Structure des Organisations Instables

Dawidson Razafimahatolotra

Structure des Organisations Instables

Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA*
École d'Économie de Paris
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

26 juin 2009

Résumé

Un cycle, une situation dans laquelle toutes les issues sociales sont opposables, est caractérisé par son ordre et par sa forme. Si l'ordre minimal des cycles, qui correspond au nombre de coalitions nécessaires pour que toutes les issues sociales soient opposables, est un indicateur d'instabilité, la forme des cycles quand à elle donne de l'information sur la structure des coalitions contestataires. L'identification des coalitions potentiellement contestataires est d'autant plus facile que la structure des cycles de la fonction d'effectivité est mathématiquement simple. Ainsi, ce travail qui est consacré à l'étude de la forme des cycles, démontre que, pour les fonctions d'effectivités simples, les fonctions d'effectivité maximales et les fonctions d'effectivité anonymes et neutres, tous les cycles ont une propriété circulaire.

Mots-clés : Cycle circulaire, structure des cycles, ordre des cycles, pouvoir.

JEL Classification : C71, C79.

AMS classification : 91A12

*Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA, razafimahatolotra@yahoo.ca est membre du projet DELICOM. Ce travail fait partie des recherches du programme DELICOM

1 Introduction

Une organisation est un ensemble d'acteurs agissant selon la structure du pouvoir et la distribution des autorités. La connaissance de la structure de pouvoir d'une organisation permet d'anticiper aussi bien les issues du jeu que les éventuels conflits entre les parties prenantes. Nous admettons ici que le conflit est une situation où, à l'issue de la procédure du jeu (négociation, exercices respectifs des droits, règle de vote, etc.), aucune alternative n'est sélectionnée. Le conflit a une relation évidente avec les préférences des membres d'une organisation mais les distorsions de préférences en cas de conflits sont évitables si les pouvoirs sont bien répartis entre les joueurs. Au cours de ces travaux, nous analysons les conditions de possibilité et la forme de ces désaccords en fonction de la structure du pouvoir. Il y a plusieurs représentations théoriques qui abordent ces questions, mais nous présentons la classe de théories qui la considère comme un problème de choix social et celle qui la traite comme un problème de pouvoir et de décision.

En théorie du choix social, les issues sociales découlent d'une règle d'association des préférences des joueurs. Le vote à majorité simple est un exemple typique où chaque joueur a une voix, et l'issue sociale est celle qui obtient la moitié des voix plus une. D'autres règles plus sophistiquées sont étudiées en détails dans Van Deemen (46). Dans la plupart des cas, ces règles tranchent les groupes d'acteurs en deux catégories diamétralement opposées : plein pouvoir et sans pouvoir. Cette classification des coalitions en gagnantes – non gagnantes suscite des critiques aussi bien d'ordre pratique que d'ordre épistémique. D'ordre pratique car toutes coalitions ne satisfaisant pas les conditions de la règle sont exclues de la sphère de la décision, et d'ordre épistémique car une structure de pouvoir et des autorités formalisée en règle de décision ne permettent pas de rendre compte du problème de contraste entre pouvoir réel et pouvoir formel. Par exemple, le pouvoir formel est celui décrit par la loi, ou par les conventions explicites consenties par les parties prenantes, tandis que le pouvoir réel décrit ce qui est observé. Pour apporter une solution au premier problème, H. Moulin dans (27), (29) suggère le principe du proportionalisme : une coalition à s membres (s est un entier) a le droit de s'opposer contre $b(s)$ alternatives, $b(s)$ est un entier relativement proportionnel à s. Plus précisément, $b(s) = \lceil s\frac{m}{n} \rceil$, m le nombre des alternatives, n le nombre de joueurs et $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$. Cette solution a été conçue pour les organisations où les acteurs sont interchangeables et les alternatives sont permutables, mais les travaux récents de D. Razafimahatolotra montrent que cette idée peut être généraliser pour une classe de jeux plus générale. Le problème épistémique posé par les règles de choix social est plus délicat que le problème d'ordre pratique car il concerne le bon fonctionnement de l'organisation : un écart trop important entre la structure formelle et la structure réelle du pouvoir peut nuire à la crédibilité des autorités et à l'effectivité des pouvoirs des coalitions. Ce problème, posé par Aghion & Tirole (7) comme problème de contraste entre les autorités réelles et les autorités formelles, a été développé récemment par Emmanuel Picavet & Razafimahatolotra D. (37), (38) dans le contexte de l'étude de la distribution du pouvoir dans une organisation. Nous ajoutons à ces limites de la représentation du pouvoir en règle de choix social la conclusion de nos observations des travaux de formalisation sur les constitutions. L'attribution du pouvoir est généralement non implémentable par une correspondance de choix social ; par exemple B. Peleg (33), ou Vannucci (48) (32), Van Hees (47), E. Picavet (36) ou E. Picavet & D. Razafimahatolotra (37).

La deuxième représentation s'appuie sur la théorie des jeux coopératifs : un couple (N, ν) tel que N représente l'ensemble des joueurs et ν est une fonction qui associe à chaque sous ensemble de N un nombre réel positif. Elle met en valeur les pouvoirs des coalitions pour expliquer le mécanisme de décision et pour rendre compte des jeux d'influences entre parties prenantes d'une organisation. Les pouvoirs des joueurs, donc des coalitions, sont mesurés par des *indices de pouvoir* dont les plus connus sont ceux de Banzhaf (13), (20), (14), (18) et de Shapley-Shubik (40), (41), (42), (50). L'indice de Shapley repose sur l'hypothèse normative que chaque joueur a un pouvoir proportionnel à la moyenne marginale de ses influences potentielles, par exemple dans Young (50), tandis que l'indice de Banzhaf évalue le pouvoir d'un acteur dans un système d'élection à deux niveaux, voir (18) pour son axiomatisation. Beaucoup de critiques se sont levées contre ces indices par leurs manques de pertinence par rapport aux observations des faits et des résultats des études statistiques sur le mécanisme du pouvoir. Les travaux récents de Vincent (49) montrent par exemple que même pour une élection à deux niveaux comme celle des États Unis, l'indice de Banzhaf enregistre trop d'erreurs d'estimation.

La troisième représentation repose sur la théorie des jeux coalitionnels : un couple (N, E) tel que N représente l'ensemble des joueurs et E une fonction qui associe à chaque coalition une famille d'ensembles, qui sont des sous-ensembles de l'ensemble des alternatives. En 1982, pour généraliser le principe du veto proportionnel, Moulin & Peleg (28) ont introduit la notion de fonction d'effectivité pour représenter la structure du pouvoir dans ses formes les plus générales. Une fonction d'effectivité ou correspondance de veto décrit les pouvoirs effectifs des coalitions. Un ensemble d'alternatives B fait parti de l'effectivité d'une coalition S si celle-ci a le pouvoir de forcer l'issue sociale pour être un élément de B, donc elle a le pouvoir de bloquer les alternatives en dehors de B. Cette description ouvre de nouvelles catégories de problèmes dans une organisation.

Premièrement, elle permet de définir *" la rationalité ou la rationalisation du choix social"*, voir par exemple les travaux de H. Keiding & Razafimahatolotra D. (22). Selon la définition adoptée par Moulin & Peleg dans (28), une coalition est rationnelle au travers de l'usage de son pouvoir si elle lève son objection contre tout état social en désaccord avec les préférences de ses membres ; pourvu qu'elle a le moyen de réaliser cet éviction. Malgré que la quasi-totalité des travaux sur les effectivités adopte cette définition, cette acceptation est loin d'être unanime car la notion de rationalité peut être définie par rapport au profil des joueurs, par rapport aux résultats voulus ou par rapport à d'autres observables sociaux. La rationalité selon laquelle l'usage du pouvoir se fait par la négociation ou le marchandage est l'objet des travaux de Keiding H. & Razafimahatolotra D. (23) et Razafimahatolotra D.

Deuxièmement, la notion de fonction d'effectivité offre d'autres avantages comme l'unification de l'approche stratégique et de l'approche coalitionnelle de la théorie des jeux, ce qui définit le problème de l'implémentation. Voir par exemple les travaux de J. Abdou (2), (6) ou l'ouvrage de J. Abdou & H. Keiding (5), ou les travaux de B. Peleg, de Ishiishi et tant d'autres. La fonction d'effectivité nous permet donc d'aborder la question de stabilité versus conflit dans une organisation comme un problème à la fois structurel et préférentiel. Elle permet d'identifier les limites des pouvoirs respectifs des coalitions pour préserver la stabilité, et permet également de caractériser les stratégies génératrices de conflits et les manipulations malveillantes des règles de choix social.

