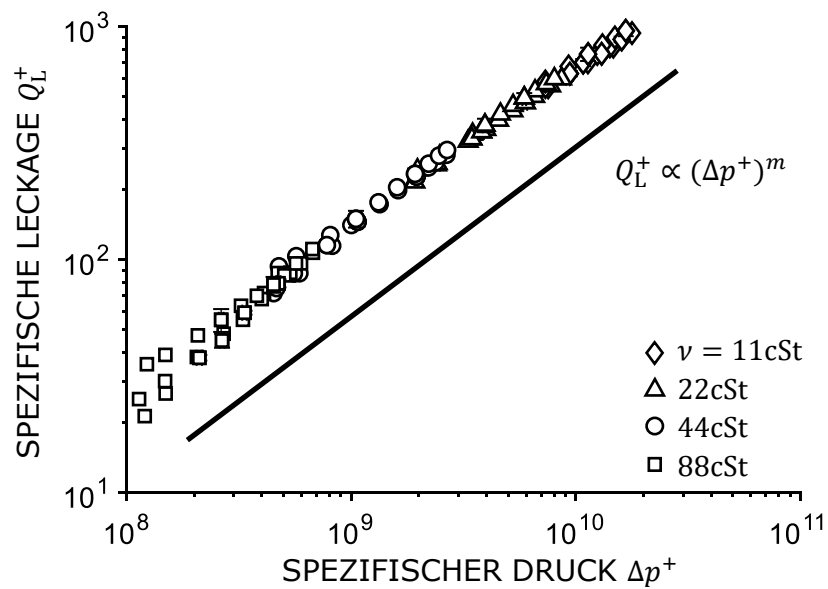


Abbildung A.1 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Schraubepumpe SP I mit $m = 0.71$.

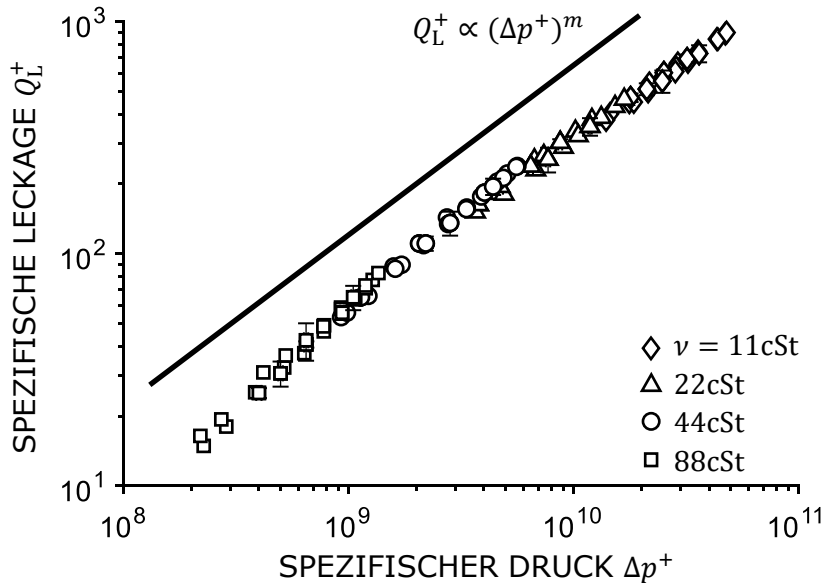


Abbildung A.2 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Schraubpumpe SP III mit $m = 0.73$.

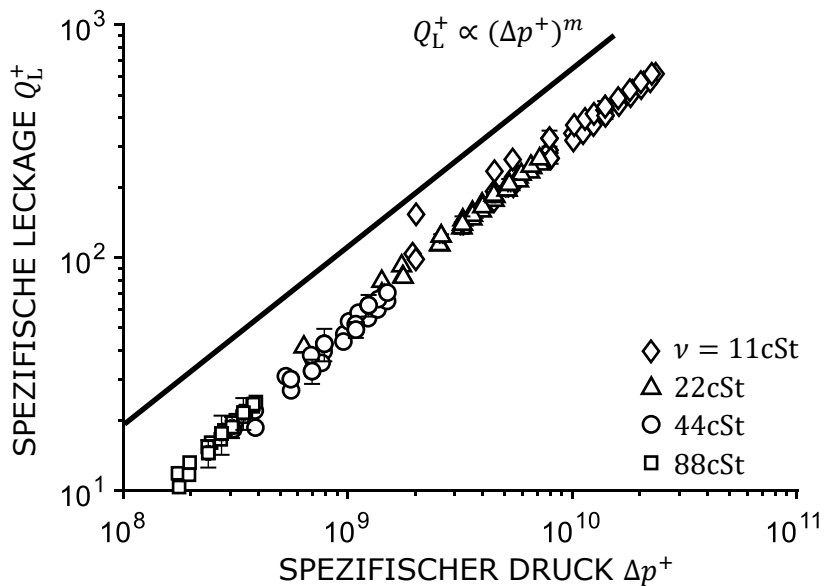


Abbildung A.3 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Zahnradpumpe ZP II $m = 0.84$.

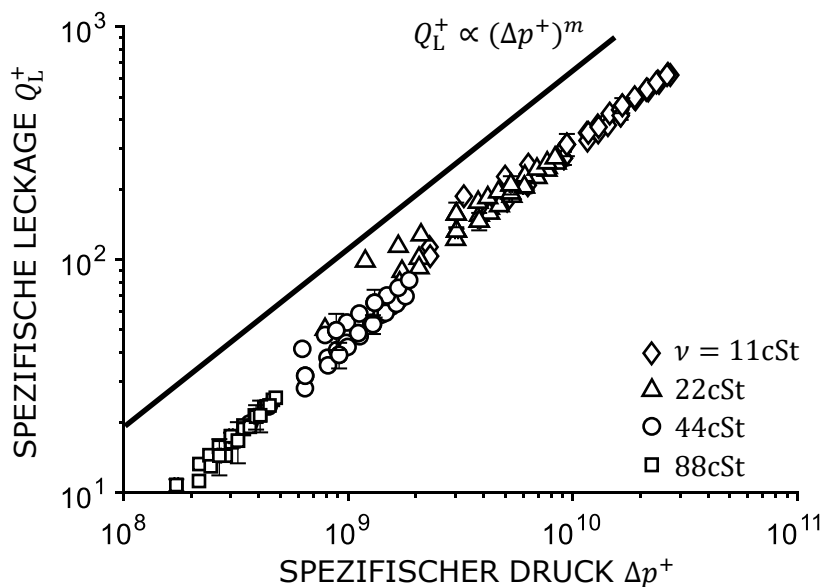


Abbildung A.4 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Zahnradpumpe ZP III $m = 0.83$.

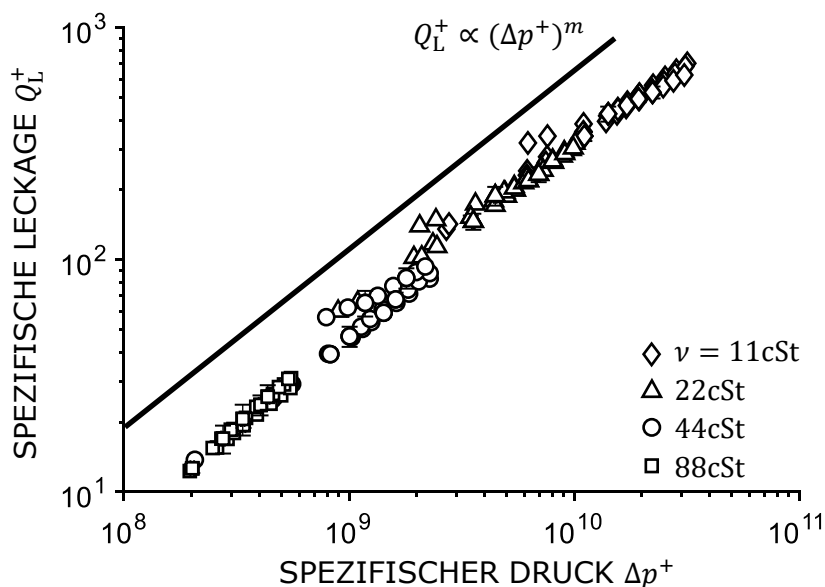


Abbildung A.5 – Spezifische Leckage Q_L^+ über spezifischem Druck Δp^+ für die Zahnradpumpe ZP IV $m = 0.79$.

