UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

**PRESENTADO POR:**
JOSÉ MANUEL VÁSQUEZ VÁSQUEZ.
DANIEL ERNESTO CARRANZA GALDÁMEZ.

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

**ASESOR:**
MSc. CARLOS ERNESTO GÁMEZ RODRÍGUEZ

**SAN SALVADOR, EL SALVADOR, JULIO DE 2020.**

**AUTORIDADES UNIVERSITARIAS PERIODO** 2019 – 2023

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

RECTOR:
MSc. Roger Armando Arias Alvarado
VICERRECTOR ACADÉMICO:
Dr. Raúl Ernesto Azcúnaga López
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO:
Ing. Juan Rosa Quintanilla
SECRETARIO GENERAL:
MSc. Francisco Antonio Alarcón Sandoval
DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS:
Lic. Luis Antonio Mejía Lipe
FISCAL:
Lic. Rafael Humberto Peña Marín

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

DECANO:
Lic. Mauricio Hernán Lovo
VICE DECANA:
Msc. Zoila Virginia Guerrero Mendoza
SECRETARIO:
Lic. Jaime Humberto Salinas Espinoza

**ESCUELA DE MATEMÁTICA**

DIRECTOR INTERINO:
Dr. Dimas Noe Tejada Tejada

# Dedicatoria

*A Dios, a nuestros padres José Carranza, Blanca Galdámez, Manuel Vásquez y Sonia Vasquez por su incondicional apoyo, amor y comprensión.*

# Agradecimientos

A Dios por la vida, la sabiduría y fuerzas para seguir adelante.

A nuestros padres por ser nuestro ejemplo de esfuerzo, dedicación, y por animarnos a conseguir nuestras metas.

Al asesor, MSc. Carlos Gámez por su disponibilidad de tiempo, dedicación, esfuerzo, dedicación y apoyo en cada aspecto de este trabajo.

A mis hermanos Samuel Carranza y José Carranza por su alegría, ayuda y palabras de aliento.

# Resumen

La teoría de los juegos es una rama de la matemática con aplicaciones a la economía, sociología, biología y psicología, que analiza las interacciones entre individuos que toman decisiones en un marco de incentivos formalizados (juegos). En un juego, varios agentes buscan maximizar su utilidad eligiendo determinados cursos de acción. La utilidad final obtenida por cada individuo depende de los cursos de acción escogidos por el resto de los individuos.

La teoría de juegos es una herramienta que ayuda a analizar problemas de optimización interactiva. La teoría de juegos tiene muchas aplicaciones en las ciencias sociales. La mayoría de las situaciones estudiadas por la teoría de juegos implican conflictos de intereses, estrategias y trampas. De particular interés son las situaciones en las que se puede obtener un resultado mejor cuando los agentes cooperan entre sí, que cuando los agentes intentan maximizar sólo su utilidad.

# Introducción

Un juego puede definirse como todo problema de decisión donde hay más de un agente o decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre el otro. Los juegos más interesantes son aquellos donde los intereses de los agentes están completa o parcialmente contrapuestos. Esta definición de juego contiene varios elementos a remarcar. Por un lado, tenemos varios agentes decisores. En caso contrario, si sólo hay un agente decisor, sería un problema de análisis de decisiones, probablemente bajo incertidumbre, para la cual se disponen numerosas técnicas de resolución o análisis. Para tener un juego debemos tener al menos dos agentes o jugadores cuyas decisiones interaccionan de forma que puedan afectar los intereses de los otros jugadores. Esto nos lleva al segundo punto. Todo juego no trivial debe tener algún aspecto de conflicto de intereses, aunque se puede pensar en juegos en los cuales el único problema es coordinación, ya que los intereses de los jugadores coinciden. En estos juegos, el conflicto se presenta en la regla de coordinación de los jugadores. La ausencia de conflicto de intereses trivializa el juego. Aunque formalmente sigue siendo un juego, nos parece adecuado incluir un nivel de conflicto en la definición del mismo.

Nuestro mundo está lleno de situaciones de conflicto, el ámbito de aplicación de los juegos es muy amplio. Algunos ejemplos presentes en el mundo empresarial podrían ser temas tan diversos como guerras de precios entre competidores, introducción de nuevos productos, continuación de programas de investigación en nuevos procesos, pujas en contratos públicos, negociaciones de contratos para la venta de instalaciones de ordenadores de varios millones de dólares, negociaciones con los sindicatos, etc. El diseño de estrategias competitivas, su ejecución, las múltiples negociaciones cotidianas dentro y fuera de las organizaciones, e incluso nuestras relaciones interpersonales, están repletas de factores estratégicos que pueden analizarse en el esquema conceptual de Teoría de Juegos.

Cabe distinguir dos tipos básicos de juegos, o dicho de otro modo, dos enfoques básicos en el análisis de un juego, cooperativos y no cooperativos. En el enfoque cooperativos se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va a tomar cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Entre los juegos no cooperativos cabe hacer dos distinciones básicas, juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa. En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (o dicho de otra manera más precisa, cada jugador decide sin saber qué han decidido los otros), mientras que en los dinámicos puede darse el caso en el que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir. En los juegos de información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás, del conjunto de decisiones tomadas, mientras que los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce alguna de esas consecuencias. En este trabajo como introducción estudiaremos los juegos no cooperativos estáticos con información completa.

# Metodología

Para cumplir los objetivos propuestos en esta investigación se seguirán las siguientes etapas:

1. **Revisión bibliográfica**: se estudiarán diferentes libros, con la finalidad de conocer y relacionar los enfoques de cada autor, tomaremos los libros como base, y tendremos un banco de documentos que facilite el acceso a la información para aclarar dudas que se presenten durante la investigación.

2. **Resolución de ejercicios**: se resolverán ejercicios para comprender y aplicar lo aprendido en la lectura. Estos ejercicios ya resueltos pasarán a ser ejemplos del documento final.

3. **Demostración de los principales teoremas**: se demostrará con el mayor detalle posible cada uno de los resultados enunciados, especialmente aquellos que fundamentan los resultados principales que se desean establecer.

# Índice general

# Índice de figuras

# Índice de tablas

# Capítulo 1

# Juegos estáticos con información completa

En este primer capítulo nos concentraremos en como representar un juego en su forma normal o estratégica para estrategias puras. Luego se comienza con el estudio detallado de los modelos más simples de juego, los juegos estáticos con información completa. Estos juegos se representan de manera natural en forma estratégica, ya que los jugadores realizan sus jugadas de manera simultánea, y esta forma sencilla de representación es adecuada para iniciar el estudio de los conceptos de solución de un juego. En las secciones que siguen, se abordan algunos conceptos de solución basados en la idea de dominación entre estrategias puras y el importante concepto de equilibrio de Nash en estrategias puras. Se estudian también algunas aplicaciones de las ideas inducidas: el duopolio y el oligopolio de Cournot, el duopolio y oligopolio de Bertrand y el problema de la sobreexplotación de los bienes comunales.

## 1.1. Juegos en forma estratégica

Los elementos fundamentales de un juego estático con información completa son: jugadores, estrategias disponibles para cada jugador, y ganancias o pagos resultantes para cada jugador (utilidad que a cada uno reporta cada resultado del juego).

En este caso, los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (o dicho con más precisión, sin conocer las decisiones de los otros) y de una sola vez, y a continuación reciben las ganancias, que dependen de la combinación de decisiones tomadas. Por esta razón, los juegos estáticos reciben también el nombre de juegos con jugadas simultaneas. Además, se supone que es de dominio público el conocimiento de la estructura completa del juego. Es decir, todos los jugadores conocen las estrategias o acciones disponibles para cada jugador y las ganancias resultantes de cada combinación de acciones, y además todos saben que todos las conocen.

Antes de comenzar a definir la forma estratégica de un juego comencemos a definir algunos aspectos importantes que debemos tener en cuenta durante este capítulo. Definiremos la palabra estático e información completa en términos de teoría de juegos.

**Definición 1.1.** ***Estático:*** *Ningún jugador observa las acciones de ningún otro antes de tomar sus decisiones, y cada jugador solo tiene un turno. Se puede dar en dos casos:*

- *Juegos simultáneos.*
- *Juegos secuenciales pero sin posibilidad de monitoreo de acciones previas. (los turnos pueden no ser simultáneos, pero cada jugador no puede observar las movidas de quienes deciden antes que él).*

**Definición 1.2.** ***Información Completa:*** *Cada jugador conoce la función objetivo de cada uno de sus contrincantes.*

Estos juegos suelen representarse mediante la forma estratégica, de la que se dice que es la representación normal del juego.

**Definición 1.3.** *Formalmente, un juego en Forma Normal posee:*

- *Un conjunto de jugadores* $J = \{1, 2, ..., n\}$.
- *El conjunto o espacio de estrategias de cada jugador:* $S_i$ *para cada* $i$ *de* $J$. *A cada* $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, *donde cada* $s_i \in S_i$ *se le llama combinación o perfil de estrategias.*
- *La función de pagos o ganancias de cada jugador:* $u_i$ *par cada* $i$ *en* $J$, *notemos que* $u_i : S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$ *toma las estrategias* $(s_1, s_2, ..., s_n)$ *y le asigna un valor en los reales llamada utilidad del jugador.*

*El juego así especificado puede denotarse:*

$$G = \{J; S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$$

**Nota 1.1.** *Al vector (n-1)-dimensional obtenido a partir de* $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ *al suprimir* $s_i$ *se le denota* $s_{-i}$. *El vector* $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ *es, por tanto, la combinación de estrategias jugadas por los demás jugadores.*

**Nota 1.2.** *En este capítulo cuando nos referimos a estrategia, nos vamos a referir a estrategia pura que básicamente es una estrategia con probabilidad uno. En el capítulo dos introduciremos estrategias mixtas en donde a cada estrategia le asignamos diferentes probabilidades.*

Merece la pena, precisar el significado de la expresión información de dominio público, ya que se trata de un concepto muy importante en la Teoría de Juegos.

**Definición 1.4.** *Decimos que una información I es de dominio público o que es conocimiento común de un conjunto de jugadores J si ocurre lo siguiente:*

- *Todos los jugadores saben o conocen I.*
- *Todos los jugadores de J saben que todos ellos saben I.*
- *Todos los jugadores de J saben que todos ellos saben que todos ellos saben I.*

*Y así sucesivamente.*

## Descripción y representación de algunos ejemplos importantes de juegos

Merece la pena subrayar que los ejemplos que siguen a continuación, y muchos otros que se estudian en este trabajo, modelizan una gran variedad de problemas de interacción y conflicto mediante una simplificación, a veces drástica, de las situaciones reales. En consecuencia, no debería contemplarse el análisis formal de dichos ejemplos como un intento de solución completa de esos problemas, sino como un primer paso en su comprensión.

**Ejemplo 1.1.** *El dilema del prisionero es, probablemente, el juego más simple y famoso, y se basa en el siguiente relato ilustrativo:*
*Dos delincuentes habituales son apresados cuando acaban de cometer un delito grave. No hay prueba clara contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero condenados por el delito menor (1 año de cárcel), que si ambos confiesan, serán condenados por el principal pero se les rebajará un poco la pena por confesar (4 años), y finalmente, que si sólo uno confiesa, él se librará de penas y al otro «se le caerá el pelo» (5 años).*

*La representación en forma estratégica es la siguiente: Teniendo en cuen-*

| | | Prisionero 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Callar | Confesar |
| Prisionero 1 | Callar | -1,-1 | -5,0 |
| | Confesar | 0,-5 | -4,-4 |

Tabla 1.1: El Dilema del Prisionero

*ta el significado de los pagos, y en particular que son interpretables como utilidades y representables mediante una escala, podemos aplicar a la escala de pagos de cada jugador una transformación afín positiva para fines prácticos. Por ejemplo, sumemos 5 unidades a todos los pagos del juego y obtenemos la nueva tabla 1.2. Para este juego, los conjuntos de jugadores y de estrategias,*

| | | Prisionero 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Callar | Confesar |
| Prisionero 1 | Callar | 4,4 | 0,5 |
| | Confesar | 5,0 | 1,1 |

Tabla 1.2: El Dilema del Prisionero(escala estándar)

*y las funciones de pagos son:*

$J = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = \{\textit{Callar}, \textit{Confesar}\}$

- *La utilidad del Jugador 1*

$$\begin{aligned} u_1(\textit{Callar, Callar}) &= 4 \\ u_1(\textit{Callar, Confesar}) &= 0 \\ u_1(\textit{Confesar, Callar}) &= 5 \\ u_1(\textit{Confesar,Confesar}) &= 1 \end{aligned}$$

- *La utilidad del Jugador 2*

$$\begin{aligned} u_2(\textit{Callar, Callar}) &= 4 \\ u_2(\textit{Callar, Confesar}) &= 5 \\ u_2(\textit{Confesar, Callar}) &= 0 \\ u_2(\textit{Confesar,Confesar}) &= 1 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.2.** *En el juego exageradamente llamado la batalla de los sexos, dos enamorados se citan para salir a divertirse después del trabajo, si bien no se han decidido entre ir al cine o ir al fútbol, que comienzan a la misma hora. Llegada la hora de salir, no pueden comunicarse entre ellos, de modo que cada uno se ve obligado a ir directamente a un lugar, cine o fútbol, y a esperar que la decisión del otro sea la misma. Ambos prefieren ir juntos al sitio que sea antes que ir solos cada uno a un sitio, aunque el jugador 1 preferiría que ese lugar fuese el fútbol y la jugadora 2 desearía que fuese el cine.*

*A continuación en el cuadro 1.3 se especifica la forma estratégica de este juego.*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Cine | Fútbol |
| Jugador 1 | Cine | 1,2 | 0,0 |
| | Fútbol | 0,0 | 2,1 |

Tabla 1.3: Batalla de los sexos

## 1.2. Solución de un juego

Los problemas de decisión individual, y en particular los que pertenecen al ámbito de la optimización, tienen una o varias soluciones que (en muchos casos) podemos hallar mediante técnicas apropiadas. En estos casos la palabra solución tiene un significado claro: se trata de la decisión óptima, la que más conviene al agente que se plantea el problema. Además, cuando hay varias soluciones todas ellas son igualmente deseables para el agente.

En términos intuitivos, llamaremos **solución de un juego** a un conjunto de perfiles de estrategias tal que es razonable pensar que los jugadores tomarán decisiones pertenecientes a dicho conjunto, y llamaremos **concepto de solución** de un juego a un procedimiento que permita obtener, de manera precisa y bien argumentada, una solución.

En las páginas que siguen se proponen distintos conceptos de solución, basados en dos clases de argumentos, los argumentos de dominación y los argumentos de equilibrio.

### 1.2.1. Soluciones de un Juego mediante argumentos de dominación

Intuitivamente hablando, una estrategia de un jugador se dice dominante si es tan buena o más que cualquier otra como respuesta a cualquier combinación de estrategias que elijan los demás jugadores, y una estrategia dada $s_i$ de un jugador se dice que está dominada por otra estrategia $s_i'$ del mismo jugador si la segunda le conviene más que la primera, independientemente de lo que hagan los otros jugadores. El argumento básico de dominación consiste en que un jugador racional no debería jugar estrategias dominadas y en que, en caso de saber que otros jugadores son racionales, debería suponer que éstos no van a jugar tal clase de estrategias.

**Definición 1.5.** *En un juego sean $s_i^{'}$ y $s_i^{''}$ dos estrategias del jugador $i$.*

- *Decimos que $s_i^{'}$ está **dominada**, o también **débilmente dominada**, por $s_i^{''}$ cuando la desigualdad*

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^{'}, s_{i+1}, ..., s_n) \leq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^{''}, s_{i+1}, ..., s_n)$$

  *se cumple para toda combinación de estrategias de los otros jugadores.*

- *Decimos que $s_i^{'}$ está **estrictamente dominada** por $s_i^{''}$ cuando la desigualdad*

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^{'}, s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^{''}, s_{i+1}, ..., s_n)$$

  *se cumple para toda combinación de estrategias de los otros jugadores.*

Es evidente que el hecho de que, para un jugador, una estrategia domine estrictamente a otra (que reporta pagos estrictamente mayores para él que esa otra) implica que también la domina débilmente (pagos iguales o mayores). Parece razonable suponer que los jugadores racionales (que intentan maximizar sus pagos o ganancias, y son capaces de hacer todos los cálculos y razonamientos que les conduzcan a ello) no juegan o usan estrategias dominadas, y menos aún juegan estrategias estrictamente dominadas.

Por otra parte, el concepto de estrategia dominante, que se define a continuación, se aplica a una estrategia de un jugador cuando ésta es tan buena o más que cualquier otra como respuesta a cualquier combinación de estrategias que elijan los demás jugadores.

**Definición 1.6.** *En el juego $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$ sea $s_i^{'}$ una estrategia del jugador $i$.*

- *Decimos que* $s_i^{'}$ *es* ***dominante*** *cuando la desigualdad*

$$u_i\left(s_1,...,s_{i-1},s_i,s_{i+1},...,s_n\right) \leq u_i\left(s_1,...,s_{i-1},s_i^{'},s_{i+1},...,s_n\right)$$

  *se cumple para toda estrategia* $s_i$ *de dicho jugador y para toda combinación de estrategias de los otros jugadores.*

- *Si todas las desigualdades se cumplen de manera estricta decimos que* $s_i^{'}$ *es* ***estrictamente dominante****.*

Obsérvese que, al no exigir en la definición de estrategia dominante que la desigualdad sea estricta en al menos un caso, puede ocurrir que un jugador tenga más de una estrategia dominante.

**Ejemplo 1.3.** *En el dilema del prisionero*

| | | Prisionero 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Callar | Confesar |
| Prisionero 1 | Callar | 4,4 | 0,5 |
| | Confesar | 5,0 | 1,1 |

Tabla 1.4: El Dilema del Prisionero

*se observa que para el jugador 1:*

$$u_1(Callar, Callar) = 4 < 5 = u_1(Confesar, Callar)$$

*y*

$$u_1(Callar, Confesar) = 0 < 1 = u_1(Confesar, Confesar)$$

*y algo análogo ocurre para el otro jugador. Por tanto, para cualquier jugador, la estrategia* $Callar$ *está estrictamente dominada por la estrategia* $Confesar$*, y en consecuencia ambos elegirán (si son racionales en el sentido anterior)* $Confesar$*.*

### 1.2.2. Primer concepto de solución: Uso de Estrategias Dominantes (UED)

Según este concepto de solución, pertenecen a la solución del juego todos aquellos perfiles de estrategias en los cuales cada jugador usa una estrategia dominante.

Por desgracia, este concepto de solución no siempre es aplicable. Los juegos en los que cada jugador tiene alguna estrategia dominante son más bien la excepción que la regla.

**Ejemplo 1.4.** *En el dilema del prisionero, este concepto sí es aplicable, pues en este caso cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante, que es Confesar. La solución es el perfil (Confesar, Confesar).*

*Por el contrario, en la batalla de lo sexos no es aplicable esta solución, pues en cualquiera de ellos existe un jugador sin estrategia dominante.*

Entonces, descrito lo anterior es importante buscar otras formas de solucionar un Juego.

### 1.2.3. Segundo concepto de solución: Eliminación Iterativa Estricta (EIE)

¿Qué ambiente de racionalidad es necesario para respaldar los argumentos de dominación y los conceptos de solución basados en ellos? Recordemos que consideramos racionales a aquellos jugadores que intentan maximizar sus pagos o ganancias, y que además son capaces de hacer todos los cálculos y razonamientos que les conduzcan a ello. Pues bien, el argumento básico de dominación, según el cual ningún jugador racional jugará una estrategia que esté estrictamente dominada, y el anterior concepto de solución, según el cual cualquier jugador racional jugará una estrategia dominante, si es que la tiene, sólo requieren para su validez una hipótesis de racionalidad mínima: que todos los jugadores sean racionales. Sin embargo, bastaría con proponer una hipótesis más fuerte, y aun así razonable, para conseguir en muchos casos unos resultados más precisos y satisfactorios.

**Ejemplo 1.5.** *Analicemos el juego siguiente, en el cual el primer concepto de solución no es aplicable*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador 1 | A | 0,2 | 4,100 |
| | B | 20,40 | 8,0 |

Tabla 1.5: Juego con estrategias dominadas

*En este juego, y con la hipótesis de que ambos jugadores son racionales, el argumento básico de dominación permite descartar la estrategia A del jugador*

*1, ya que está estrictamente dominada por B, pero no permite avanzar más. Así pues, tanto (B, I) como (B, D) serían resultados aceptables. Sin embargo, bastaría con añadir la hipótesis de que el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional para que pudiéramos avanzar un paso y descartar la estrategia D del jugador 2, lo que permitiría concluir que la solución del juego es el perfil (B, I) y sólo ese perfil.*

Nuevas hipótesis de ese estilo permitirían, en otros ejemplos, avanzar en dicho proceso de eliminación o descarte de estrategias. Para simplificar, aceptaremos a partir de ahora el supuesto de que no sólo los jugadores son racionales, sino que es de **dominio público el hecho de que todos los jugadores son racionales**. Este supuesto hace posible introducir el segundo concepto de solución, que se basa en la eliminación sucesiva que acabamos de ilustrar, por medio de la siguiente Definición :

**Definición 1.7.** *Dado un juego finito* $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, *llamamos* ***Eliminación Iterativa Estricta****, o bien* ***Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas*** *EIE al proceso:*

- *Primer Paso. De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego inicial* $G$*. Se construye el juego reducido* $G_1$ *que resulta de tal eliminación.*
- *Segundo Paso. De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego inicial* $G_1$*. Se construye el juego reducido* $G_2$ *que resulta de tal eliminación.*

*Y así sucesivamente. Se acaba el proceso, cuando ya no quedan, para ningún jugador, estrategias que eliminar. Denotamos por* $S_i^s$ *al conjunto de estrategias supervivientes del jugador* $i$*.*

De acuerdo con este concepto de solución, son soluciones todos los perfiles estratégicos constituidos por estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa estricta. Llamaremos $S^{EIE}$ al conjunto de dichos perfiles estratégicos solución.

**Ejemplo 1.6.** *Dado el juego en la tabla 1.6*

*Puesto que la racionalidad de ambos jugadores es una información de dominio público, ambos jugadores son racionales y cada uno sabe que el otro lo es y además sabe que el otro lo sabe. En consecuencia, puede razonarse así:*

*El jugador J1, que es racional, elimina la estrategia* $Media$ *porque está estrictamente dominada por* $Baja$ *(pagos 1 frente a 3 y 2 frente a 4). El jugador J2 sabe que J1 es racional y por tanto sabe que J1 ha eliminado* $Media$*.*

| | | J2 | |
|---|---|---|---|
| | | Izquierda | Derecha |
| J1 | Alta | 4,2 | 0,1 |
| | Media | 1,2 | 2,4 |
| | Baja | 3,3 | 4,2 |

Tabla 1.6: Juego con diferente número de estrategias

*Al comparar Izquierda con Derecha en ausencia de Media de J1, el jugador J2, que también es racional, deduce que Izquierda domina estrictamente a Derecha (pagos 2 frente a 1 y 3 frente a 2), por lo que elimina Derecha. El jugador J1 sabe que J2 es racional y que además J2 sabe que J1 es racional, y por tanto sabe que J2 ha eliminado Derecha como consecuencia de la eliminación por J1 de Media. Al comparar Alta con Baja en ausencia de Derecha, J1 deduce que Alta domina estrictamente a Baja (pago 4 frente a 3) por lo que elimina Baja.*

*En conclusión, las únicas estrategias supervivientes al proceso EIE son Alta de J1 e Izquierda de J2. Ambas constituyen el único perfil solución del juego, es decir,* $S_{EIE} = \{(Alta, Izquierda)\}$.

### 1.2.4. Comparación entre los anteriores conceptos de solución

El teorema siguiente establece algunas relaciones entre los conceptos de solución arriba definidos.

**Teorema 1.1.** *Sea* $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$ *un juego finito o infinito, y* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ *un perfil de estrategias.*

- *Si* $s^*$ *está constituido por estrategias* $s_i^*$ *que dominan estrictamente a todas las demás del jugador* $i$*, es el único perfil que sobrevive al proceso de eliminación iterativa débil y al de eliminación iterativa estricta, cualquiera que sea el orden de eliminación.*

- *Si* $s^*$ *está constituido por estrategias* $s_i^*$ *que dominan débilmente a todas las demás del jugador* $i$*, sobrevive a ambos procesos para cualquier orden de eliminación, pero no es necesariamente el único perfil superviviente..*

*Demostración.*

- Sea $s^*$ constituido por estrategias $s_i^*$ que dominan estrictamente a todas las demás del jugador $i$. Dado cualquier jugador $i$, y cualquier estrategia $s_i$ de $i$ distinta de $s_i^*$ , $s_i$ está estrictamente dominada por $s_i^*$ , luego el proceso de eliminación iterativa, tanto estricta como débil, descartará a si en algún momento (ya que si sigue estando dominada estrictamente por $s^*$ en todas las etapas del proceso). Por tanto, sólo el perfil $s^*$ sobrevivirá.

- Sea $s^*$ constituido por estrategias $s_i^*$ que dominan débilmente a todas las demás del jugador $i$. Dado cualquier jugador $i$, y cualquier estrategia $s_i$ de $i$ distinta de $s_i^*$ , $s_i$ está débilmente dominada por $s_i^*$, por lo que no dominará débilmente a $s_i^*$ en ninguna etapa del proceso de eliminación iterativa, sea estricta o sea débil. Así pues, ni el proceso de eliminación iterativa estricta ni el débil, descartarán nunca a $s_i^*$.

□

## 1.3. Soluciones de un Juego mediante Equilibrios de Nash

Este es quizá el más importante concepto de solución. Según él, lo razonable es esperar que los jugadores jueguen un perfil de estrategias que constituya un equilibrio de Nash, tal como se define a continuación. Se pretende que este nuevo concepto de solución sea un refinamiento, constituido por modos razonables de jugar, de los conceptos de solución basados en la eliminación iterativa de estrategias dominadas.

