Tecnociencia 2013, Vol. 15, N° 1.

HOMEOMORFISMO ENTRE ESPACIOS l^p Y L^p

Jorge E. Hernández U.[1], **Temístocles Zeballos M.**[2],
[1]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Departamento de Matemática. email: edithleco@gmail.com
[2]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Departamento de Matemática. email: temizeballos@gmail.com

RESUMEN

En el presente trabajo estudiamos la existencia de homeomorfismos entre los espacios L^p y l^p. Se prueba que $L^1([0,1])$ es homeomorfo a $L^p([0,1])$ para todo $p>1$. Posteriormente, se muestra que $L^p([0,1])$ es homeomorfo a $L^q([0,1])$ y que la bola unitaria cerrada en $L^p([0,1])$ es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada de $L^q([0,1])$ para $p,q\geq 1$. Seguidamente establecemos que para $p,q\geq 1$ los espacios l^p y l^q son homeomorfos. Finalmente, se prueba que $L^p([0,1])$ es homeomorfo a l^q para $p,q\geq 1$.

PALABRAS CLAVES

Homeomorfismo, espacios L^p, espacios l^p.

ABSTRACT

In this paper the existence of homeomorphisms between the spaces L^p and l^p was studied. It is proved that $L^1([0,1])$ is homeomorphic to $L^p([0,1])$ for all $p>1$. Subsequently, it is shown that $L^p([0,1])$ is homeomorphic to $L^q([0,1])$ and that the closed unit ball in $L^p([0,1])$ is uniformly homeomorphic to the closed unit ball of

$L^q([0,1])$ for $p,q \geq 1$. Then we establish that for $p,q \geq 1$ the spaces l^p and l^q are homeomorphic. Finally, it is prove that $L^p([0,1])$ is homeomorphic to l^q for $p,q \geq 1$.

KEYWORDS

Homeomorphism, spaces L^p, spaces l^p.

INTRODUCCIÓN

Los espacios L^p son fundamentales en muchas ramas del análisis moderno, un caso particular y muy importante es el espacio de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales o complejos para las que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ converge; éste es el espacio de Hilbert l^2 el cual es el prototipo de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. El objetivo de este trabajo es el estudio de homeomorfismos entre los espacios L^p y l^q, los cuales nos brindan ejemplos encantadores en el análisis funcional.

1. LOS ESPACIOS L^p Y l^p.

Definición 1.1: Sean (X, M, μ) un espacio de medida (Amann & Escher, 2009) y f una función medible real o compleja definida sobre el espacio X. Para cualquier $0 < p < \infty$ la función $|f|^p$ es medible. Definimos la $p-norma$ de f por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación: Para $0 < p < 1$ la $p-norma$ no es una norma (Capinski & Kopp, 2004), ya que no se satisface la desigualdad triangular. Para $1 \leq p < \infty$ la $p-norma$ es una norma en L^p, si se supone que

$$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \mu - c.t.p..$$

Definición 1.2: Sea (X, M, μ) un espacio de medida. Denotaremos por $L^p(X, \mathrm{M}, \mu)$ o simplemente $L^p(\mu)$ la colección de todas las funciones medibles f de valor real o complejo definidas sobre X tal que $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$; es decir, las funciones que tienen una $p-norma$ finita.

Definición 1.3: Por l^p, denotamos la colección de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ de números reales (o complejos) tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty .$$

Observación: Los espacios l^p $(1 \leq p < \infty)$ son casos particulares de los espacios L^p. Son precisamente los espacios L^p tomados sobre el espacio de medida $\mathbb{N}$ con la medida de conteo μ. Estos espacios son de dimensión infinita.

Propiedad 1.1: Sea (X, M, μ) un espacio de medida. Los espacios $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$ con la norma $\|f\|_p$ son espacios de Banach.

Propiedad 1.2: Sea (X, M, μ) un espacio de medida finita, y suponga que $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu).$$

Propiedad 1.3: Si $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces $l^p \subseteq l^q$. Además, la inclusión es propia.