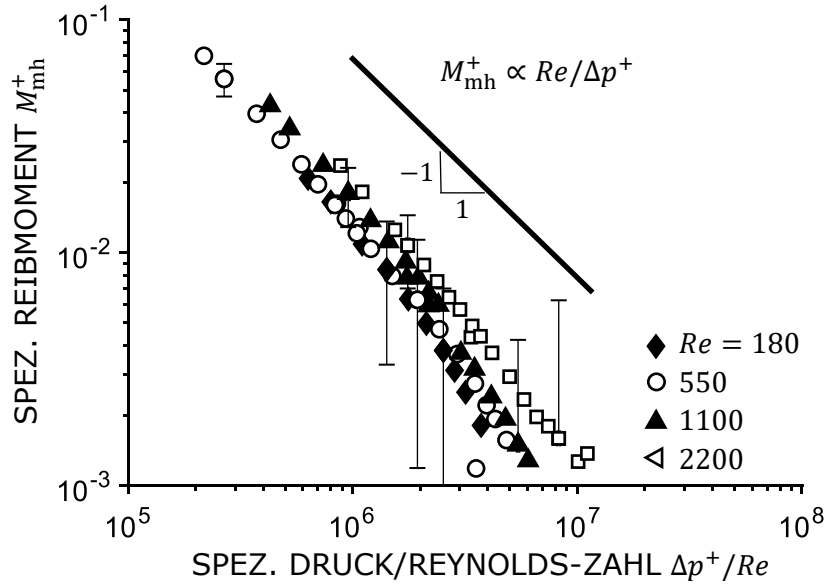


Abbildung A.6 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Schraubepumpe SP I.

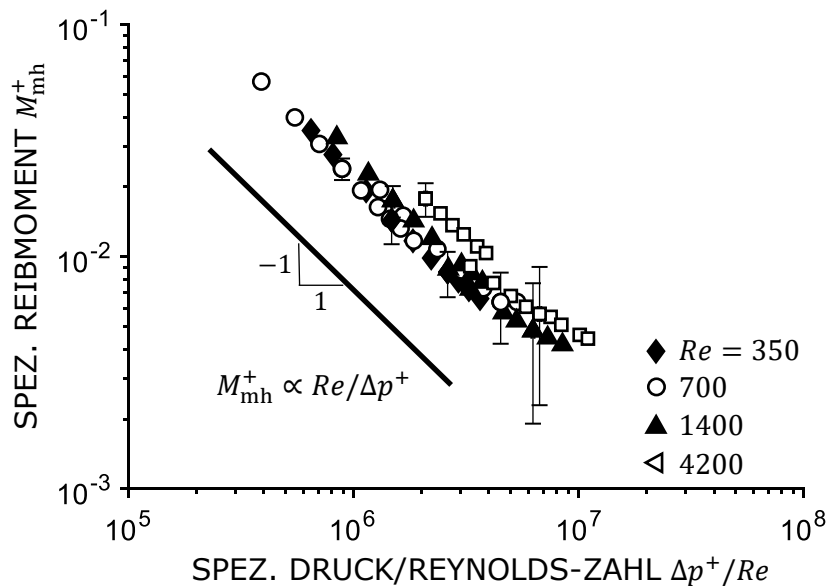


Abbildung A.7 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Schraubepumpe SP III.

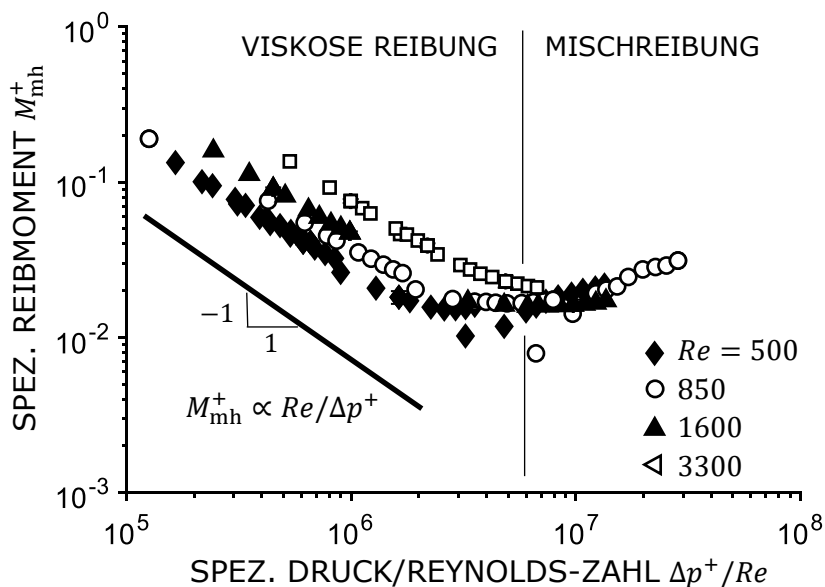


Abbildung A.8 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Zahnradpumpe ZP II.

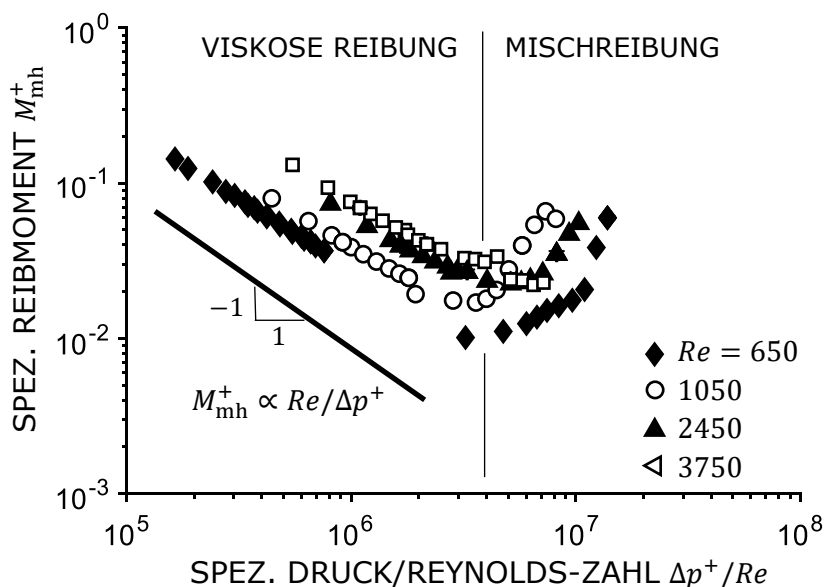


Abbildung A.9 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Zahnradpumpe ZP III.

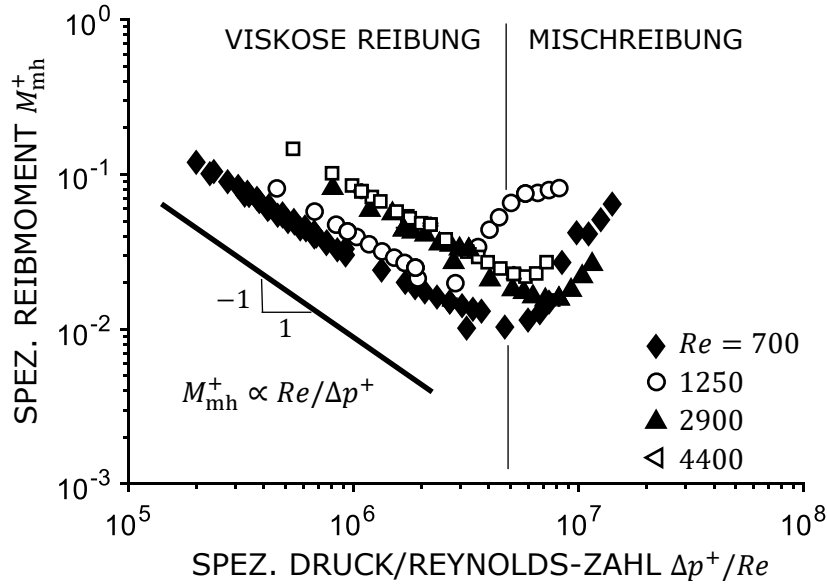


Abbildung A.10 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über $\Delta p^+/Re$ für die Zahnradpumpe ZP IV.