Lo que se propone a continuación es un enfoque completamente diferente al de la dominación de estrategias, una línea de análisis en la cual la cuestión clave es: ¿qué propiedades debería tener un perfil de estrategias para constituirse en solución de un juego?, ¿qué propiedades debe tener un perfil de estrategias para que podamos pensar que es una buena predicción del comportamiento de jugadores racionales? Procedemos por tanto, a realizar un análisis de equilibrio. Dicho análisis nos proporciona el concepto de equilibrio de Nash como condición necesaria (y en algunos casos también suficiente) para que un perfil de estrategias sea la solución del juego, es decir, una predicción válida sobre el comportamiento de jugadores racionales.

**Definición 1.8.** *En el juego $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias $(s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ es un* ***Equilibrio de Nash*** *(EN) si para cada jugador $i$,*

$$u_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

*$\forall s_i \in S_i$, es decir, para cada jugador $i$, $s_i^*$ es una solución del problema*

$$\max u_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

.

De esta definición se deduce que un Equilibrio de Nash (EN) es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un EN está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores.

### 1.3.1. Cálculo de los EN (en estrategias puras)

Hay una manera sencilla y eficaz de visualizar, en la propia representación bimatricial o trimatricial de un juego, la búsqueda y obtención de los EN. Consiste en comparar, para cualquier combinación de estrategias de sus contrincantes, los pagos que un jugador obtendría si jugara cada una de sus estrategias, y subrayar el pago (o pagos) máximo alcanzable, que corresponden a la estrategia (o las estrategias) de respuesta óptima a dicha combinación. Un perfil de estrategias es EN si y sólo si el vector de pagos correspondiente tiene todos sus pagos subrayados. En el cuadro siguiente se ejemplifica el procedimiento:

**Ejemplo 1.7.** *Encontrando equilibrio de Nash en el Dilema del Prisionero: Supuesto que el Preso 2 juegue Callar, se comparan los pagos 4 y 5 del Preso 1, y se subraya el máximo que es 5, indicando que la respuesta óptima es Confesar. Supuesto que el Preso 2 juegue Confesar, se comparan los pagos 0 y 1 del Preso 1, y se subraya el máximo que es 1, indicando que la respuesta óptima es también Confesar. Procediendo de manera análoga con los pagos del Preso 2, se llega a la conclusión de que el único EN es el perfil (Confesar, Confesar), único perfil en cuyo vector de pagos están todos los pagos subrayados. Es decir,* $S^{EN} = \{(Confesar, Confesar)\}$.

| | | Prisionero 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Callar | Confesar |
| Prisionero 1 | Callar | 4,4 | 0,$\underline{5}$ |
| | Confesar | $\underline{5}$,0 | $\underline{1}$,$\underline{1}$ |

Tabla 1.7: El Dilema del Prisionero(EN)

El proceso de cálculo de los EN en estrategias puras de un juego depende, lógicamente, de las características de dicho juego. En los juegos finitos y de tamaño reducido, como el dilema del prisionero o el Juego 2.1, es fácil hacer una comprobación en detalle de todas las posibilidades, mientras que en los juegos infinitos suele ser necesario un planteamiento más analítico, que habitualmente requiere resolver varios problemas de optimización simultáneos (uno por cada jugador).

Sin embargo, en todos los casos es conveniente organizar la búsqueda de los EN de manera sistemática, calculando la(s) estrategia(s) óptima(s) que cada jugador podría elegir en respuesta a cualquier combinación de estrategias que puedan elegir los otros jugadores.

**Definición 1.9.** *En el juego $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, y para cada jugador $i$, llamamos **Correspondencia de la Respuesta Óptima** de dicho jugador a la regla o correspondencia que asigna, a cualquier combinación de estrategias $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$, el conjunto $R_i(s_{-i})$ de estrategias de $i$ que son respuesta óptima a $s_{-i}$, es decir, que cumplen:*

$$s_i^{'} \in R_i(s_{-i}) \text{ si y sólo si}$$

$$u_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i^{'}, s_{i+1}, ..., s_n) \geq u_i\left(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n\right)$$

*para todo $s_i \in S_i$.*

A partir de la definición anterior, se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.** *En el juego $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$, el perfil de estrategias*

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$$

*es un equilibrio de Nash si y sólo si $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ para cada jugador $i$.*

Podemos ahora automatizar el cálculo de los EN mediante un proceso en dos etapas:

- Para cada jugador $i$, y para cualquier conjetura que pueda formarse sobre la actuación de los demás jugadores (o lo que es lo mismo, para cualquier combinación de estrategias de éstos) se calcula la estrategia de respuesta óptima de $i$. De este modo tenemos la correspondencia de respuesta óptima de cada jugador.

- Identificamos los EN como los perfiles estratégicos que son puntos de intersección de todas las correspondencias de respuesta óptima.

Calculemos ahora las correspondencias de respuesta óptima, y los equilibrios de Nash, de los juegos definidos anteriormente:

**Ejemplo 1.8.** *Dilema del Prisionero:*

*En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias del otro, jugar su estrategia* $Confesar$. *Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:*
*Para el Prisionero 1:* $R_1(s_2) = Confesar$, $\forall s_2 \in \{Confesar, No\ Confesar\}$
*Para el Prisionero 2:* $R_2(s_1) = Confesar$, $\forall s_1 \in \{Confesar, No\ Confesar\}$
*En consecuencia, el conjunto de los EN es* $S^{EN} = (Confesar, Confesar)$.

**Ejemplo 1.9.** *Batalla de los sexos:*

*En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a cualquiera de las estrategias puras del otro, jugar la misma estrategia. Por tanto, las correspondencias de respuesta óptima son:*
*Para el Jugador 1:* $R_1(s_2) = s_2$, $\forall s_2 \in \{Cine, Fútbol\ \}$
*Para el Jugadora 2:* $R_2(s_1) = s_1$, $\forall s_1 \in \{Cine, Fútbol\ \}$
*En consecuencia, el conjunto de los EN (en estrategias puras) es* $S^{EN} = \{(cine, Cine\ ), (Fútbol\ , Fútbol\ )\}$

### 1.3.2. Relación entre el equilibrio de Nash y los anteriores conceptos de solución

Los teoremas siguientes nos vienen a decir, que el nuevo concepto de solución, el equilibrio de Nash, es una generalización del uso de estrategias dominantes y una especialización o refinamiento de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

**Teorema 1.3.** *Sea* $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$ *un juego finito o infinito, y* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ *un perfil de estrategias. Si* $s^*$ *está constituido por estrategias dominantes, entonces es un equilibrio de Nash (aunque no necesariamente el único).*

*Demostración.* Si las estrategias de $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ son dominantes, cualquiera de ellas $s_i^*$ es respuesta óptima, por parte del correspondiente jugador $i$, a cualquier combinación de estrategias que pudieran jugar los otros jugadores, y en particular es respuesta óptima a $s_{-i}^*$, y por tanto $s^*$ es un EN. El siguiente contraejemplo 1.8 muestra que tal equilibrio de Nash no es necesariamente único.

En este juego las estrategias A de J1 e I de J2 son dominantes, pero hay dos EN, el perfil (A, I) y el (B, D), lo cual demuestra que el equilibrio en estrategias dominantes no es necesariamente el único equilibrio de Nash del juego. Obsérvese además que el perfil (B, D) es un EN cuyas estrategias constituyentes son todas débilmente dominadas. □

| | | Jugador J2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador J1 | A | 2,1 | 1,0 |
| | B | 1,1 | 1,1 |

Tabla 1.8: Contraejemplo para la demostración

El teorema anterior nos permite asegurar que el equilibrio de Nash es un concepto de solución que generaliza el de uso de estrategias dominantes.

**Teorema 1.4.** *Sea* $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$ *un juego finito , y* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ *un perfil de estrategias.*

- *Si* $s^*$ *forma un Equilibrio de Nash, las estrategias que lo constituyen sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.*

- *Si* $s^*$ *está constituida por las únicas estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, dicho perfil* $s^*$ *es el único equilibrio de Nash del Juego.*

*Demostración.*

- Sea $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ un EN. Para todo jugador $i$, la estrategia $s_i^*$ es respuesta óptima a la combinación $s_{-i}^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$ y por tanto sólo podría ser eliminada en una etapa del proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, si alguna de las estrategias $s_{-i}^*$ ha sido eliminada en una etapa anterior. En consecuencia, ninguna estrategia de $s^*$, ni ningún grupo de ellas, puede ser la primera en ser eliminada. Luego ninguna puede ser eliminada, es decir, todas sobreviven al proceso de eliminación.

  Sin embargo, en el Juego anterior(Tabla 1-8) el perfil (B, D) es un EN cuyas estrategias constituyentes son todas débilmente dominadas, y por tanto ninguna sobrevive al proceso de eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas.

- Sea $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ el único perfil que sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Supongamos que no es EN, e intentemos deducir de ello una contradicción. Si $s^*$ no es EN, existe al menos una estrategia $s_i^*$ que no es respuesta óptima a la combinación de estrategias $s_{-i}^*$. Sea $s_i'$ una estrategia del jugador $i$, distinta de $s_i^*$, que sí es respuesta óptima a $s_{-i}^*$. En ese caso ha tenido que ser eliminada en etapas anteriores pues $s_i^*$ ha sido la única superviviente de $i$. Pero es imposible que $s_i'$ haya sido eliminada en etapas anteriores, pues ninguna estrategia de $i$ la dominaría estrictamente estando presentes las estrategias en $s_{-i}^*$ de los demás jugadores, que han sobrevivido hasta el final.

$\square$

### 1.3.3. Eficiencia de Pareto. Relación entre los equilibrios de Nash y la eficiencia de Pareto

**Definición 1.10.** *Dado un Juego* $G = \{J : S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$

- *Decimos que el perfil de estrategias* $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ...s_n)$ ***está dominado en el sentido de Pareto*** *por el perfil* $s' = (s_1', s_2', ..., s_i', ..., s_n')$ *si y sólo si la desigualdad* $u_i(s_1', ..., s_n') \geq u_i(s_1, ..., s_n)$ *se cumple para todo jugador i, y para alguno de ellos se cumple de modo estricto.*

- *Decimos que el perfil de estrategias* $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ...s_n)$ *es un* ***óptimo de Pareto*** *(o que es* ***eficiente en sentido de Pareto*** *) si y sólo si no está dominado en el sentido de Pareto por ningún otro perfil. Diremos que es* ***ineficiente en el sentido de Pareto*** *si algún otro lo domina.*

Es decir, si un perfil de estrategias es eficiente no se puede cambiar a ningún otro perfil, de modo que ningún jugador salga perdiendo y alguno salga ganando estrictamente.

Este concepto de dominación hace referencia a perfiles completos que aluden a todos los jugadores a la vez, mientras que el concepto de estrategia dominada se refería a cada jugador individual. Mientras la dominación de Pareto es un concepto de análisis de la eficiencia social, relevante para el grupo de jugadores como tal grupo, la dominación de estrategias es un concepto de análisis de la eficiencia individual, relevante para cada uno de los jugadores como agente individual. No es de extrañar, por tanto, que ambos conceptos resulten totalmente independientes.

**Ejemplo 1.10.** *De manera aparentemente sorprendente, en el dilema del prisionero, el único perfil constituido por estrategias no estrictamente dominadas (y por tanto el único EN), que es* $(Confesar, Confesar)$*, es ineficiente en el sentido de Pareto. Efectivamente, el perfil* $(Callar, Callar)$ *lo domina en el sentido de Pareto.*

El análisis del dilema del prisionero nos muestra una posible debilidad del concepto de solución EN (y también del resultante de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas). El perfil propuesto como solución es ineficiente en el sentido de Pareto. Dicho de otro modo, ¿cómo van a jugar $(Confesar, Confesar)$ tal como prescribe la solución EN, si jugando $(Callar, Callar)$ consiguen ambos un pago mayor?

La clave para entender esta aparente paradoja estriba en comprender que el resultado $(Callar, Callar)$ es el apropiado desde el punto de vista social, es decir, del conjunto de los jugadores, mientras que el perfil $(Confesar, Confesar)$ es el apropiado desde el punto de vista individual.

## 1.4. Aplicaciones

Una de las aplicaciones más fructíferas de la teoría de juegos es la relativa al estudio de la organización industrial en entornos con un número de agentes no muy grande, en particular el estudio de modelos de mercado con un número reducido de empresas. Los modelos de duopolio constituyen una aplicación pionera de este tipo.

Cournot fue uno de los precursores de la teoría de juegos. En un trabajo realizado en 1838 propuso lo que ahora se llama el modelo clásico de Cournot, en el que un pequeño número de empresas compiten en el mercado de un producto homogéneo, decidiendo simultáneamente qué cantidades de producción van a aportar al mercado, y el precio de mercado queda determinado por la cantidad total aportada de acuerdo con la función de demanda inversa. Aunque el mecanismo mediante el cual se vacía el mercado vendiendo toda la producción aportada no se especifica, es útil imaginar una subasta entre compradores de la producción total. Al equilibrio resultante de ese modelo se le ha llamado tradicionalmente el equilibrio de Cournot, y se llama a veces equilibrio de Cournot-Nash para indicar que se trata del equilibrio de Nash del juego definido por el modelo de Cournot.

### 1.4.1. Duopolio de Cournot. Modelo simplificado

En un mercado hay sólo dos empresas, $E_1$ y $E_2$, que fabrican un determinado producto homogéneo y compiten en cantidades. Sean $q_1$ y $q_2$ las cantidades que producen $E_1$ y $E_2$, respectivamente. Supongamos que la función de demanda inversa es decreciente y lineal en el intervalo $[0, a/b]$, que los costes marginales de cada empresa son constantes, menores que $a$ e iguales para ambas, sin que haya costes fijos, y que en dicho mercado se vende toda la cantidad producida. En concreto, sea la función de demanda inversa:

$$P(q) = \begin{cases} a - bQ & si \quad bQ < a \\ \\ 0 & si \quad bQ \geq a \end{cases} \quad (\text{donde } b > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2)$$

y sean las funciones de costes:

$$C_1(q_1) = cq_1, \quad C_2(q_2) = cq_2 \quad donde \quad c < a$$

Los beneficios serán, por tanto:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2) - cq_1 = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2) - cq_2 = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Resumiendo, este juego tiene dos jugadores, $E_1$ y $E_2$, con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = [0, a/b]$, y con funciones de pagos o ganancias, suponiendo que las utilidades coincidan con los beneficios:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

*Cálculo del Equilibrio de Nash:*

La respuesta óptima de $E_1$ a una acción cualquiera, prefijada, $q_2$ de $E_2$, se obtiene resolviendo:

$$\text{máx}_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c) \quad \text{sujeto a :} \quad 0 \leq q_1 \leq a/b$$

Supongamos que la solución es interior, es decir, la suma $q_1^* + q_2$ pertenece al intervalo abierto $(0, a/b)$.

La condición de primer orden es

$$\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = q_1(-b) + (a - bq_1 - bq_2 - c) = 0; \qquad q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Y la condición de segundo orden es $\partial^2 u_1(q_1, q_2)/\partial q_1^2 = -2b < 0$ (condición suficiente de máximo).

Así pues, la correspondencia de respuesta óptima, o función de reacción, de $E_1$ es:

$$R_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Análogamente, la respuesta óptima de $E_2$ a una acción cualquiera, $q_1$ de $E_1$, se obtiene resolviendo:

$$\text{máx}_{q_2}\, u_2(q_1,q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c) \quad \text{sujeto a :} \quad 0 \le q_2 \le a/b$$

Y razonando del mismo modo se deduce que la correspondencia de respuesta óptima, o función de reacción, de $E_2$ es:

$$R_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

Si $(q_1^*, q_2^*)$ ha de ser EN, $q_1^*$ será respuesta óptima a $q_2^*$, y $q_2^*$ lo será de $q_1^*$, por tanto:

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2^*}{2b}, \qquad q_2^* = \frac{a - c - bq_1^*}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$q_2^* = \frac{a - c - b\left(\frac{a-c-bq_2^*}{2b}\right)}{2b} = \frac{a - c + bq_2^*}{4b}; \qquad q_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

Análogamente,

$$q_1^* = \frac{a-c}{3b}$$

En conclusión, el conjunto de los puntos de equilibrio es:

$$S^{EN} = \left\{\left(q_1^* = \frac{a-c}{3b}, q_2^* = \frac{a-c}{3b}\right)\right\}$$

La cantidad total producida en equilibrio es $Q^* = \frac{2(a-c)}{3b}$ y el precio en equilibrio es

$$P^* = a - bQ^* = \frac{a + 2c}{3}$$

Por otra parte, los beneficios en equilibrio son

$$u_1^* = u_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^* \left(a - \frac{a-c}{3} - \frac{a-c}{3} - c\right) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

y análogamente $u_1^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$ y en consecuencia, el beneficio total en equilibrio es

$$U^* = \frac{2(a-c^2)}{9b}$$

### 1.4.2. El oligopolio de Bertrand

Cuatro décadas después de la publicación del modelo clásico de Cournot, Bertrand propuso un nuevo modelo de oligopolio, que llamaremos modelo de Bertrand. En él las empresas compiten en precios y se comprometen a servir, al precio que ellas proponen, toda la cantidad que los consumidores demanden a dicho precio. Análogamente al caso del modelo de Cournot, el equilibrio de Bertrand es el equilibrio de Nash del juego definido por el modelo de Bertrand.

#### Duopolio de Bertrand con productos diferenciados. Modelo simplificado.

En este modelo con dos empresas maximizadoras de beneficios, $E_1$ y $E_2$, y que compiten en precios, supondremos que existen ciertas características de los bienes que éstas producen que los hacen diferentes a los ojos de los consumidores. En tal caso, podemos pensar intuitivamente que el producto de cada empresa es en cierto modo único, lo que le proporcionará a ésta un cierto poder de mercado sobre dicho producto, permitiéndole beneficiarse de dicho poder mediante un precio más alto que su coste marginal.

Concretando, supongamos que los precios $p_1$ y $p_2$ pertenecen a $[0, \infty]$, que las funciones de demanda de ambos productos dependen del vector de precios $(p_1, p_2)$ del siguiente modo:

$$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2$$

$$q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$$

que las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = cq_1$$

$$C_2(q_2) = cq_2$$

y que los parámetros a, b y c cumplen:

$$0 < c < a \;\text{ y }\; 0 < b < 2$$

En este caso, los beneficios son:

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (a - p_1 + bp_2)(p_1 - c)$$

$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (a - p_2 + bp_1)(p_2 - c)$$

## Cálculo del equilibrio de Nash

Respuesta óptima de $E_1$ a una acción cualquiera $p_2$ de $E_2$:

Si $E_2$ establece el precio $p_2$ para su producto, la respuesta óptima de $E_1$ se obtiene resolviendo

$$\text{máx}\, u_1(p_1, p_2) = (a - p_1 + bp_2)(p_1 - c)$$

en la variable de decisión $p_1$.

La condición de primer orden es

$$\partial u_1(p_1.p_2)/\partial p_1 = -(p_1 - c) + (a - p_1 + bp_2) = 0;\; a + c - 2p_1 + bp_2 = 0;$$

$$p_1 = \frac{a + c + bp_2}{2}$$

y la condición de segundo orden es $\partial u_1(p_1, p_2)/\partial p_1^2 = -2 < 0$ (condición suficiente de máximo). Así pues, la correspondencia de respuesta óptima, o función de reacción, de $E_1$ es

$$R_1(p_2) = \frac{a + c + bp_2}{2}$$

Análogamente, obtendríamos la siguiente respuesta óptima de $E_2$ a una acción cualquiera $p_1$ de $E_1$:

$$R_2(p_1) = \frac{a + c + bp_1}{2}$$

Por tanto, $(p_1^*, p_2^*)$ será EN si se cumple:

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2}, \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$p_1^* = \frac{a + c + b\frac{a+c+bp_1^*}{2}}{2} = \frac{(2 + b)a + (2 + b)c + b^2 p_1^*}{4}$$

de donde se deduce

$$p_1^* = \frac{(2 + b)a + (2 + b)c}{4 - b^2} = \frac{a + c}{2 - b}$$

y análogamente:

$$p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

En conclusión,

$$S^{EN} = \left\{ \left( p_1^* = \frac{a+c}{2-b}, p_2^* = \frac{a+c}{2-b} \right) \right\}$$

Las cantidades totales producidas en equilibrio son

$$q_2^* = q_1^* = q_1(p_1^*, p_2^*) = a - p_1^* + bp_2^* = a - \frac{4+c}{2-b} + b\frac{a+c}{2-b} = \frac{a+(b-1)c}{2-b}$$

y los beneficios en equilibrio son

$$u_2^* = u_1^* = u_1(p_1^*, p_2^*) = q_1^*(p_1^* - c) = \frac{a+(b-1)c}{2-b} \left( \frac{a+c}{2-b} - c \right) = \frac{(a+(b-1)c)^2}{(2-b)^2}$$

### 1.4.3. El problema de los bienes comunales

Un bien comunal es un bien que es propiedad de un conjunto especificado de individuos, es decir, disponible para el uso y disfrute de dichos individuos, de modo que ninguno de ellos es excluible de dicho uso y que el uso que un individuo hace del bien disminuye la potencialidad de este bien para los demás usuarios. El ejemplo históricamente más conocido de bien comunal es el de los ejidos, tierras de pastos propiedad de los habitantes de una determinada localidad o región.

En general, la consecuencia de que un recurso sea comunal es que puede sufrir una sobreexplotación. Ello también ocurre en recursos naturales de libre acceso como los caladeros de pesca en aguas internacionales que estén abiertos a cualquier empresa de pesca.

## Modelo simplificado

#### a)Bien privado. Un sólo jugador

Un ganadero dispone de un pastizal al que llevar sus vacas. El coste de llevar cada vaca es $c$. Por otra parte, el valor o utilidad $v$ que obtiene de cada vaca depende del número de vacas $M$ que envía al ejido (obsérvese que si envía solamente una, podrá comer lo que quiera y volverá sana y con mucho peso, mientras que si envía muchas no habrá comida para todas, y volverán débiles y flacas).

Sea $v(M) = a - M^2$ el valor que obtiene por cada vaca, y sea $c < a$.

Su problema de decisión es cuántas vacas M* ha de llevar para maximizar su ganancia o utilidad total $u(M) = (v(M) - c)M = (a - M^2 - c)M$.

## Cálculo del óptimo

Vamos a resolver el problema como si la variable $M$ no fuera entera y pudiera tomar valor real. La condición de primer orden es

$$du(M)/dM = 0;$$

$$(v(M) - c) + M\partial(v(M))/\partial M = 0 \tag{1.1}$$

$$(a - M^2 - c) + (-2M)M = 0; \quad a - c = 3M^2; \quad M = +\sqrt{\frac{a-c}{3}}$$

y la condición de segundo orden es

$$d^2u(M)/dM^2 = -6M < 0 \text{ (correspondiente a un máximo)}$$

En conclusión, la cantidad óptima de vacas es

$$M^* = +\sqrt{\frac{a-c}{3}}$$

y la ganancia máxima es

$$u^* = (a - (M^*)^2 - c)M^* = \left(a - \frac{a-c}{3} - c\right)\sqrt{\frac{a-c}{3}} = 2\sqrt{\left(\frac{a-c}{3}\right)^3}$$

### b) Bien comunal. Dos jugadores

En este caso, son dos los ganaderos que comparten el pastizal al que llevar sus vacas. El primero, J1, lleva $m_1$ unidades y el segundo, J2, lleva $m_2$. El coste de llevar cada unidad es $c$, y el valor $\nu$ que obtiene cualquiera de ellos de cada unidad que lleve depende del número de unidades $M = m_1 + m_2$ que vayan al pastizal.

Sea $\nu(M) = a - M^2$ el valor que obtiene cada ganadero por cada unidad. El problema de decisión de J1, supuesto que J2 lleve $m_2$ unidades, es cuántas unidades $m_1$ ha de llevar para maximizar su ganancia o utilidad total $u_1(m_1, m_2) = (\nu(M) - c)m_1 = (a - M^2 - c)m_2$. Análogamente, el problema de decisión de J2, supuesto que J1 lleve $m_1$ unidades, es cuántas unidades $m_2$ ha de llevar para maximizar su ganancia o utilidad total $u_2(m_1, m_2) = (\nu(M) - c)m_2 = (a - M^2 - c)m_2$.

A diferencia del caso anterior, la respuesta a estas preguntas contiene un elemento estratégico, pues cada ganadero influye con sus decisiones en el rendimiento que el otro puede obtener del pastizal.

## Cálculo del equilibrio de Nash

Como en el caso anterior, vamos a resolver el problema como si las variables $m_1$ y $m_2$ fueran reales, ignorando por tanto su carácter entero. Las condiciones de primer orden son:

$$\partial u_i(m_1, m_2)/\partial m_i = 0;$$

$$(\nu(M) - c) + m_i \partial(\nu(M))/\partial m_i, \quad \forall i = 1, 2 \tag{1.2}$$

$$(a - (m_1 + m_2)^2 - c) + (-2(m_1 + m_2))m_i = 0, \quad \forall i = 1, 2$$

Sumando miembro a miembro:

$$2a - 2(m_1 + m_2)^2 - 2c - 2(m_1 + m_2)(m_1 + m_2) = 0; \quad a - c - 2(m - 1 + m_2)^2 = 0$$

$$(m_1 + m_2)^2 = (a - c)/2; \quad m_1 + m_2 = +\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Así pues las cantidades individuales de equilibrio son $m_1^* = m_2^* = \sqrt{\frac{a-c}{8}}$, la cantidad total es $M^* = \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ y la ganancia total es

$$\left(a - \frac{a-c}{2} - c\right)\sqrt{\frac{a-c}{2}} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^3}$$

Las condiciones de segundo orden son
$\partial^2 u_i(m_1, m_2)/\partial m_i^2 = -4M - 2m_i < 0, \quad \forall i = 1, 2$ (correspondientes a un máximo)

# Capítulo 2

# Juegos estáticos con información completa (II)

En este capítulo se continúa y profundiza el estudio de los juegos estáticos con información completa. Se introducen las estrategias mixtas, lo que permite extender los conceptos de dominación y el concepto de equilibrio de Nash, estudiados en el capítulo anterior en el contexto de las estrategias puras. En la primera sección se aborda el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, en la segunda se analiza el caso particular de los juegos de suma cero. En la tercera se completa el análisis de las ideas de dominación y en la cuarta se plantean, bajo la denominación de refinamientos, algunos conceptos de equilibrio alternativos al concepto de equilibrio de Nash.