Definición 1.4: Sea X un espacio con producto interno. X es un espacio de Hilbert si X con la norma inducida por el producto interno es un espacio de Banach (Rynne & Youngson, 2008). Es decir, si d es la métrica inducida por la norma en X, inducida a su vez por el producto interno, entonces (X, d) es completo.

Propiedad 1.4: El espacio l^p con $p \neq 2$ no es un espacio con producto interno; por lo tanto, el espacio l^p con $p \neq 2$ no es un espacio de Hilbert (Maccluer, 2009).

Observación: Ningún $l^p\left(p \neq 2\right)$ es un espacio con producto interno. Sin embargo, l^p es completo; por lo tanto, l^p con $p \neq 2$ es un espacio de Banach que no es un espacio de Hilbert. El único l^p que es un espacio de Hilbert es el espacio l^2.

2. HOMEOMORFISMO ENTRE LOS ESPACIOS L^p Y l^q.

Definición 2.1: Una función $f:\left(X,\tau\right)\to\left(X',\tau'\right)$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si es una función biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas. En este caso se dice que $\left(X,\tau\right)$, $\left(X',\tau'\right)$ son espacios topológicos homeomorfos.

Definición 2.2: Una función $f:\left(X,\tau\right)\to\left(X',\tau'\right)$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo uniforme si es una función biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son uniformemente continuas.

Teorema 2.1: $L^1\left(\left[0,1\right]\right)$ es homeomorfo a $L^p\left(\left[0,1\right]\right)$ para todo $p>1$.

Demostración: Sean $p>1$ y

$$F:L^1\left(\left[0,1\right]\right)\to L^p\left(\left[0,1\right]\right)$$

definida por

$$F\left(f\right)=\operatorname{sgn}\left(f\right)\left|f\right|^{\frac{1}{p}}$$

donde $\operatorname{sgn}\left(f\right)$ es la función definida por $\operatorname{sgn}\left(f\left(x\right)\right)$, donde $\operatorname{sgn}\left(f\left(x\right)\right)$ es el signo de $f\left(x\right)$.

Note que

$$\int_0^1 \left|F(f)\right|^p d\mu = \int_0^1 |f|\, d\mu < \infty.$$

Luego, F está bien definida.

Probemos que F es inyectiva.

En efecto, sean $f, g \in L^1([0,1])$ tal que $F(f) = F(g)$, entonces

$$\operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}} = \operatorname{sgn}(g)|g|^{\frac{1}{p}}.$$

Esto implica que $\operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn}(g)$ y $|f|^{\frac{1}{p}} = |g|^{\frac{1}{p}}$. Por lo tanto, $f = g$.

Probemos que F es suryectiva.

Sea $h \in L^p([0,1])$. Tomemos $f = \operatorname{sgn}(h)|h|^p$. Como

$$\int_0^1 |f|\, d\mu = \int_0^1 |h|^p d\mu < \infty,$$

se tiene que $f \in L^1([0,1])$ y

$$\begin{aligned} F(f) &= \operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}} \\ &= \operatorname{sgn}(h)\left(|h|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \operatorname{sgn}(h)|h| \\ &= h. \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es suryectiva.

De todo lo anterior se concluye que F es una biyección. Además la inversa F^{-1} de F está definida por

$$\begin{aligned} F^{-1} &: L^p([0,1]) \to L^1([0,1]) \\ F^{-1}(h) &= \operatorname{sgn}(h)|h|^p. \end{aligned}$$

Probemos ahora que F es una función continua.