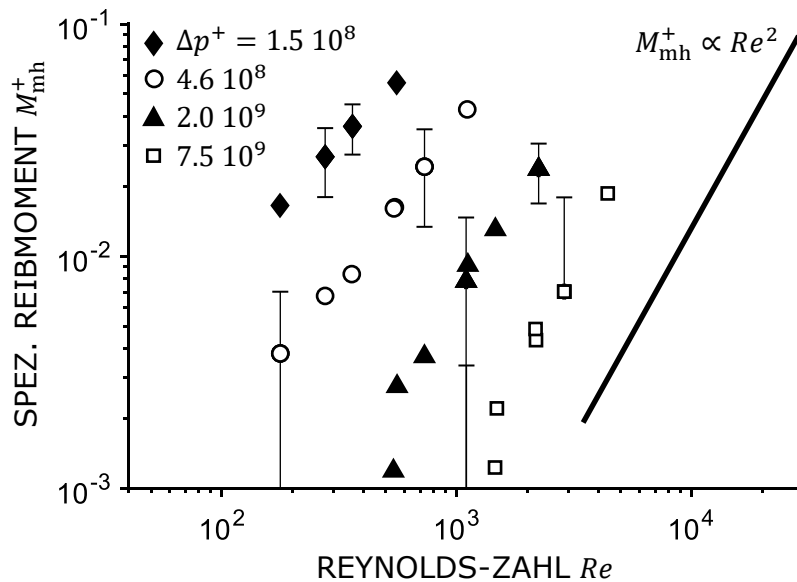


Abbildung A.11 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynoldszahl Re für die Schraubenpumpe SP I.

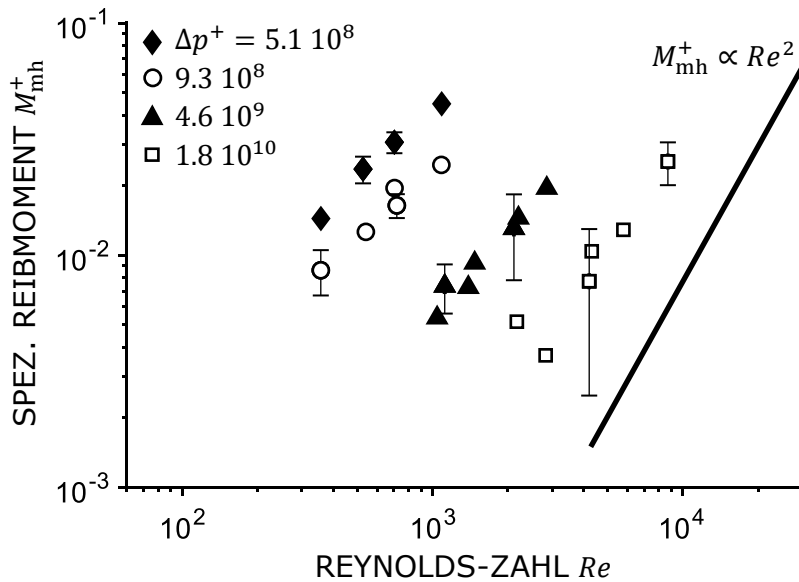


Abbildung A.12 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynoldszahl Re für die Schraubpumpe SP III.

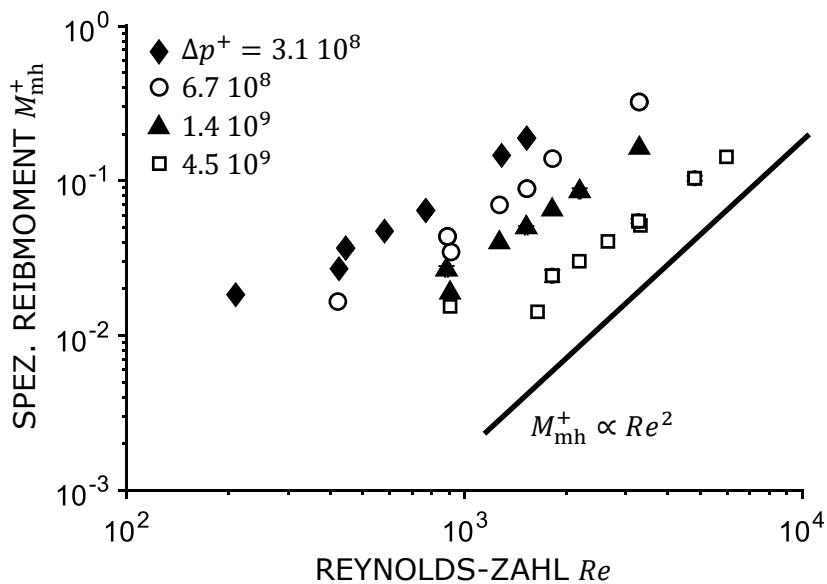


Abbildung A.13 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynoldszahl Re für die Zahnradpumpe ZP II.

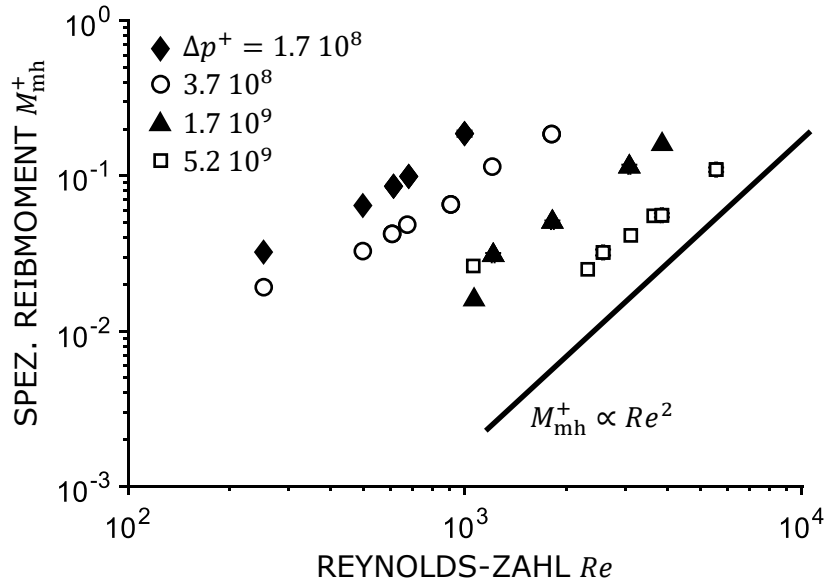


Abbildung A.14 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynoldszahl Re für die Zahnradpumpe ZP III.

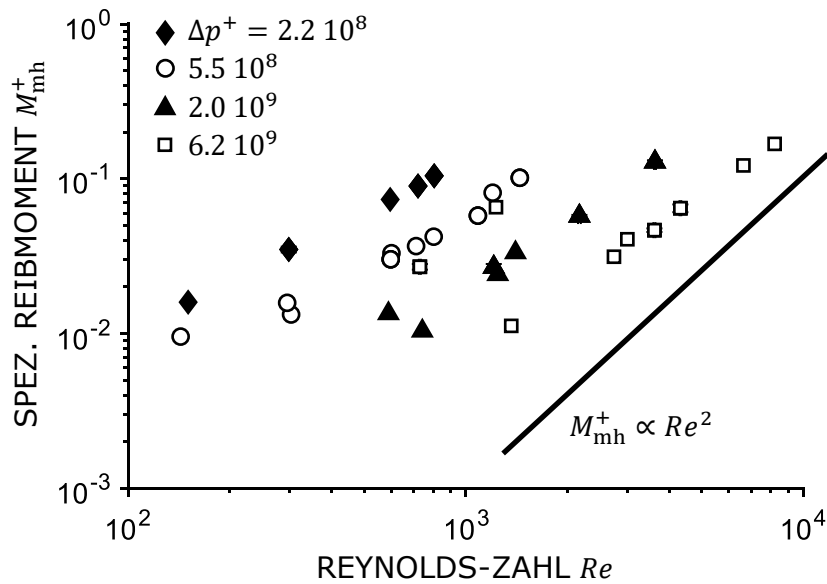


Abbildung A.15 – Spezifisches Reibmoment M_{mh}^+ über Reynoldszahl Re für die Zahnradpumpe ZP IV.