La formalisation d'une organisation en fonction d'effectivité nous permet donc de considérer le pouvoir comme des conditions de la liberté et un moyen de la mise en oeuvre des intentions des parties prenantes. Si les libertés sont trop importantes, donc chaque coalition dispose d'un moyen d'actions conséquent, l'organisation risquerait d'avoir des groupes d'acteurs puissants adverses ; ce qui pourrait agir pour qu'aucune alternative ne soit pas sans objection. Ce problème, décrit comme une opposition entre l'allocation du pouvoir et la stabilité de l'organisation, implique donc un arbitrage à faire entre *la préservation de la stabilité* et *libertés, et entre innovations et créativités.* Face à ce dilemme, nous proposons dans ce travail des études systémiques des organisations instables. Donc, nous ne cherchons pas à supprimer l'instabilité mais proposons de maîtriser les conflits. C'est-à-dire que le désaccord des préférences dû à l'existence d'un cycle d'effectivité : un cas de répartition de pouvoir permettant à une famille de coalitions de bloquer la totalité des alternatives dans un profil de préférences données. Il est naturel que le conflit résulte explicitement de l'interaction des préférences mais en tant que problème de structure, la question consiste à déterminer les conditions sous lesquelles le désaccord entre préférences est évitable, quelque soit le profil de préférences des joueurs.

En 1982, H. Moulin & B. Peleg(28) ont proposé des classes de fonctions d'effectivité stables tandis que J. Abdou (1) propose deux conditions sous lesquelles le désaccord de préférences peut se produire, donc l'organisation risque de se plonger dans un conflit. La même année, B. Peleg montre que sous la convexité (La force de l'union est supérieur à l'union des forces), le conflit ne se produira jamais si les joueurs et les coalitions sont rationnels dans l'usage de leurs pouvoirs et par rapport à leurs préférences. Ces conditions ne sont toutefois que des conditions nécessaires ou suffisantes seulement. C'était en 1985 que H. Keiding (21) proposa une condition nécessaire et suffisante pour l'absence de conflits dans une organisation : une structure de coalitions et d'ensembles d'alternatives qu'il appela *acyclicité* ou absence de cycle. Un cycle est une famille de coalitions qui exercent leurs pouvoirs par des blocages d'ensembles d'alternatives telle qu'il existe un profil de préférences dans lequel les parties prenantes de l'organisation sont en total désaccords : aucune alternative n'est rationnellement sélectionnée. L'existence d'un cycle est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'instabilité. Donc, les caractéristiques des cycles : structures, ordre minimal et nombre permettent d'étudier le problème de conflit dans une organisation.

Ainsi, pour apprécier le niveau d'instabilité d'une organisation, J. Abdou (3) (2003) propose un *indice structurel d'instabilité* basé sur une propriété des cycles : l'ordre minimal (ou le nombre minimal de coalitions nécessaires pour briser la stabilité). Cet indice a été généralisé par J. Abdou (4) (2008) dans le cas des fonctions d'effectivité locales. une fonction d'effectivité locale est une représentation plus abstraites et plus générales de l'allocation du pouvoir dans une organisation. Ces deux travaux de J. Abdou ont mis en évidence le rapport entre l'ordre des cycles d'une fonction d'effectivité et le problème des conflits dans une organisation, donc les propriétés des cycles avec le problème du conflit. Cela nous incite à étudier les deux autres propriétés restantes : les formes structurelles et le nombre des cycles. La forme structurelle d'un cycle est directement corrélée à la complexité de l'élaboration d'un profil de préférences dans lequel les parties prenantes sont en total désaccord, tandis que le nombre des cycles détermine la probabilité de réalisation de ces désaccords.

Le présent travail est dédié aux études de la forme structurelle des cycles. Le calcul des fréquences des désaccords est l'objet des travaux communs de Bennor R. & Razafimahatolotra D. Nous allons structuré ce chapitre en deux parties. La première propose d'étudier les relations entres les différents cycles que nous étudions : Ceux introduit par J. Abdou (2) définitions 3.2 et 3.3, celui de H. Keiding (21) définition 3.1 et celui que nous introduisons dans la définition 3.8. La deuxième partie montre que pour les fonctions d'effectivité maximales et pour les fonctions d'effectivité anonyme et neutres, le cycle circulaire et le cycle sont équivalents.

2 Notations et définitions

L'ensemble des joueurs est représenté par un ensemble fini $N = \{1, \ldots, n\}$ et l'ensemble des alternatives par un ensemble fini $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Une fonction d'effectivité est une fonction $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E(\emptyset) = \emptyset$, $B \in E(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$; E est dite monotone si $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A), \forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tels que $B \in E(S)$, alors $C \supset B$ et $T \supset S$ entraîne $C \in E(T)$. La fonction E est maximale si $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \notin E(S)$ entraîne $B^c \in E(S^c)$. La fonction E est anonyme si $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tel que $|S| = |T|$, alors $E(S) = E(T)$. La fonction E est neutre si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B,\ C \in \mathcal{P}_0(A)$ tel que $|B| = |C|$, alors $B \in E(S)$ si et seulement si $C \in E(S)$. La fonction E est simple si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$ ou $E(S) = \{A\}$. Dans ce cas, on note $\mathcal{W}(E) = \{S \in \mathcal{P}_0(N) \mid E(S) = \mathcal{P}_0(A)\}$. Enfin, pour un ensemble X supposé un sous ensemble d'un ensemble Z, $X^+ = \{Y \subset Z \mid X \subset Y\}$.

Une $E-$*configuration d'ordre* r d'une fonction d'effectivité E est un $2r-$uplet $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ tel que $B_k \in E(S_k)$, $\forall k = 1 \ldots r$. On note $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des relations d'ordre linéaire sur A. Un $R \in \mathcal{L}(A)$ est appelé préférence et un $S-$profil est un élément de $\mathcal{L}(A)^S$. Une fonction d'effectivité E est *instable* si et seulement si il existe $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tel que $\forall x \in A\ \exists S(x) \subset N,\ B(x) \in E(S)$ tels que $y\ R^{S(x)}\ x, \forall y \in B(x)$.

Tout au long de ce travail, un ensemble est représenté par une lettre en majuscule et son cardinal par une lettre en minuscule. Une famille de coalitions est représentée par $(S_k)_k$, et une famille d'ensembles d'alternatives est représentée par $(B_k)_k$. Au cas où la famille de coalitions est formée d'ensembles deux à deux disjoints, on la notera $(T_k)_k$ et au cas où la famille d'ensembles d'alternatives est formée d'ensembles deux à deux disjoints, on la note $(C_k)_k$ au lieu de $(B_k)_k$. L'ensemble des indices est assimilé à un ensemble modulo sa valeur maximale. Par exemple, si nous considérons un ensemble d'indice $\{1, \ldots, r\}$, les éléments de cet ensemble sont modulo r. Donc, tout indice supérieur à r est égal au reste de sa division euclidienne par r. Sans qualification additionnelle, le mot cycle fait référence à la définition 3.1.

3 Structure des cycles et forme de désaccord

Dans cette partie, nous étudions les relations entre les cycles inférieurs, supérieurs, circulaires et les cycles, et identifions le type de profil dans lequel une fonction d'effectivité instable tombera dans une situation désaccord de préférences. Nous montrerons également au travers des observations la complexité de l'élaboration des discordes sur les préférences dans chacun de ces cycles.

Définition 3.1 (Keiding,1985)**.** *Soit $E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Une $E-$configuration $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ est* un cycle d'ordre *r de base $(C_1, \dots, C_r)$ si*

(C1) *$(C_1, \dots, C_r)$ est une partition de A ;*

(C2) *Pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, il existe $k_J \in J$ tel que*

$$B_{k_J} \subset \bigcup_{k \notin J} C_k \tag{1}$$

E est *acyclique* que s'il ne possède aucun cycle.

Remarque 1. *On peut remplacer (C2) par l'une des conditions suivantes :*

(C2a) Pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, il existe $k_J \in J$ tel que $B_{k_J} \cap C_k = \emptyset, \forall k \in J$.

(C2b) Pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, il existe $k_J \in J$ tel que $C_{k_J} \cap B_k = \emptyset, \forall k \in J$.