El concepto de solución equilibrio de Nash (EN), tal como lo hemos definido en el capítulo anterior, tiene una dificultad muy importante, que consiste en que su existencia no está garantizada, ni siquiera en juegos tan sencillos como los juegos finitos. En las páginas que siguen veremos que si ampliamos el concepto de estrategia, el conjunto de equilibrios de Nash se amplía también, de tal modo que podremos afirmar que todos los juegos finitos poseen al menos un EN.

## 2.1. Ampliación del concepto de estrategia: estrategias mixtas

Hasta ahora hemos utilizado la palabra estrategia para referirnos a un plan completo de acciones ciertas de cada jugador. La ampliación del concepto de estrategia consiste en permitir que los jugadores no sólo puedan elegir entre acciones ciertas y concretas, sino que también puedan seleccionar acciones aleatorias, es decir, puedan tomar acciones inciertas, que asignan distintas probabilidades a las distintas acciones ciertas. A las estrategias que deciden de manera aleatoria sobre acciones ciertas se las denomina estrategias mixtas.

**Definición 2.1.** *Sea* $S_i = \left\{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^k\right\}$ *el conjunto de estrategias puras del jugador i. Llamamos* ***estrategia mixta*** *del jugador i a toda lotería* $\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k)$ *sobre* $S_i$*, es decir, a toda distribución de probabilidad sobre* $S_i$ *y por tanto, a toda k-pla* $(\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k)$ *cuyas componentes son no negativas y suman 1. Se interpreta* $\sigma_i$ *como la estrategia consistente en jugar la estrategia pura* $s_i^1$ *con probabilidad* $\sigma_i^1, s_i^2$ *con probabilidad* $\sigma_i^2, ..., s_i^k$ *y con probabilidad* $\sigma_i^k$*, donde* $\sigma_i^k \geq 0$*, para cada* $j = 1, 2, ..., k$ *y* $\sum_{j=1}^k \sigma_i^j = 1$.

Al conjunto de estrategias mixtas del jugador $i$ lo denotaremos por $\Delta(S_i)$, indicando con ello que el conjunto de estrategias mixtas de un jugador está formado por todas las loterías sobre $S_i$.

$$\Delta(S_i) = \left\{\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^k) : \sigma_i^j \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, ..., k \text{ y } \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j = 1\right\}$$

Entre las estrategias mixtas están aquellas que asignan probabilidad 1 a una de las estrategias puras y probabilidad cero a todas las demás. Por tanto, toda estrategia pura es también estrategia mixta: así la estrategia pura $s_i^j$ se puede identificar con la estrategia mixta $(0, ..., 1, ..., 0)$, en donde el 1 corresponde a la componente j-ésima de dicho vector. La ampliación del concepto de estrategia para dar cabida a las estrategias mixtas supone además convertir en estrategia a toda combinación lineal convexa de al menos dos estrategias puras.

Teniendo en cuenta que las estrategias mixtas se definen sobre el conjunto de estrategias puras y que dichas loterías pueden asignar probabilidad nula a determinadas estrategias puras, se hace preciso concretar para cada estrategia mixta el subconjunto de estrategias puras sobre el cual está efectivamente definida, es decir, el subconjunto de estrategias puras con probabilidad estrictamente positiva.

**Definición 2.2.** *Sea* $S_i = \left\{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^k\right\}$ *el conjunto de estrategias puras del jugador i. Se llama* ***soporte de una estrategia mixta*** $\sigma_i$ *al subconjunto de las estrategias puras que cumplen*

$$\boldsymbol{SOP}(\sigma_i) = \left\{s_i^j \in S_i : \sigma_i^j > 0\right\}$$

*Es decir, pertenecen al soporte de una estrategia mixta todas las estrategias puras a las que se asigna una probabilidad estrictamente positiva.*

Teniendo en cuenta la definición de soporte diremos que una estrategia mixta es *completa* si el soporte de dicha estrategia coincide con el conjunto de estrategias puras del jugador ($\mathbf{SOP}(\sigma_i) = S_i$).
Es decir, una estrategia mixta es completa si asigna una probabilidad estrictamente positiva a cada estrategia pura de $S_i$. Por otra parte, cualquier estrategia pura puede ser vista como una estrategia mixta que tiene un soporte unitario, es decir, una estrategia mixta cuyo soporte es un conjunto formado por un solo elemento. A las estrategias mixtas que no son puras las llamamos estrategias mixtas **propias**.

**Ejemplo 2.1.** *Dado el juego*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador 1 | A | 3,2 | 1,4 |
| | B | 1,3 | 2,1 |
| | C | 2,2 | 0,0 |

Tabla 2.1: Juego con estrategias mixtas

*En el Juego los conjuntos de estrategias puras son* $S_1 = \{A, C, B\}$ *y* $S_2 = \{I, D\}$. *Una estrategia mixta para el jugador 1 no es más que una distribución de probabilidad* $(p, q, 1-p-q)$ *donde* $p$ *representa la probabilidad de elegir* $A$, $q$ *la probabilidad de elegir* $C$ *y* $(1-p-q)$ *la probabilidad de elegir* $B$.

*Y del mismo modo, una estrategia mixta para el jugador 2 consistirá en una lotería* $(r, 1-r)$ *en la que* $r$ *representa la probabilidad de elegir* $I$ *y* $(1-r)$ *la probabilidad de elegir* $D$.

*En este caso, cualquier estrategia mixta del jugador 1 para la que* $p > 0$, $q > 0$ *y* $(1 - p - q) > 0$ *tendrá un conjunto soporte igual al conjunto de estrategias puras, y por tanto es una estrategia mixta completa. Por ejemplo, una estrategia mixta completa para el jugador 1 es* $(1/2, 1/4, 1/4)$ *que asigna una probabilidad* $1/2$ *a* $A$, *una probabilidad* $1/4$ *a* $C$ *y una probabilidad* $1/4$ *a* $B$, *pues tiene un conjunto soporte que coincide con el conjunto de estrategias puras:* $SOP(1/2, 1/4, 1/4) = S_1$.

*Por otra parte, la estrategia mixta del jugador 1 dada por la lotería* $(0, 1/3, 2/3)$ *no es una estrategia mixta completa, pues asigna una probabilidad* $0$ *a su estrategia* $A$, *y su soporte es un subconjunto propio de* $S_1$: $SOP(0, 1/3, 2/3) = \{C, B\}$.

*Finalmente, podemos expresar las estrategias puras A, C y B de dicho jugador como las estrategias mixtas* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *y* $(0,0,1)$, *respectivamente.*

¿Cuál es el efecto inmediato de la utilización de estrategias mixtas? Si algún jugador juega una estrategia mixta, la función de pagos de cualquier jugador deja de ser determinista, pasando a ser aleatoria. En adelante usaremos mayúsculas para referirnos a los pagos o utilidades esperadas que cada jugador obtiene cuando se juega un perfil de estrategias mixtas.

**Ejemplo 2.2.** *Veamos el siguiente ejemplo, el juego de las monedas obtengamos los pagos de los jugadores*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Cara | Cruz |
| Jugador 1 | Cara | 1,-1 | -1,1 |
| | Cruz | -1,1 | 1,-1 |

Tabla 2.2: Juego de las monedas

*En el juego de las monedas los conjuntos de estrategias puras son* $S_1 = S_2 = \{Cara, Cruz\}$. *Por tanto, una estrategia mixta para el jugador 1 no es más que una distribución de probabilidad sobre el conjunto* $S_1$, *es decir,* $(p, 1-p)$ *donde* $p$ *representa la probabilidad de elegir* $Cara$ *y* $(1-p)$ *la probabilidad de elegir* $Cruz$. *Y del mismo modo, una estrategia para el jugador 2 consistirá en una lotería* $(q, 1-q)$ *sobre el conjunto* $S_2$ *en la que* $q$ *representa la probabilidad de elegir* $Cara$ *y* $(1-q)$ *la probabilidad de elegir* $Cruz$. *Por ejemplo, los pagos esperados para cada jugador de las combinaciones de estrategias* $((p, 1-p), Cara)$ *y* $((p, 1-p), Cruz)$ *son los siguientes:*

$$\begin{aligned} U_1((p,1-p),Cara) &= p.u_1(Cara,Cara) + (1-p).u_1(Cruz,Cara) \\ &= p.(1) + (1-p).(-1) \\ &= 2p-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2((p,1-p),Cara) &= p.u_2(Cara,Cara) + (1-p).u_2(Cruz,Cara) \\ &= p.(-1) + (1-p).(1) \\ &= 1-2p \end{aligned}$$

*y análogamente*

$$\begin{aligned} U_1((p,1-p),Cruz) &= p.u_1(Cara,Cruz)+(1-p).u_1(Cruz,Cruz) \\ &= p.(-1)+(1-p).(1) \\ &= 1-2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2((p,1-p),Cruz) &= p.u_2(Cara,Cruz)+(1-p).u_2(Cruz,Cruz) \\ &= p.(1)+(1-p).(-1) \\ &= 2p-1 \end{aligned}$$

*Y los pagos esperados de la combinación de estrategias* $((p,1-p),(q,1-q))$ *son:*

$$\begin{aligned} U_1((p,1-p),(q,1-q)) &= q.U_1((p,1-p),Cara)+ \\ &+(1-p).U_1((p,1-p),Cruz) \\ &= q\,[2p-1]+(1-2q).\,[1-2q] \\ &= 1-2p-2q+4pq \end{aligned}$$

*de igual manera obtenemos*

$$\begin{aligned} U_2((p,1-p),(q,1-q)) &= pq(-1)+(1-p)q(1)+p(1-q)(1)+ \\ &+(1-p)(1-q)(-1) \\ &= -1+2p+2q-4pq \end{aligned}$$

A continuación presentamos una forma general de las ganancias esperadas para juegos bipersonales.

Sea un juego $G$ con dos jugadores cuyos conjuntos de estrategia son $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^m\}$, y sea $\sigma_2 = (\sigma_2^1, \sigma_2^2, ..., \sigma_2^n)$ una estrategia mixta del jugador 2.

Si el jugador 1 juega $s_1^i$ y el jugador 2 juega $\sigma_2$, las ganancias esperadas son:

$$U_1(s_1^i,\sigma_2) = \sigma_2^1 u_1(s_1^i,s_2^1)+\sigma_2^2 u_1(s_1^i,s_2^2)+...+\sigma_2^n u_1(s_1^i,s_2^n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^i,s_2^j)$$

$$U_2(s_1^i,\sigma_2) = \sigma_2^1 u_2(s_1^i,s_2^1)+\sigma_2^2 u_2(s_1^i,s_2^2)+...+\sigma_2^n u_2(s_1^i,s_2^n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^i,s_2^j)$$

Si el jugador 1 juega $\sigma_1 = (\sigma_1^1, \sigma_1^2, ..., \sigma_1^m)$ y el jugador 2 juega $\sigma_2$, las ganancias esperadas son:

$$\begin{aligned}
U_1(\sigma_1,\sigma_2) &= \sigma_1^1 U_1(s_1^1,\sigma_2) + \sigma_1^2 U_1(s_1^2,\sigma_2) + ... + \sigma_1^m U_1(s_1^m,\sigma_2)\\
&= \sigma_1^1 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^1,s_2^j) + \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^2,s_2^j) + \cdots +\\
&+ \sigma_1^m \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^m,s_2^j)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sigma_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_1(s_1^i,s_2^j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_1^i \sigma_2^j u_1(s_1^i,s_2^j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2(\sigma_1,\sigma_2) &= \sigma_1^1 U_2(s_1^1,\sigma_2) + \sigma_1^2 U_2(s_1^2,\sigma_2) + ... + \sigma_1^m U_2(s_1^m,\sigma_2)\\
&= \sigma_1^1 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^1,s_2^j) + \sigma_1^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^2,s_2^j) + \cdots +\\
&+ \sigma_1^m \sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^m,s_2^j)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sigma_1^i \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_2^j u_2(s_1^i,s_2^j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_1^i \sigma_2^j u_2(s_1^i,s_2^j)
\end{aligned}$$

## Expresión matricial de las ganancias esperadas

Sea $G$ un juego con dos jugadores cuyos conjuntos de estrategias puras son $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$ y sean $\sigma_1 = (\sigma_1^1, \sigma_1^2, ..., \sigma_1^m)$ y $\sigma_2 = (\sigma_2^1, \sigma_2^2, ..., \sigma_2^n)$ estrategias mixtas de los jugadores 1 y 2, respectivamente.

La forma estratégica de este juego, en estrategias puras, puede representarse como la siguiente tabla bimatriz:

| | | **J2** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $s_2^1$ | $s_2^2$ | $\cdots$ | $s_2^n$ |
| **J1** | $s_1^1$ | $u_1(s_1^1, s_2^1), u_2(s_1^1, s_2^1)$ | $u_1(s_1^1, s_2^2), u_2(s_1^1, s_2^2)$ | $\cdots$ | $u_1(s_1^1, s_2^n), u_2(s_1^1, s_2^n)$ |
| | $s_1^2$ | $u_1(s_1^2, s_2^1), u_2(s_1^2, s_2^1)$ | $u_1(s_1^2, s_2^2), u_2(s_1^2, s_2^2)$ | $\cdots$ | $u_1(s_1^2, s_2^n), u_2(s_1^2, s_2^n)$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots \cdots$ | $\vdots$ |
| | $s_1^m$ | $u_1(s_1^m, s_2^1), u_2(s_1^m, s_2^1)$ | $u_1(s_1^m, s_2^2), u_2(s_1^m, s_2^2)$ | $\cdots$ | $u_1(s_1^m, s_2^n), u_2(s_1^m, s_2^n)$ |

Tabla 2.3: Expresión matricial de las ganancias esperadas

que podemos separar en dos matrices $A_1 = \left[u_1(s_1^j, s_2^j)\right]_{i,j}$ y $A_2 = \left[u_2(s_1^j, s_2^j)\right]_{i,j}$, donde $A_1$ recoge las ganancias del jugador 1 y $A_2$ las ganancias del jugador 2, ante las distintas combinaciones de estrategias puras de los jugadores.

Teniendo en cuenta esta separación de las ganancias de los jugadores en dos matrices, $A_1$ y $A_2$, podemos expresar la ganancia esperada de cada jugador cuando juegan las estrategias mixtas $\sigma_1$ y $\sigma_2$ respectivamente, simplemente como los siguientes productos:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \qquad U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t$$

donde por $\sigma^t$ entendemos el vector de estrategias mixtas traspuesto.

**Ejemplo 2.3.** *Consideremos el juego siguiente:*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador 1 | A | 3,2 | 1,4 |
| | B | 1,3 | 2,1 |
| | C | 2,2 | 0,0 |

Tabla 2.4: Juego con estrategias mixtas

*Vamos a calcular la utilidad esperada de cada jugador cuando juegan las siguientes combinaciones de estrategias mixtas:*

*a)* $\sigma_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$ $\sigma_2 = (1/3, 2/3)$.

*La matriz* $A_1$ *está formada por el primer elemento de la tabla para cada estrategia pura de cada jugador y la matriz* $A_2$ *por el segundo elemento:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*y la ganancia esperada de cada jugador por jugar $\sigma_1$ y $\sigma_2$ respectivamente es:*

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1 A_1 \sigma_2^t &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/2 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ &= 31/18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1 A_2 \sigma_2^t &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13/16 & 17/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ &= 47/18 \end{aligned}$$

*b)* $\sigma_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$ *y* $s_2 = I$. *Dado que cualquier estrategia pura no es más que una estrategia mixta con soporte unitario (degenerada), podemos expresar* $s_2 = I$ *como la estrategia mixta* $\sigma_2$ *que asigna probabilidad 1 a la estrategia I y probabilidad 0 a la estrategia D, es decir,* $\sigma_2 = (1, 0)$. *Por tanto, la utilidad esperada para los jugadores es:*

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1 A_1 \sigma_2^t &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 5/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1 A_2 \sigma_2^t &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13/6 & 17/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 13/6 \end{aligned}$$

### 2.1.1. Definición ampliada de equilibrio de Nash

La definición del equilibrio de Nash cuando permitimos la existencia de estrategias mixtas no es más que una extensión del concepto visto para estrategias puras.

**Definición 2.3.** *En un juego G, decimos que el perfil de estrategias mixtas* $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*)$ *es un Equilibrio de Nash si para cada jugador i;*

$$U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) \geq U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$$

*para todo* $\sigma_i$ *de* $\Delta(S_i)$.

Es decir, para cada jugador i, $\sigma_i^*$ es una solución del problema

$$\max U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$$

en la variable $\sigma_i$, donde $\sigma_i$ pertenece a $\Delta(S_i)$ o dicho de otro modo, para cada jugador i, $\sigma_i^*$ es respuesta óptima a $\sigma_{-i}^*$.

Téngase en cuenta que una estrategia mixta no es más que una lotería sobre estrategias puras y que la función de pagos o ganancias es lineal, para cada jugador, en las probabilidades de sus distintas estrategias puras. Por tanto, el pago esperado para un jugador de una estrategia mixta, suponiendo fijas las estrategias de los otros jugadores, resulta ser una combinación convexa de los pagos de las estrategias puras soporte de dicha estrategia mixta, y en consecuencia, la ganancia esperada de una estrategia mixta tiene como límites inferior y superior las ganancias mínima y máxima de las estrategias puras soporte de dicha estrategia mixta.

**Ejemplo 2.4.** *Continuemos con este ejemplo*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador 1 | A | 3,2 | 1,4 |
| | B | 1,3 | 2,1 |
| | C | 2,2 | 0,0 |

*Como puede verse en este juego, dada la estrategia I del jugador 2, el jugador 1 no puede esperar ganar menos de 1 (ganancia cuando juega C), ni más de 3 (ganancia cuando juega A) con ninguna de sus estrategias, ya sean puras o mixtas:*

$$\begin{aligned} U_1\left[(p, q, 1-p-q), I\right] &= pu_1(A, I) + qu_1(B, I) + (1-p-q)u_1(C, I) \\ &= p.3 + q.1 + (1-p-q).2 \end{aligned}$$

*$U_1[(p,q,1-p-q),I]$ toma un valor máximo de 3 cuando $p=1$, $q=0$ y $1-p-q=0$, y un valor mínimo de 1 cuando $p=0$, $q=1$ y $1-p-q=0$.*

De lo dicho en el párrafo anterior y de lo visto en el ejemplo, se desprende intuitivamente que para que una estrategia mixta sea respuesta óptima a una estrategia de otro jugador (o a una combinación de estrategias del resto de jugadores si hay más de dos), todas las estrategias puras soporte de la estrategia mixta deben generar la misma ganancia y esta ganancia debe ser la máxima dada la estrategia o perfil de estrategias del resto de jugadores. Si alguna estrategia pura del soporte generara una ganancia inferior, entonces debería ser desechada (es decir, se le debería asignar probabilidad nula) pues en caso contrario haría que la ganancia esperada de la estrategia mixta fuese menor que la ganancia de alguna estrategia pura, dejando de ser, por tanto, respuesta óptima de ese jugador a la estrategia o perfil de estrategias del resto de jugadores.

En el Teorema siguiente se formaliza la idea anterior.

**Teorema 2.1.** *En el juego $G$ la combinación de estrategias mixtas $\sigma^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*,...,\sigma_n^*)$ es un Equilibrio de Nash si y sólo si para cada jugador i con estrategia mixta $\sigma_i^*=(\sigma_i^{1*},\sigma_i^{2*},...,\sigma_i^{j*},...)$ tener $\sigma_i^{j*}>0$ implica que la estrategia pura $s_i^j$ es respuesta óptima a $\sigma_{-i}^*=(\sigma_1^*,...,\sigma_{i-1}^*,\sigma_{i+1}^*,...,\sigma_n^*)$.*

*Demostración.* $\Leftarrow$) Supongamos que el perfil $\sigma^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*,...,\sigma_n^*)$ cumple, para cada jugador i, que todas sus estrategias puras $s_i^j$ soporte de $\sigma_i^*$ son respuesta óptima a

$$\sigma_{-i}^*=(\sigma_1^*,...,\sigma_{i-1}^*,\sigma_{i+1}^*,...,\sigma_n^*)$$

Llamemos $M_i^*$ a la máxima utilidad que puede ser alcanzada por el jugador i si los demás juegan $\sigma_{-i}^*$, es decir,

$$\begin{aligned}M_i^*&=max\left\{U_i(\sigma_1^*,...,\sigma_{i-1}^*,s_i,\sigma_{i+1}^*,...,\sigma_n^*):s_i\in S_i\right\}\\&=max\left\{U_i(\sigma_1^*,...,\sigma_{i-1}^*,\sigma_i,\sigma_{i+1}^*,...,\sigma_n^*):\sigma_i\in\Delta(S_i)\right\}\end{aligned}$$

En ese caso,

$$\begin{aligned}U_i(\sigma_1^*,...,\sigma_{i-1}^*,s_i^j,\sigma_{i+1}^*,...,\sigma_n^*)&=U_i(\sigma_1^*,...,\sigma_{i-1}^*,s_i,\sigma_{i+1}^*,...,\sigma_n^*)\\&=M_i^*,\forall s_i^j\in SOP(\sigma_i^*)\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) &= \sum_{\sigma_i^{j^*}>0} \sigma_i^{j^*} U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) \\
&= \sum_{\sigma_i^{j^*}} \sigma_i^{j^*} M_i^* \\
&= M_i^* \\
&\geq U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*), \forall \sigma_i \in \Delta(S_i)
\end{aligned}$$

Así pues, $\sigma_i^*$ es respuesta óptima a $\sigma_{-i}^*$ para todo jugador i, por lo que $\sigma^*$ es Equilibrio de Nash.

$\Rightarrow$) Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*)$ un EN. Supongamos que, dado un jugador cualquiera i, la estrategia pura $s_i^j$ pertenece al soporte de $\sigma_i^*$. Demostraremos por reducción al absurdo que $s_i^j$ es respuesta óptima a $\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$. Si no lo fuera, existiría una estrategia pura $s_i^k$ tal que

$$U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) > U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)$$

Ahora bien, si $\sigma_i'$ es la estrategia mixta que es en todo igual a $\sigma_i^* = (\sigma_i^{1^*}, \sigma_i^{2^*}, ..., \sigma_i^{j^*}, ...)$, salvo que juega la estrategia pura $s_i^j$ con probabilidad cero y la estrategia pura $s_i^k$ con probabilidad $\sigma_i^{j^*} + \sigma_i^{k^*}$ dicha estrategia $\sigma_i'$ es una respuesta estrictamente mejor a $\sigma_{-i}^*$ que $\sigma_i^*$. En Efecto,

$$\begin{aligned}
U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i', \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) &= \sum_{h\neq j, h\neq k} \sigma_i^{h^*} U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^h, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) + \\
&+ (\sigma_i^{j^*} + \sigma_i^{k^*}) U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) > \\
&> U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) = \\
&= \sum_{h\neq j, h\neq k} \sigma_i^{h^*} U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^h, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) + \\
&+ \sigma_i^j U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^j, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*) + \\
&+ \sigma_i^k U_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, s_i^k, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\sigma_i^*$ no es respuesta óptima a $\sigma_{-i}^*$, lo que contradice la hipótesis y prueba la condición «solo si». $\square$

Un perfil de estrategias mixtas es un equilibrio de Nash si y sólo si para cada jugador, todas las estrategias puras soporte de su estrategia mixta son una respuesta óptima a la combinación de estrategias de equilibrio del resto de los jugadores.

Esto significa que las estrategias mixtas de equilibrio asignan una probabilidad estrictamente positiva sólo a aquellas estrategias puras que son respuesta óptima a las estrategias resto de jugadores. De ello se deduce que una estrategia mixta es respuesta óptima a estrategias (puras o mixtas) dadas, sólo si sus estrategias puras soporte lo son también. En consecuencia, las estrategias puras soporte de una estrategia mixta de equilibrio producen ganancias iguales.

## Cálculo de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en juegos 2x2

Si bien la definición ampliada del equilibrio de Nash para dar cabida a las estrategias mixtas no parece diferenciarse de aquella vista para las estrategias puras, el cálculo de los EN en estrategias mixtas propias (es decir, con soporte no unitario) se complica bastante cuando tratamos juegos con más de dos jugadores o con dos jugadores y más de dos estrategias por jugador.

Para el cálculo de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en juegos de este tipo utilizaremos la siguiente propiedad de las estrategias mixtas: **una estrategia mixta será respuesta óptima a otra estrategia (pura o mixta) dada sólo si sus estrategias puras soporte son respuesta óptima. Esto implica que tales estrategias puras producen ganancias iguales y máximas, dada la estrategia del otro jugador.**

Esta propiedad permite obtener EN en estrategias mixtas de un juego 2x2, apoyándose en una representación gráfica, en los siguientes pasos:

1. Se fijan estrategias mixtas genéricas para los dos jugadores: sean $(p, 1-p)$ y $(q, 1-q)$ estrategias mixtas genéricas para los jugadores 1 y 2 respectivamente.

2. Para el jugador 1, se calcula la utilidad esperada que obtiene de cada una de sus estrategias puras cuando la estrategia del jugador 2 es $(q, 1-q)$.

3. A partir de 2 se calcula la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1, $R_1(q)$.

4. Para el jugador 2, se calcula la utilidad esperada que obtiene de cada una de sus estrategias puras cuando la estrategia del jugador 1 es $(p, 1-p)$.

5. A partir de 4 se calcula la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1, $R_2(qp)$.

6. En el plano $p - q$ se representan gráficamente las correspondencias $R_1(q)$ y $R_2(p)$, obteniéndose los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en los puntos en los que ambas se cortan.

Este procedimiento se basa en la conjunción de las propiedades de las estrategias mixtas de equilibrio y el cálculo de las estrategias puras de respuesta óptima ante una estrategia mixta dada.