Anhang B

Herleitung des Leckagemodells

Im Folgenden werden der laminare und turbulente Grenzfall für das Leckagemodell behandelt. Zunächst davon ausgegangen, dass alle Längenverhältnisse, die mit der charakteristischen Länge $V^{1/3}$ gebildet werden, konstant sind. Aus diesem Grund sind lediglich die vorliegenden Proportionalitäten relevant. Für eine laminare Strömung ist der Exponent $m = 1$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{Q_L}{\nu V^{1/3}} &\propto \frac{\Delta p V^{2/3}}{\nu^2 \rho} \left(\frac{\bar{s}}{V^{1/3}} \right)^3, \\ Q_L &\propto \frac{\Delta p \bar{s}^3}{\mu}\end{aligned}\tag{B.1}$$

Dies entspricht dem Zusammenhang für den Volumenstrom einer laminaren Kanalströmung mit der Kanalhöhe \bar{s} . Ein- und Auslassverluste sind dabei vernachlässigt.

Für eine turbulente Strömung ist der Exponent $m = 0.5$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{Q_L}{\nu V^{1/3}} &\propto \left(\frac{\Delta p V^{2/3}}{\nu^2 \rho} \left(\frac{\bar{s}}{V^{1/3}} \right)^3 \right)^{0.5}, \\ Q_L &\propto \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \bar{s}^{3/2} V^{1/6}.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Dies entspricht dem Zusammenhang für den Volumenstrom, der sich aus einem typischen Widerstandsgesetz für eine Kanalströmung mit der Kanalhöhe \bar{s}

ergibt mit

$$\begin{aligned}\Delta p &\propto \zeta \varrho \left(\frac{Q_L}{\bar{s} V^{1/3}} \right)^2, \\ Q_L &\propto \sqrt{\frac{1}{\zeta} \frac{\Delta p}{\varrho}} \bar{s} V^{1/3} \quad \text{mit } \zeta = \lambda \frac{V^{1/3}}{\bar{s}}, \\ Q_L &\propto \sqrt{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta p}{\varrho}} \bar{s}^{3/2} V^{1/6} \quad \text{mit } \lambda = \text{const. bei } Re_{Kanal} \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{B.3}$$

ζ ist dabei der Druckverlustbeiwert, λ die Rohrreibungszahl und Re_{Kanal} die Reynoldszahl im Kanal.

Entspricht das Strömungsregime nicht diesen Grenzfällen, liegt der Exponent m zwischen 0.5 und 1.

Anhang C

Prüfstand

C.1 Komponenten

Tabelle C.1 – Übersicht der Komponenten von Prüfstand I.

Komponente	Typenbezeichnung
Frequenzumrichter	Danfoss GmbH VLT FC 102
El. Motor	VEM IE3-W41F 280S
Proportionaldruckventil	Bosch Rexroth AG DBEME 30-7X/350YG24K31A1M
Filter	HYDAC International GmbH LF ON 660 I F 10 B 1.0
Umpump-Kühl- Filtereinheit	HYDAC International GmbH UKF-3/1.0/P/A/68/MF180/10/D

Tabelle C.2 – Übersicht der Komponenten von Prüfstand II.

Komponente	Typenbezeichnung
Frequenzumrichter	Siemens SINAMICS G120 + CU230P-2
El. Motor (Drehkolbenpumpe)	Indukta S.A. SSLg 180 M-4
El. Motor (Zahnradpumpe)	Leroy Somer LSMV 160 MP
Nadelventil (Zahnradpumpe)	HYDAC International GmbH DV-20
Kugelhahn	Somas KVTF-L6-AJA-B12-DN25/20-D15-PN40
El. Motor Kugelhahn	AUMA SGC 05.1 + EA0S056-B-0.08
Filter	HYDAC International GmbH HEX S615-30
Wärmetauscher	HYDAC International GmbH LF 330 I F A 1.0

Tabelle C.3 – Übersicht der vier verwendeten Hydrauliköle (Sicherheitsdatenblätter [75, 76, 77, 78])

Hydrauliköl	kinematische Nennviskosität bei 40 °C
Shell Morlina S2 BL10	10 cSt
Shell Tellus S2 MX 22	22 cSt
Shell Tellus S2 MX 46	46 cSt
Shell Tellus S2 MX 100	100 cSt

C.2 Messsensorik

Tabelle C.4 – Übersicht der Messtechnik von Prüfstand I (FS: Full Scale, MW: Messwert).

Messgröße	Sensor	Messbereich	max. Messabw.
Druck p_U	Keller 33X	0 – 2 bar	0.1 % FS
Druck p_1	Baumer PBMN	0 – 2.5 bar	0.15 % FS
Druck p_2	Baumer PBMN	1 – 160 bar	0.15 % FS
Temperatur T_1	Wika TR31	0 – 100 °C	0.2 °C
Temperatur T_2	Wika TR33	0 – 100 °C	0.2 °C
Drehmoment M_S	Kistler 4503A	0 – 40 Nm	0.2 % FS
		0 – 200 Nm	0.1 % FS
Drehzahl n	Kistler 4503A	0 – 5000 rpm	0.1 % MW
Volumenstrom Q	VSE RS 400	0 – 400 l/min	0.3 % MW

Tabelle C.5 – Übersicht der Messtechnik von Prüfstand II (FS: Full Scale, MW: Messwert).

Messgröße	Sensor	Messbereich	max. Messabw.
Druck p_1	Baumer PBMN	0 – 2.5 bar	0.15 % FS
Druck p_2	Baumer PBMN	0 – 25 bar	0.15 % FS
Temperatur T_1	Wika TR33	0 – 100 °C	0.2 °C
Temperatur T_2	Wika TR33	0 – 100 °C	0.2 °C
Drehmoment M_S	Kistler 4503A	0 – 50 Nm	0.1 % FS
Drehzahl n	Kistler 4503A	0 – 12000 rpm	0.1 % MW
Volumenstrom Q	VSE RS 400	0 – 400 l/min	0.3 % MW

Tabelle C.6 – Übersicht der Messtechnik für die Fluideigenschaften (MW: Messwert).

Messgröße	Sensor	max. Messabw.
kin. Viskosität ν	LAUDA Eco Silver + iVisc Ubbelohde-Viskosimeter	0.2 % MW
Dichte ρ	LAUDA Tensiometer TD 3	1 kg/m ³

Anhang D

Betriebsbereiche

Tabelle D.1 – Übersicht der gemessenen Betriebspunkte der untersuchten Zahnradpumpen.

	ZP I 30.9 cm ³		ZP II 39.3 cm ³		ZP III 49.6 cm ³		ZP IV 63.3 cm ³	
ν in cSt	n in rpm	Δp_{\min} in bar	n in rpm	Δp_{\min} in bar	n in rpm	Δp_{\min} in bar	n in rpm	Δp_{\min} in bar
11	600	0.1	500	0.3	600	0.2	600	0.2
	1200	0.2	1000	0.5	1200	1.1	1200	0.7
	1900	0.4	2000	0.7	1800	1	1900	1.4
	2400	0.6	2900	1.3	2900	2	2900	2.9
	3600	1.2	3600	2	3600	2.8	3600	4.5
22	600	0.3	600	0.2	600	0.2	600	0.3
	1200	0.8	1000	0.3	1000	0.4	1000	0.6
	2400	2.5	2000	0.9	2400	1.7	2400	2.4
	2900	3.5	2400	1.2	2900	2.3	2900	3.3
	3500	4.8	2900	1.6	3600	3.2	3600	4.7
			2.2					
44	600	0.4	500	2	500	2	500	2
	1200	1.1	1000	2	1000	2	1000	2.1
	2400	3.2	2100	2	2000	2	2000	4.5
	2900	4.3	3000	2.6	2400	4.5	2400	4.5
	3500	5.9	3600	4.5	3600	4.7	3600	8.1
88	600	2	500	2	500	2	500	2
	1200	2	1000	2	1000	2	1000	1.9
	2400	2.3	2100	2.6	2000	4.5	2000	4.6
	2700	4.5	2700	4.5	2400	4.4	2400	5.8
	3600	5.6	3600	5.4	2700	5.5	2700	7.9
				3600	8	3600	10.1	

Tabelle D.2 – Übersicht der gemessenen Betriebspunkte der untersuchten Schraubenpumpen.