Comme $B_k \cap C_k = \emptyset$ $(k = 1 \dots r)$, la condition (C2) signifie que S_k ait le pouvoir de bloquer tous les éléments de C_k. Ainsi, pour assurer l'instabilité d'une structure de pouvoir, la condition (C2a) dit que si les $S_k, k \in J$ ont un membre commun, alors il faut que l'une des coalitions, ici S_{k_J}, a le pouvoir de bloquer tous les éléments de $\cup_{k \in J} C_k$. La version duale de (C2b) dit qu'il existe un ensemble d'alternatives, ici C_{k_J} tel que tous les $S_k, k \in J$ ont le pouvoir de bloquer les éléments de C_{k_J}.

Cette interprétation qui semble intuitive n'implique pas que l'on puisse manipuler (informatique ou mathématique) les cycles avec aisance. La définition 3.1 elle-même montre qu'un cycle n'est pas un objet informatique ou mathématique simple. Par exemple, les travaux de Minutant (25) ou Takamiya (44), qui ont étudié la complexité (le mot complexité fait renvoi ici à la notion informatique de complexité. Dans le cas général, ce mot renvoi au sens de difficile.) des cycles montrent que l'on peut avoir un algorithme pour savoir si une fonction d'effectivité est acyclique ou non. Toutefois, aucun résultat informatique n'est disponible pour déterminer les cycles d'une fonction d'effectivité instable. Les travaux des mathématiciens comme Keiding (21) ou Kolpin (24) ou Abdou (5) ou d'autres montrent également la non évidence des propriétés des cycles. Ce problème nous montre l'intérêt d'un résultat d'équivalence qui propose une simplification de la forme structurelle des cycles. Pour une classe générale de fonctions d'effectivité, un cycle ne peut être équivalent qu'à une structure de complexité égale, donc nous proposons de chercher des classes de fonctions d'effectivité où les cycles sont simplifiés.

Notons que les cycles de ce travail sont suffisants pour obtenir un profil dans lequel le coeur d'une fonction d'effectivité est vide. Pour des cycles non suffisants pour l'instabilité, voir Danilov (17). La différence entre les cycles que nous étudions repose donc sur le niveau d'aisance d'une opération de déstabilisation d'une organisation.

3.1 Le cycle supérieur et le cycle inférieur

Définition 3.2 (Abdou, 1982)**.** *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité. Une* $E-$*configuration* $(T_1, \ldots, T_r, B_1, \ldots, B_r)$ *est un* cycle supérieur d'ordre r *si* $T_k \cap T_l = \emptyset, \forall k \neq l$ *et* $\cap_{k=1}^{r} B_k = \emptyset$.

Définition 3.3 (Abdou, 1982)**.** *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité. Une* $E-$*configuration* $(S_1, \ldots, S_r, C_1, \ldots, C_r)$ *est un* cycle inférieur d'ordre r *si* $C_k \cap C_l = \emptyset, \forall k \neq l$, $C_1 \cup \cdots \cup C_r = A$ *et* $\cap_{k=1}^{r} S_k = \emptyset$.

En 1982, J. Abdou (1) a montré que pour éviter l'instabilité, il faut que la répartition de pouvoir ne possède aucun cycle supérieur et cycle inférieur.

Observation 1. *Malgré la dualité de formulation de ces deux cycles, on constate qu'il est plus facile d'arriver à un cycle de préférences en présence d'un cycle supérieur qu'en présence d'un cycle inférieur.*

En effet, soit par exemple $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des joueurs et des alternatives et soient $E, F : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ deux fonctions d'effectivité telles que $E(\{i\}) = \{N \setminus \{i\}, N\}$, $\forall i \in N$ et $F(N \setminus \{i\}) = \{S \mid S \ni i\}$, $\forall i \in N$. Les fonctions E et F sont des jeux d'élections dont candidats et électeurs sont identiques. Selon E, chaque membre a le pouvoir d'empêcher son élection, et selon F, un parti constitué de $(n-1)$ électeurs a le pouvoir de choisir le joueur restant. Alors, E a un unique cycle supérieur, ici $(\{1\}, \ldots, \{n\}, N \setminus \{1\}, \ldots, N \setminus \{n\})$ et F a un unique cycle inférieur, $(N \setminus \{1\}, \ldots, N \setminus \{n\}, \{1\}, \ldots, \{n\})$. Supposons que le but de l'élection est de choisir un jouer pour assumer une tâche désagréable. Dans E, aucun joueur n'est désigné pourvu que $\{i\}$ soit la pire proposition pour $\{i\}$, alors que dans F, il faut que chaque joueur négocie avec $(n-2)$ autres et que la préférence ait une forme particulière comme $j+1\ R^i\ j, \forall i, j \in N$.

Donc, en particulier si deux joueurs i, j sont tels que l'un défend l'autre et réciproquement, ils risquent d'être désigné sans le vouloir.

Il est évident que la structure d'un cycle est largement plus complexe que la structure d'un cycle inférieur et celle structure d'un cycle supérieur. Pourtant, dans les deux propositions suivantes, nous montrons que sous certaines conditions, un cycle peut engendrer un cycle supérieur ou un cycle inférieur.

Notons

$$\mathcal{Q}_k = \{L \subset \{1, \dots, r\} \mid |L| = k\},$$

l'ensemble des indices à $k-$éléments.

Proposition 3.4. *Soient $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité et $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ un cycle d'ordre r sur E. S'il existe $L \in \mathcal{Q}_{r-1}$ tel que $\forall k \neq l \in L,\ S_k \cap S_l = \emptyset$, alors E a un cycle supérieur d'ordre $\rho \leq r$.*

Preuve : Soit $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ un cycle d'ordre r de base $(C_1, \dots, C_r)$. Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $L = \{1, \dots, r-1\}$ $(\in \mathcal{Q}_{r-1})$. Alors, $\forall k \neq l \in \{1, \dots, r-1\},\ S_k \cap S_l = \emptyset$. Définissons,

$$K = \{\alpha \in \{1, \dots, r-1\} \mid S_r \cap S_\alpha \neq \emptyset\} \subset \{1, \dots, r\}$$

Nous pouvons démontrer que $K = \emptyset$, c'est-à-que les S_k sont deux à deux disjoints.

Si nous avons $\cap_{k \in L} B_k = \emptyset$ tandis que $\forall k \neq l \in L, S_k \cap S_l = \emptyset$, alors E admet un cycle supérieur d'ordre $r-1$. Admettons que $\cap_{k \in L} B_k \neq \emptyset$. Étant donné que $B_k \cap C_k = \emptyset$ $(k = 1 \dots r)$, alors

$$B_1 \cap \cdots \cap B_{r-1} \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_{r-1}) = \emptyset$$

Comme $(C_1, \dots, C_r)$ est une partition de A, alors $\cap_{k=1}^{r-1} B_k \subset C_r$. Par suite,

$$\forall k = 1 \dots r-1;\ B_k \cap C_r \neq \emptyset \tag{2}$$

Or, pour tout $\alpha \in K$ nous avons $S_r \cap S_\alpha \neq \emptyset$, alors de la définition 3.1 équation (C2a), il existe $k_\alpha \in \{\alpha, r\}$ tel que $B_{k_\alpha} \cap (C_\alpha \cup C_r) = \emptyset$. De l'équation 2, nous avons en particulier $B_\alpha \cap C_r \neq \emptyset$, donc $k_\alpha = r$. Par suite, $B_r \cap C_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in K$. C'est-à-dire que

$$B_r \subset \bigcup_{\alpha \notin (K \cup \{r\})} C_\alpha \tag{3}$$

Or, pour tout $\alpha \notin (K \cup \{r\})$ nous avons $S_r \cap S_\alpha = \emptyset$, et étant donné que pour tout $k \neq l \in \{1, \dots, r-1\}$, $S_k \cap S_l = \emptyset$, alors $\cap_{k \notin K} B_k = \emptyset$ implique

que E admet un cycle supérieur d'ordre $r - |K| \leq r$. Admettons alors que $\cap_{k \notin K} B_k \neq \emptyset$, donc $B_r \cap \left(\cap_{k \notin (K \cup \{r\})}\right) B_k \neq \emptyset$. De l'équation 3

$$\left(\bigcup_{\alpha \notin (K \cup \{r\})} C_k \right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \notin (K \cup \{r\})} B_\alpha \right) \neq \emptyset \tag{4}$$

Si $K \neq \emptyset$, l'équation 4 implique qu'il existe $\alpha \notin K$ ($\{1, \ldots, r\} \setminus K \neq \emptyset$) tel que $C_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Ce qui est contraire à la définition 3.1. Donc, $K = \emptyset$. Par conséquent, $\forall \alpha \in \{1, \ldots, r-1\}$, $S_\alpha \cap S_r = \emptyset$. Cela conduit à l'existence d'un cycle supérieur d'ordre r.