**Ejemplo 2.5.** *Consideremos el juego de las monedas, donde su forma estratégica es la siguiente:*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Cara | Cruz |
| Jugador 1 | Cara | 1,-1 | -1,1 |
| | Cruz | -1,1 | 1,-1 |

Tabla 2.5: Juego de las monedas

1. *Sean* $(p, 1-p)$ *y* $(q, 1-q)$ *estrategias mixtas genéricas para los jugadores 1 y 2 respectivamente.*

2. *Fijada la estrategia mixta genérica* $(q, 1-q)$ *del jugador 2, para el jugador 1 calculamos:*
$$U_1(Cara, (q, 1-q)) = q(1) + (1-q)(-1) = 2q - 1$$
$$U_1(Cruz, (q, 1-q)) = q(-1) + (1-q)(1) = 1 - 2q$$

3. *Se tiene que*
$$U_1(Cara, (q, 1-q)) > U_1(Cruz, (q, 1-q)) \Leftrightarrow 2q - 1 > 1 - 2q \Leftrightarrow q > 1/2$$
$$U_1(Cara, (q, 1-q)) < U_1(Cruz, (q, 1-q)) \Leftrightarrow 2q - 1 < 1 - 2q \Leftrightarrow q < 1/2$$
$$U_1(Cara, (q, 1-q)) = U_1(Cruz, (q, 1-q)) \Leftrightarrow 2q - 1 = 1 - 2q \Leftrightarrow q = 1/2$$
*Por tanto, la respuesta óptima es Cara si* $q > 1/2$*, Cruz si* $q < 1/2$*, y cualquiera si* $q = \frac{1}{2}$*.*
$$R_1(q) = \begin{cases} p = 0(Cruz) & si \quad q < \dfrac{1}{2} \\ p = 1(Cara) & si \quad q > \dfrac{1}{2} \\ p \in [0,1] \;\; (Cualquier\ estrategia) & si \quad q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

*Gráficamente la correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 a cualquier estrategia mixta del jugador 2 está en la siguiente figura*

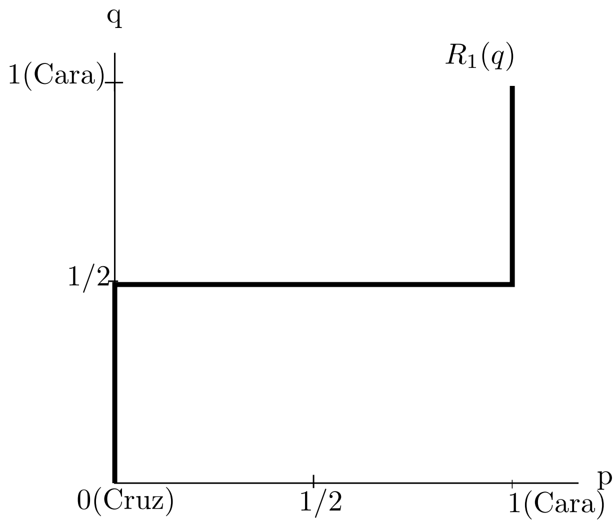


Figura 2.1: Correspondencia de respuesta óptima del jugador 1.

4. *Fijada la estrategia mixta genérica* $(p, 1-p)$ *del jugador 1, para el jugador 2 calculamos:*

$$U_2((p, 1-p), Cara) = p(-1) + (1-p)(1) = 1 - 2p$$
$$U_2((p, 1-p), Cruz) = p(1) + (1-p)(-1) = 2p - 1$$

5. *Se tiene que*

$$U_2((p, 1-p), Cara) > U_2((p, 1-p), Cruz) \Leftrightarrow 1 - 2p > 2p - 1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$$
$$U_2((p, 1-p), Cara) < U_2((p, 1-p), Cruz) \Leftrightarrow 1 - 2p < 2p - 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$$
$$U_2((p, 1-p), Cara) = U_2((p, 1-p), Cruz) \Leftrightarrow 1 - 2p = 2p - 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

*Por tanto, la respuesta óptima es Cara si* $p < 1/2$*, Cruz si* $p > 1/2$ *y cualquiera si* $p = 1/2$.

$$R_2(p) = \begin{cases} q = 1(Cara) & si \quad p < \frac{1}{2} \\ q = (Cruz) & si \quad p > \frac{1}{2} \\ q \in [0,1] \ \ (Cualquier\ estrategia) & si \quad p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

*Gráficamente la correspondencia de respuesta óptima del jugador 2 a cualquier estrategia mixta del jugador 1 está en la siguiente Figura.*

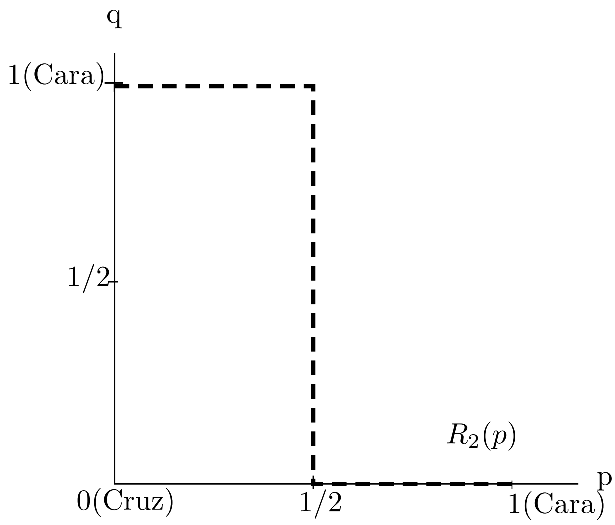


Figura 2.2: Correspondencia de respuesta óptima del jugador 2.

6. *En el plano p-q se representan gráficamente las correspondencias $R_1(q)$ y $R_2(p)$, obteniéndose los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en los puntos en los que ambas se cortan.*

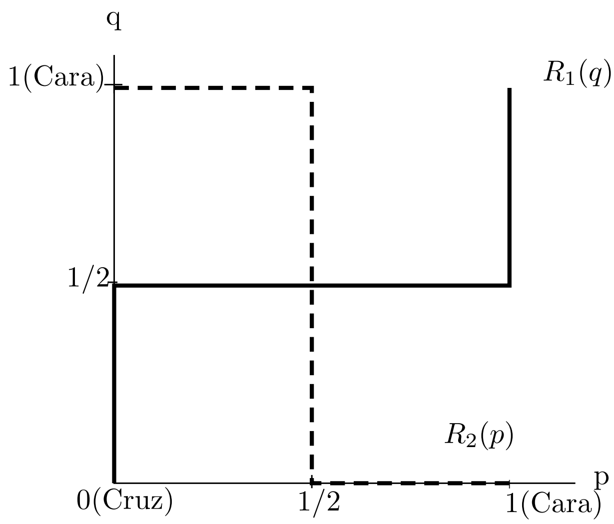


Figura 2.3: Correspondencias de respuesta óptima de ambos jugadores.

*Teniendo en cuenta que el jugador 2 es indiferente entre sus estrategias puras y mixtas (le generan la misma utilidad esperada) cuando el jugador 1* *juega su estrategia mixta* $(p, 1-p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*, y que el jugador 1 es indiferente entre sus estrategias puras y mixtas cuando el jugador 2 juega su estrategia mixta* $(q, 1-q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*, podemos decir que el EN en estrategias mixtas es aquel en el que cada jugador juega dicha estrategia mixta, que corresponde al punto en que se cortan las correspondencias de respuesta óptima.*

$$S^{EN} = \left\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\}$$

*Este es el EN en estrategias mixtas del juego ya que ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente (si, por ejemplo, el jugador 1 se desvía unilateralmente de su estrategia mixta de equilibrio tomando cualquier otra estrategia pura o mixta obtiene la misma ganancia esperada que sin desviarse).*

**Ejemplo 2.6.** *Cálculo de los equilibrios de Nash del juego batalla de los sexos.*

| | | Jugadora 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Cine | Fútbol |
| Jugador 1 | Cine | 1,2 | 0,0 |
| | Fútbol | 0,0 | 2,1 |

Tabla 2.6: Batalla de los sexos

*Sea* $(q, 1-q)$ *una estrategia mixta de 2. La utilidad que el jugador 1 obtiene con cada una de sus estrategias puras es:*

$$U_1(Cine, (q, 1-q)) = 1.q + (1-q).0 = q$$

$$U_1(Fútbol, (q, 1-q)) = q.0 + (1-q).2 = 2 - 2q$$

*Se produce la igualdad* $q = 2 - 2q$ *si y sólo si* $q = 2/3$*. Cuando* $q = 2/3$ *el jugador 1 obtiene la misma ganancia de sus dos estrategias puras, y por tanto de cualquiera de sus estrategias mixtas.*

*La correspondencia de respuesta óptima del jugador 1 es:*

$$R_1(q) = \begin{cases} p = 1 (Cine) & si \quad q < 2/3 \\ \\ p = (Fútbol) & si \quad q > 2/3 \\ \\ p \in [0,1] \;\; \text{(Cualquier estrategia)} & si \quad q = 2/3 \end{cases}$$

*Sea* $(p, 1-p)$ *una estrategia mixta del jugador 1. La utilidad que la jugadora 2 obtiene con cada una de sus estrategias puras es:*

$$U_2((p, 1-p), Cine) = p.2 + (1-p).0 = 2p$$

$$U_2((p, 1-p), F\acute{u}tbol) = p.0 + (1-p).1 = 1-p$$

*Se produce la igualdad* $2p = 1-p$ *si y sólo si* $p = 1/3$. *Cuando* $p = 1/3$ *la jugadora 2 obtiene la misma ganancia de sus dos estrategias puras, y por tanto de cualquiera de sus estrategias mixtas. En consecuencia, cualquier estrategia pura o mixta es respuesta óptima de la jugadora 2 a* $(p, 1-p) = (1/3, 2/3)$ *de jugador 1.*

*Se tiene que*

$$R_2(p) = \begin{cases} q = 1(Cine) & si \quad p < 1/3 \\ q = (F\acute{u}tbol) & si \quad p > 1/3 \\ q \in [0,1] \;\; \textit{(Cualquier estrategia)} & si \quad p = 1/3 \end{cases}$$

*Gráficamente, los equilibrios de Nash surgen de la intersección de las correspondencias de respuesta óptima.*

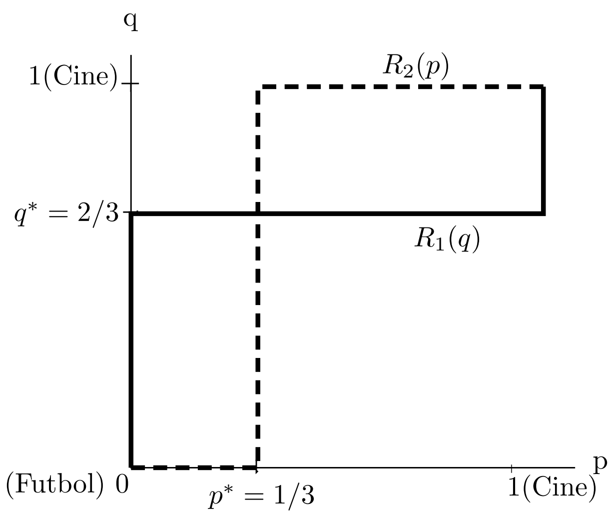


Figura 2.4: Correspondencias de respuesta óptima en la Batalla de los Sexos.

*Así pues, el conjunto de perfiles de estrategias que forman un EN es:*

$$S^{EN} = \{(Cine, Cine), (Futbol, Futbol) y\, [(1/3, 2/3), (2/3, 1/3)]\}$$

## 2.2. Teoremas de existencia del equilibrio de Nash

Antes de enunciar y de poder demostrar, los teoremas que aseguran la existencia de equilibrio de Nash para algunas clases amplias e importantes de juegos, será necesario establecer alguna terminología nueva y repasar algunos conceptos conocidos, referidos a conjuntos en espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, y a funciones y correspondencias entre dichos conjuntos.

### Repaso terminológico

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$ , decimos que es:
**Abierto** si es entorno de cualquiera de sus puntos, es decir, si dado cualquier punto $x \in A$, existe una bola abierta $B(x, r)$ de centro $x$ y radio $r$ contenida en $A$.

**Cerrado** si su complementario $R^k - A$ es abierto. Es decir, dado cualquier punto $x \notin A$, existe una bola abierta $B(x, r)$ de centro $x$ y radio $r$ ninguno de cuyos puntos pertenece a $A$.

**Acotado** si existe un $r > 0$ tal que dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$, la distancia entre $x$ e $y$ es menor que $r$.

**Compacto** si es cerrado y acotado.

**Convexo** si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$, cualquier combinación convexa de $x$ e $y$ pertenece a $A$, es decir, para todo $\lambda \in [0, 1]\,, \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Los ejemplos más sencillos e importantes de conjuntos compactos y convexos en $\mathbb{R}^k$ son los intervalos cerrados $I$, los símplices de dimensión cualquiera $\Delta$, los productos cartesianos de intervalos cerrados y los productos cartesianos de símplices.

Dada una función $f : A \to B$, con dominio $A \subset \mathbb{R}^k$ y recorrido en $B \subset \mathbb{R}^h$ , decimos que es:
**Continua** en $A$ si para todo $x \in A$, la sucesión $\{x_k\}$ que tenga por límite x implica que la sucesión de imágenes $\{f(x_k)\}$ tendrá por límite f(x).

Llamamos correspondencia de $A$ en $B$, y la denotamos $g : A \to\to B$,

a toda regla que asigna a cada punto de A un subconjunto de B. Es decir, $g : A \to\to B$ es una correspondencia de A en B si para todo $x \in A, g(x) \subset B$. En el caso particular en que $g(x)$ es unitario para todo $x$, $g$ es una función. Dada una correspondencia $g : A \to\to B$, donde $A \subset \mathbb{R}^k$ , $B \subset \mathbb{R}^h$ y B es compacto:
Decimos que es **hemicontinua superiormente** en A si el grafo de $g$, que es el conjunto $\Phi_g = \{(x, y) \in R_{k+h} : x \in A, y \in g(x)\} \subset A \times B$, es cerrado en $A \times B$. También puede decirse que g es hemicontinua superiormente si siempre que las sucesiones $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, con $x_k \in A$ e $y_k \in g(x_k)$ tengan por límite $x \in A$ e $y \in B$, respectivamente, se verifica que $y \in g(x)$. Obsérvese que la hemicontinuidad superior es una generalización de la continuidad. De hecho, en el caso particular en que $g(x)$ fuese unitario para todo $x$ de A, que el grafo de $g$ sea cerrado implica que $g$ es una función continua en A.

Si $A = B$, decimos que $x \in A$ es un punto fijo de la correspondencia $g$ si $x \in g(x)$. Lo anterior vendría a significar $x = g(x)$ si $g$ fuese una función.

Dada una función real $f : A \to B$, con dominio $A \subset \mathbb{R}^k$ convexo y recorrido en $B \subset R$, decimos que es:
**Cóncava** si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$, la imagen de cualquier combinación convexa de $x$ e $y$ es igual o mayor que la correspondiente combinación convexa de las imágenes. Es decir, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall\lambda \in [0, 1], \forall x, y \in A$.

**Cuasicóncava** si $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\}, \forall\lambda \in [0, 1], \forall x, y \in A$. Un modo equivalente de definir la cuasiconcavidad es que el conjunto de contorno superior $\Omega_\alpha = \{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$ sea convexo para todo $\alpha \in R$.

En la siguiente figura se ilustra la concavidad y cuasiconcavidad para funciones reales de variable real, con dominio en el intervalo $[0, 1]$.

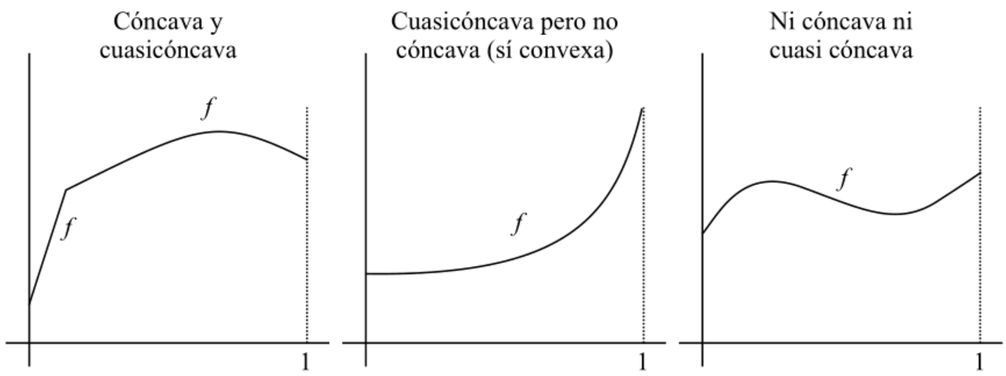


Figura 2.5: Ilustración de la concavidad y cuasiconcavidad.

A continuación enunciaremos sin demostración el teorema del punto fijo de Kakutani, y demostraremos, basándonos en él, dos teoremas de existencia de equilibrios de Nash. El primero establece la existencia de equilibrios en estrategias puras para algunos tipos de juegos infinitos, mientras que el segundo, que es un corolario del anterior, establece la existencia de equilibrios en estrategias mixtas para todos los juegos finitos.

**Teorema 2.2.** ***Teorema del punto fijo de Kakutani*.**

*Sea $g : A \rightarrow\rightarrow A$ una correspondencia con dominio en $A \subset \mathbb{R}^k$ , donde $A$ es no vacío, compacto y convexo. Si $g$ es hemicontinua superiormente, y además $g(x) \subset A$ es convexo y no vacío para todo $x$ de $A$, entonces existe un punto fijo $x^*$ de $g$, es decir, un punto $x^*$ de $A$ tal que $x^* \in g(x^*)$.*

En la siguiente figura, , se ilustra este resultado mediante tres situaciones. En la primera se verifican las hipótesis del teorema, en la segunda falla que $g(x_0)$ sea convexo, y en la tercera falla que g sea hemicontinua superiormente en $x_0$.

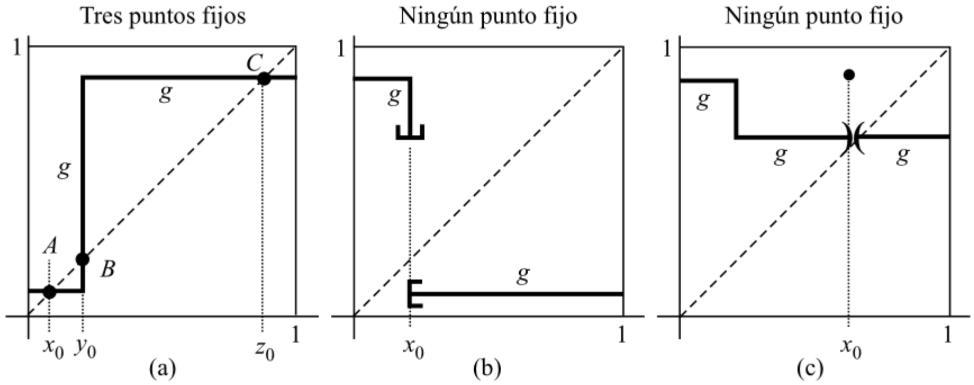


Figura 2.6: Ilustración del teorema de Kakutani.

Damos a continuación el enunciado y demostración de los dos teoremas de existencia más importantes.

**Teorema 2.3.** *Sea el juego G, tal que, para cada jugador i, se cumple:*

*a)* $S_i$ *es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio* $\mathbb{R}^n$.

*b)* $u_i$ *es continua en todo su dominio* $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ *y es cuasicóncava en la variable* $s_i$.

*Entonces, existe al menos un EN en estrategias puras de G.*

*Demostración.* Definamos, para cada jugador $i$, su correspondencia de respuesta óptima $R_i$ que asigna a cada perfil de estrategias puras $s = (s_i, s_{-i}) = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n)$ el conjunto $R_i(s)$ de las estrategias puras de $i$ que son respuesta óptima a $s_{-i}$.

Es decir, $R_i(s) = \{x_i \in S_i : x_i \text{ es solución del problema } \max_{y_i \in S_i} u_i(y_i, s_{-i})\}$

Definamos ahora la correspondencia global de respuesta óptima R como aquella que asigna a cada perfil s el producto cartesiano de los conjuntos de respuesta óptima individuales. Así pues, R es una correspondencia de S en S tal que

$$R(s) = R_1(s) \times R_2(s) \times \cdots \times R_n(s) = \{t = (t_1, ..., t_n) \in S : t_i \in R_i(s), \forall i = 1, ..., n\}$$

Veamos que $R$ es hemicontinua superiormente. S es no vacío, compacto y convexo por ser S el producto cartesiano de los $S_i$. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, la función $u_i$ es continua en S, lo que implica que es continua en $S_i$. Por hipótesis $S_i$ es no vacío y compacto. El teorema de Weierstrass asegura que el problema $\max_{y_i \in S_i} u_i(y_i, s_{-i})$ tiene solución óptima, por lo que $R_i(s)$ es no vacío y, por tanto, $R(s)$ es no vacío. Nos falta ver que si las sucesiones $\{s^k\}$,

$\{t^k\}$, con $s^k \in S$, $t^k \in R(s^k)$, para cada $k$, tienen por límite $s \in S$ y $t \in S$, respectivamente, ello implica que $t \in R(s)$. Pero

$\lim_{k\to\infty} s^k = s \in S \Leftrightarrow$ Para cada jugador $i$, $\lim_{k\to\infty} s_i^k = s_i \in S_i$

$\lim_{k\to\infty} t^k = t \in S \Leftrightarrow$ Para cada jugador $i$, $\lim_{k\to\infty} t_i^k = t_i \in S_i$

$t^k \in R(s^k) \Rightarrow$ Para cada jugador $i$, $t_i^k \in R_i(s^k) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para cada jugador $i$, $u_i(t_i^k, s_{-i}^k) \geq u_i(z_i, s_{-i}^k), \forall z_i \in S_i$

pero por ser $u_i$ continua en $S_i$ se verifica que

$$u_i(t_i, s_{-i}) \geq u_i(z_i, s_{-i}), \forall z_i \in S_i \Rightarrow t_i \in R_i(s), \forall i, \text{ y en consecuencia } t \in R(s)$$

Por otra parte, por ser las $u_i$ cuasicóncavas en la variable $s_i$ sobre el conjunto convexo $S_i$, el conjunto de los maximizadores $R_i$ es también convexo, y en consecuencia $R(s)$ es convexo.

Así pues, la correspondencia $R : S \to S$ cumple las hipótesis del teorema de Kakutani (hemicontinuidad superior en un conjunto no vacío, compacto y convexo, y además imágenes no vacías y convexas), lo que nos permite afirmar que $R$ tiene al menos un punto fijo $s^*$.

Ahora bien, que $s^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ sea un punto fijo de $R$ significa que $s^* \in R(s^*)$, lo que implica que $s_i^* \in R_i(s^*)$ para todo $i$, es decir, que $s_i^*$ es respuesta óptima a $s_{-i}^*$ para todo jugador $i$. En conclusión, existe un perfil $s^*$ que es un equilibrio de Nash del juego G. □

El siguiente teorema, obra de Nash en el año 1950, es un sencillo corolario del teorema anterior.

**Teorema 2.4.** *En todo juego finito $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ existe al menos un EN en estrategias mixtas.*

*Demostración.* Dado el juego G, sea $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^j, ..., s_i^{m_i}\}$ y $S = S_1 \times \cdots \times S_i \times \cdots \times S_n$. Podríamos llamar $\Delta(G)$ al juego cuyos jugadores son los mismos que los de G, cuyos conjuntos de estrategias puras para cada jugador $i$ son los símplices $\delta(S_i)$ constituidos por las distribuciones de probabilidad sobre $S_i$ y cuyos pagos son los pagos esperados calculados del modo usual:

$$U_i(\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n) = \sum_{s\in S} \sigma_1^{j(1)} \cdots \sigma_i^{j(i)} \cdots \sigma_n^{j(n)} u_i(s_1^{j(1)}, ..., s_i^{j(i)}, ..., s_n^{j(n)})$$

donde $u_i$ está definida sobre $\Delta = \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_i) \times \cdots \times \Delta(S_n)$, y donde $\sigma_i^{j(i)}$ es la probabilidad con que el jugador $i$ juega su estrategia pura $s_i^{j(i)}$ en su estrategia mixta $\sigma_i$.

Pues bien, el juego $\Delta(G) = \{\Delta(S_1), ..., \Delta(S_n); U_1, ..., U_n\}$

cumple las hipótesis del Teorema anterior, ya que para todo jugador $i$,

a) $\Delta(S_i)$ es un subconjunto no vacío, compacto y convexo del espacio $R^{m_i}$.

b) la función de pagos esperados $U_i$ es continua en todo su dominio $\Delta = \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n)$ es cuasicóncava en la variable $\sigma_i$ (ambas cosas por ser una función afín).

En conclusión, existe un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego $\Delta(G)$, que no es otra cosa que un equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego G. □

## 2.3. Juegos bipersonales de suma cero

Los juegos bipersonales de suma cero modelizan situaciones de conflicto puro entre dos jugadores, en las cuales lo que un jugador gana es exactamente lo que su contrincante pierde. El análisis de este tipo de juegos, especialmente en su forma normal o estratégica, conduce de modo general a resultados y predicciones más precisos que los de los otros juegos, y la estructura de sus soluciones de equilibrio es también muy precisa. Seguramente por esa razón el estudio de estos juegos ha representado una etapa inicial muy importante de la aplicación de la teoría de juegos a la economía, a pesar de que los ejemplos de aplicaciones económicas relevantes de juegos de suma cero son la excepción más que la regla.

Una característica muy especial de los juegos de suma cero es que las soluciones de equilibrio de estos juegos se basan en gran medida en el comportamiento de cada jugador como un decisor racional individual, sin requerir un elemento adicional de coordinación, que sí es necesario en los equilibrios de Nash de otros tipos de juegos. Definámoslos con precisión.

**Definición 2.4.** *Sea $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ un juego bipersonal. Decimos que $G$ es* ***de suma cero*** *si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que a ambos corresponde es nula. Es decir,*

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0, \ \forall s_1 \in S_1 \text{ y } \forall s_2 \in S_2$$

En los juegos bipersonales de suma cero, que además sean finitos, puesto que los pagos del segundo jugador son los opuestos de los pagos del primero, la matriz de pagos del primero basta para definir el juego y para realizar su análisis. Por esta razón, a los juegos bipersonales finitos de suma cero se les llama a veces juegos matriciales. Comenzaremos por tanto esta sección estudiando algunos conceptos definibles en una matriz.