	SP I 30.4 cm ³			SP II 50.0 cm ³			SP III 82.8 cm ³		
ν in cSt	n in rpm	Δp_{\min} in bar	n in rpm	Δp_{\min} in bar	n in rpm	Δp_{\min} in bar	n in rpm	Δp_{\min} in bar	
11	1000 1500 2000 3000	8 8 8 8	1000 1500 2000 3000	8 8 8 8	1000 1500 2000 3000	8 8 8 8	1000 1500 2000 3000	8 8 8 10	
22	750 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8	500 750 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8 8	500 750 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8 8	500 750 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8 10	
44	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 10 14	
88	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 8	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 10	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 8 10	500 1000 1500 2000 3000	8 8 8 10 14	

Tabelle D.3 – Übersicht der gemessenen Betriebspunkte der untersuchten Drehkolbenpumpe.

DP 347.4 cm ³		
ν in cSt	n in rpm	Δp_{\min} in bar
11	200	0.3
	300	0.5
	400	0.8
	500	1.1
	600	1.5
	700	1.9
	800	2.4
22	200	0.4
	300	0.7
	400	1
	500	1.4
	600	1.9
	700	2.4
44	200	0.6
	300	0.9
	400	1.4
	500	2
	600	2.6
	700	3.3
	800	4
88	200	1
	300	1.6
	400	2.2
	500	2.9
	600	3.7
	700	4.6

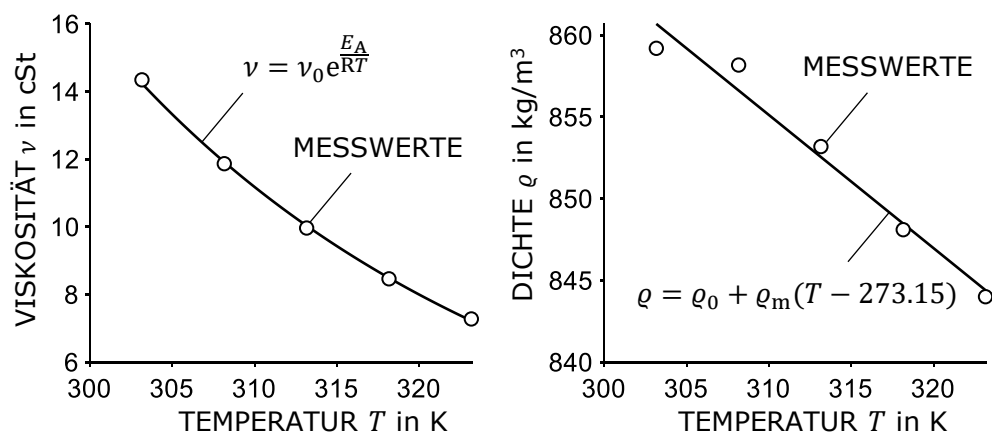


Abbildung D.1 – Viskosität ν und Dichte ρ über Temperatur T für das Hydrauliköl Morlina 10. $E_A = 27.6 \text{ kJ/mol}$, $\nu_0 = 245.9 \mu\text{m}^2/\text{s}$, $\rho_m = -0.81 \text{ kg}/(\text{K m}^3)$, $\rho_0 = 885.13 \text{ kg}/\text{m}^3$, $R=8.13 \text{ J}/(\text{mol K})$

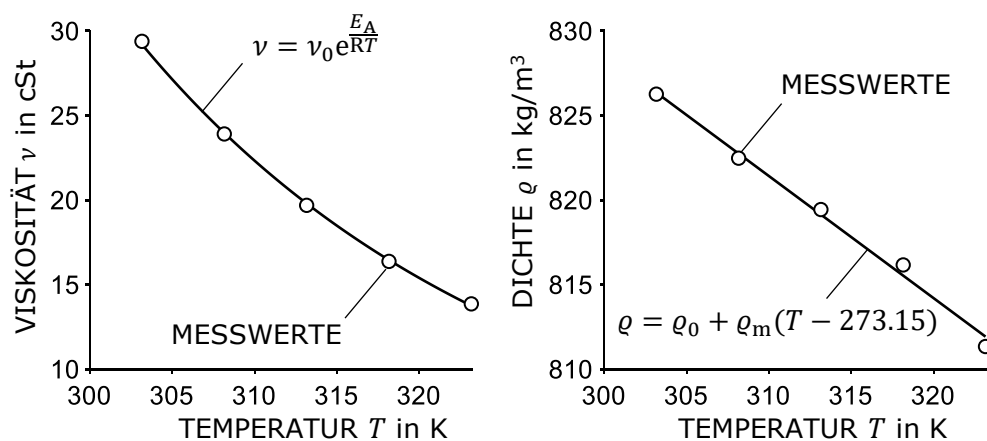


Abbildung D.2 – Viskosität ν und Dichte ρ über Temperatur T für das Hydrauliköl Shell Tellus 22. $E_A = 30.7 \text{ kJ/mol}$, $\nu_0 = 151.1 \mu\text{m}^2/\text{s}$, $\rho_m = -0.72 \text{ kg}/(\text{K m}^3)$, $\rho_0 = 848.00 \text{ kg}/\text{m}^3$, $R=8.13 \text{ J}/(\text{mol K})$

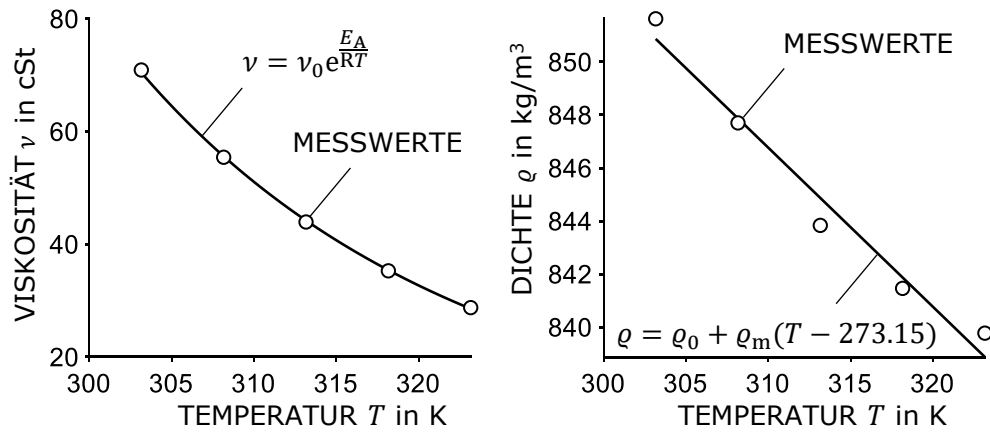


Abbildung D.3 – Viskosität ν und Dichte ρ über Temperatur T für das Hydrauliköl Shell Tellus 46. $E_A = 36.8 \text{ kJ/mol}$, $\nu_0 = 32.3 \mu\text{m}^2/\text{s}$, $\rho_m = -0.60 \text{ kg}/(\text{k m}^3)$, $\rho_0 = 868.85 \text{ kg}/\text{m}^3$, $R=8.13 \text{ J}/(\text{mol K})$