$\square$

Proposition 3.5. *Soient $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité et $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ un cycle d'ordre r sur E. S'il existe $L \in \mathcal{Q}_{r-1}$ tel que $\cap_{k \in L} S_k \neq \emptyset$, alors E a un cycle inférieur d'ordre $\rho \leq r$.*

Preuve : Soit $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ un cycle d'ordre r de base $(C_1, \ldots, C_r)$ et admettons que $S_1 \cap \cdots \cap S_{r-1} \neq \emptyset$ ($L = \{1, \ldots, r-1\}$). De la définition 3.1, il existe $k_1, \ldots, k_{r-1} \in \{1, \ldots, r-1\}$, tous distincts, tels que

$$B_{k_1} \subset C_r,\ B_{k_2} \subset C_r \cup C_{k_1},\ \ldots,\ B_{k_{r-1}} \subset A \setminus C_{k_{r-1}}$$

En changeant les numéros des indices, nous pouvons admettre sans nuire à la généralité que

$$B_1 \subset C_r,\ \ldots,\ B_k \subset C_r \cup \cdots \cup C_{k-1},\ \ldots,\ B_r \subset C_1 \cup \cdots \cup C_{r-1} \tag{5}$$

Montrons que si E n'admet aucun cycle inférieur d'ordre $\rho < r$, alors

$$B_r \subset C_{r-1}, \ldots, B_2 \subset C_1$$

Premièrement : $B_r \subset C_{r-1}$.

Soit θ l'indice minimal, dans l'ordre $r < 1 < 2 \cdots < r-1$, tel que $B_r \cap C_\theta \neq \emptyset$. Si $\theta = r-1$, la preuve est terminée. Admettons donc que $\theta < r-1$. C'est-à-dire que

$$B_r \subset C_\theta \cup \cdots \cup C_{r-1} \tag{6}$$

De l'équation 5 avec l'indice θ donne $B_\theta \subset C_r \cup \cdots \cup C_{\theta-1}$, donc de l'équation 6

$$B_\theta \cap B_r = \emptyset$$

Si $S_r \cap S_\theta = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre 2, donc admettons que $S_r \cap S_\theta \neq \emptyset$. De la définition du cycle, il existe $k' \in \{\theta, r\}$ tel que $B_{k'} \cap (C_\theta \cup C_r) = \emptyset$. Comme $B_r \cap C_\theta \neq \emptyset$, alors $k' = \theta$. Ce qui donne :

$$B_\theta \cap C_r = \emptyset$$

C'est-à-dire que les ensembles B_1, B_θ, B_r sont deux à deux disjoints.

Si $S_1 \cap S_\theta \cap S_r = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre 3. Alors, admettons que $S_1 \cap S_\theta \cap S_r \neq \emptyset$, ce qui donnera :

$$B_\theta \cap (C_r \cup C_1) = \emptyset \tag{7}$$

Maintenant, soit $(\theta^t)_{t\geq 1}$, $\theta^{t+1} \in \{r, 1, \dots, \theta - 1\}$ une suite strictement décroissante telle que θ^{t+1} soit l'indice minimal, dans l'ordre $r < 1 \dots < r-1$, satisfaisant $B_{\theta^t} \cap C_{\theta^{t+1}} \neq \emptyset$. Donc :

$$B_{\theta^t} \subset C_{\theta^{t+1}} \cup \dots \cup C_{\theta^t - 1} \tag{8}$$

Démontrons par récurrence sur t que $\theta^t \geq 2$.

De l'équation 7, l'assertion est vraie pour $t = 1$ i.e $\theta^2 \geq 2$. Supposons qu'elle l'est pour tout $s \leq t$, i.e. $\theta^{t+1} \geq 2$.

Comme $\theta^{t+1} < \theta^t < \dots < \theta < r - 1$. Alors, l'inclusion $B_{\theta^{t+1}} \subset C_r \cup \dots \cup C_{\theta^{t+1}-1}$ de l'équation 5 avec l' hypothèse de récurrence $B_{\theta^s} \subset C_{\theta^{s+1}} \cup \dots \cup C^s, \forall s \leq t$ entraînent que les ensembles

$$B_{\theta^{t+1}}, B_{\theta^t}, \dots, B_\theta, B_r$$

sont deux à deux disjoints.

Si $S_r \cap S_\theta \cap \dots \cap S_{\theta^{t+1}} = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre $t + 2$, sinon la définition du cycle, $B_{\theta^t} \cap C_{\theta^{t+1}} \neq \emptyset, \dots, B_r \cap C_\theta \neq \emptyset$ entraînent

$$B_{\theta^{t+1}} \cap C_r = \emptyset$$

Ce qui entraîne que les ensembles

$$B_{\theta^{t+1}}, B_{\theta^t}, \dots, B_\theta, B_r, B_1$$

sont deux à deux disjoints.

Par conséquent, soit nous avons un cycle inférieur d'ordre $t + 3$ soit la définition du cycle sur l'ensemble des indices $\{\theta^{t+1}, \dots, \theta, r, 1\}$ donne :

$$B_{\theta^{t+1}} \cap C_1 = \emptyset$$

D'où

$$\forall t : \; B_{\theta^t} \subset C_2 \cup \dots \cup C_{\theta^t - 1} \tag{9}$$

La suite $(\theta^t)_t$ étant strictement décroissante tandis que le nombre de ses termes est fini, donc il existe $\theta^{t_{\max}} = 2$. Au terme $t_{\max}$, l'équation 9 conduit à une contradiction. Ce qui montre que $\theta = r - 1$.

Deuxièmement : $B_2 \subset C_1$.

Partant de $B_r \subset C_{r-1}$ et de $B_1 \subset C_r$, nous avons B_r, B_1, B_{r-1} sont deux à deux disjoints. Si $S_{r-1} \cap S_r \cap S_1 = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre 3 sinon, la définition du cycle donne :

$$B_{r-1} \subset C_2 \cup \ldots C_{r-2}$$

Ici, $r-1$ joue le rôle de r dans la première étape, c'est-à-dire que l'on peut montrer avec le même raisonnement que précédemment que

$$B_{r-1} \subset C_{r-2}$$

Par induction de $r-1$ à 2, on peut montrer progressivement , que $B_{r-p} \subset C_{r-p-1}$ $(p = 1 \ldots r-2)$. Au dernier terme, cette récurrence donne :

$$B_2 \subset C_1$$

Comme $B_1 \subset C_1$, alors $(S_1, \ldots, S_r,\ B_1, \ldots, B_r)$ est un cycle inférieur d'ordre r.

□

Les propositions 3.4 et 3.5 nous donnent le corollaire suivant

Corollaire 3.6. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors, E a un cycle d'ordre $r \leq 3$ si et seulement si E a un cycle inférieur ou un cycle supérieur d'ordre $\rho \leq 3$.*

Preuve : Si $r = 2$, la proposition est triviale. Supposons que $r = 3$ et soit $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$ un cycle d'ordre 3. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, la proposition 3.4 implique que E possède un cycle supérieur d'ordre $r \leq 3$. Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, la proposition 3.5 implique que E admet un cycle inférieur d'ordre $\rho \leq 3$.

□

Remarque 2. *Pour $r \geq 4$, il existe une fonction d'effectivité qui possède un cycle d'ordre r sans qu'elle possède pas de cycle inférieur ni cycle supérieur d'ordre $\rho \leq 4$.*

En effet, soit $N = \{1, \ldots, 5\}$, $A = \{x_1, \ldots, x_4\}$ et E la fonction d'effectivité telle que $E(S_1) = B_1^+, E(S_2) = B_2^+, E(S_3) = B_3^+, E(S_4) = B_4^+$, où $S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{2,3\}, S_3 = \{4,5\}, S_4 = \{1,3,5\}$, $B_1 = \{x_2, x_4\}, B_2 = \{x_1, x_2\}, B_3 = \{x_1, x_4\}, B_4 = \{x_3\}$; et pour tout $S \supset S_k$, $E(S) = E(S_k)$. Dans les autres cas, $E(S) = \{A\}$. Il n'est pas difficile de vérifier que E ne possède ni cycle inférieur ni supérieur d'ordre $r \leq 4$ mais $(S_k, B_k)_{k=1,2,3,4}$ est un cycle d'ordre 4 de base $(\{x_1\} \{x_3\}, \{x_2\}, \{x_4\})$.