### 2.3.1. Valores maximín y minimax de una matriz

Sea $A_1$ una matriz de valores reales que tiene $m$ filas y $n$ columnas. Los conceptos maximín y minimax que vamos a definir son útiles en muchos contextos distintos, y en cada uno de estos contextos adquieren una interpretación distinta. Sin embargo, para que nos sea más fácil apoyarnos en la intuición, podemos imaginar que $A_1$ es la matriz de pagos del jugador 1 en un juego bipersonal finito cualquiera $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^n\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$. Por tanto, las filas de $A_1$ corresponden a las estrategias puras del jugador 1 mientras que sus columnas corresponden a las estrategias puras de su contrincante el jugador 2. Así, el término $a_{ij}$ de $A_1$ es el pago $u_1(s_1^i, s_2^j)$.

Teniendo en cuenta que

$$\max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^j) \text{ y } \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^i, s_2^j)$$

son, respectivamente, el máximo de los términos de la columna j-ésima (correspondiente a la estrategia pura $s_2^j$ 2 del jugador 2) y el mínimo de los términos de la fila i-ésima (correspondiente a la estrategia pura $s_1^i$ del jugador 1), podemos definir así los valores maximín y minimax de la matriz $A_1$:

**Definición 2.5.** *En la matriz $A_1$ con $m$ filas, $n$ columnas y término genérico $u_1(s_1^i, s_2^j)$:*

*a) Llamamos **valor maximín** de $A_1$, y lo denotamos $\underline{m}$, al máximo de los mínimos de todas las filas de $A_1$. Es decir,*

$$\underline{m} = \max_{s_1^i \in S_1} \left\{ \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\}$$

*b) Llamamos **valor minimax** de $A_1$, y lo denotamos $\overline{m}$, al mínimo de los máximos de todas las filas de $A_1$. Es decir,*

$$\overline{m} = \min_{s_2^j \in S_2} \left\{ \max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\}$$

*c) Decimos que el término $u_1(s_1^{i_0}, s_2^{j_0})$, que ocupa la fila $i_0$ y la columna $j_0$ de $A_1$, es un* ***punto de silla*** *de $A_1$ si es el máximo de su columna y el mínimo de su fila. Es decir,*

$$u_1(s_1^{i_0}, s_2^{j_0}) = \max_{s_1^i \in S_1} u_1(s_1^i, s_2^{j_0}) = \min_{s_2^j \in S_2} u_1(s_1^{i_0}, s_2^j)$$

Los ejemplos siguientes ilustran estos conceptos.

**Ejemplo 2.7.** *En la matriz de pagos del jugador 1 para el juego de Piedra-Papel-Tijeras,*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1_* & 1^* \\ 1^* & 0 & -1_* \\ -1_* & 1^* & 0 \end{pmatrix}$$

*Se han señalado mediante un asterisco subíndice los mínimos de cada fila, y mediante un asterisco superíndice los máximos de cada columna.*

*Todos los máximos de columna valen -1, luego el valor maximín de $A_1$ es:*

$$\underline{m} = \max_{s_1^i \in \left\{s_1^1, s_1^2, s_1^3\right\}} \left\{ \min_{s_2^j \in \left\{s_2^1, s_2^2, s_2^3\right\}} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\} = \max_{s_1^i \in \left\{s_1^1, s_1^2, s_1^3\right\}} \{-1, -1, -1\} = -1$$

*Todos los máximos de columna valen 1, y por tanto el valor minimax de $A_1$ es*

$$\overline{m} = \min_{s_2^j \in \left\{s_2^1, s_2^2, s_2^3\right\}} \left\{ \max_{s_1^i \in \left\{s_1^1, s_1^2, s_1^3\right\}} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\} = \min_{s_2^i \in \left\{s_2^1, s_2^2, s_2^3\right\}} \{1, 1, 1\} = 1$$

*Ningún término está doblemente señalado, y por tanto $A_1$ no tiene punto de silla.*

**Ejemplo 2.8.** *En la matriz de pagos del jugador 1 para el juego 2.4.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3^* & 1_* \\ 1^* & 2^* \\ 2_* & 2^* \end{pmatrix}$$

*se han señalado asteriscos subíndice y superíndice los mínimos de cada fila y los máximos de cada columna.*

*Los mínimos de fila son 1, 1 y 2, mientras que los máximos de columna son 3 y 2, Por tanto, el valor maximín de $A_1$ es:*

$$\underline{m} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \left\{ \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2, s_2^3\}} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\} = \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} \{1, 1, 2\} = 2$$

*y el valor minimax de $A_1$ es:*

$$\overline{m} = \min_{s_2^j \in \{s_2^1, s_2^2\}} \left\{ \max_{s_1^i \in \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\} = \max_{s_2^i \in \{s_2^1, s_2^2\}} \{3, 2\} = 2$$

*El único término que está doblemente señalado, que ocupa la tercera fila y segunda columna, y cuyo valor es 2, es el punto de silla de $A_1$. Obsérvese que dicho valor coincide con valor maximín y con el valor minimax de $A_1$. No se trata de una casualidad, sino de una condición necesaria y suficiente para la existencia de punto silla de una matriz.*

### 2.3.2. Estrategias puras maximín y minimax de un juego. Niveles de seguridad.

Supongamos que $A_1$ sea efectivamente la matriz de pagos para el jugador 1 $(u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$, del juego $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\}$ y $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\}$. Las filas de $A_1$ corresponden, por tanto, a las estrategias puras de J1 mientras que sus columnas corresponden a las estrategias puras de J2. sea $\overline{m} = u_1(s_1^s, s_2^t)$ el valor maximín de $A_1$. A la estrategia pura $s_1^s$ de J1 en cuya fila se alcanza dicho valor se la llama estrategia pura maximín. El valor maximín de $A_1$ puede interpretarse como el nivel de seguridad del jugador 1, es decir, el valor que puede estar seguro J1 de conseguir al jugar una estrategia se asegura la consecución de un pago al menos tan grande como $\overline{m}$. Puesto que el juego $G$ determina dos matrices de pagos

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\dots,m;j=1,\dots n}$$

para el jugador 1 y

$$A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

para el jugador 2, podríamos igualmente definir, a partir de $A_2$, las estrategias puras maximín y el nivel de seguridad correspondiente para el jugador 2. La única diferencia es que ahora las estrategias puras de J2 identifican columnas de $A_2$ y no filas. A los valores maximín de J1 y J2 los denominaremos, respectivamente, $v_1$ y $v_2$.

**Ejemplo 2.9.** *Consideremos de nuevo el juego 2.4, donde aparecen las matrices de pagos $A_1$ para el jugador 1 y $A_2$ para el jugador 2.*

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador 1 | A | 3,2 | 1,4 |
| | B | 1,3 | 2,1 |
| | C | 2,2 | 0,0 |

*El jugador 1 tiene una única estrategia pura maximín, B, que le proporciona un nivel de seguridad de 2, ya que*

$$v_1 = u_1(B, I) = \max_{s_1^i \in \{A,B,C\}} \left\{ \min_{s_2^j \in \{I,D\}} u_1(s_1^i, s_2^j) \right\} = \max_{s_1^i \in \{A,B,C\}} \{1, 1, 2\} = 2$$

*Por su parte, el jugador 2 tiene también una única estrategia pura maximín, I, que le proporciona un nivel de seguridad de 2, ya que*

$$v_2 = u_2(B, I) = \max_{s_2^j \in \{I,D\}} \left\{ \min_{s_1^i \in \{A,B,C\}} u_2(s_1^i, s_2^j) \right\} = \max_{s_2^j \in \{I,D\}} \{2, 0\} = 2$$

### 2.3.3. Estrategias mixtas maximín y valor de un juego de suma cero

**Definición 2.6.** *Sea el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, donde*

$$S_1 = \left\{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\right\} \text{ y } S_2 = \left\{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\right\}$$

*cuyas matrices de pagos son:*

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m;j=1,...,n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m;j=1,...,n} = -A_1$$

*Sea $\sigma_1$ una estrategia mixta genérica de J1, representante mediante un vector fila con m componentes positivas o nulas que suman la unidad. Análogamente, sea $\sigma_2$ una estrategia mixta genérica de J2, representable mediante un vector fila con n componentes positivas o nulas que suman la unidad.*

*a) Llamamos* ***valor maximín*** *del juego G, y lo denotamos $v_1$, al pago máximo que puede asegurarse el jugador 1, suponiendo que J2 responde a la* *estrategia $\sigma_1$ de J1 con una estrategia $\sigma_2$ que le permite maximizar su pago, y por tanto minimizar el de J1. Es decir.*

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\}$$

b) *Llamamos* ***valor minimax*** *del juego G al número.*

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\}$$

*Si el valor maximín se alcanza en las estrategias mixtas concretas $\sigma_1^*$ de J1 y $\sigma_2^*$ de J2, decimos que $\sigma_1^*$ es una* ***estrategia maximín*** *de J1. Analogamente, si el valor minimax se alcanza en las estrategias mixtas concretas $\sigma_2^{'*}$ de J2 y $\sigma_1^{'*}$ de J1, decimos que $\sigma_2^{'*}$ es una* ***estrategia minimax*** *de J2.*

c) *Llamamos* ***valor del juego*** *G, y lo denotamos v, al valor maximín y al valor minimax, si es que ambos coinciden.*

El valor maximín $v_1$ es el valor de seguridad del jugador J1, es decir, el pago más alto que J1 puede asegurarse suponiendo un «comportamiento de peor caso» por parte de J2(que es la suposición adecuada, ya que en los juegos de suma cero, J2 produce el pago más bajo posible para J1 con aquellas jugadas que son óptimas para él). Además, el lema siguiente nos permitirá relacionar el valor minimax con el valor de seguridad del jugador 2.

**Lema 2.5.** *Dado el juego bipersonal finito de suma cero $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ y cuyas matrices de pagos son:*

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n} = -A_1$$

*el valor minimax $v_2$ es el valor de seguridad del jugador 2 cambiado de signo. Es decir:*

$$v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\}$$

*Demostración.* Es bien sabido que, dada una función real cualquiera $f(x)$, el opuesto del máximo de $f(x)$ es igual al mínimo del opuesto de $f(x)$, es decir, $-maxf(x) = min(-f(x))$, y análogamente, $-min(f(x)) = max(-f(x))$. Además sabemos que la solución de problema de maximizar una función se alcanza en los mismos puntos $x^*$ donde se alcanza la solución del correspondiente problema de minimizar su opuesto. Basándonos en ello, tenemos:

$$-\max_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\left\{\min_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\sigma_1 A_2\sigma_2^t\right\}=\min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\left\{-\min_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\sigma_1 A_2\sigma_2^t\right\}=$$

$$=\min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\left\{\max_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}-(\sigma_1 A_2\sigma_2^t)\right\}=\min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\left\{\max_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\sigma_1 A_1\sigma_2^t\right\}=v_2$$

□

**Ejemplo 2.10.** *En el juego siguiente:*

| | | Jugadora 2 | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| Jugador 1 | A | 0,0 | -5,5 |
| | B | 5,-5 | 0,0 |

Tabla 2.7: Juego de suma cero

*B es la estrategia maximín del jugador 1 en el contexto de estrategias puras y le proporciona en dicho contexto un nivel de seguridad de 0. En el contexto de estrategias mixtas, el valor maximín es:*

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\left\{\min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\sigma_1 A_1\sigma_2^t\right\} \\ &= \max_{0\leq\alpha\leq1}\left\{\min_{0\leq\alpha\leq1}\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}o & -5\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ 1-\beta\end{pmatrix}\right\} \\ &= \max_{0\leq\alpha\leq1}\left\{\min_{0\leq\beta\leq1}5\beta-5\alpha\right\}\end{aligned}$$

*El mínimo de $5\beta-5\alpha$, para $\alpha$ y $\beta$, para $\beta$ entre 0 y 1, es $f(\alpha)=-5\alpha$(que se alcanza para $\beta=0$ Teniendo en cuenta lo anterior, el máximo de $f(\alpha)=-5\alpha$ cuando $\alpha$ varía entre 0 y 1 es igual a 0, que se alcanza haciendo $\alpha=0$. Por tanto el valor maximín $v_1$ es igual a 0, y se alcanza haciendo $\alpha=0$ y $\beta=0$, es decir, $v_1=0$ es el valor de seguridad de J1, y éste lo alcanza jugando su estrategia mixta $\sigma_1=(0,1)$ , que coincide con su estrategia pura B, mientras que J2 juega su estrategia mixta $\sigma_2=(0,1)$ , que coincide con su estrategia pura D.*
*Razonando de modo análogo, es fácil ver que el valor minimax es:*

$$v_2=\min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\left\{\max_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\sigma_1 A_1\sigma_2^t\right\}=\min_{0\leq\beta\leq1}\left\{\max_{0\leq\alpha\leq1}5\beta-5\alpha\right\}$$

*El máximo de $5\beta - 5\alpha$, para $\beta$ fijo y $\alpha$ entre 0 y 1, es $f(\beta) = 5\beta$ (que se alcanza para $\alpha = 0$). Teniendo en cuenta lo anterior, el mínimo de $f(\beta) = 5\beta$ cuando $\beta$ varía entre 0 y 1 es igual a 0, que se alcanza haciendo $\beta = 0$. Así pues, el valor minimax $v_2$ es igual a 0(y por tanto el valor de seguridad de J2 es $0 = -v_2$ y éste lo alcanza jugando su estrategia mixta $\sigma_2 = (0, 1)$, que es su estrategia pura D, mientras que J1 juega su estrategia mixta $\sigma_1 = (0, 1)$, que coincide con su estrategia pura B.*

**Teorema 2.6.** *Dado un juego bipersonal finito de suma cero cualquiera $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, dicho juego tiene un valor. Es decir, existe un $v \in R$ tal que $v_1 = v_2 = v$, siendo $v_1$ y $v_2$ los valores maximín y minimax.*

*Demostración.* Basaremos nuestra demostración en la existencia de equilibrios de Nash. Por ser $G$ un juego finito, existe algún EN en $G$. Sea $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ uno de tales equilibrios. Por definición de EN, se cumplen las afirmaciones siguientes:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{\sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t}\right\} \tag{2.1}$$

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{t}\right\} \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se deduce:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{t}\right\} \tag{2.3}$$

Debido a que:

$$\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = -\sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = -\max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{-\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{t}\right\} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{t}\right\}$$

Ahora de (2.1) se deduce

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} &= \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{\sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t}\right\} \\ &\geq \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^{t} \right\} \\ &= v_1 \\ &\geq \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{\sigma_1^* A_1 \sigma_2^{t}\right\} \\ &= U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \end{aligned} \tag{2.4}$$

y de (2.3) se deduce:

$$
\begin{aligned}
U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} &= \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \sigma_1^* A_1 \sigma_2^t \right\} \\
&\leq \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} \\
&= v_2 \\
&\leq \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} \right\} \\
&= U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Por último, de (2.4) y (2.5) se deduce

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1 = v_2$$

□

En el Ejemplo 2.5 y 2.9 satisfacen el Teorema 2.5. El valor de ambos juegos es 0.

### 2.3.4. Relación entre los equilibrios de Nash y las estrategias maximín

En los juegos bipersonales finitos de suma cero, existe una estrechísima relación entre los equilibrios de Nash y las estrategias maximín, según la cual forman parte de los equilibrios las estrategias maximín y sólo ellas. El Teorema 2.6 precisa y completa dicha relación.

**Teorema 2.7.** *Sea el juego bipersonal finito de suma cero* $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, *donde*

$$S_1 = \left\{s_1^1, s_1^2, ..., s_1^m\right\} \text{ y } S_2 = \left\{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^n\right\}$$

*y cuyas matrices de pagos son*

$$A_1 = (u_1(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m;j=1,...,n} \text{ y } A_2 = (u_2(s_1^i, s_2^j))_{i=1,...,m;j=1,...,n} = -A_1$$

*a) Si* $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ *es un equilibrio de Nash,* $\sigma_1^*$ *y* $\sigma_2^*$ *son estrategias maximín de J1 y J2, y el pago que J1 recibe en dicho equilibrio coincide con el valor del juego.*

*b) Si* $\sigma_1^*$ *y* $\sigma_2^*$ *son estrategias maximín de J1 y J2, el perfil* $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ *es un equilibrio de Nash.*

*Demostración.* **a)** En la demostración del Teorema 2.5, hemos visto que si $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ es un EN se cumple:

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} = v_1 \tag{2.6}$$

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} = v_2 \tag{2.7}$$

La igualdad (2.6) significa que $\sigma_1^*$ es una estrategia maximín de J1, y de (2.7) se deduce lo siguiente al aplicar el Lema 2.4:

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = -U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = -v_2 = -\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} \\ = \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

y la igualdad (2.8) significa que $\sigma_2$ es una estrategia maximín de J2. Además, el pago a J1 es el valor, pues $U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1 = v_2 = v$

**b)** Si $\sigma_1^*$ y $\sigma_2^*$ son estrategias maximín de J1 y J2 respectivamente, se cumple

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} = v_1$$

$$U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} = \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \right\} = v_2$$

y sabemos, por el Teorema 2.5, que los valores maximín $v_1$ y minimax $v_2$ coinciden, es decir,

$$\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \right\} = v_1 = v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\}$$

$$\max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \right\} = -v_2 = -v_1 = \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \right\}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_1 \sigma_2^{*t} = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \left\{ \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \right\} = \\ = \max_{\sigma_1 \in \Delta(s_1)} \left\{ \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} \right\} \geq \sigma_1 A_1 \sigma_2^{*t} = U_1(\sigma_1, \sigma_2^{*t}), \forall \sigma_1 \in \Delta(S_1) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$
\begin{aligned}
U_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \sigma_1^* A_2 \sigma_2^{*t} &= \min_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \left\{ \max_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \sigma_1 A_2 \sigma_2^t \right\} = \\
&= \max_{\sigma_2 \in \Delta(s_2)} \left\{ \sigma_1^* A_2 \sigma_2^t \right\} \geq \sigma_1^* A_2 \sigma_2^t = U_2(\sigma_1^*, \sigma_2), \forall \sigma_2 \in \Delta(S_2)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

y estas dos últimas desigualdades nos dicen que $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ es un EN. □

### 2.3.5. Juegos bipersonales de suma constante

Obtenemos una generalización de los juegos de suma cero si, en lugar de exigir que la suma de las ganancias de los dos jugadores ante cada perfil de estrategias sea nula, exigimos que sea una constante.

**Definición 2.7.** *Sea $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ un juego bipersonal. Decimos que $G$ es un juego **de suma constante** si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que a ambos corresponden es siempre la misma. Es decir,*

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = c, \ \forall s_1 \in S_1 \ \ y \ \ \forall s_2 \in S_2$$

.

Si bien los juegos de suma constante tienen como caso particular los juegos de suma cero, una simple transformación de las ganancias de los jugadores nos permite considerar los juegos de suma constante como si se tratase de juegos de suma cero. Veamos algunos ejemplos que convierten cualquier juego de suma constante en un juego de suma cero

- Transformación de las ganancias de J1:

  $u_1'(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) - c, \ \forall s_1 \in S_1$ y $\forall s_2 \in S_2$

- Transformación de las ganancias de J2:

  $u_2'(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) - c, \ \forall s_1 \in S_1$ y $\forall s_2 \in S_2$

- Transformación de las ganancias de J1 y J2:

  $u_1'(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) - c_1, \quad u_2'(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) - c_2$

  $\forall c_1, c_2$ tal que $c_1 + c_2 = c, \ \forall s_1 \in S_1$ y $\forall s_2 \in S_2$

Siempre que un juego admita este tipo de transformaciones, podremos analizar un juego de suma constante a través de alguno de los juegos de suma cero asociados. Esto nos conduce a la siguiente pregunta: ¿cuándo podemos

admitir este tipo de transformaciones y por tanto hacer uso del teorema del minimax? La respuesta nos lleva de nuevo a la interpretación de las ganancias como utilidades de Von Neumann-Morgenstern. Dicha interpretación es consistente con unas preferencias que admiten una escala cardinal-intervalo, y la exigimos siempre que queremos incluir a las estrategias mixtas en el análisis.
Así pues, los resultados alcanzados para juegos de suma cero son aplicables al análisis de cualquier juego de suma constante cuyas ganancias admitan transformaciones afines positivas.

Como conclusión de esta sección, merece la pena observar que en este tipo de juegos existe una prescripción clara sobre cómo jugar (jugar ambos jugadores cualquier estrategia maximín, o lo que es lo mismo, jugar cualquier equilibrio de Nash) ya que, en virtud del teorema anterior, los pagos a cada jugador no dependen de la estrategia maximín elegida. En efecto, si juegan de este modo, el jugador 1 recibirá el pago $v$ del juego, mientras que el jugador 2 recibirá el pago $-v$.

## 2.4. Estrategias racionalizables

En esta sección nos proponemos profundizar, y llevar hasta sus últimas consecuencias, los conceptos de solución basados en ideas de dominación. Para ello, en primer lugar revisaremos el concepto de estrategia dominada ampliando el contexto en que se define, desde el contexto del capítulo anterior en que sólo se consideraban estrategias puras hasta el del capítulo actual en que están presentes todas las estrategias mixtas. En segundo lugar, actualizaremos al contexto de las estrategias mixtas las comparaciones entre las soluciones de dominación (usando ya el concepto de dominación revisado) y las soluciones de equilibrio (usando el equilibrio de Nash en estrategias mixtas). En tercer lugar, definiremos el concepto de estrategia que nunca es respuesta óptima, concepto que es ligeramente más general que el de estrategia estrictamente dominada, y a partir de él construiremos un nuevo concepto de solución, el de las estrategias racionalizables, y lo compararemos con los anteriores conceptos de solución.

**Si recordamos sobre estrategias dominadas**

Dado el juegos siguiente:

| | | Jugador 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| Jugador 1 | X | 2,6 | 6,0 | 1,1 |
| | Y | 1,3 | 2,7 | 4,4 |
| | Z | 2,3 | 5,1 | 3,1 |

Ninguna estrategia pura del jugador 2 está dominada, ni estricta ni débilmente, por otra estrategia pura. Sin embargo, es fácil ver que C no es una estrategia que vaya a usar un jugador racional, ya que la estrategia mixta $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, en la que el jugador 2 juega $A$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y $B$ con igual probabilidad, le produce unos pagos estrictamente superiores a los de $C$, haga lo que haga el jugador 1. En concreto,

$$U_2(X, \sigma_2) = 3 > U_2(X, C) = 1, U_2(Y, \sigma_2) = 5 > U_2(Y, C) = 4$$

y

$$U_2(Z, \sigma_2) = 2 > U_2(Z, C) = 1$$

En definitiva, $C$ está estrictamente dominada por la estrategia mixta $\sigma_2$ , a pesar de que no lo está por ninguna de sus estrategias puras soporte, $A$ o $B$. Por otra parte, es fácil observar que la estrategia mixta $\sigma_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, en la que el jugador 1 juega $X$ con probabilidad $\frac{2}{3}$ e $Y$ con probabilidad $\frac{1}{3}$, le produce unos pagos estrictamente inferiores a los de $Z$, haga lo que haga el jugador 2. Efectivamente,

$$U_1(\sigma_1, A) = \frac{5}{3} < U_1(Z, A) = 2, U_1(\sigma_1, B) = \frac{14}{3} < U_1(Z, B) = 5$$

y

$$U_1(\sigma_1, C) = 2 < U_1(Z, C) = 3$$

En definitiva, la estrategia mixta $\sigma_1$ está estrictamente dominada por $Z$, a pesar de que no lo está ninguna de sus estrategias puras soporte, $X$ o $Y$.

La situación anterior sugiere la necesidad de ampliar la definición de estrategia dominada, y es lo que hacemos a continuación.

**Definición 2.8.** *En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, sean $\sigma_i^{'}$ y $\sigma_i^{''}$ dos estrategias (puras o mixtas) del jugador $i$.*

*a) Decimos que $\sigma_i^{'}$ está **dominada**, o también **débilmente dominada**, por $\sigma_i^{''}$ cuando la desigualdad:*

$$U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i^{'}, s_{i+1}, ..., s_n) \leq U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i^{''}, s_{i+1}, ..., s_n)$$

*se cumple para toda combinación de estrategias puras $s_{-i}$ , y para alguna se cumple de modo estricto.*

*b) Decimos que $\sigma_i^{'}$ está* ***estrictamente dominada*** *por $\sigma_i^{''}$ cuando la desigualdad:*

$$U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i^{'}, s_{i+1}, ..., s_n) < U_i(s_1, ..., s_{i-1}, \sigma_i^{''}, s_{i+1}, ..., s_n)$$

*se cumple para toda combinación de estrategias puras $s_{-i}$ de los otros jugadores.*

*c) Decimos que $\sigma_i^{'}$ es* ***no dominada*** *si no existe ninguna otra estrategia del jugador i, ni pura ni mixta, que la domine, y decimos que $\sigma_i^{'}$ es* ***no dominada estrictamente*** *si no existe ninguna otra que la domine estrictamente.*

Este nuevo concepto de dominación lleva asociados también dos procesos de eliminación iterativa, que podríamos llamar **Eliminación Iterativa de las Estrategias Estrictamente Dominadas por una estrategia pura o mixta** y **Eliminación Iterativa de las Estrategias Débilmente Dominadas por una estrategia pura o mixta**, y que abreviaremos por **EIE-PM** y **EID-PM**. Obviamente, dichos procesos serán tanto o más resolutivos que los análogos ya estudiados en el capítulo anterior, y que sólo implicaban dominación entre dos estrategias puras. Aun así, este proceso de cálculo de la solución del juego sigue teniendo el inconveniente, en general, de la falta de resolución, pues frecuentemente existen muchas estrategias no dominadas (a veces, todas), y en tal caso el proceso no permite predecir apenas nada del desarrollo del juego.