Sea $f_0 \in L^1([0,1])$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L^1([0,1])$ que converge a f_0.
Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\|_1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f_0|\, d\mu = 0.$$

Ahora bien, como para todo número α, $b \in \mathbb{R}$,

$$\left|\operatorname{sgn}(a)\cdot|a|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(b)|b|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leq 2^p\,|a-b|$$

se tiene que

$$\begin{aligned}|F(f_n)-F(f_0)|^p &= \left|\operatorname{sgn}(f_n)|f_n|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(f_0)|f_0|^{\frac{1}{p}}\right|^p \\ &\leq 2^p\,|f_n - f_0|\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_0^1 |F(f_n)-F(f_0)|^p\, d\mu \leq 2^p \int_0^1 |f_n - f_0|\, d\mu$$

de donde

$$\begin{aligned}\|F(f_n)-F(f_0)\|_p &= \left(\int_0^1 |F(f_n)-F(f_0)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\left(\int_0^1 |f_n - f_0|\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2\|f_n - f_0\|_1^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\|F(f_n)-F(f_0)\|_p \leq 2\left(\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\|_1\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f_0) \text{ en } L^p([0,1]).$$

Esto implica que F es una función continua en $L^1([0,1])$.

Finalmente probemos que la función $G := F^{-1}$ es continua en $L^p([0,1])$.

En efecto, sea $h_0 \in L^p([0,1])$ y sea $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L^p([0,1])$ que converge a h_0. Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Note que para todo número real α, $b \in \mathbb{R}$.

$$\left|\operatorname{sgn}(a)|a|^p - \operatorname{sgn}(b)|b|^p\right| \le p|a-b|\left(|a|+|b|\right)^{p-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|G(h_n)-G(h_0)| &= \left|\operatorname{sgn}(h_n)|h_n|^p - \operatorname{sgn}(h_0)|h_0|^p\right| \\ &\le p|h_n - h_0|\left(|h_n|+|h_0|\right)^{p-1}\end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 |G(h_n)-G(h_0)| \, d\mu \le p\int_0^1 |h_n - h_0|\left(|h_n|+|h_0|\right)^{p-1} d\mu .$$

Pero por la desigualdad de Hölder-Riesz para $q = \dfrac{p}{p-1}$,

$$\int_0^1 |h_n - h_0|\left(|h_n|+|h_0|\right)^{p-1} d\mu \le \left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(|h_n|+|h_0|\right)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

.

Luego,

$$\begin{aligned}\|G(h_n)-G(h_0)\|_1 &= \int_0^1 |G(h_n)-G(h_0)| \, d\mu \\ &\le p\left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(|h_n|+|h_0|\right)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(|h_n| + |h_0|\right)^p \, d\mu &\le 2^p \int_0^1 \left(\max\left(|h_n|,|h_0|\right)\right)^p d\mu \\ &\le 2^p \left[\int_0^1 |h_n|^p \, d\mu + \int_0^1 |h_0|^p \, d\mu\right].\end{aligned}$$

Además, como

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu = 0$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |h_n|^p d\mu = \int_0^1 |h_0|^p d\mu.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{n\to\infty} \left\|G(h_n) - G(h_0)\right\|_1 \\ &\le p2^{p-1}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 |h_n|^p \, d\mu + \int_0^1 |h_0|^p \, d\mu\right]^{1-\frac{1}{p}} \\ &= 0\end{aligned}$$

es decir, que la sucesión $\{G(h_n)\}$ converge a $G(h_0)$ en $L^1([0,1])$. Por consiguiente, $G = F^{-1}$ es continua en $L^p([0,1])$.

Hemos probado así que la función $F : L^1([0,1]) \to L^p([0,1])$ es un homeomorfismo para todo $p > 1$. Así pues, $L^1([0,1])$ es homeomorfo a $L^p([0,1])$ para todo $p > 1$.

Como la relación "es homeomorfo a" es una relación de equivalencia, por el Teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.1: Sean $p, q \ge 1$, entonces $L^p([0,1])$ es homeomorfo a $L^q([0,1])$.

Corolario 2.2: La bola unitaria cerrada en $L^p([0,1])$ es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada de $L^q([0,1])$ para $p,q \geq 1$.

Demostración: Sean $f, g \in L^1([0,1])$ tal que $\|f\|_1 \leq 1$ y $\|g\|_1 \leq 1$ y $F : L^1([0,1]) \to L^p([0,1])$ la función definida en el Teorema 2.1.