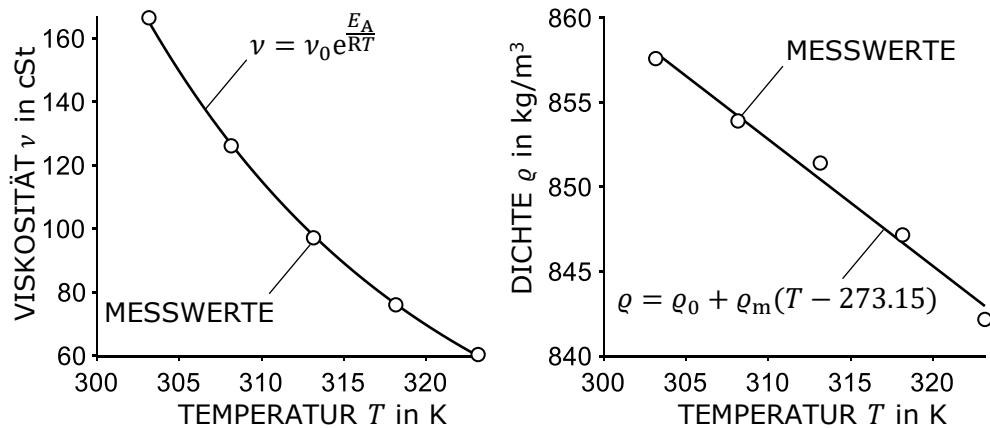


Abbildung D.4 – Viskosität ν und Dichte ρ über Temperatur T für das Hydrauliköl Shell Tellus 100. $E_A = 41.3 \text{ kJ/mol}$, $\nu_0 = 12.6 \mu\text{m}^2/\text{s}$, $\rho_m = -0.75 \text{ kg}/(\text{k m}^3)$, $\rho_0 = 880.42 \text{ kg}/\text{m}^3$, $R=8.13 \text{ J}/(\text{mol K})$

Anhang E

Validierungsergebnisse

E.1 Schraubepumpen

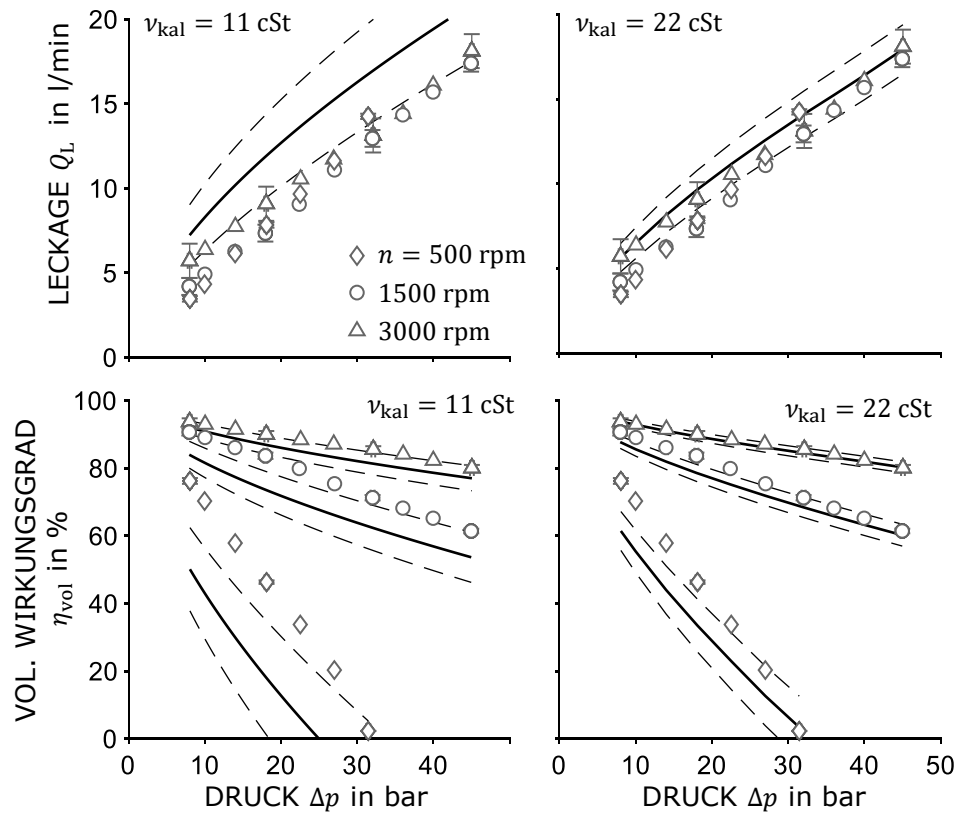


Abbildung E.1 – Leckage Q_L über Differenzdruck Δp für die Schraubenpumpe SP I bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Für $\nu_{kal} = 11$ cSt sind $m = 0.61$ und $L = 10^{-3.3}$, für $\nu_{kal} = 22$ cSt sind $m = 0.67$ und $L = 10^{-3.9}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

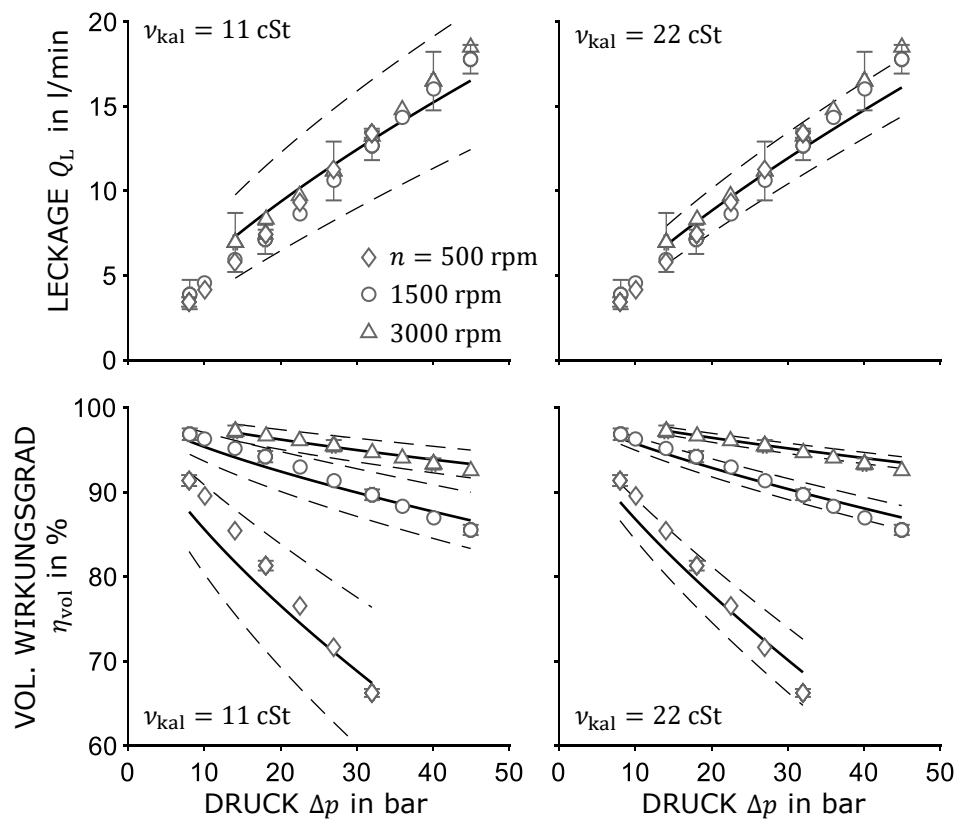


Abbildung E.2 – Leckage Q_L über Differenzdruck Δp für die Schraubenpumpe SP III bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Für $\nu_{kal} = 11$ cSt sind $m = 0.70$ und $L = 10^{-4.5}$, für $\nu_{kal} = 22$ cSt sind $m = 0.74$ und $L = 10^{-4.9}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

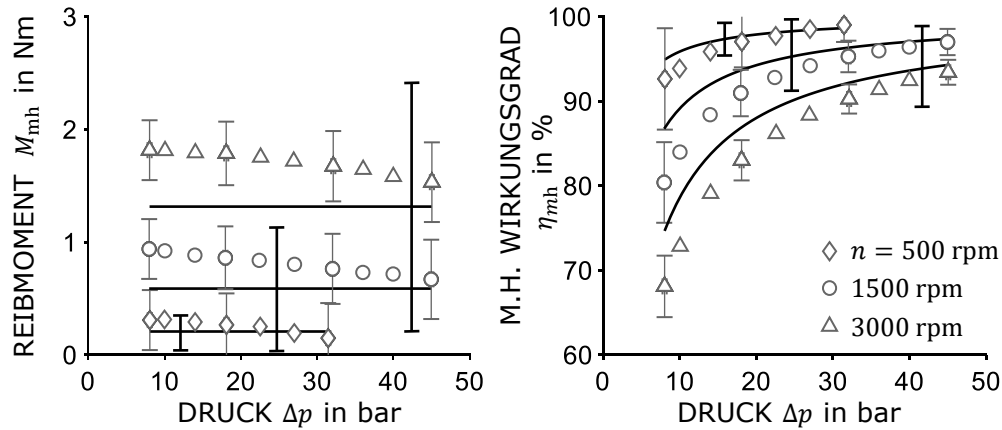


Abbildung E.3 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Schraubpumpe SP I bei der Viskosität $\nu_{\text{VAL}} = 88 \text{ cSt}$; $M_{\text{const}} = 0.06 \text{ Nm}$, $R_{\mu} = 7894$, $R_{\varrho} = 5.6$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