**Ejemplo 2.11.**

- *En el dilema del prisionero, es fácil observar que tanto la EIE-PM como EID-PM conducen a $(Confesar, Confesar)$, que es el único perfil superviviente.*
- *En la batalla de los sexos, cualquier perfil $(\sigma_1, \sigma_2)$ posible del juego es un perfil superviviente, tanto de la EIE-PM como de la EID-PM.*

### 2.4.1. Relación entre EN y Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM)

El siguiente teorema complementa los enunciados en el Capítulo 1 sobre las relaciones entre el EN y las soluciones basadas en el concepto de dominación. Es de notar que no aparecen enunciados nuevos relativos al perfil de estrategias dominantes, y ello es debido a que dicho perfil de estrategias puras, siendo un equilibrio de Nash en estrategias puras (el llamado equilibrio en estrategias dominantes), también lo es en estrategias mixtas.

**Teorema 2.8.** *Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y la combinación de estrategias*

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$$

*a) Si $G$ es finito y $s^*$ es un EN en estrategias puras, las estrategias que lo constituyen sobreviven al proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM).*

*b) Si $G$ es finito y $s^*$ está constituida por las únicas estrategias que sobreviven al proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM), $s^*$ es el único EN del juego.*

*c) Si la estrategia $s_i$ resulta eliminada en el proceso de Eliminación Iterativa Estricta (EIE-PM), y en particular, si $s_i$ es estrictamente dominada, no pertenece al soporte de ninguna estrategia mixta que forme parte de un equilibrio de Nash.*

*Demostración.* Para los apartados a y b, siguen siendo válidas, en todos sus detalles, las demostraciones de los enunciados análogos (Teorema 1.4, apartados del capítulo anterior, hechas para el proceso de eliminación EIE.
□

**Nota 2.1.** *Podría pensarse que en las definiciones anteriores de dominación débil y de dominación estricta, debería haberse sustituido $s_{-i}$ (combinación de estrategias puras de los otros) por $\sigma_{-i}$ (combinación de estrategias mixtas de los otros), pero ello no es necesario, pues es fácil ver que si las desigualdades se cumplen para todo $s_{-i}$ también se cumplen para todo $\sigma_{-i}$.*
*En cuanto al apartado c, si $s_i$ perteneciera a $SOP(\sigma_i^*)$, formando $\sigma_i^*$ parte de un EN $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*)$, de ello se deduciría que $s_i$ es respuesta óptima a $\sigma_{-i}$ , lo que le impediría ser eliminada en el proceso EIE-PM.*

De este teorema se deduce que podemos aplicar el proceso de eliminación iterativa estricta antes de calcular un EN en estrategias mixtas, pues las estrategias puras eliminadas no van a formar parte de ningún soporte de estrategias mixtas de equilibrio. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

**Ejemplo 2.12.** *Veamos el siguiente juego:*

| | | J2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
| J1 | F1 | 5,5 | 5,0 | 7,0 | 3,1 | 0,3 |
| | F2 | 2,7 | 2,8 | 8,7 | 0,5 | 4,7 |
| | F3 | 1,0 | 1,3 | 6,9 | 1,3 | 1,10 |
| | F4 | 2,2 | 1,3 | 1,3 | 4,4 | 13,2 |

*En la primera etapa eliminatoria queda descartada la estrategia F3 de J1 (estrictamente dominada por* $\frac{1}{2}F1 + \frac{1}{2}F2$*), en la segunda se descarta* $C3$ *de J2 y* $C5$ *de J2 (estrictamente dominadas, respectivamente, por* $\frac{3}{4}C2 + \frac{1}{4}C4$ *y* $\frac{2}{3}C1 + \frac{1}{3}C2$*),en la tercera se descarta* $F2$ *de J1 (estrictamente dominada por* $F1$*), y en la cuarta y última se elimina* $C2$ *de J2 (estrictamente dominada por* $C4$*). El juego residual es:*

| | | J2 | |
|---|---|---|---|
| | | C1 | C4 |
| J1 | F1 | 5,5 | 3,1 |
| | F4 | 2,2 | 4,4 |

*Por tanto, los EN del juego podemos calcularlos en el juego residual. Es fácil deducir que, aparte de los dos EN en estrategias puras* $(F1, C1)$ *y* $(F4, C4)$*, este juego tiene un EN en estrategias mixtas, que es* $\left[\frac{1}{3}F1 + \frac{2}{3}F4, \frac{1}{4}C1 + \frac{3}{4}C4\right]$*. Así pues,*

$$\mathbf{S^{EN}} = \{(\mathbf{F1}, \mathbf{C1}), (\mathbf{F4}, \mathbf{C4}), [(\mathbf{1/3})\mathbf{F1} + (\mathbf{2/3})\mathbf{F4}, (\mathbf{1/4})\mathbf{C1} + (\mathbf{3/4})\mathbf{C4}]\}$$

### 2.4.2. Estrategias racionalizables

El concepto de estrategia racionalizable, que también podríamos llamar justificable, se propone explorar un camino intermedio entre los conceptos de solución basados en la dominación estricta y en la dominación débil, es decir, entre los basados en la idea de que ningún jugador racional debería usar una estrategia estrictamente dominada y los basados en la idea de que ningún jugador racional debería usar una estrategia débilmente dominada. Ya hemos visto que, aplicadas iterativamente, la primera idea conduce a resultados seguros, pero en general poco precisos, mientras que la segunda aumenta a veces la precisión, pero no siempre, y además descarta a veces, según qué orden de eliminación se use, resultados tan buenos como los elegidos. La idea a explorar se basa en el comportamiento optimizador de los agentes racionales, y en particular en el hecho de que, en un juego en forma estratégica, ningún jugador racional jugará una estrategia que no maximice sus pagos en vista de cómo él supone que jugarán los demás, sea cual sea esa suposición o conjetura. La hipótesis de racionalidad de todos los jugadores, junto con la hipótesis de que tal racionalidad es de dominio público nos permitirán, de modo análogo a como se hizo en el capítulo anterior, construir procesos de eliminación de estrategias insatisfactorias, de modo que consideraremos aceptables las estrategias que sobrevivan a dicho proceso, y consideraremos un nuevo concepto de solución, que consiste en identificar como soluciones del juego a todos los perfiles que están constituidos por tales estrategias supervivientes.

Los conceptos de conjetura o creencia y de estrategia nunca óptima permiten precisar las ideas anteriores.

**Definición 2.9.** *En el juego* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*:*

*a) Llamamos* ***conjetura*** *del jugador i sobre cómo jugarán los demás, a toda distribución de probabilidad* $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ *sobre el espacio* $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots S_n$ *de las estrategias puras de los demás jugadores.*

*b) Decimos que la estrategia* $\sigma_i$ ***es respuesta óptima del jugador i a su conjetura*** $\sigma_{-i}$ *si la desigualdad:*

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i})$$

*se cumple para toda estrategia mixta* $\sigma_i'$ *de dicho jugador.*

*c) Decimos que la estrategia* $\sigma_i$ *del jugador i es* ***nunca óptima*** *si no existe ninguna conjetura* $\sigma_{-i}$ *de dicho jugador a la cual* $\sigma_i$ *sea respuesta óptima.*

*El nuevo concepto de estrategia nunca óptima está estrechamente relacionado con el de estrategia estrictamente dominada. De hecho, es fácil ver que, para todo jugador i, toda estrategia estrictamente dominada (por alguna estrategia pura o mixta) es una estrategia nunca óptima, pues aquella que la domina produce a dicho jugador pagos estrictamente mayores, independientemente de cómo jueguen los demás. Más adelante confirmaremos que la implicación en sentido contrario no siempre es cierta.*

**Ejemplo 2.13.** *En el juego Halcón-Paloma: dos seres vivos pueden comportarse de un modo violento y agresivo (halcón) o pacífico y sumiso (paloma)* *en un enfrentamiento por la posesión de un objeto de valor $V$. Ambos saben que si los dos se comportan agresivamente se enzarzan en una pelea que les acarrea unos determinados costes ($C$); si ambos se comportan amistosamente se reparten el objeto, pero si cada uno se comporta de un modo diferente, aquel que se comporta pacíficamente no obtiene nada y el agresivo se lo queda todo.*

| | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | Paloma | Halcón |
| **J1** | Paloma | $\frac{V}{2},\frac{V}{2}$ | 0,V |
| | Halcón | V,0 | $\frac{V}{2}-C,\frac{V}{2}-C$ |

Si $C < \frac{V}{2}$, la estrategia Paloma de cualquier jugador está estrictamente dominada por Halcón, y por tanto no es respuesta óptima para ninguna conjetura de dicho jugador sobre cómo actuará el otro jugador. Sin embargo, si $C = \frac{V}{2}$, la estrategia Paloma sólo está débilmente dominada por Halcón, y en este caso sí es respuesta óptima a la conjetura según la cual el otro jugará Halcón con certeza.
Así pues, el hecho de ser débilmente dominada no implica el ser estrategia nunca óptima.

**Definición 2.10.** *En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que la estrategia pura $s_i$ del jugador $i$ es* ***racionalizable*** *o* ***justificable*** *si sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias nunca óptimas.*

La razón de que a las estrategias racionalizables se les llame también justificables es que su uso por un jugador puede ser justificado por éste mediante una cadena de razonamientos, basados en el hecho de que es de dominio público que ambos jugadores son racionales (y en particular maximizadores de sus ganancias) y conocen los detalles del juego.

**Ejemplo 2.14.** *a) Dado el juego del cuadro 2.10 iniciando la sección 2.4.*

| | | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| Jugador 1 | X | 2,6 | 6,0 | 1,1 |
| | Y | 1,3 | 2,7 | 4,4 |
| | Z | 2,3 | 5,1 | 3,1 |

*En la primera etapa eliminamos la estrategia $C$ del jugador 2 porque, al estar dominada estrictamente por $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, es una estrategia nunca óptima. En la segunda etapa eliminamos la estrategia $Y$ del jugador 1 porque está dominada estrictamente por $Z$. En la tercera y última etapa eliminamos la estrategia $B$ del jugador 2 porque, en ausencia de la estrategia $Y$ de J1, está dominada estrictamente por $A$. Sobreviven por tanto al proceso de eliminación iterativa de estrategias nunca óptimas (que en este caso coincide con el proceso de eliminación iterativa estricta EIE-PM) las estrategias $X$ y $Z$ del jugador 1 y la estrategia $A$ del jugador 2.*
*En conclusión:*
***Conjunto de estrategias racionalizables del*** $jugador1 = \{X, Z\}$
***Conjunto de estrategias racionalizables del*** $jugador2 = \{A\}$
*Que J1 juegue $X$ está justificado por:*

1. *$X$ de J1 es respuesta óptima a la conjetura de J1 según la cual J2 va a jugar $A$.*
2. *$A$ de J2 es respuesta óptima a la conjetura de J2 según la cual J1 va a jugar $X$.*

*La cadena de justificaciones para $Z$ de J1 sería análoga, y para $A$ de J2 es la ya escrita, pero invirtiendo el orden. Es de notar que las cadenas de justificación son tan cortas en este caso por ser equilibrios de Nash todos los perfiles construibles a partir de las estrategias supervivientes.*

*b) Dado el mismo juego pero modificado (haciendo $u_1(X, A) = 1$ y $u_2(Z, B) = 8$):*

| | | Jugador 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| Jugador 1 | X | 1,6 | 6,0 | 1,1 |
| | Y | 1,3 | 2,7 | 4,4 |
| | Z | 2,3 | 5,8 | 3,1 |

*La primera y segunda etapas son exactamente iguales que en el caso anterior, pero ahí acaba el proceso de eliminación (que también en este caso coincide con el proceso de eliminación iterativa estricta EIE-PM). En conclusión:*

***Conjunto de estrategias racionalizables del*** $jugador1 = \{X, Z\}$
***Conjunto de estrategias racionalizables del*** $jugador2 = \{A, B\}$

*La cadena de razonamientos justificatorios de X por J1 sería:*

*X de J1 es respuesta óptima a la conjetura de J1 según la cual J2 va a jugar B.*

*B de J2 es respuesta óptima a la conjetura de J2 según la cual J1 va a jugar Z.*

*Z de J1 es respuesta óptima a la conjetura de J1 según la cual J2 va a jugar A.*

*A de J2 es respuesta óptima a la conjetura de J2 según la cual J1 va a jugar X.*

*Las cadenas de razonamientos justificatorios de Z por J1, de A por J2 y de B por J2 serían la misma cadena anterior, pero comenzando en otro punto. Las cadenas de justificación son más largas en este caso, porque no es equilibrio de Nash ninguno de los perfiles de estrategias puras construibles a partir de las estrategias supervivientes.*

En los dos casos del ejemplo anterior hemos visto que el proceso de eliminación iterativa de estrategias nunca óptimas coincide exactamente con el proceso de eliminación iterativa estricta EIE-PM. ¿Será siempre así? Planteemos la discusión en términos aún más simples. Ya sabemos que toda estrategia pura estrictamente dominada por otra (pura o mixta) es una estrategia nunca óptima, mientras que hay estrategias débilmente dominadas que no son estrategias nunca óptimas, ya que pueden ser respuestas óptimas a algunas conjeturas. Pero, ¿dada una estrategia pura $s_i$ del jugador $i$ en un juego $G$, es equivalente decir que $s_i$ está estrictamente dominada y decir que $s_i$ es una estrategia nunca óptima?

El siguiente teorema, del que sólo demostramos el apartado (c), establece que esa equivalencia se da con seguridad en los juegos de sólo dos jugadores, y también se da con toda generalidad si se hace una salvedad en la interpretación del significado de las conjeturas de un jugador, pero no se da si no se hace tal salvedad.

**Teorema 2.9.** *Dado el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y una estrategia pura o mixta cualquiera $\sigma_i$ del jugador $i$:*

*a) Si $n = 2$, $\sigma_i$ es una estrategia estrictamente dominada si y sólo si es una estrategia nunca óptima.*

*b) Si aceptamos como conjetura del jugador $i$ cualquier distribución de probabilidad $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ sobre $S_{-i}$ incluso aunque las variables aleatorias componentes $\sigma_j$ estén correlacionadas entre sí, entonces*

*$\sigma_i$ es una estrategia estrictamente dominada si y sólo si es una estrategia nunca óptima.*

*c) Si sólo aceptamos como conjeturas del jugador i aquellas distribuciones de probabilidad $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ sobre $S_{-i}$ en las que las variables aleatorias $\sigma_j$ son independientes entre sí, entonces, para el caso de 3 o más jugadores, ser una estrategia nunca óptima no implica ser una estrategia estrictamente dominada.*

*Demostración.* Para demostrar **c** nos bastará con exhibir un contraejemplo. Sea el juego con tres jugadores, tomado de Osborne y Rubinstein (1994), en el que los tres reciben el pago indicado en cada casilla:

| **J3: $M_1$** | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| **J1** | A | 8 | 0 |
| | B | 0 | 0 |

| **J3: $M_2$** | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| **J1** | A | 4 | 0 |
| | B | 0 | 4 |

| **J3: $M_3$** | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| **J1** | A | 0 | 0 |
| | B | 0 | 8 |

| **J3: $M_4$** | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| **J1** | A | 3 | 3 |
| | B | 3 | 3 |

Aquí, la estrategia $M_2$ de J3, no está estrictamente dominada por ninguna otra, ni pura ni mixta. Efectivamente, si estuviera dominada por la estrategia mixta $(\alpha, 0, \beta, 1 - \alpha - \beta)$ se cumplirían las dos desigualdades siguientes, correspondientes al caso en que J1 juega A y J2 juega I y al caso en que J1 juega B y J2 juega D:

$$4 < 8\alpha + \beta(0) + 3(1 - \alpha - \beta)$$
$$4 < (0)\alpha + 8\beta + 3(1 - \alpha - \beta)$$

lo que implica que se cumpliría la desigualdad resultante de sumarlas miembro a miembro:

$$8 < 8\alpha + 8\beta + 6(1 - \alpha - \beta)\ ;\ 8 < 2(\alpha + \beta) + 6\ ;\ 2 < 2(\alpha + \beta)\ ;\ 1 < \alpha + \beta$$

y ello es imposible, por ser $(\alpha, 0, \beta, (1 - \alpha - \beta)$ un vector de probabilidad. Y sin embargo, la estrategia $M_2$ de J3 no es respuesta óptima de J3 a ninguna conjetura $\sigma_{-3} = (\sigma_1, \sigma_2)$ sobre la que puedan jugar los otros dos jugadores, si exigimos que las variables aleatorias $\sigma_1$ y $\sigma_2$ sean independientes entre sí. En efecto, si $\sigma_1 = (\alpha, 1-\alpha)$ y $\sigma_2 = (\beta, 1-\beta)$ son estrategias mixtas de J1 y J2 respectivamente, y son independientes entre sí, el pago que obtiene J3 respondiendo con $M_2$ es

$$4\alpha\beta + 4(1-\alpha)(1-\beta) = 8\alpha\beta + 4(1-\alpha-\beta)$$

mientras que respondiendo con $M_1$ sería $8\alpha\beta$, respondiendo con $M_3$ sería $8(1-\alpha)(1-\beta) = 8\alpha\beta + 8(1-\alpha-\beta)$ y respondiendo con $M_4$ sería 3. Así pues, $M_2$ es respuesta óptima sólo si

$$8\alpha\beta + 4(1-\alpha-\beta) \geq \max_{0\leq\alpha\leq1, 0\leq\beta\leq1} \{8\alpha\beta, 8\alpha\beta + 8(1-\alpha-\beta), 3\}$$

Veamos que esta desigualdad no puede cumplirse para ningún par de valores de $\alpha$ y $\beta$ en el intervalo $[0,1]$. Para que $8\alpha\beta + 4(1-\alpha-\beta) \geq 8\alpha\beta$, el sumando $4(1-\alpha-\beta)$ ha de ser positivo o nulo, lo que exige que $1 \geq \alpha + \beta$. Para que $8\alpha\beta + 4(1-\alpha-\beta) \geq 8\alpha\beta + 8(1-\alpha-\beta)$, el sumando $4(1-\alpha-\beta)$ ha de ser negativo o nulo, lo que exige que $\alpha + \beta \geq 1$. Por tanto, $\alpha + \beta$ es igual necesariamente a 1. Pero en ese caso, $8\alpha\beta$ no puede ser mayor o igual que 3, pues el programa:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\alpha} & 8\alpha(1-\alpha) \\ \text{sujeto a:} & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array}$$

tiene un valor máximo global de 2, que se alcanza cuando $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Por tanto, la estrategia $M_2$ de J3 no es respuesta óptima de J3 a ninguna conjetura $\sigma_{-3} = (\sigma_1, \sigma_2)$ donde $\sigma_1$ y $\sigma_2$ son independientes.

Si, por el contrario, no exigimos que las variables aleatorias $\sigma_1$ y $\sigma_2$ sean independientes entre sí, $M_2$ de J3 sí es respuesta óptima de J3 a alguna conjetura $\sigma_{-3} = (\sigma_1, \sigma_2)$ sobre la que puedan jugar los otros dos jugadores. En efecto, si J3 tiene una conjetura $\sigma_{-3}$ en la que las combinaciones $(A, I)$, $(B, D)$, $(A, D)$ y $(B, I)$ se producen con probabilidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 0 y 0, entonces $M_2$ sí es respuesta óptima de J3 a la conjetura $\sigma_{-3}$, , ya que el pago que obtiene J3 respondiendo con $M_2$ es $4(\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{2}) = 4$, mientras que respondiendo con $M_1$ sería $8(\frac{1}{2}) = 4$, respondiendo con $M_3$ sería $8(\frac{1}{2}) = 4$, y respondiendo con $M_4$ sería $3(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}) = 3$. □

**Ejemplo 2.15.** *Dado el juego introducido en el Ejemplo 2.12,*

| | | J2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
| J1 | F1 | 5,5 | 5,0 | 7,0 | 3,1 | 0,3 |
| | F2 | 2,7 | 2,8 | 8,7 | 0,5 | 4,7 |
| | F3 | 1,0 | 1,3 | 6,9 | 1,3 | 1,10 |
| | F4 | 2,2 | 1,3 | 1,3 | 4,4 | 13,2 |

*el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, realizado en dicho ejemplo, establece que las únicas supervivientes son las estrategias $F1$ y $F4$ de J1 y las estrategias C1 y C4 de J2. Puesto que sólo hay dos jugadores, el apartado (a) del Teorema 2.8 permite afirmar que las estrategias estrictamente dominadas coinciden con las estrategias nunca óptimas, y en consecuencia los conjuntos de estrategias racionalizables son* $Z_1 = \{F1, F4\}$ *y* $S_2 = \{C1, C4\}$.

## 2.5. Refinamiento del equilibrio de Nash para juegos en forma normal.

De los conceptos de solución vistos hasta ahora, se ha demostrado que el equilibrio de Nash es el concepto más resolutivo. Sin embargo, hay muchos juegos estáticos con información completa, algunos de los cuales modelan situaciones de gran relevancia práctica, que tienen varios, a veces muchos, equilibrios de Nash. Por otra parte, hay equilibrios de Nash que parecen intuitivamente poco satisfactorios, bien porque no son óptimos de Pareto, bien porque se basan en conjeturas muy poco plausibles por parte de alguno de los jugadores. En definitiva, seguimos teniendo planteados tanto problemas de multiplicidad como problemas de explicación satisfactoria, y esto abre un campo de exploración y estudio al que podríamos llamar selección de equilibrios de Nash. Dentro de este campo, merece la pena distinguir dos aspectos muy diferentes.

El primero se plantea cómo seleccionar uno de entre varios equilibrios de Nash igualmente satisfactorios, es decir, que son equivalentes desde un punto de vista teórico. El ejemplo más fácil de esta situación lo constituye el juego de la batalla de los sexos, en el que encontramos dos equilibrios de Nash en estrategias puras cuya simetría los hace indistinguibles desde un punto de vista teórico. Otro ejemplo extremo es el juego de las peticiones de Nash, en el cual todos los equilibrios $(\alpha, 1-\alpha)$, en los cuales $0 < \alpha < 1$, son igualmente meritorios teóricamente.

El segundo aspecto a considerar, que es el que exploraremos de manera más sistemática en esta sección, se plantea cómo seleccionar, de entre varios equilibrios de Nash, aquel cuyo mérito teórico sea mayor, es decir, aquel que resulte más razonable como predicción del comportamiento de jugadores racionales.El siguiente ejemplo ilustrará la idea.

**Ejemplo 2.16.** *Veamos el siguiente ejemplo:*

| | | **J2** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| **J1** | A | 7,7 | 2,2 | 1,1 | 0,0 |
| | B | 2,2 | 2,2 | $1,\frac{3}{2}$ | 3,0 |
| | C | 1,1 | $\frac{3}{2}$,1 | 1,1 | 0,0 |
| | D | 0,0 | 0,3 | 0,0 | 0,0 |

*En este juego, los tres perfiles $(A, A)$, $(B, B)$ y $(C, C)$ son equilibrios de Nash, los únicos en estrategias puras, pero basta un análisis somero para concluir que sus méritos son distintos y que, en consecuencia no son igualmente satisfactorios y su valor predictivo es diferente. Efectivamente, analizando el tercero de ellos, que es el perfil $(C, C)$, observamos que la estrategia $C$ de J1 está débilmente dominada por $A$ y por $B$, y lo mismo le ocurre a la estrategia $C$ de J2. Que cualquiera de ellos juegue $C$ sólo se justifica si está seguro de que el otro va a jugar $C$, y aun en ese caso $C$ no es estrictamente mejor que $A$ o $B$, sino igual de mala. Lo mismo ocurre para J2 con su estrategia pura $C$. Resumiendo, no hay nada peor que ambos jugadores puedan hacer, si se exceptúa jugar $D$, que jugar su estrategia $C$.*

*Si analizamos el segundo de los equilibrios, el $(B, B)$, observamos un mérito de ese perfil, que comparte con el primero $(A, A)$. Consiste en que la estrategia de cada jugador en ese perfil es no dominada.*

*Si, por último, analizamos el primero de los equilibrios, el (A, A), encontramos un mérito de ese perfil, que no comparte con ninguno de los otros equilibrios de Nash. Consiste en que la estrategia de cada jugador en ese perfil, A en este caso, es la única respuesta óptima a la estrategia del otro jugador en ese perfil. Otro aspecto de interés, aunque no se refiere a la racionalidad individual e independiente de los jugadores, sino al análisis desde* *el punto de vista del conjunto de los jugadores, salta a la vista: el equilibrio* $(A, A)$ *es mejor que el* $(B, B)$*, y éste mejor que el* $(C, C)$*, en el sentido de Pareto. En efecto, el equilibrio* $(A, A)$ *Pareto-domina al equilibrio* $(B, B)$ *y el* $(B, B)$ *Pareto-domina al* $(C, C)$*.*

En esta sección nos interesaremos por el segundo de los aspectos recién descritos. Para ello, exploraremos conceptos de solución que a las condiciones del equilibrio de Nash añadan otras condiciones teóricas deseables. Las soluciones de un juego en ese caso ya no serían todos los equilibrios de Nash del juego sino sólo aquellos que cumplen las condiciones teóricas adicionales que hemos impuesto. Por eso, a dichos conceptos de solución se les llama refinamientos del equilibrio de Nash.

Podríamos ser muy exigentes e imponer condiciones que consideremos muy deseables, pero que sean difíciles de cumplir. Un caso extremo ilustrativo sería exigir un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes, como el del dilema del prisionero, es decir, exigir que en el perfil solución la estrategia de cada jugador domine estrictamente a todas las demás estrategias de dicho jugador. Se conseguiría así en grado máximo el objetivo de lograr que el concepto sea resolutivo, pues dicha solución, si existe, es obviamente única. El problema con ese planteamiento exigente es que dicho concepto tendrá poca relevancia, al ser aplicable en escasas ocasiones. Otra posibilidad, diametralmente opuesta, sería exigir muy poco más a los equilibrios de Nash, para asegurarnos de que el concepto en cuestión sea siempre o casi siempre aplicable. En ese caso, conseguiríamos el objetivo de máxima aplicabilidad, pues todos los juegos finitos, y muchos de los infinitos, tienen algún equilibrio de Nash, pero no discerniríamos bien los mejores equilibrios, fallando así en el criterio de resolutividad. Ante esta escala de posibilidades, la idea interesante radica en buscar un punto de equilibrio entre aplicabilidad y resolutividad, es decir, explorar aquellas propiedades a exigir que sean lo suficientemente débiles como para que las soluciones existan siempre o casi siempre, y lo suficientemente fuertes como para que el número de soluciones sea pequeño.