Les propositions 3.4 et 3.5 et l'exemple de la remarque 2 mettent en évidence l'importance de la différence structurelle entre les cycles supérieurs, les cycles inférieurs et les cycles. L'exemple suivant montre que même avec la sur-additivité (*Si* $B \in E(S)$ *et* $C \in E(T)$, $S \cap T = \emptyset$ *entraîne* $B \cap C \in E(S \cup T)$), une condition suffisante pour éviter les cycles supérieurs, les cycles et les cycles inférieurs restent nettement différents. Pour l'exemple suivant, nous devons prendre $r = 5$ car au cas où $r = 4$, la sur-additivité donne que les cycles d'ordre $r \leq 4$ sont des cycles inférieurs.

Exemple 3.7. *Soient* $N = \{1, \ldots, 5\}$, $A = \{x_1, \ldots, x_5\}$ *et* E *l'effectivité définie par :* $\forall S \in \mathcal{P}(N), |S| \geq 3 \Rightarrow E(S) = \{B |\, |B| \geq 2\}$ *et* $\forall S \in \mathcal{P}(N),\ |S| < 3 \Rightarrow E(S) = \{A\}$.

- *E est sur-additive.* S'il existe $B \neq A$ tel que $B \in E(S)$, alors $|S| \geq 3$. Par conséquent, si $B_k \in E(S_k), B_k \neq A$ $(k = 1, 2)$, $|S_1 \cap S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cup S_2| \geq 1$. Alors, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Donc, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ entraîne $B_k = A$ pour un $k \in \{1, 2\}$; c'est-à-dire que $B_1 \cap B_2 = B_{\bar{k}} \in E(S_{\bar{k}}), k \neq \bar{k} \in \{1, 2\}$. D'où $B_1 \cap B_2 \in E(S_1 \cup S_2)$, ce qui montre la sur-additivité.

- *E a un cycle d'ordre* 5. Soient $S_k = \{k, k+1, k+2\}$, $B_k = \{x_{k+3}, x_{k+4}\}$ $(k = 1 \ldots 5 \bmod 5)$. Il n'est pas difficile de vérifier que $(S_1, \ldots, S_5, B_1, \ldots, B_5)$ est un cycle d'ordre 5 de base $\{\{x_1\}, \ldots, \{x_5\}\}$. La structure de ce cycle est montrée dans le tableau suivant :

S_k	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{3,4,5\}$	$\{4,5,1\}$	$\{5,1,2\}$
B_k	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5, x_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, x_4\}$
C_k	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$	$\{x_5\}$

-*E ne possède ni cycle supérieur ni cycle inférieur.* La sur-additivité de E assure l'absence de cycle supérieur (Abdou(1)). De même, cela assure l'absence de cycle inférieur d'ordre 2. En outre, E ne possède aucun cycle inférieur d'ordre $r \geq 3$. En effet, soit r l'ordre minimal des cycles de E et supposons que $(S_1, \ldots, S_r, C_1, \ldots, C_r)$ soit un cycle inférieur d'ordre $r \geq 3$. Pour $r = 3$, $(|C_1|, \ldots, |C_3|) \in \{\pi(1,2,2), \pi(1,1,3)\}$ où π est une permutation de $\{1,2,3\}$; et pour $r = 4$, $(|C_1|, \ldots, |C_4|) \in \{\tau(1,1,1,2)\}$ où τ est une permutation de $\{1, \ldots, 4\}$. Donc, il faut $(2r-5)$ indices, disons $k_1, \ldots, k_{2r-5} \in \{1, \ldots, r\}$, pour lesquels nous avons $|C_{k_\alpha}| = 1$. Or, $\{x\} \in E(S)$ entraîne $S = N$, alors pour tout $\alpha = 1 \ldots 2r-5$, $S_{k_\alpha} = N$. Donc, $\cap_{k \neq k_\alpha} S_k = \emptyset$. Ce qui est en contradiction avec la minimalité de r.

$\square$

Observons que l'exemple 3.7 nous permet de dégager un nouveau type de cycle, qui possède une structure intermédiaire entre le cycle supérieur, le cycle inférieur et le cycle. Nous étudions dans le suivant paragraphe ce nouveau cycle que nous appellerons cycle circulaire.

3.2 Le cycle circulaire

Plus généralement, le cycle de l'exemple 2.1. se construit comme suit :
1- On divise les joueurs en r groupes disjoints $(T_1, \ldots, T_r)$ et les alternatives en r ensembles d'alternatives disjoints $(C_1, \ldots, C_r)$;
2- Si une coalition comportant c groupes, $T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1}$ est effective pour bloquer l'union de c ensembles d'alternatives $C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}$, alors toute coalition déduite de la première par remplacement de k par l reste effective pour bloquer les alternatives dans $C_l \cup \cdots \cup C_{l+c-1}$.

Formellement,

Définition 3.8. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots B_r)$ est* un cycle circulaire d'ordre *r de taille c, $1 \leq c \leq r-1$, s'il existe $(T_1, \ldots T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A tels que*

$$\forall k = 1 \ldots r, \quad B_k = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}, \quad S_k = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

Remarque 3. *Un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = 1$ est un cycle inférieur alors qu'un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = r-1$ est un cycle supérieur.*

Ci-après, nous montrerons d'une part que les cycles circulaires sont une généralisation des cycles inférieurs et des cycles supérieurs et d'autre part que les cycles circulaires sont des cycles.

Proposition 3.9. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone. Alors*

(a) Si E admet un cycle supérieur d'ordre r, alors elle admet un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = r-1$.

(b) Si E admet un cycle inférieur d'ordre r, alors elle admet un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = 1$.

Preuve : *Montrons d'abord qu'un cycle supérieur engendre un cycle circulaire.*

Soit r l'ordre minimal des cycles supérieurs de E et soit $(T_1, \ldots, T_r, B_1, \ldots, B_r)$ un cycle supérieur d'ordre r.
Si $r = 2$, un cycle circulaire est à la fois un cycle inférieur, un cycle supérieur et un cycle. Pour $r \geq 3$, posons $J_k = \{1, \ldots, r\} \setminus \{k\}$. Alors, $J_k \cap J_p \neq \emptyset, \forall k \neq p \in \{1, \ldots, r\}$. De la définition 3.2, nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots r : \bigcap_{l \in J_k} B_l \neq \emptyset \tag{10}$$

Posons

$$D_k = \bigcap_{l \in J_k} B_l, \quad V_k = B_k \setminus \bigcup_{l \in J_k} B_l \quad \text{et} \quad C_k = D_k \cup V_k$$

Alors, pour tout $k \neq p \in \{1, \ldots, r\}$,

$$V_k \cap V_p = \left(B_k \setminus \bigcup_{l \in J_k} B_l \right) \cap \left(B_p \setminus \bigcup_{l \in J_p} B_l \right) \subset B_l \cap B_l^c = \emptyset, \; l \in J_k \cap J_p;$$

$$D_k \cap D_p = \left(\bigcap_{l \in J_k} C_l \right) \cap \left(\bigcap_{l \in J_p} C_l \right) = \bigcap_{l \in J_k \cup J_p} C_l = \bigcap_{l=1}^{r} C_l = \emptyset \; ;$$

$$D_k \cap V_p = \left(\bigcap_{l \in J_k} B_l \right) \cap \left(B_p \setminus \bigcup_{l \in J_p} B_l \right) \subset B_p \cap B_p^c = \emptyset.$$

Par conséquent, pour tout $k \neq p \in \{1, \ldots, r\}$,

$$C_k \cap C_p = (D_k \cup V_k) \cap (D_p \cup V_p) = \emptyset$$

De la monotonie de E, nous pouvons admettre que $C_1 \cup \cdots \cup C_r = B_1 \cup \cdots \cup B_r = A$ et $T_1 \cup \cdots \cup T_r = N$, c'est-à-dire que $(C_1, \ldots, C_r)$ est une partition de A et $(T_1, \ldots, T_r)$ est une partition de N. Comme $J_k = \{k+1, \ldots, k-1\}$, alors

$$\forall k = 1 \ldots r : C_{k+1} \cup \cdots \cup C_{k-1} = B_k \in E(T_k)$$

Ce qui montre que E a un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = r - 1$.