Entonces, $\|F(f)\|_p \leq 1$ y $\|F(g)\|_p \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned}\|F(f) - F(g)\|_p &= \left(\int_0^1 |F(f) - F(g)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\|f - g\|_1^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Luego, F es uniformemente continua en la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0,1) = \overline{B}(L^1)$ de $L^1([0,1])$.

Análogamente, sea $f, g \in L^p([0,1])$ tal que $\|f\|_p \leq 1$ y $\|g\|_p \leq 1$. Entonces, $\|G(f)\|_1 \leq 1$ y $\|G(g)\|_1 \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned}\|G(f) - G(g)\|_1 &= \left(\int_0^1 |G(f) - G(g)| \, d\mu\right) \\ &\leq p2^{p-1}\, 2^{\frac{p-1}{p}} \|f - g\|_p.\end{aligned}$$

Por lo tanto, G es uniformemente continua en la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0,1) = \overline{B}(L^p)$ de $L^p([0,1])$.

Finalmente, como la relación “es uniformemente homeomorfo a” es una relación de equivalencia, se tiene que $\overline{B}(L^p)$ es uniformemente homeomorfa a $\overline{B}(L^q)$ para todo $p,q \geq 1$.

Teorema 2.2: l^1 es homeomorfo a l^p, para todo $p>1$.

Demostración: Definamos la función

$$F: l^1 \to l^p$$
$$F(x)=\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{p}}, \cdots\right)$$

donde $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)\in l^1$.

Note que F está bien definida, ya que

$$\|F(x)\|_p^p=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{p}}\right|\right)^p=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|=\|x\|_1<\infty .$$

Definamos la función

$$G: l^p \to l^1$$
$$G(y)=\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|^p, \cdots\right)$$

donde $y=(y_1, y_2, y_3, \cdots)\in l^p$.

Note que G está bien definida, ya que

$$\|G(y)\|_1=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^p\right|=\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p=\|y\|_p^p<\infty .$$

Por otro lado,

$$(F\circ G)(y)=F(G(y))$$
$$=F\left(\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|^p, \cdots\right)\right)$$

$$(F\circ G)(y)=\left(\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p\right)\left|\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p\right|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p\right)\left|\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p\right|^{\frac{1}{p}}, \cdots\right)$$
$$=\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|, \cdots\right)$$
$$=(y_1, y_2, y_3, \cdots)$$
$$=y$$

para todo $y=\left(y_1, y_2, y_3, \cdots\right) \in l^p$ y

$$
\begin{aligned}
(G \circ F)(x) &= G(F(x)) \\
&= G\left(\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{p}}, \cdots\right)\right) \\
&= \left(\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}\right)\left|\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}\right|^p, \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}\right)\left|\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}\right|^p, \cdots\right) \\
&= \left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|, \cdots\right) \\
&= (x_1, x_2, x_3, \cdots) \\
&= x
\end{aligned}
$$

para todo $x=\left(x_1, x_2, x_3, \cdots\right) \in l^1$.

Así pues, F es una función biyectiva y $G=F^{-1}$.

Probemos que F es continua en l^1. En efecto, supongamos que $x^0=\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \cdots\right) \in l^1$ y sea $\left\{x^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en l^1 tal que $x^n=\left(x_1^n, x_2^n, x_3^n, \cdots\right)$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x^n-x^0\right\|_1=0$.