Comenzaremos por dos refinamientos, el equilibrio admisible y el equilibrio estricto, que están situados, respectivamente, en los extremos débil y fuerte de la escala de refinamientos. Ambos son fáciles de definir y de interpretar. El equilibrio admisible exige a sus estrategias constituyentes que no estén dominadas, ni siquiera débilmente, mientras que el equilibrio estricto exige a sus estrategias constituyentes que sean la única respuesta óptima a la combinación de estrategias de los otros jugadores. Como era de esperar, el equilibrio admisible existe casi siempre, pero no así el estricto. En concreto, todos los juegos finitos tienen algún equilibrio admisible, pero no todos tienen equilibrio estricto.

### 2.5.1. Equilibrio admisible

El equilibrio admisible también recibe los nombres **de equilibrio no dominado** y de **equilibrio en estrategias no dominadas.**

**Definición 2.11.** *Dado el juego* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ *decimos que el perfil de estrategias (puras o mixtas)* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *es un* ***equilibrio admisible*** *si es un equilibrio de Nash y además todas sus estrategias componentes* $\sigma_i^*$ *son no dominadas.*

**Ejemplo 2.17.** *En el juego del Cuadro 2.17, Ejemplo 2.17 , los equilibrios en estrategias puras* $(A, A)$ *y* $(B, B)$ *son admisibles, pero el* $(C, C)$ *no lo es, pues la estrategia* $C$ *está débilmente dominada, para cualquier jugador, por la* $B$.

### 2.5.2. Equilibrio estricto

El equilibrio de Nash estricto puede interpretarse intuitivamente como un equilibrio de Nash que no dejaría de serlo aunque se hubiera cometido un error minúsculo al estimar los pagos del juego.

**Definición 2.12.** *Dado el juego* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*, decimos que el perfil de estrategias* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_1^*)$ *es un* ***equilibrio de Nash estricto*** *si cada una de sus estrategias componentes* $\sigma_i^*$ *es respuesta óptima única a la combinación* $\sigma_{-i}^*$ *de estrategias de los emás jugadores.*
*(Es decir,* $\forall \sigma_i \in \Delta(S_i), U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) > U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$*)*

Se trata de un equilibrio robusto ante errores suficientemente pequeños en los pagos. Una característica curiosa e interesante de los equilibrios de Nash estrictos, muy fácil de deducir de la definición, es que **sólo las estrategias puras pueden formar parte de ellos**. Un aspecto negativo de este concepto de equilibrio es que no existe en todos los juegos finitos. En particular, **no existe EN estricto en el juego de las monedas**, al no tener este juego equilibrios de Nash en estrategias puras.
Los siguientes ejemplos ayudan también a ilustrar el concepto.

**Ejemplo 2.18.** *En el juego del cuadro 2.17, en el ejemplo 2.17 el único EN en estrategias puras estricto es el* $(A, A)$.

### 2.5.3. Equilibrio perfecto (o perfecto de mano temblorosa)

La definición que sigue de equilibrio perfecto no es la original de Selten, sino una definición equivalente elaborada por Myerson, que nos resulta más conveniente por servir de base para la posterior definición de equilibrio propio.

**Definición 2.13.** *a) Dado un juego finito en forma estratégica* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ *y dado un número positivo* $\varepsilon$*, el perfil de estrategias mixtas* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ *es* ***un equilibrio*** $\varepsilon$***-perfecto*** *si dado un jugador cualquiera* $i$*, y una estrategia pura* $z$ *cualquiera del jugador* $i$*, la probabilidad estipulada en* $\sigma_i$ *de que juegue* $z$ *es:*

1. *Estrictamente positiva.*
2. *Estrictamente menor que* $\varepsilon$*, si* $z$ *no es una respuesta óptima del jugador* $i$ *al vector de estrategias* $\sigma_{-i}$ *de los otros jugadores.*

*b) Dado un juego finito en forma estratégica* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*, el perfil* $\sigma$ *es un* ***equilibrio de Nash perfecto*** *si existe una sucesión* $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,...}$ *de números estrictamente positivos y existe una sucesión* $(\sigma^k)_{k=1,2,...}$ *de perfiles, tales que:*

1. *Para todo* $k$*, el perfil* $(\sigma^k)_{k=1,2,...}$ *es un equilibrio* $\varepsilon_k$*-perfecto de* $G$*.*
2. $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ *y* $\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$

Lo que hemos llamado equilibrio $\varepsilon_k$-perfecto no es necesariamente un equilibrio de Nash, pero sí está cerca de uno. El siguiente ejemplo comenzará a aclarar estos conceptos:

**Ejemplo 2.19.** *En el siguiente juego, en el que* $(A, A)$ *y* $(B, B)$ *son sus EN en estrategias puras,*

| | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| **J1** | A | 7,7 | 2,2 |
| | B | 2,2 | 2,2 |

*a)* *El perfil* $\sigma = ((0.9, 0.1), (0.9, 0.1))$ *es un equilibrio* $\varepsilon$*-perfecto para* $\varepsilon = 0,2$, *ya que cualquiera de los jugadores juega con probabilidad suficientemente pequeña (menor que* $\varepsilon$*) su estrategia pura* $B$ *que no es óptima frente a la estrategia* $(0.9, 0.1)$ *del otro jugador. Sin embargo,* $\sigma$ *no es equilibrio* $\varepsilon$*-perfecto para ningún* $\varepsilon$ *igual o menor que* $0.1$, *ya que el jugador 1 juega* $B$ *con una probabilidad demasiado alta (no estrictamente menor que* $\varepsilon$*), a pesar de que* $B$ *no es óptima frente a* $(0.9, 0.1)$ *de su adversario. Obsérvese que* $\sigma$ *no es un equilibrio de Nash.*

*b)* *El perfil* $((0.1, 0.9), (0.1, 0.9))$ *es un equilibrio* $\varepsilon$*-perfecto para* $\varepsilon = 0.95$ *(aunque no lo es para ningún e igual o menor que* $0.9$*).*

*c)* *El perfil* $((1-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}), (1-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}))$, *siendo* $0 < \delta < 1$, *es un equilibrio* $\delta$*-perfecto.*

*d)* *La sucesión de perfiles* $\varepsilon_k$ *-perfectos* $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1,2,\ldots}$ *, donde*

$$\sigma^k = \left[(1 - \frac{\varepsilon_k}{2}, \frac{\varepsilon_k}{2})\right]$$

*y* $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ *tiene por límite el perfil* $\sigma = ((1, 0), (1, 0)) = (A, A)$, *y en consecuencia* $(A, A)$ ***es un equilibrio perfecto***

### 2.5.4. Equilibrio propio

**Definición 2.14.** *a) Dado un juego finito* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, *y dado un número positivo* $\varepsilon$, *el perfil de estrategias mixtas* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ *es* ***un equilibrio de Nash*** $\varepsilon$***-propio*** *si dado un jugador cualquiera* $i$, *y un par cualquiera de estrategias puras* $z$ *y* $z'$ *del jugador* $i$*:*

1. *Las probabilidades estipuladas en* $\sigma_i$ *de que juegue* $z$ *o* $z'$, $p_{\sigma,i}(z)$ *y* $p_{\sigma,i}(z')$, *son ambas estrictamente positivas.*
2. *Si* $U_i(z, \sigma_{-i}) < U_i(z', \sigma_{-i})$, *entonces* $p_{\sigma,i}(z) \leq \varepsilon \cdot p_{\sigma,i}(z')$ *(es decir, si* $z$ *le reporta menor utilidad esperada que* $z'$, *juega* $z$ *con probabilidad menor o igual que* $\varepsilon$ *veces la probabilidad con que juega* $z'$*).*

*b)* *Dado un juego finito en forma estratégica* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, *el perfil* $x$ *es un* ***un equilibrio de Nash propio*** *si existe una sucesión* $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *de números estrictamente positivos y existe una sucesión* $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1,2,\ldots}$ *de perfiles, tales que*

1. *Para todo* $k$, *el perfil* $\sigma^k$ *es un equilibrio* $\varepsilon_k$*-propio de* $G$.
2. $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ *y* $\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$

**Ejemplo 2.20.** *En el Ejemplo 2.20:*

1. *El perfil* $\left[(1-\frac{\delta}{h},\frac{\delta}{h}),(1-\frac{\delta}{h},\frac{\delta}{h})\right]$*, siendo* $h \geq 2$ *y* $0 < \delta < 1$*, es un equilibrio* $\delta$*-propio. En efecto, cumple la condición 1 porque todas las estrategias del perfil son mixtas completas, y además satisface la condición 2 porque, cumpliendo los pagos la relación*

$$U_i(B,\sigma_{-i}) = 2 < U_i(A,\sigma_{-i}) = 7(1-\frac{\delta}{h}) + 2(\frac{\delta}{h}) = 7 - 5\frac{\delta}{h}$$

*ocurre que las probabilidades cumplen la relación*

$$p_{\delta,i}(B) = \frac{\delta}{h} \geq \delta \cdot p_{\delta,i}(A) = \delta(1-\frac{\delta}{h}) = (h-\delta)(\frac{\delta}{h})$$

2. *La sucesión de perfiles* $\varepsilon_k$ *-propios* $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1,2,...}$ *, donde*

$$\sigma^k = \left[(1-\frac{\varepsilon_k}{2},\frac{\varepsilon_k}{2}),(1-\frac{\varepsilon_k}{2},\frac{\varepsilon_k}{2})\right]$$

*y* $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$*, tiene por límite el perfil* $\sigma = ((1,0),(1,0)) = (A,A)$*, y en consecuencia el perfil* $(A,A)$ ***es un equilibrio propio.***

Es muy fácil ver, y se demostrará más adelante, que **todo equilibrio propio es perfecto**. Intuitivamente, si el equilibrio p es propio, no sólo es robusto para al menos una sucesión de temblores cada vez más pequeños, como cumplen los equilibrios perfectos, sino que también es robusto para al menos una sucesión de temblores «razonables» (es decir, temblores cuyos errores asociados cumplen la condición 2 de los equilibrios $\varepsilon$-propios, que asegura que los errores más graves tienen asignada una probabilidad de un menor orden de magnitud que los menos graves).

Otra propiedad que se deduce inmediatamente de la definición es que todo equilibrio de Nash interior (es decir, constituido por estrategias mixtas completas) es un equilibrio propio. En efecto, si $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ es un EN y $\sigma_i$ es una estrategia mixta completa para todo $i$ (toda estrategia pura de i se juega con probabilidad estrictamente positiva), existe un valor $\varepsilon$ positivo tal que dicho perfil es un equilibrio *varepsilon*-propio. Concretamente, bastaría tomar $\varepsilon$ igual a $\frac{1}{2}$, puesto que cualquier estrategia pura $z$ del jugador $i$ es respuesta óptima a $\sigma_i$ , y por tanto no se activa la exigencia de que $p_{\delta,i}(z) \leq \varepsilon \cdot p_{\delta,i}(z')$. Y entonces bastará elegir la sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,...}$ , donde $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$ , y la sucesión $\{\sigma_k\}_{k=1,2,...}$, donde $\sigma^k = \sigma$ para que se cumpla

$$\lim_{k\to 0} \varepsilon_k = 0$$

y
$$\lim_{k \to \infty} \sigma^k = \sigma$$
y podamos concluir que $\sigma$ es un equilibrio propio.
La gran importancia teórica del concepto de equilibrio propio radica en dos características adicionales que tiene. La primera es que si $\sigma$ es equilibrio propio de un juego en forma normal $G$, $\sigma$ induce un equilibrio secuencial (concepto que se define en el Capítulo 6 del libro de Perez y no profundizaremos en ello) en cualquier juego en forma extensiva cuya representación en forma normal coincida con G. La segunda es que existe para todo juego finito.

**Ejemplo 2.21.** *En el juego Halcón-Paloma, siendo* $C = \dfrac{V}{2} = 3$

| | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | Paloma | Halcón |
| **J1** | Paloma | 3,3 | 0,6 |
| | Halcón | 6,0 | 0,0 |

*a) Sus equilibrios* $\sigma = (Halcón, Paloma)$ *y* $\sigma' = (Paloma, Halcón)$ *no son perfectos. En efecto, si* $\sigma$ *lo fuera,* $\sigma$ *sería el límite de una sucesión* $\{\sigma_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *de perfiles constituidos por estrategias mixtas completas, y para cualquier jugador* $i$*, su estrategia* $\sigma_i$ *en* $\sigma$ *sería respuesta óptima a la combinación* $\sigma^k_{-i}$ *de estrategias de los demás para cualquier perfil* $\sigma^k$ *de la sucesión. Sin embargo, dado* $\sigma^k_{-2} = \sigma^k_1 = (\varepsilon_k, 1-\varepsilon_k)$*, Paloma no es respuesta óptima de 2 ya que* $U_2 = (Paloma, \sigma^k_1) = 3\varepsilon_k$ *, mientras que* $U_2(Halcón, \sigma^k_1) = 6\varepsilon_k$.

*b) Su equilibrio* $(Halcón, Halcón)$ *es propio, pues la sucesión* $(\sigma^k)_{k=1,2,\ldots}$ *, donde*
$\sigma^k = (\sigma^k_1, \sigma^k_2) = [((\varepsilon_k)^2, 1-(\varepsilon_k)^2), ((\varepsilon_k)^2, 1-(\varepsilon_k)^2]$ *y* $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$ *está constituida por* $\varepsilon_k$*-equilibrios propios y tiene por límite el perfil* $(Halcón, Halcón)$.

### 2.5.5. Jerarquía lógica entre los refinamientos definidos y condiciones de existencia de éstos

El siguiente teorema, del cual sólo se demostrarán los apartados a) y d), establece la relación de implicación entre los refinamientos estudiados y afirma la existencia del equilibrio propio.

**Teorema 2.10.** *Dado un juego finito en forma estratégica* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*;*

*a) Si el perfil estratégico* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ *es un equilibrio perfecto entonces es un equilibrio admisible.*

*b) Si el juego G es bipersonal (n=2) y el perfil estratégico* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ *es un equilibrio admisible entonces es un equilibrio perfecto.*

*c) Si el perfil estratégico* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ *es un equilibrio estricto, entonces también es un equilibrio propio.*

*d) Si el perfil estratégico* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ *es un equilibrio propio, entonces también es un equilibrio perfecto.*

*e) Existe al menos un perfil de estrategias (puras o mixtas) que es un equilibrio propio.*

*Demostración.* **Demostración de los apartados a y d**
**a)** Por reducción al absurdo, si un equilibrio $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n)$ no es admisible, existe un jugador $i$ que juega una estrategia $\sigma_i$ débilmente dominada por otra estrategia $\sigma_i^{'}$ . Ahora bien, en ese caso $\sigma_i$ no es respuesta óptima a ningún vector de estrategias mixtas completas de los demás, pues $\sigma_i^{'}$ le proporcionará un pago esperado estrictamente mayor que $\sigma_i$ (en términos intuitivos, $\sigma_i$ en cuanto se produce el más mínimo temblor que hace posible que los demás jugadores jueguen todas sus estrategias puras, incluso aquellas contra las cuales $\sigma_i$ da pagos estrictamente inferiores que los de $\sigma_i^{'}$ ). Por tanto, no existe ninguna sucesión $(\sigma_{-i}^k)_{k=1,2,...}$ de perfiles de estrategias mixtas completas que cumpla lo establecido en el Teorema 2.10. Así pues, el equilibrio $\sigma$ no es perfecto. **d)** Se deduce de manera inmediata de la definición dada que todo equilibrio $\varepsilon$-propio es $\varepsilon$-perfecto, ya que si $z$ no es respuesta óptima al vector de estrategias $\sigma_{-i}$ de los otros jugadores, le reporta a $i$ menor utilidad esperada frente a $\sigma_{-i}$ que otra estrategia pura $z^{'}$, luego jugará $z$ con probabilidad menor o igual que $\varepsilon$ veces la probabilidad con que juega $z^{'}$ (que es menor que la unidad), y por tanto jugará $z$ con probabilidad estrictamente menor que $\varepsilon$. Y de lo anterior se deduce que todo equilibrio propio es perfecto.

□

En cuanto al apartado b), merece la pena hacer observar que si $n > 2$ no se cumple la proposición, como se demostrará más adelante en el ejemplo , en el que hay tres jugadores y existe un equilibrio admisible que no es perfecto. Por último, aunque no hemos intentado una demostración detallada y rigurosa del apartado c), es fácil argumentar intuitivamente que todo equilibrio estricto es también propio. En efecto, al ser un equilibrio estricto robusto a cualquier perturbación de los pagos suficientemente pequeña, también lo será a cualquier perturbación o temblor en el proceso de señalar la estrategia pura elegida, siempre que este temblor sea lo suficientemente pequeño como para que las probabilidades de señalar otras estrategias puras por error sean a su vez suficientemente pequeñas, lo que haría que los pagos esperados difirieran de los pagos sin errores en cantidades insignificantes. Pero si el equilibrio es robusto ante cualquier temblor suficientemente pequeño, lo será también para los casos en que las probabilidades de error se ajustan a la pauta exigida por la definición de equilibrio propio.

En la siguiente figura se resumen las implicaciones lógicas y las condiciones de existencia de los refinamientos, en una escala lineal.

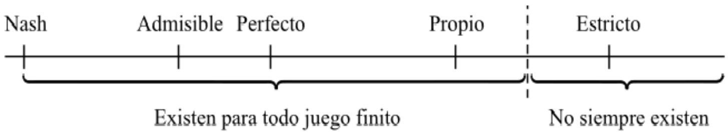


Figura 2.7: Existencia de los refinamientos, en una escala lineal.

**Ejemplo 2.22.** *Dado el juego con tres jugadores, tomado de Van Damme (1987)*

| **Jugador 3: X** | | **Jugador 2** | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| **Jugador 1** | A | 1, 1, 1 | 1, 0, 1 |
| | B | 1, 1, 1 | 0, 0, 1 |

| **Jugador 3: Y** | | **Jugador 2** | |
|---|---|---|---|
| | | I | D |
| **Jugador 1** | A | 1, 1, 0 | 0, 0, 0 |
| | B | 0, 1, 0 | 1, 0, 0 |

*los únicos EN en estrategias puras son los perfiles* $(A, I, X)$ *y* $(B, I, X)$, *ambos con el vector de pagos* $(1, 1, 1)$. ***El equilibrio*** $(B, I, X)$ ***es admisible, pero no es perfecto***. *En efecto, sea la sucesión de perfiles* $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1,2,\ldots}$ *en estrategias mixtas completas, donde* $\sigma^k = \left[(\varepsilon_k, 1-\varepsilon_k), (1-\varepsilon_k^{'}, \varepsilon_k^{'}), (1-\varepsilon_k^{''}, \varepsilon_k^{''})\right]$, *donde* $\lim \varepsilon_k = \lim \varepsilon_k^{'} = \lim \varepsilon_k^{''} = 0$. *Dicha sucesión tiene por límite el perfil* $x = ((0,1), (1,0), (1,0)) = (B, I, X)$, *pero veremos que no está constituida por equilibrios* $\varepsilon_k$*-perfectos. Efectivamente, si los jugadores 2 y 3 juegan* $\sigma_{-1}^k = \left[(1-\varepsilon_k^{'}, \varepsilon_k^{'}), (1-\varepsilon_k^{''}, \varepsilon_k^{''})\right]$, *el jugador 1 puede responder:*
*A, lo que le proporcionaría un pago igual a*

$$U_1(A, \sigma_{-1}^k) = (1-\varepsilon_k^{'})(1-\varepsilon_k^{''})(1) + (1-\varepsilon_k^{'})\varepsilon_k^{''}(1) + \varepsilon_k^{'}(1-\varepsilon_k^{''})(1) + \varepsilon_k^{'}\varepsilon_k^{''}(0)$$

*$B$, lo que le proporcionaría un pago igual a*

$$U_1(B,\sigma_{-1}^k) = (1-\varepsilon_k^{'})(1-\varepsilon_k^{''})(1) + (1-\varepsilon_k^{'})\varepsilon_k^{''}(0) + \varepsilon_k^{'}(1-\varepsilon_k^{''})(0) + \varepsilon_k^{'}\varepsilon_k^{''}(1)$$

*Restando miembro a miembro:*

$$U_1(A,\sigma_{-1}^k) - U_1(B,\sigma_{-1}^k) = (1-\varepsilon_k^{'})\varepsilon_k^{''} + \varepsilon_k^{'}(1-\varepsilon_k^{''}) - \varepsilon_k^{'}\varepsilon_k^{''}(1) > 0$$

*(pues $\varepsilon_k^{'} \leq 1-\varepsilon_k^{''}$ y $\varepsilon_k^{''} \leq 1-\varepsilon_k^{''}$) Así pues, $B$ del jugador 1 no es respuesta óptima a $\sigma_{-1}^k$ de los otros dos, y por $1-\varepsilon_k$ tendría que ser menor que $\varepsilon_k$ , lo que contradice al hecho de que* $\lim \varepsilon_k = \lim \varepsilon_k^{'} = \lim \varepsilon_k^{''} = 0$

# Capítulo 3

# Simulación de juegos clásicos

En este capítulo, introduciremos técnicas de simulación utilizando un software computacional. Primero, recordaremos dos juegos que son conocidos ya que los estudiamos en los capítulos anteriores. El objetivo de la sección es simular juegos utilizando las técnicas y conceptos estudiadas en los capítulos previos.

Los juegos discutidos en esta sección son presentados en su forma normal. Utilizaremos MATLAB/Octave para modelar los juegos. Recordemos que en la Teoría de Juegos asumimos que cada jugador conoce las estrategias y la función de utilidad de cada jugador.

## 3.1. Dilema del prisionero

En este juego clásico, dos jugadores, Prisionero I y Prisionero II, han sido arrestados ya que se sospecha que han cometido un crimen. El oficial a cargo de esta situación pone a cada prisionero en celdas separadas. Es decir los prisioneros no tienen comunicación, y cada prisionero debe tomar una decisión sin saber la decisión de su compañero.

El oficial les ofrece el siguiente trato. Si un prisionero niega el delito y permanece callado, mientras el otro confiesa, entonces la ley recompensará al confesor dejándolo ir libre, mientras la ley castigará al prisionero que no confiesa enviándolo a la cárcel por 10 años. Si tanto el prisionero I como el prisionero II confiesan, arrestarían a los prisioneros por 5 años. Finalmente si ambos jugadores no confiesan el delito entonces el oficial no tendrá manera de acusarlos y solo tendrán 1 año de prisión cada uno.

Esta situación puede ser representada en la siguiente matriz:

| | | Prisionero 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Confesar | No Confesar |
| Prisionero 1 | Confesar | -5,-5 | 0,-10 |
| | No Confesar | -10,0 | -1,-1 |

Tabla 3.1: El Dilema del Prisionero

Cabe mencionar que hay muchas versiones de este juego, si observamos esta versión es diferente a la expuesta en capítulo 1, en esta versión el oficial castiga a quien no confiesa y premia al que confiesa ya que el oficial asume que ambos cometieron un delito, entonces favorece a quien ayuda a confesar el delito.

### 3.1.1. Análisis del juego

Cada jugador tiene 2 estrategias: confesar, y no confesar. Si prisionero I no confiesa, él será arrestado por sólo un año siempre y cuando prisionero II no confiesa, pero será arrestado por 10 años si su compañero confiesa.

En la otra mano, si prisionero I confiesa y prisionero II no confiesa, prisionero I se irá libre. Si él confiesa y su compañero también confiesa, la mejor situación es que el prisionero I confiese y su compañero No confiese. El mismo razonamiento para el prisionero II.

Ya que cada jugador escogerá la estrategia que menos años de cárcel le proporcione, entonces cada jugador jugará Confesar y Confesar. La solución del juego es (Confesar, Confesar) y ambos jugadores recibirán 5 años de prisión. Todo lo anterior expuesto no es más que el proceso de Estrategias dominantes en el capitulo I. Entonces en nuestro programa seguiremos el algoritmo de estrategias Dominantes para dar solución al Dilema del Prisionero.