Par un raisonnement analogue, un cycle inférieur d'une fonction d'effectivité monotone est un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = 1$.

□

Observation 2. *Cette proposition montre que la structure circulaire est plus complexe que celle d'un cycle supérieur ou inférieur. Il est plus difficile de provoquer le désordre dans une société qui possède un cycle circulaire sans cycles inférieur et supérieur qu'une société possédant un cycle inférieur.*

En effet, soient $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des joueurs, $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des alternatives, $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A. Si $E, F : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ sont les deux fonctions d'effectivité telles que pour tout $k = 1 \ldots r$, $C_k \in E(T_{k+1} \cup \cdots \cup T_{k-1})$ et $C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in F(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1})$ où $(1 < c < r-1)$, alors E admet un cycle inférieur alors que F admet un cycle circulaire de taille c. Les fonctions E et F n'ont pas de différence structurelle importante mais en cas de vacuité du coeur, le désaccord entre les préférences des joueurs dans F est plus subtile que celui dans E. Il est du type $x_k \; R^i x_{k+1} \; \ldots R^i x_{k-1}, \; k = 1 \ldots r$.

Proposition 3.10. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Pour tout $r \geq 2$ et $c = 1 \ldots r-1$, une $E-$configuration circulaire d'ordre r de taille c sur E est un cycle d'ordre r sur E.*

Preuve : Soit $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots B_r)$, une $E-$configuration circulaire d'ordre r de taille c sur E. Alors, il existe $(T_1, \ldots T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A telles que :

$$S_k = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1} \text{ et } B_k = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}$$

Posons $J_k = \{k+c, \ldots, k-1\}$ et soit $J \subset \{1, \ldots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$. Comme $\cap_{k \in J} S_k = \cap_{k \in J} (\cup_{l \in J_k} T_l)$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ est une partition de N, alors

$$\bigcap_{k \in J} S_k \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{k \in J} J_k \neq \emptyset$$

Prenons $k_J \in \cap_{k \in J} J_k$, c'est-à-dire que $k_J \notin \cup_{k \in J} J_k^c$. Puis que $C_1, \ldots, C_r$ est une partition de A, alors

$$C_{k_J} \cap \left(\bigcup_{p \notin J_k^c} C_p \right) = \emptyset$$

Ce qui montre que $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots B_r)$ est cycle d'ordre r de base $(C_1, \ldots, C_r)$ (Définition 3.1 (C2b)).

□

A la suite du lemme 3.6, une $E-$ configuration circulaire d'ordre $r \leq 3$ engendre un cycle supérieur ou un cycle inférieur d'ordre 3. Malgré que la circularité généralise les cycles inférieurs et les cycles supérieurs, nous pouvons montrer que même avec la sur-additivité, il existe une fonction d'effectivité non-circulaire mais possédant un cycle d'ordre 5.

Exemple 3.11. *Fonction sur-additive et non circulaire mais possède un cycle d 'ordre 5. Soient $N = \{1, \ldots, 7\}$ et $A = \{x_1, \ldots, x_5\}$ et considérons l'effectivité E telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} E(S_1) = \{x_2, x_3, x_4\}^+, E(S_2) = \{x_3\}^+, E(S_3) = \{x_4, x_5\}^+, \\ E(S_4) = \{x_5, x_2\}^+ \textit{ et } E(S_5) = \{x_1\}^+ \textit{ où } S_1 = \{1,2,3,4\}, \\ S_2 = \{1,3,4,5,7\}, S_3 = \{1,2,5,6\}, S_4 = \{3,6,7\} \textit{ et } S_5 = \{4,5,6,7\}. \\ \textit{Si } S \in \{S | S \supset S_k, k = 1 \ldots r\}, \textit{ alors } E(S) = E(S_k), \textit{ sinon } E(S) = \{A\}. \end{array} \right.$$

Posons $H^i = \{k \mid S_k \ni i\}$, alors $H^1 = \{1,2,3\}, H^2 = \{1,3\}$, $H^3 = \{1,2,3\}$, $H^4 = \{1,2,5\}$, $H^5 = \{2,3,5\}$ $H^6 = \{3,4,5\}$ et $H^7 = \{2,4,5\}$, et pour tout J tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, alors $J \subset H^i$ pour un $i \in N$.

E est sur-additive. Si $S_k \in \mathcal{P}_0(N)$ $(k = 1, 2)$ sont tels que $B_k \in E(S_k)$ et $B_k \neq A$, alors $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Donc, E est sur-additive, ce qui implique que E ne possède aucun cycle supérieur.

E n'a aucun cycle d'ordre $r \leq 4$. Comme $H \in \{H^i \mid \nexists j \text{ tel que} H^j \subsetneq H^i\}$, entraîne $|H| \geq 3$, alors E ne possède aucun cycle d'ordre 3. Si E admet un cycle d'ordre 4 de base $(C_1, \ldots, C_4)$ alors

$$\forall i \in N, \exists\ k(H^i) : B_{k(H^i)} \cap \bigcup_{k \in H^i} C_k = \emptyset$$

En prenant les $H \in \{H^i \mid \nexists j \text{ tel que} H^j \subsetneq H^i\}$, alors on doit avoir trois indices k_1, k_2, k_3 tels que B_{k_1}, B_{k_2} et B_{k_3} soient des singletons, ce qui n'est pas possible selon la définition de E.

E possède un cycle d'ordre 5. Considérons l'$E-$configuration $(S_1, \ldots, S_5, B_1, \ldots, B_5)$ et la partition $(C_1, \ldots, C_5)$ comme dans le tableau suivant :

S_k	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4,5,7\}$	$\{1,2,5,6\}$	$\{3,6,7\}$	$\{4,5,6,7\}$
B_k	$\{x_2,x_3,x_4\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4,x_5\}$	x_5,x_2	$\{x_1\}$
C_k	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$	$\{x_5\}$

On peut vérifier que $(S_1, \ldots, S_5, B_1, \ldots, B_5)$ est un cycle de base $(C_1, \ldots, C_5)$, en particulier nous avons les égalités suivantes :

$$\{x_1\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^s} B_k \right) = \{x_2\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^5} B_k \right) = \{x_3\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^6} B_k \right) = \{x_4\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^7} B_k \right),$$

avec $s = 1 \ldots 4$.

E ne possède aucun cycle circulaire d'ordre 5. Supposons le contraire et soit $(S_1(c), \ldots, S_5(c), B_1(c), \ldots, B_5(c))$ $(1 \leq c \leq 4)$, un cycle circulaire d'ordre 5. Alors, il existe $(T_1, \ldots, T_5)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A tels que :

$$B_k(c) = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \text{ et } S_k(c) = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

De la définition de E, il existe au plus un $k_0 \in \{1, \ldots, 5\}$ tel que $|S_{k_0}(c)| = 3$, et pour tout le reste $|S_k(c)| \geq 4$.

Premier cas : La partition $(T_1, \ldots, T_5)$ est de la forme $(\{i_1\}, \ldots, \{i_4\}, \{i_5, i_6, i_7\})$. Comme pour au moins 4 indices, nous avons $|S_k(c)| \geq 4$, alors $c = 4$. Par conséquent, pour tout k : $|B_k(c)| = 1$. Ce qui entraîne que pour tout k, $S_k(c) \supset \{1,3,4,5,7\}$ ou $S_k(c) \supset \{4,5,6,7\}$. Donc, $\cap_{k=1 \ldots 5} S_k \neq \emptyset$. Ce qui est impossible.

Deuxième cas : La partition $(T_1, \ldots, T_5)$ est de la forme $(\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_4, i_5\}, \{i_6, i_7\})$. Comme $\#\{k \mid |S_k(c)| \geq 4\} \geq 4$, alors $c \geq 3$. Si $c = 3$, nous avons $|B_k(c)| = 2, \forall k = 1 \dots 5$. Ce qui n'est possible que si $S_k(c) \in \{S \mid S \supset S_k, k = 2 \dots 5\}$. C'est-à-dire que l'on peut réduire l'ordre des cycles de E. Ce qui est contraire à l'absence de cycle d'ordre $r \leq 4$. Si $c = 4$, alors $|B_k(c)| = 1$. Ce qui ne pourrait pas être le cas.