Como para todo número real *α, b* $\in \mathbb{R}$,

$$\left|\operatorname{sgn}(a)|a|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sgn}(b)|b|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leq 2^p|a-b|$$

se tiene que

$$\left|\operatorname{sgn}\left(x_i^n\right)\left|x_i^n\right|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sgn}\left(x_i^0\right)\left|x_i^0\right|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leq 2^p\left|x_i^n-x_i^0\right| \text{ para todo } i=1,2,\cdots$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\operatorname{sgn}\left(x_i^n\right)\left|x_i^n\right|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sgn}\left(x_i^0\right)\left|x_i^0\right|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leq 2^p \sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^n-x_i^0\right|$$

y

$$0 \leq\left\|F\left(x^n\right)-F\left(x^0\right)\right\|_p^p \leq 2^p\left\|x^n-x^0\right\|_1$$

lo que implica que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| F\left(x^n\right) - F\left(x^0\right) \right\|_p \leq 2\left(\lim_{n\to\infty} \left\| x^n - x^0 \right\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| F\left(x^n\right) - F\left(x^0\right) \right\|_p = 0 .$$

Por consiguiente, F es continua en x^0, para todo $x^0 \in l^1$.

Probemos que $G = F^{-1}$ es continua en l^p. En efecto, supongamos que $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, y_3^0, \cdots\right) \in l^p$ y sea $\left\{y^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en l^p tal que $y^n = \left(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \cdots\right)$ y $\lim_{n\to\infty} \left\| y^n - y^0 \right\|_p = 0$.

Como para todo número real α, $b \in \mathbb{R}$,

$$\left| \operatorname{sgn}(a)|a|^p - \operatorname{sgn}(b)|b|^p \right| \leq p|a-b|\left(|a|+|b|\right)^{p-1}$$

se tiene que

$$\left| \operatorname{sgn}\left(y_i^n\right)\left|y_i^n\right|^p - \operatorname{sgn}\left(y_i^0\right)\left|y_i^0\right|^p \right| \leq p\left|y_i^n - y_i^0\right|\left(\left|y_i^n\right| + \left|y_i^0\right|\right)^{p-1} \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots;$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{sgn}\left(y_i^n\right)\left|y_i^n\right|^p - \operatorname{sgn}\left(y_i^0\right)\left|y_i^0\right|^p \right| \leq p\sum_{i=1}^{\infty} \left|y_i^n - y_i^0\right|\left(\left|y_i^n\right| + \left|y_i^0\right|\right)^{p-1} .$$

Por la desigualdad de Hölder-Riesz se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^n - y_i^0\right|\left|y_i^n - y_i^0\right|^{p-1} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^n - y_i^0\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|y_i^n\right|+\left|y_i^0\right|\right)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \left\|y^n - y^0\right\|_p \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|y_i^n\right|+\left|y_i^0\right|\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \left\|y^n - y^0\right\|_p \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(2\max\left(\left|y_i^n\right|,\left|y_i^0\right|\right)\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq 2^{p-1}\left\|y^n - y^0\right\|_p \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\max\left(\left|y_i^n\right|,\left|y_i^0\right|\right)\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq 2^{p-1}\left\|y^n - y^0\right\|_p \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|y_i^n\right|^p+\left|y_i^0\right|^p\right)\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq 2^{p-1}\left\|y^n - y^0\right\|_p \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^n\right|^p+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^0\right|^p\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq 2^{p-1}\left\|y^n - y^0\right\|_p \left(\left\|y^n\right\|_p^p+\left\|y^0\right\|_p^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|G\left(y^n\right)-G\left(y^0\right)\right\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\operatorname{sgn}\left(y_i^n\right)\left|y_i^n\right|^p - \operatorname{sgn}\left(y_i^0\right)\left|y_i^0\right|^p\right|$$

$$\leq p\, 2^{p-1}\left\|y^n - y_0\right\|_p \left(\left\|y^n\right\|_p^p+\left\|y^0\right\|_p^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Además, como

$$\left|\left\|y^n\right\|_p - \left\|y_0\right\|_p\right| \leq \left\|y_n - y_0\right\|_p$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y^n\right\|_p = \left\|y_0\right\|_p.$$

Por lo tanto,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left\| G\left(y^n\right) - G\left(y^0\right) \right\|_1 \le p\ 2^{p-1} \lim_{n\to\infty} \left\| y_n - y_0 \right\|_p \left(\lim_{n\to\infty} \left\| y_n \right\|_p^p + \left\| y^0 \right\|_p^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| G\left(y^n\right) - G\left(y_0\right) \right\|_1 = 0 .$$

Por consiguiente, G es continua en y^0, para todo $y^0 \in l^p$.
Así pues, l^1 es homeomorfo a l^p, para todo $p > 1$.