## Modelando el Juego en MATLAB/Octave

La idea será que el usuario ingrese los pagos de los jugadores, esto para crear la matriz de pagos. Luego según los datos ingresados el programa encontrará la solución del juego mediante el proceso de estrategias dominadas.

```
%Dilema de Prisionero con MATLAB/Octave
%
%Abajo se muestra la forma Normal
%Dilema del Prisionero
```

```
%
%                              Prisionero 2
%                            Confesar  No Confesar
% Prisionero 1  Confesar     (X1, Y1)  (X3, Y3)
%               No Confesar (X2, Y2)   (X4, Y4)
%
%
% Matriz de pagos para el dilema del prisionero:
%
%                              Prisionero 2
%                            Confesar  No Confesar
% Prisionero 1  Confesar     (-5, -5)  (-1, -10)
%               No Confesar (-10, -1) (-2, -2)
%
%------------------------------------------
% Ingresando los pagos del prisionero 1:
X1=input('Ingrese el valor para  X1:')
X2=input('Ingrese el valor para X2:')
X3=input('Ingrese el valor para X3:')
X4=input('Ingrese el valor para X4:')
% Ingresando los pagos del prisionero 2:
Y1=input('Ingrese el valor para Y1:')
Y2=input('Ingrese el valor para Y2:')
Y3=input('Ingrese el valor para Y3:')
Y4=input('Ingrese el valor para Y4:')
% Matriz de pagos del prisionero 1:
prisionero1=[X1 X3; X2 X4]
% Encontrando el maximo pago para cada columna
A1=max(prisionero1(:,1))
A2=max(prisionero1(:,2))
% Analisis de estrategia dominante para el prisionero 1:
if A1==prisionero1(1,1) & A2==prisionero(1,2)
    fprintf('Estrategia dominante del prisionero 1 es confesar')
else if A1==prisionero1(2,1) & A2==prisionero1(2,2)
        fprintf('Estrategia dominante del prisionero 1 es No
            confesar')
    else fprintf ('No hay estrategia dominante para el
        prisionero 1')
    end
end
% matriz de pagos para el prisionero 2:
prisionero2=[Y1 Y3; Y2 Y4]
% Encontrando el maximo pago para cada fila del prisionero 2
B1=max(prisionero2(1,:))
B2=max(Prisionero2(2,:))
% Estrategia dominante para el prisionero 2:
if B1==prisionero2(1,1) & B2==prisionero2(2,1)
    fprintf('Estrategia domiante para el prisionero 2 es
        Confesar')
```

```
    else if B1==prisionero2(1,2) & B2==prisionero2(2,2)
        fprintf('Estrategia dominante para el prisionero 2 es No
            Confesar')
    else fprintf ('No hay estrategia dominante para el
       prisionero 2')
    end
end
% Analisis de equilibrio para la estrategia dominante
if A1==prisionero1(1,1) & A2==prisionero1(1,2) & B1==prisionero2
   (1,1) &
B2==prisionero2(2,1)
    fprintf('(Confesar, Confesar) es una estrategia dominante')
else if A1==prisionero1(2,1) & A2==prisionero1(2,2) & B1==
   prisionero2(1,2) &
B2==prisioenro2(2,2)
        fprintf('(No Confesar, No Confesar) es una estrategia
           dominante')
else if A1==prisionero1(1,1) & A2==prisionero1(1,2) & B1==
   prisionero2(1,2) &
B2==prisionero2(2,2)
        fprintf('(Confesar, No Confesar) es una estrategia
           dominante')
else if A1==prisionero1(2,1) & A2==prisioenro1(2,2) & B1==
   prisionero2(1,1) &
B2==prisionero2(2,1)
        fprintf('(No Confesar, Confesar) es una estrategia
           dominante')
    else fprintf ('No hay una estrategia dominante para este
       juego')
    end
    end
    end
end
```

## 3.2. Batalla de los sexos

Otro juego famoso en el campo de la teoría de juegos es la batalla de los sexos. En este juego, dos jugadores, esposa y esposo, están decidiendo entre dos eventos simultáneos: Un partido de fútbol y teatro. Ya que los eventos son a la misma hora, la pareja solo puede asistir a uno de los dos eventos. Los jugadores no pueden comunicarse y deben elegir únicamente en función de su percepción del movimiento futuro del otro jugador. Los pagos son: el esposo obtendría una utilidad de 2 si ambos eligen ir al partido de fútbol y una utilidad de 1 si ambos eligen ir al concierto. Para su esposa, ella obtendría una utilidad de 1 si ambos deciden ir al partido de fútbol y una utilidad de

2 si ambos deciden ir al concierto. La forma normal del juego es la siguiente:

| | | Esposa | |
|---|---|---|---|
| | | Futbol | Concierto |
| Esposo | Futbol | 2,1 | 0,0 |
| | Concierto | 0,0 | 1,2 |

Tabla 3.2: Batalla de los sexos

### 3.2.1. Análisis del juego

Si el esposo piensa que su esposa elegirá el concierto, entonces su mejor estrategia seria elegir Concierto antes que Fútbol. Similarmente, si el piensa que ella elegirá Fútbol, entonces el obtendrá mejor pago si elige Fútbol. El razonamiento para la esposa es idéntico.

El análisis anterior lleva a una conclusión interesante: el juego tiene múltiples equilibrios. Dado que ambos jugadores estarían mejor juntos que separados, hay dos equilibrios de estrategias puras: (Futbol,Futbol) y (Concierto, Concierto). Ya que no hay estrategia dominante en este juego y tampoco los jugadores tienen un incentivo para desviarse de un equilibrio, los dos perfiles anteriores forman un equilibrio de Nash. Mientras que un jugador se beneficiaría más que el otro, ambos obtendrían más utilidad que asistir solo al evento. Ambos resultados de la estrategia pura son óptimos para Pareto, ya que un jugador no puede mejorar su situación sin dañar al otro.

### 3.2.2. Modelando el Juego en MATLAB/Octave

Al igual que con otros juegos, cambiar los beneficios para cada jugador genera diferentes versiones del juego. Sin embargo, podemos generalizar este juego manteniendo la recompensa. Como se muestra en la siguiente tabla:

| |
|---|
| H(F,F)>H(M,M)>H(F,M) |
| H(F,F)>H(M,M)>H(M,F) |
| W(M,M)>W(F,F)>W(F,M) |
| W(M,M)>W(F,F)>W(M,F) |
| Donde:<br>H: Esposo, W: Esposa<br>F: Futbol, M: Concierto |

Tabla 3.3: Modelo MATLAB/Octave, batalla de los sexos

A continuación presentamos el código en MATLAB/Octave.

```
% Batalla de los sexos con MATLAB/Octave
%
% Forma normal del juego
%
%                        Esposa
%                      Futbol   Concierto
% Esposo    Futbol     (X1, Y1) (X3, Y3)
%           Concierto  (X2, Y2) (X4, Y4)
%
%Matriz de pagos para la batalla de los sexos:
%                        Esposa
%                      Futbol   Concierto
% Esposo    Futbol       (2, 1) (0, 0)
%           Concierto    (0, 0) (1, 2)
%
%------------------------------------------
% Ingresando los pagos del esposo:
X1=input('Ingrese el valor para X1:')
X2=input('Ingrese el valor para X2:')
X3=input('Ingrese el valor para X3:')
X4=input('Ingrese el valor para X4:')
% Ingresando los pagos del esposa:
Y1=input('Ingrese el valor para Y1:')
Y2=input('Ingrese el valor para Y2:')
Y3=input('Ingrese el valor para Y3:')
Y4=input('Ingrese el valor para Y4:')
% Matriz de pagos para el esposo:
H=[X1 X3;X2 X4]
% Encontrando el maximo pago en cada columna para esposo:

A1=max(H(:,1))
A2=max(H(:,2))
% analisis de estrategia dominante para esposo:
if A1==H(1,1) & A2==H(1,2)
    fprintf('Estrategia dominante para esposo es: Futbol')
```

```
else if A1==H(2,1) & A2==H(2,2)
        fprintf('Estrategia dominante para esposo es: Concierto
           ')
    else fprintf ('No hay estrategias dominantes para esposo')
    end
end
% Matriz de pagos para esposa:
W=[Y1 Y3;Y2 Y4]
%Encontrando maximo pago para cada fila de esposa:
B1=max(W(1,:))
B2=max(W(2,:))
% Analisis de estrategia dominante para esposa:
if B1==W(1,1) & B2==W(2,1)
    fprintf('Estrategia dominante para esposa es: Futbol')
else if B1==W(1,2) & B2==W(2,2)
        fprintf('Estrategia dominante para esposa es: Concierto
           ')
    else fprintf ('No hay estrategia dominante para esposa')
    end
end
% Estrategia dominante para el juego:
if A1==H(1,1) & A2==H(1,2) & B1==W(1,1) & B2==W(2,1)
    fprintf('(Futbol, Futbol) es una estrategia dominante para
       el juego')
else if A1==H(2,1) & A2==H(2,2) & B1==W(1,2) & B2==W(2,2)
        fprintf('(Concierto, Concierto) es una estrategia
           dominante para el juego')
else if A1==H(1,1) & A2==H(1,2) & B1==W(1,2) & B2==W(2,2)
        fprintf('(Futbol, Concierto) es una estrategia dominante
            para el juego')
else if A1==H(2,1) & A2==H(2,2) & B1==W(1,1) & B2==W(2,1)
        fprintf('(Concierto, Futbol) es una estrategia dominante
            para el juego')
    else fprintf ('No hay estrategias dominante para el juego')
    end
    end
    end
end
```

## 3.3. Un ejemplo de estrategias dominadas en MATLAB/Octave

Supongamos que dos jugadores, Ahmet y Gozde estan en un juego. Jugador I (Ahmet) tiene 3 opciones en su conjunto de estrategias, Arriba , Medio, o abajo; jugador II (Gozde) tiene dos opciones en su conjunto de estrategias, Izquierda y Derecha.

Si Ahmet elige Arriba y Gozde Izquierda, Ahmet obtiene 50 millones y Gozde 150 millones. Si Ahmet selecciona Medio y Gozde Derecha, Ahmet obtiene 150 millones; Gozde obtiene 50 millones. Si Ahmet escoge Abajo y Gozde Izquierda, Agmet obtiene 150 millones, y Gozde obtiene 50 millones. El conjunto de pagos se muestra en la siguiente tabla:

| | | Gozde | |
|---|---|---|---|
| | | Izquierda | Derecha |
| Ahmet | Arriba | 50,150 | 300,50 |
| | Medio | 200,150 | 150,50 |
| | Abajo | 150,500 | 50,300 |

Tabla 3.4: Juego con estrategias dominadas en MATLAB/Octave

Si Ahmet elige jugar Arriba, Gozde obtiene 150 millones si escoge Izquierda, 50 millones si escoge jugar Derecha. Así que Izquierda es la mejor estrategia para Gozde, si Ahmet escoge jugar Arriba.

Si Ahmet elige jugar Medio, Gozde obtendrá un pago de 150 millones si juega Izquierda, y 50 millones si juega Derecha. De nuevo, Izquierda es la mejor estrategia para Gozde.

Si Ahmet juega Abajo, Gozde obtendrá un pago de 50 millones si juega Izquierda, y 300 millones si juega Derecha. En este caso, jugando Derecha es la mejor estrategia para Gozde.

En este juego nohay una estrategia dominante para Gozde. Utilizando el mismo razonamiento podemos encontrar que no hay estrategias dominantes para Ahmet.

Sin embargo, sabemos que Ahmet obtiene un mejor pago jugando Medio, cuando Gozde juega Izquierda; y Ahmet tiene un mejor pago cuando juega Arriba cuando Gozde juega Derecha. Entonces, Abajo no es una buena estrategia para Ahmet, independientemente de lo que elija Gozde. Abajo es una estrategia dominada para Ahmet.

En este juego ambos jugadores saben que son jugadores racionales, Ahmet nunca escogerá una estrategia dominada, que en su caso es Abajo. Podemos eliminar la estrategia Abajo de nuestro juego. Se ilustra el nuevo juego en la siguiente tabla:

| | | Gozde | |
|---|---|---|---|
| | | Izquierda | Derecha |
| Ahmet | Arriba | 50,150 | 300,50 |
| | Medio | 200,150 | 150,50 |

Tabla 3.5: Juego reducido con estrategias dominadas en MATLAB/Octave

Reducido la forma del juego, ahora se observa que Gozde tiene un estrategia dominada, eligiendo Derecha. Gozde prefiere obtener un pago de 150 millones jugando Izquierda, en lugar de 50 millones jugando Derecha. Entonces la estrategia Derecha es dominada por la estrategia Izquierda. Notemos que, obviamente, Izquierda es la estrategia dominante para Gozde.

Después de eliminar otra estrategia dominada, obtenemos el siguiente juego reducido:

| | | Gozde |
|---|---|---|
| | | Izquierda |
| Ahmet | Arriba | 50,150 |
| | Medio | 200,150 |

Tabla 3.6: Juego reducido con estrategias dominadas en MATLAB/Octave

La única estrategia disponible para Gozde es Izquierda. Ahmet tiene dos opciones: Arriba y Medio. Ahmet prefiere obtener un pago de 200 millones escogiendo Medio, en lugar de recibir 50 millones jugando Arriba.

Finalmente la estrategia en equilibrio es (Medio, Izquierda) con los pagos de (200, 150).

A continuación mostramos el modelo del juego en MATLAB/Octave:

```
% Juego de estrategias dominadas en MATLAB/Octave
% Forma normal del juego entre Ahmet y Gozde
%                          Gozde
%                       Left      Right
%           Up       (X1, Y1) (X4, Y4)
% Ahmet     Middle   (X2, Y2) (X5, Y5)
%           Bottom   (X3, Y3) (X6, Y6)
%
% Matriz de pagos del juego:
%
%                              Gozde
```

```
%                   Left        Right
%         Up      (50, 150)  (300, 50)
%Ahmet    Middle  (200, 150) (150, 50)
%         Bottom  (150, 50)  (50, 300)
%
%-----------------------------------
%Ingresando los pagos de Ahmet:
X1=input('Ingrese el valor para X1:')
X2=input('Ingrese el valor para X2:')
X3=input('Ingrese el valor para X3:')
X4=input('Ingrese el valor para X4:')
X5=input('Ingrese el valor para X5:')
X6=input('Ingrese el valor para X6:')
%Ingresando los pagos de Gozde:
Y1=input ('Ingrese el valor para Y1:')
Y2=input ('Ingrese el valor para Y2:')
Y3=input ('Ingrese el valor para Y3:')
Y4=input ('Ingrese el valor para Y4:')
Y5=input ('Ingrese el valor para Y5:')
Y6=input ('Ingrese el valor para Y6:')
%Matriz de pagos de Ahmet
Ahmet=[X1 X4; X2 X5; X3 X6]
%Encontrando el mazimo valor para cada columna para Ahmet
A1=max(Ahmet(:,1))
A2=max(Ahmet(:,2))
%Analisis de estrategia dominanate para Ahmet:
if A1==Ahmet(1,1) & A2==Ahmet(1,2)
    fprintf('Estrategia dominante para Ahmet es Arriba .')
else if A1==Ahmet(2,1) & A2==Ahmet(2,2)
        fprintf(' Estrategia dominante para Ahmet es Medio.')
    else if A1==Ahmet(3,1) & A2==Ahmet(3,2)
        fprintf('Estrategia dominante para Ahmet es Abajo.')
else fprintf (' No hay estrategias dominantes para Ahmet.')
    end
    end
end
%Matriz de pagos para Gozde:
Gozde=[Y1 Y2 Y3; Y4 Y5 Y6]'
%Encontrando el maximo pago para cada fila de  Gozde:
B1=max(Gozde(1,:))
B2=max(Gozde(2,:))
B3=max(Gozde(3,:))
%analisis de estrategia dominante para Gozde:
if B1==Gozde(1,1) & B2==Gozde(2,1) & B3==Gozde(3,1)
    fprintf(' Estrategia dominanate para Gozde es  Izquierda.')
else if B1==Gozde(1,2) & B2==Gozde(2,2) & B3==Gozde(3,2)
        fprintf(' Estrategia dominanate para Gozde es Derecha.')
else fprintf (' No hay estrategias dominantes  para Gozde.')
    end
```

```
end
% Estrategias dimanantes para el juego:
if A1==Ahmet(1,1) & A2==Ahmet(1,2) & B1==Gozde(1,1) & B2==Gozde
    (2,1) &
B3==Gozde(3,1)
     fprintf(' (Arriba, Izquierda) es una estrategia dominante
         para el juego.')
else if A1==Ahmet(1,1) & A2==Ahmet(1,2) & B1==Gozde(1,2) & B2==
    Gozde(2,2) &
B3==Gozde(3,2)
          fprintf(' (Arriba, Derecha) es una estrategia dominante
              para el juego.')
else if A1==Ahmet(2,1) & A2==Ahmet(2,2) & B1==Gozde(1,1) & B2==
    Gozde(2,1) &
B3==Gozde(3,1)
          fprintf(' (Medio, Izquierda) es una estrategia dominante
               para el juego.')
else if A1==Ahmet(2,1) & A2==Ahmet(2,2) & B1==Gozde(1,2) & B2==
    Gozde(2,2) &
B3==Gozde(3,2)
          fprintf(' (Medio, Derecha) es una estrategia dominante
              para el juego.')
else if A1==Ahmet(3,1) & A2==Ahmet(3,2) & B1==Gozde(1,1) & B2==
    Gozde(2,1) &
B3==Gozde(3,1)
          fprintf(' (Abajo, Izquierda) es una estrategia dominante
               para el juego.')
else if A1==Ahmet(3,1) & A2==Ahmet(3,2) & B1==Gozde(1,2) & B2==
    Gozde(2,2) &
B3==Gozde(3,2)
          fprintf(' (Abajo, Derecha) es una estrategia dominante
              para el juego.')
     else fprintf (' No hay estrategias dominantes para este
         juego.')
     end
     end
     end
     end
     end
end
%------------------------------------
%ESTRATEGIAS DOMINADAS
% Estrategias dominada para Ahmet:
if (A1==Ahmet(1,1) & A2==Ahmet(2,2)) | (A1==Ahmet(2,1) & A2==
    Ahmet(1,2))
     fprintf(' Estrategia dominada para Ahmet es Abajo.')
else if (A1==Ahmet(1,1) & A2==Ahmet(3,2)) | (A1==Ahmet(3,1) & A2
    ==Ahmet(1,2))
          fprintf(' Estrategia dominada para Ahmet es Medio.')
```

```
    else if (A1==Ahmet(2,1) & A2==Ahmet(3,2)) | (A1==Ahmet(3,1)
       & A2==Ahmet(2,2))
         fprintf(' Estrategia dominada para Ahmet es Arriba.')
else fprintf ('No hay estrategia dominada para Ahmet.')
    end
    end
end
% Estrategia dominada para Gozde:
if B1==Gozde(1,1) & B2==Gozde(2,1) & B3==Gozde(3,1)
    fprintf(' Estrategia dominada para Gozde es Derecha.')
else if B1==Gozde(1,2) & B2==Gozde(2,2) & B3==Gozde(3,2)
         fprintf(' Estrategia dominada para Gozde es Izquierda.')
    else fprintf (' Nohay estrategia dominada para Gozde.')
    end
end
% Borrar la fila y/o columna la cual incluye estrategia dominada
%En nuestro ejemplo Abajo es la estrategia dominada para Ahmet.
% La nueva forma del juego reducido es la siguiente:

%
%                          Gozde
%                     Left     Right
% Ahmet    Up       (X1, Y1) (X4, Y4)
%          Middle (X2, Y2) (X5, Y5)
%
% Pagos del juego reducido
%                           Gozde
%                     Left          Right
% Ahmet    Up       (50, 150)   (300, 50)
%          Middle (200, 150) (150, 50)
%
% Analizando la estrategia dominante y dominada para el juego
   reducido
%
% Matriz de pagos para Ahmet:
Ahmet=[X1 X4; X2 X5]
% Encontrando el maximo valor para cada columna de Ahmet en el
   juego reducido:
A3=max(Ahmet(:,1))
A4=max(Ahmet(:,2))
% Analisis de la estrategia dominante para Ahmet:
if A3==Ahmet(1,1) & A4==Ahmet(1,2)
    fprintf(' Estrategia dominante para Ahmet es Arriba.')
else if A3==Ahmet(2,1) & A4==Ahmet(2,2)
         fprintf(' Estrategia dominante para Ahmet es Medio.')
else fprintf (' No hay estrategia dominante para Ahmet.')
    end
end
% Matriz de pagos para Gozde:
```

```
Gozde=[Y1 Y2; Y4 Y5]'
%Encontrando el maximo valor para cada fila de Gozde:
B3=max(Gozde(1,:))
B4=max(Gozde(2,:))
%Estrategia dominante para Gozde:
if B3==Gozde(1,1) & B4==Gozde(2,1)
    fprintf(' Estrategia dominante para Gozde es Izquierda.')
else if B3==Gozde(1,2) & B4==Gozde(2,2)
        fprintf(' Estrategia dominante para Gozde es Derecha.')
    else fprintf (' No hay estrategia dominante para  Gozde.')
    end
end
%ANALISIS DE LA SEGUNDA ITERACION DE ESTRATEGIAS DOMINADAS
%Estrategia dominada para Ahmet:
if A3==Ahmet(1,1) & A4==Ahmet(1,2)
    fprintf(' Estrategia dominada para Ahmet es Medio.')
else if A3==Ahmet(2,1) & A4==Ahmet(2,2)
        fprintf(' Estrategia dominada para Ahmet es Arriba.')
    else fprintf (' No hay estrategia dominada para Ahmet.')
    end
end
%Estrategia dominada para Gozde:
if B3==Gozde(1,1) & B4==Gozde(2,1)
    fprintf(' Estrategia dominada para Gozde es Derecha.')
else if B3==Gozde(1,2) & B4==Gozde(2,2)
        fprintf(' Estrategia dominada para Gozde es Derecha.')
    else fprintf (' No hay estrategia dominada para Gozde.')
    end
end
% Borrar la fila y/o columna la cual incluye estrategia
   dominada
%En la segunda iteracion nuestro ejemplo tenia Derecha
%como estrategia dominada para el jugador Gozde.
%La forma normal del juego reducido es la siguiente:
%
%                 Gozde
%                  Left
%Ahmet   Up      (X1, Y1)
%        Middle  (X2, Y2)
%
%Matriz de pagos del juego reducido:
%
%                 Gozde
%                  Left
%Ahmet   Up      (50, 150)
%        Middle  (200, 150)
%
%analizando la estrategia dimanante  y dominada del juego
   reducido
```

```
%
% Matriz de pagos de Ahmet:
Ahmet=[X1; X2]
% Encontrando el maximo valor pata las columnas en Ahmet:
A5=max(Ahmet(:,1))
% Analisis de la estrategia dominante para Ahmet:
if A5==Ahmet(1,1)
    fprintf(' Estrategia dominante para Ahmet es Arriba.')
else if A5==Ahmet(2,1)
        fprintf(' Estrategia dominante para Ahmet es Medio.')
    else fprintf (' No hay estrategia dominante para Ahmet.')
    end
end
% Matriz de pagos para Gozde:
Gozde=[Y1 Y2]';
% Encontrando el maximo valor para cada fila en Gozde
% Solucion de ljuego:
if A5==Ahmet(1,1)
    fprintf(' (Arriba, Izquierda) es solucion para el juego.')
else if A5==Ahmet(2,1)
        fprintf(' (Medio, Izquierda) es solucion para el juego
            .')
    else fprintf (' No hay solucion para el juego.')
    end
end
```

## 3.4. Equilibrios de Nash en Python

Implementar los algoritmos en Python es mucho más fácil, ya que se cuentan con algunas librerías que facilitan el trabajo. En este caso trabajaremos con la librería llamada Nasphy.

### 3.4.1. Instalando Nasphy

Nasphy requiere de las siguientes librerías para que pueda funcionar en la computadora:

- Python 3.5 o mayor.
- Scipy 0.19.0 o mayor.
- Numpy 1.12.1 o mayor.

Asumiendo que tienes instalado todo lo anterior, para instalar Nasphy se hace lo siguiente:

- En Mac OSX o Linux abrir la terminal.
- En Windows abrir el Command prompt.

Y escribir lo siguiente:

```
$ pip install nashpy
```

### 3.4.2. Creando un juego

Recordando el juego de las monedas:

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Cara | Cruz |
| Jugador 1 | Cara | 1,-1 | -1,1 |
| | Cruz | -1,1 | 1,-1 |

Tabla 3.7: Juego de las monedas

Para implementar el juego en Python se hace lo siguiente:

```
import nashpy as nash #Importar la libraria Nasphy
import numpy as np #Importar la libraria Numpy
A = np.array([[1, −1], [−1, 1]])
B=−A
rps = nash.Game(A, B) #Creando el juego
rps
Zero sum game with payoff matrices:

Zero sum game with payoff matrices:

Row player:
[[ 1 −1]
 [−1  1]]

Column player:
[[−1  1]
 [ 1 −1]]
```

### 3.4.3. Utilidades o ganancias

Para calcular las utilidades de un juegos se procede de la siguiente manera:

```
sigma_r = [1,0] #si el jugador fila juega cara
sigma_c = [0, 1] #si el jugador columna juega cruz
rps[sigma_r, sigma_c]

array([-1, 1]) #pago de los jugadores
```

### 3.4.4. Equilibrio de Nash

Finalmente para calcular los equilibrios de Nash procedemos de la siguiente manera:

```
eqs = rps.support_enumeration()
list(eqs)

[(array([0.5, 0.5]), array([0.5, 0.5]))] #Equilibrios de Nash
```

# Conclusiones

La teoría de juegos tiene numerosas aplicaciones en la vida cotidiana, en el análisis económico de estructuras de mercado y en la elaboración de estrategias empresariales. Las decisiones propias están condicionadas por las decisiones que creamos que tomarán los otros actores del juego. El equilibrio de Nash es una situación en la cual los jugadores no tienen incentivos para modificar su elección. Algo importante es que en el resultado de un juego no siempre es la óptima para el grupo, como se vio en el dilema del prisionero la solucion óptima es para cada individuo, no siendo la óptima para el grupo. En este sentido se puede decir que cuando los jugadores buscan maximizar sus ganancias individuales, el grupo pierde, todo esto bajo los supuestos de los juegos no cooperativos de información completa impuestos en los capítulos anteriores.

Recordemos que un juego puede o no tener equilibrios de Nash, pero demostramos bajo que condiciones un juego siempre tendrá un equilibrio, tanto para estrategias puras como estrategias mixtas. Este fué uno de los resultados más importantes de John Nash en el estudio de la Teoría de Juegos, llevándolo a ganar el primeo novel años mas tarde.

Algo interesante es la relación que existe entre la Teoría de Juegos y el análisis matemático, si bien nosotros demostramos la existencias de equilibrios de Nash utilizando el teorema de Kakutani, un teorema muy importante en el área de matemática pura, también se puede demostrar el teorema de Kakutani utilizando Teoría de Juegos.

Nuestra investigación fue en juegos no cooperativos de información completa, cabe mencionar que aún queda mucho por recorrer, para futuros trabajos de tesis se puede dar seguimiento a los juegos no cooperativos de información incompleta, juegos cooperativos, o incluso la demostración del teorema de Kakutani con Teoría de Juegos.

# Bibliografía

[1] Abramson, G. *INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS.* Instituto Balseiro, 2006.

[2] Bilbao, J. M. *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales.* Universidad de Sevilla, 2016.

[3] Geckil, I. K., and Anderson, P. L. *Applied Game Theory And Atrategic Behavior.* Taylor and Francis Group, LLC, 2010.

[4] Joaquín Pérez, J. L. J., and Cerdá, E. *Teoría de Juegos.* PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2004.

[5] Urquidi, J. M. P. *Teoremas de Punto Fijo y la Existencia de Equilibrios de Nash para Juegos no Cooperativos.* PhD thesis, 2008.

[6] Élner Crespín Elías. *Teoría de juegos y estrategia.* UFG Editores, 2014.