$\square$

Observation 3. *Ici, pour aboutir à l'instabilité, il faut que chaque S_k mette les alternatives de C_k au fond. Alors, les joueurs qui se trouvent dans $\cap_{k \in J} S_k$, $J \subset \{1, \dots 5\}$ doivent structurer leurs préférences pour que les objections soient cohérentes, c'est-à-dire que chaque joueur soigne sa préférence en fonction de celle des autres, ici de façon non mécanique, pas comme dans le cas de la circularité.*

Par la suite, nous simplifions la structure des cycles des fonctions d'effectivité monotones maximales et des fonctions d'effectivité monotones anonymes et neutres.

4 Simplification de la structure des cycles

La simplification de la forme des cycles, qui consiste à montrer l'equivalence d'un cycle plus complexe à un cycle dont l'écriture est mathématiquement plus simple, a commencé implicitement par les travaux de Nakamura (1979)(30) (ou dans l'ouvrage de J. Abdou et H. Keiding (5)) qui montre qu'une fonction d'effectivité simple est instable si et seulement si elle possède une $E-$configuration répondant aux critères des cycles inférieurs. C'est-à-dire qu'en cas de conflit, un cycle inférieur en est l'origine et inversement, en présence d'un cycle inférieur, il y toujours un moyen de provoquer le désordre. Formellement,

Théorème 4.1. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et simple. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E possède un cycle circulaire ;*
(ii) *E possède un cycle inférieur ;*
(iii) *E possède un cycle ;*
(iv) *E est instable.*

Les travaux de Moulin (1981) (29) (27), de J. Abdou (5) ou les travaux récents de J. Abdou (4) nous permettent d'identifier d'autres types d'organisation de pouvoir où les cycles sont des cycles circulaires. En effet,

Théorème 4.2. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et maximale. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E possède un cycle circulaire ;*
(ii) *E possède un cycle inférieur ou un cycle supérieur ;*
(iii) *E possède un cycle ;*
(iv) *E est instable.*

Preuve : (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Proposition 3.9 et la remarque qui s'en suit.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Les travaux récents de Abdou (3) et (4) montrent que l'ordre minimal des cycles d'une fonction effectivité maximale est 2 ou 3. Donc, cette équivalence découle du corollaire 3.6. On peut voir aussi Abdou (5) ou Danilov (17).
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Keiding (21).

□

Dans la suite, nous considérons les fonctions d'effectivité monotones, anonymes et neutres.

Lemme 4.3. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E possède un cycle circulaire ;*
(ii) *il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in E(S)$ tels que si $s =\mid S \mid$ et $b =\mid B \mid$ nous avons :*

$$b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil \leq m$$

Preuve : (i)$\Rightarrow$(ii). Si E est circulaire, alors il existe $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A et $c, 1 \leq c \leq r-1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r; \quad C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1})$$

Si pour tout $\forall k = 1 \ldots n$, $m(t_k + \cdots + t_{k+c-1}) > n(c_k + \cdots + c_{k+c-1})$, alors

$$\sum_{k=1}^{r} m\,(t_k + \cdots + t_{k+c-1}) > \sum_{k=1}^{r} n\,(c_k + \cdots + c_{k+c-1})$$

$$mc \sum_{k=1}^{r} (t_1 + \cdots + t_r) > nc \sum_{k=1}^{r} (c_1 + \cdots + c_r)$$

$$mcn > ncm$$

Donc, il existe $k_1,\ 1 \leq k_1 \leq r$ tel que

$$m(t_{k_1} + \cdots + t_{c+k_1-1}) \leq n(c_{k_1} + \cdots + c_{c+k_1-1}) \tag{11}$$

Posons $S = T_{k_1+c} \cup \cdots \cup T_{k_1-1}$ et $B = C_{k_1} \cup \cdots \cup C_{k_1+c-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil &= c_k + \cdots + c_{k+c-1} + \left\lceil (n - (t_k + \cdots + t_{k+c-1}))\frac{m}{n} \right\rceil, \\ &= m + c_k + \cdots + c_{k+c-1} - \left\lceil (t_k + \cdots + t_{k+c-1})\frac{m}{n} \right\rceil, \\ &\leq m. \text{ (D'après l'équation 11)} \end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in E(S)$ tels que

$$b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil \leq m \tag{12}$$

Nous allons prouver qu'il existe $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N, $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A et $1 \leq c \leq r - 1$ tel que

$$\forall k = 1 \ldots r; \quad C_{k+c} \cup \cdots \cup C_{k-1} \in E(T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1}).$$

Premier cas : $m < n$

De l'équation 12,

$$b + \frac{ms}{n} \leq b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil \leq m,$$

donc $nb + ms \leq nm$. Par conséquent :

$$ms \leq (m - b)n \tag{13}$$

Soit θ le quotient entier de n par m et φ son reste. Donc,

$$n = \theta m + \varphi, \quad 0 \leq \varphi < n, \ 1 \leq \theta,$$

et soit $t_1, \ldots, t_m$ la suite d'entiers positifs telle que :

$$t_1 = \theta + \left\lceil \frac{\varphi}{m-b} \right\rceil \text{ et } \forall k = 2 \ldots m; \quad t_k = \theta + \left\lceil k\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil.$$

En écrivant $m\varphi = m\varphi - b\varphi + b\varphi = (m - b)\varphi + b\varphi$, nous avons :

$$\begin{aligned} t_1 + \cdots + t_m &= m\theta + \left\lceil m\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &= m\theta + \varphi - \left\lceil b\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &\leq m\theta + \varphi = n. \end{aligned}$$

Soit $k \in \{1, \ldots, m\}$

a) Si $k+(m-b) \leq m$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
t_k + \dots t_{k+(m-b)-1} &= (m-b)\theta + \left\lceil (k+m-b-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\
&= (m-b)\theta + \varphi + \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\
&= (m-b)\theta + \varphi + \left(\frac{\varphi}{m} - \frac{\varphi}{m}\right), \\
&\geq (m-b)\theta + (m-b)\frac{\varphi}{m}, \\
&\geq (m-b)\left(\theta + \frac{\varphi}{m}\right), \\
&\geq (m-b)\frac{n}{m}, \\
&\geq s.
\end{aligned}$$

La dernière ligne vient de l'équation 13.

b) Si $k+(m-b) > m$ (i.e. $k > b$) et sachant que que $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$, alors

$$\begin{aligned}
t_k + \dots t_{k+(m-b)-1} &= [t_k + \cdots + t_m] + [t_1 + \cdots + t_{k+(m-b)-m-1}], \\
&= (m-b)\theta + \left\lceil m\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil + \left\lceil (k-b-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\
&\geq (m-b)\theta + \left\lceil (m-b+k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\
&\geq s.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k = 1 \dots n; \quad t_k + \dots t_{k+(m-b)-1} \geq s \tag{14}$$

Maintenant, considérons $(T_1, \dots, T_m)$ une partition de N telle que $\forall k = 1 \dots m;\ \ |T_k| = t_k$ et $c = (m-b)$. Alors, de l'équation 14, nous avons :

$$\forall k = 1 \dots m; \quad |T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1}| \geq s.$$

Comme $|\{x_{k+c}\} \cup \cdots \cup \{x_{k-1}\}| = m - c = b$, alors du point de vue de l'équation 12, de la monotonie, de l'anonymat et de la neutralité de E, nous avons :

$$\forall k = 1 \dots r; \quad \{x_{k+c}\} \cup \cdots \cup \{x_{k-1}\} \in E(T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1})$$

Ce qui prouve la circularité d'ordre n et de taille $m-(m-b) = b$ de E.

Deuxième cas : $n < m$.

De l'anonymat et la neutralité de E, on peut faire la preuve de la même manière que $n > m$.

En conclusion, E admet un cycle circulaire d'ordre $r = \min\{n, m\}$ de taille b ou $m-b$.

□

Ainsi, nous avons :

Théorème 4.4. *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors,* E *est circulaire si et seulement si elle est instable.*

Preuve : Rappelons qu'une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre est stable si et seulement si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$, $B \in E(S) \Leftrightarrow b + \lceil s\frac{m}{n} \rceil > m$ (Moulin (1981) (27) ou (29)). Donc, le lemme 4.3 conduit au résultat voulu.

□

Corollaire 4.5. *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) E *possède un cycle circulaire ;*

(ii) E *possède un cycle ;*

(iii) E *est instable.*

Il est évident que pour une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre, les cycles inférieurs ou supérieurs ne sont pas équivalents aux cycles circulaires (Exemple 5).