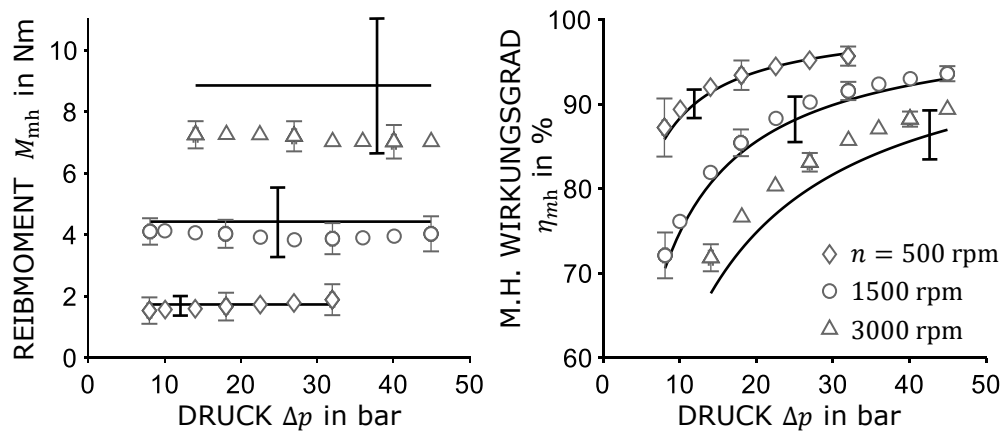


Abbildung E.4 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Schraubpumpe SP III bei der Viskosität $\nu_{\text{VAL}} = 88 \text{ cSt}$; $M_{\text{const}} = 0.56 \text{ Nm}$, $R_{\mu} = 23009$, $R_{\varrho} = 3.6$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

E.2 Zahnradpumpen

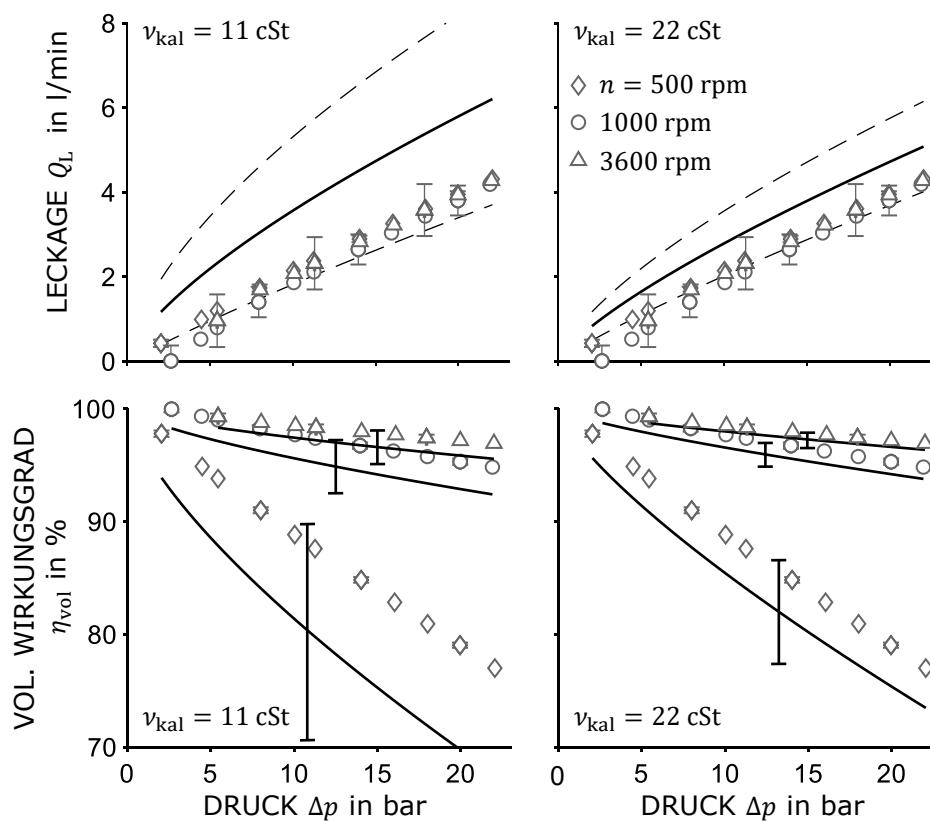


Abbildung E.5 – Leakage Q_L über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP II bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Für $\nu_{\text{kal}} = 11$ cSt sind $m = 0.70$ und $L = 10^{-4.5}$, für $\nu_{\text{kal}} = 22$ cSt sind $m = 0.76$ und $L = 10^{-5.1}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

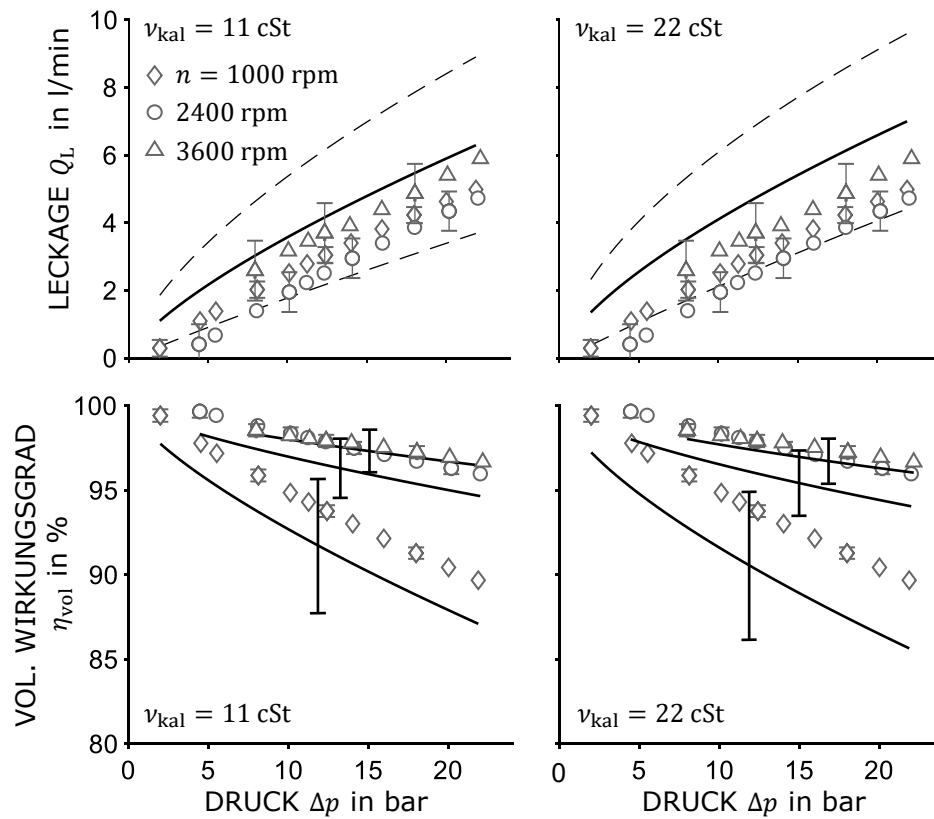


Abbildung E.6 – Leckage Q_L über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP III bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Für $\nu_{kal} = 11$ cSt sind $m = 0.72$ und $L = 10^{-4.8}$, für $\nu_{kal} = 22$ cSt sind $m = 0.68$ und $L = 10^{-4.4}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