Observación: La función F definida en los Teoremas 2.1 y 2.2 se llama la función de Mazur y la función G se llama la función inversa de Mazur (Mazur, 1929).

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.2, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.3: Sean $p, q \ge 1$, entonces l^p es homeomorfo a l^q.

Teorema 2.3: Sean $p \ge 1$, $\bar{B}\left(l^1\right) = \left\{ x \in l^1 : \|x\|_1 \le 1 \right\}$ y $\bar{B}\left(l^p\right) = \left\{ y \in l^p : \|y\|_p \le 1 \right\}$. Entonces $\bar{B}\left(l^1\right)$ y $\bar{B}\left(l^p\right)$ son uniformemente homeomorfas.

Demostración: Consideremos la función de Mazur $F : l^1 \to l^p$ y su inversa $G : l^p \to l^1$ definida en el Teorema 2.2.

Como para todo $x \in \bar{B}\left(l^1\right)$, $\left\| F(x) \right\|_p = \left(\|x\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} \le 1$ y para todo $y \in \bar{B}\left(l^p\right)$, $\left\| G(y) \right\|_1 = \left(\|y\|_p \right)^p \le 1$, se tiene que

$$F : \bar{B}\left(l^1\right) \to \bar{B}\left(l^p\right) \quad \text{y} \quad G : \bar{B}\left(l^p\right) \to \bar{B}\left(l^1\right) \quad \text{y} \quad G = F^{-1} .$$

Además, por el Teorema 2.2, para todo $x_1, x_2 \in \overline{B}\left(l^1\right)$,

$$\left\|F\left(x_1\right)-F\left(x_2\right)\right\|_p \leq 2\left\|x_1-x_2\right\|_1^{\frac{1}{p}}$$

y para todo $y_1, y_2 \in \overline{B}\left(l^p\right)$

$$\left\|G\left(y_1\right)-G\left(y_2\right)\right\|_1 \leq p\, 2^{p-1} \cdot 2^{\frac{p-1}{p}}\left\|y_1-y_2\right\|_2$$

lo que implica que F y G son uniformemente continuas. Por consiguiente, $\overline{B}\left(l^1\right)$ y $\overline{B}\left(l^p\right)$ son uniformemente homeomorfas.

Como consecuencia del Teorema 2.3, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.4: Sean $p, q \geq 1$, entonces la bola unitaria cerrada $\overline{B}\left(l^p\right)$ es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada $\overline{B}\left(l^q\right)$.

Teorema 2.4: Sean $p, q \geq 1$. Entonces $L^p\left([0,1]\right)$ es homeomorfo a l^q.

Demostración: Por el Corolario 2.1, $L^p\left([0,1]\right)$ es homeomorfo a $L^2\left([0,1]\right)$ y, como $L^2\left([0,1]\right)$ es isométricamente isomorfo a l^2, entonces $L^2\left([0,1]\right)$ es homeomorfo a l^2. Pero por el Corolario 2.3, l^2 es homeomorfo a l^q. Por consiguiente, $L^p\left([0,1]\right)$ es homeomorfo a l^q, para todo $p, q \geq 1$.

REFERENCIAS

Amann, H. & J. Escher. 2009. Analysis III. First Edition. Birkhäuser Verlag AG, Basel.

Capinski, M. & E. Kopp. 2004. Measure, Integral and Probability. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin.

Maccluer, B.D. 2009. Elementary Functional Analysis. First Edition. Springer-Verlag, New York.

Mazur, S. 1929. Une Remarque sur L'homèomorphie des Champs Fonctionnels, Studia Math., 1, 83-85.

Rynne, B.P. & M.A. Youngson. 2008. Linear Functional Analysis. Second Edition. Springer-Verlag, London.

Recibido junio de 2012, aceptado marzo de 2013.