5 Conclusion

La classe des fonctions d'effectivité maximales et celle des anonymes et neutres ne représentent qu'une petite partie des différentes formes d'organisation. Nous laissons donc ouvert le problème de simplification des cycles des autres classes telles que les fonctions d'effectivité anonymes ou neutres seulement. Tout au long de cette recherche, la classe des fonctions d'effectivité décomposables nous a intéressé particulièrement car ces fonctions sont les seules qui satisfassent le principe de révélation du pouvoir (31), et sont définies à partir des jeux à utilités transférables. Nous supposons sans parvenir à un résultat démontré que le cycle aurait une forme similaire au balancement de Scarf (24), (26).

Références

[1] Abdou J. (1982), "Stabilité de la fonction veto, cas du veto maximal", Mathématiques et Sciences Humaines 80, p 39-65. 5, 8, 13

[2] Abdou, J. (2000), "Exact stability and its application to strong solvability", Mathematical Social Sciences 39, p 263 - 275. 4, 5

[3] Abdou J. (2003), "From Nakamura number to instability index", in `http://www.cscs.umich.edu/events/decentralization07/` 5, 19

[4] Abdou, J. (2008), "A Stability Index for Local Effectivity Functions", Ongoing paper. 5, 18, 19

[5] Abdou, J. et H. Keiding (1991), "Effectivity Functions in Social Choice", Dordrecht : Kluwer Academic press. 4, 7, 18, 19

[6] Abdou, J. and H.Keiding (2003), "On necessary and sufficient conditions for solvability of game forms", Mathematical Social Sciences 46, p 243 - 260. 4

[7] Aghion P. et J. Tirole (1997), "Formal and Real Authority in Organisation", Journal of Political Economy, 105, 1-29. 3

[8] Baujard, A. and H. Igersheim (2009), "Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007. Premiers résultats", Revue Economique, Vol.60, n°1, Janvier.

[9] Baujard, A., T. Senné, and H. Igersheim (2009), "An analysis of the French political supply. An analysis based on experimental data", Document de travail CREM.

[10] Amarate M. and Monttrucchio L. (2007), "Mas-Colell bargaining set of large games", The carlo alberto notebooks 63, www.carloalberto.org.

[11] . Anderson R.M., Trockel W. and Zhou L. (1997), " Nonconverngence of the Mas-Colell and Zhou bargaining sets", Econometrica 65, p 1227-1239.

[12] Aumann R. & Maschler M. (1964), "The bargaining set for cooperative games", in Advence in game theory. (M. Dresher, L.S Shapley, and A.W Tucker, Eds), Annals of mathematica Studies No. 52, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[13] Banzhaf J.F (1965), "Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis", Rutgers Law Review 19 N° 2, p 317 - 343. 3

[14] Barua R., Chakravarty S.R and Roy S. (2007), "A new characterisation of the Banzhaf index of power", Staff General Reaserch papers 12808, Iowa State University, Depertment of Economics. 3

[15] Billera L.J. (1970), "Existence of General bargaining sets for cooperative games without side payments", Bull. Amer. Math. Soc. Volume 76, Number 2, p 375 - 379.

[16] Bondareva, Olga N (1963), "Some appliations of linear programming methods". Problemy Kybernetiki 10, p 119 - 139.

[17] Danilov V. and Alexander I. S. (2002), "Social Choice Mechanism", Springer. 8, 19

[18] Dubey P, Einy E. and Haimanko O. (2003), "Compound voting and the Banzhaf index", http ://ratio.huji.ac.il/dp/haimanko333.pdf. 3

[19] Greengerg J. (1987) " The core as abstract stable sets", Mimeo, university of Haifa.

[20] Lehrer E. (1988), " An aximatisation of the banzhaf value", International Journal of Game Theory, 17 Issue 2, p 89-99. 3

[21] Hans Keiding (1985), "Necessary and sufficient conditions for stability of effectivity functions", International Journal of Game Theory, 14 N°2. 5, 7, 19

[22] Hans Keiding and Razafimahatolotra D. (2008), "Core rationalization of the social choice correspondance", papier en cours. 4

[23] Hans Keiding and Razafimahatolotra D. (2008), "Effectivity function and the bargaining sets", papier en cours. 4

[24] Kolpin V. (1991), "Mixed effectivity and the essence of stability", Social Choice and Welfare, vol 8, p 51 - 63. 7, 22

[25] Mizutani M., Hiraide Y. and Nishino H. (1993), "Computational complexity to verify the unstability of effectivity funcion", International Journal of Game Theory vol 22, p 225 - 239. 7

[26] Mizutani M., Nae Chan Lee, Nishino H.(1994), "On the Equivalence of Balancedness and the Stability in Effectivity Function Games", Journal of Operation Research, Society of Japan, vol 37, N° 3. 22

[27] Moulin H. (1981), "The proportional veto principle", The Review of Economic Studies, vol 48 N 3. 2, 18, 22

[28] Moulin, H. and B.Peleg (1982), "Cores of effectivity functions and implementation theory", Journal of Mathematical Economics, 10, p 115 - 162. 3, 4, 5

[29] Moulin H. (1994), " The Strategy of Social Choice", Advanced Textbooks in Economics, 18. 2, 18, 22

[30] Nakamura K. (1979), " The vetoers in a simple game with ordinal preferences", International Journal of Game Theory, 8 : 55-61. 18

[31] Otten G.-J., Borm P., Storcken T. and Tijs S.(1997), "Decomposable effectivity functions", Mathematical Social Sciences 33 Number 3, 1, p 277 - 289. 22

[32] Peleg, B. (2005), "Constitutional implementation of social choice correspondance", Internationa Journal of Game Theory, 33, p 381-396. 3

[33] Peleg, B. (1998), "Effectivity function, game forms, games, and rights", Social Choice and Welfare 15, p 67 - 80. 3

[34] Peleg, B. and P. Südhölter (2007), "Introduction to the theory of cooperative games", 2nd ed., Springer, Berlin Heidelberg New York.

[35] Picavet, E. (2008), "Talos ou la matrice libéral". Document inclut dans l'Habilitation de Recherche (HDR).

[36] Picavet, E. (1998), "Rights and Powers : Reflections on Bezalel Peleg's Theory of Effectivity Functions, Game Forms, Games and Rights", in : Laslier, J.-F., Fleurbaey, M., Gravel, N. et Trannoy, A., Freedom in Economics - New Perspectives in Normative Analysis, Londres, Routlege. 3

[37] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2007), "Sur la formalisation de la pluralité des interprétations en matière normative", Publication of the "Deuxième Congrès de la Société de Philosophie des sciences". 3

[38] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2008), "Analysing Plural Normative Interpretations in Social Interactions". Publication de l'Université d'Etat de Saint Petersbourg. 3

[39] Ray B, "Credible coalition and the core", Internat. J. Game Theory, in press, 18, p 185-187. `http://www.nyu.edu/econ/user/debraj/Papers/ijgt89.pdf`

[40] Shapley L.S (1953), "A value of n-person games", In contribution to the theory of games, volume II, by the Kuhn and A.W Tucker, editors. Annals of Mathematical Studies 28, p 307-317. Princeton University Press. 3

[41] Shapley L.S. and Shubik, (1954), "A method for evaluating the distribution of Power in a committee system", American Political Science Review, 48, p 307-317. 3

[42] Straffin P.D., (1988) " The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilities",. The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley Chap 5. 3

[43] Shimura K.I. (1997), "Quasi-cores in bargaining sets", Int Jour of game theory, n 26, p 283-302.

[44] Takamiya K. and Tanaka A. (2006), " Computational complexity in the design of voting rules", Discussion paper No 653. 7

[45] Tchantcho, B. and L.D.Lambo (2008), "A characterization of social choice correspondences that implement the core of simple games", to appear in : Economic Theory.

[46] Van Deemen (1997), "Coalition formation and Social choice", Kluwer academicpublishers. 2

[47] Van Hees, M. (1995), "Rights and Decisions. Formal Models of Law and Liberalism", Dordrecht, Kluwer, Series : Law and Philosophy Library, Vol. 23. 3

[48] Vannucci S., "Effectivity Functions, Opportunity Ranking, and Generalised Desirability Relation", Document de travail, Université de Sienne. 3

[49] Vincent M. (2008), "Vote à deux niveaux", Colloque du projet DELICOM, juin 2008. 3

[50] Young H.P. (1998), "Individual contribution and just compensation",. The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley Chap 17. 3