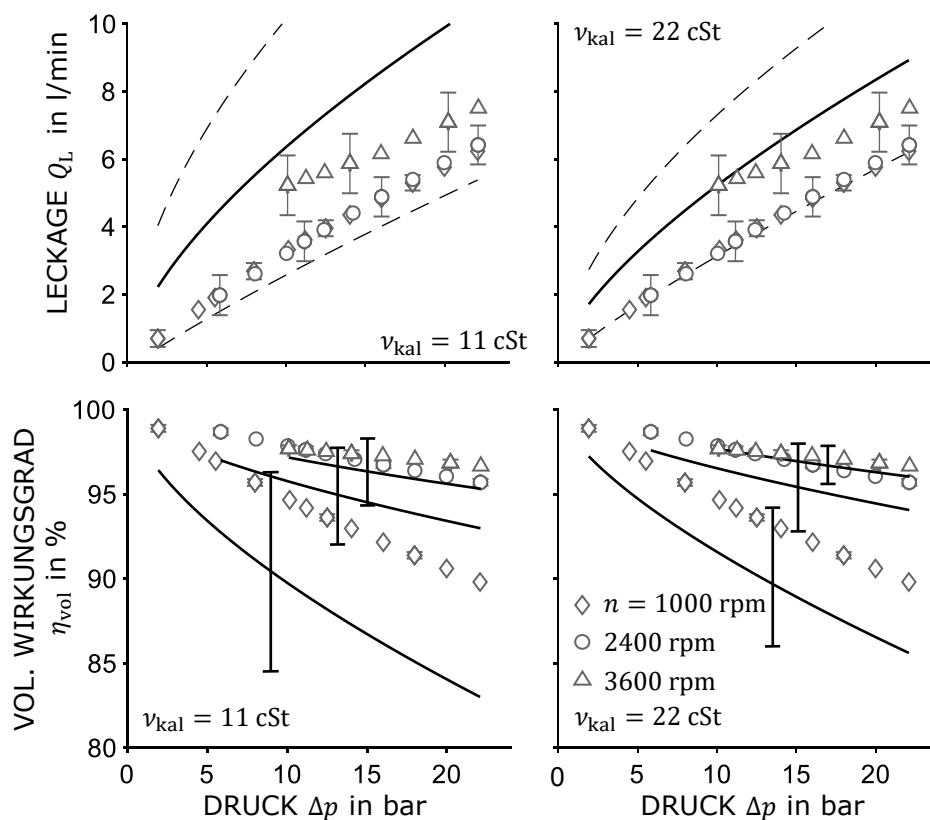


Abbildung E.7 – Leakage Q_L über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP IV bei der Viskosität $\nu = 88$ cSt. Für $\nu_{kal} = 11$ cSt sind $m = 0.64$ und $L = 10^{-3.9}$, für $\nu_{kal} = 22$ cSt sind $m = 0.68$ und $L = 10^{-4.3}$. Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1.

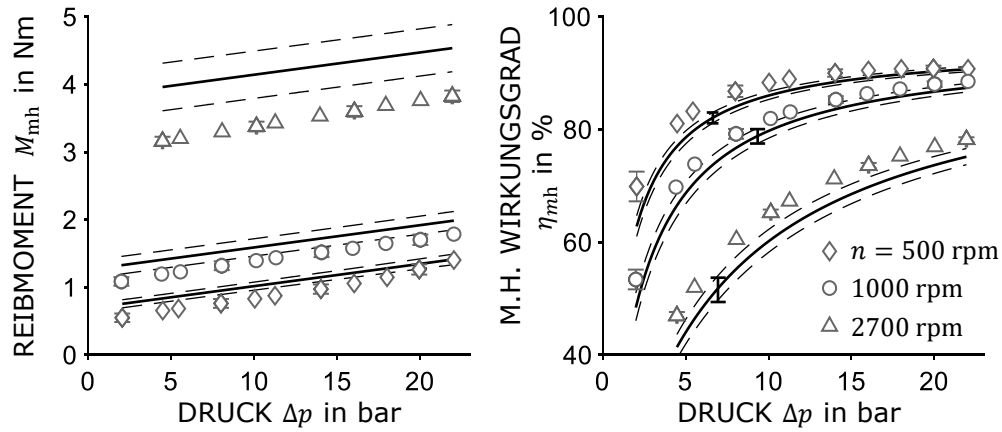


Abbildung E.8 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP II bei der Viskosität $\nu_{VAL} = 88$ cSt; $M_{const} = 0.23$ Nm, $R_C = 0.0088$, $R_\mu = 17494$, $R_\rho = 16.0$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

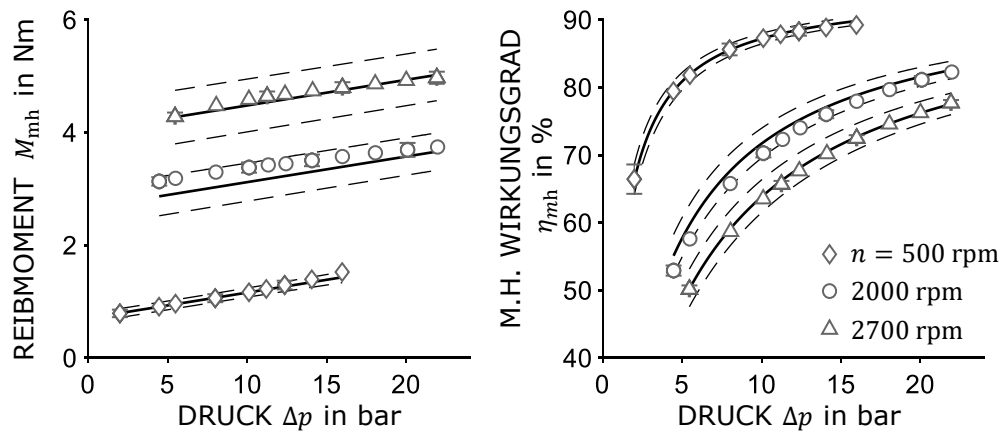


Abbildung E.9 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP III bei der Viskosität $\nu_{VAL} = 88$ cSt; $M_{const} = 0.31$ Nm, $R_C = 0.0092$, $R_\mu = 11318$, $R_\rho = 16.4$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).

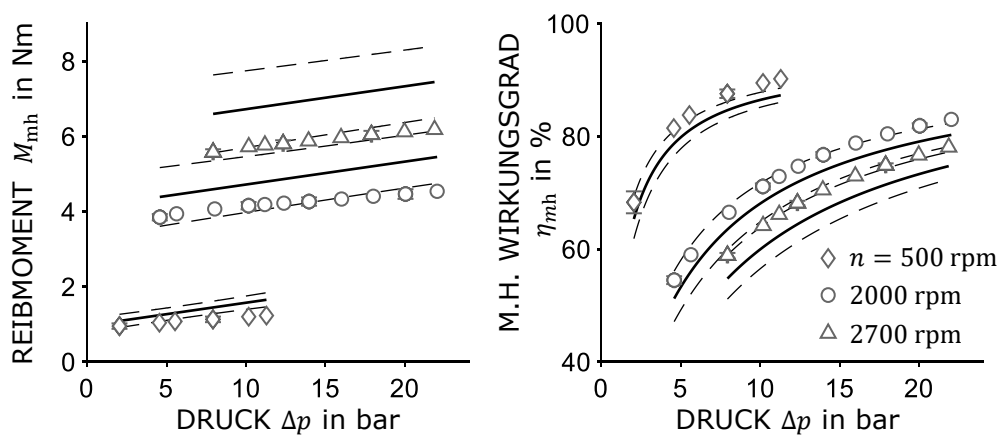


Abbildung E.10 – Reibmoment M_{mh} über Differenzdruck Δp für die Zahnradpumpe ZP IV bei der Viskosität $\nu_{VAL} = 88$ cSt; $M_{const} = 0.25$ Nm, $R_C = 0.0096$, $R_\mu = 16898$, $R_\varrho = 14.0$ (Pumpendaten: Tab. 3.1, Betriebsbereich: Tab. 4.1).