View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Portal de Revistas de la Universidad de Panamá

Tecnociencia 2011, Vol. 13, N° 2.

SUCESIONES DE POTENCIAS ITERATIVAS GENERADAS POR *a*.

Jorge E. Hernández U. y Edith C. de Hernández
Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Escuela de Matemática.

RESUMEN
En el presente trabajo se estudia la sucesión

$$x_n = \begin{cases} a & si\ n = 1 \\ a^{x_{n-1}} & si\ n \geq 2 \end{cases}$$

de potencias iterativas generadas por a, $a > 0$; así como el rango de solubilidad de la ecuación

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = b$$

Se establece que estos problemas están estrechamente ligados con el comportamiento de las funciones

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \qquad \text{y} \qquad h(x) = x^x$$

y con el antiguo problema de determinar las soluciones de la ecuación $x^y = y^x$. Finalmente, se estudia el comportamiento de la función

$$g(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

se calcula su inversa y se construye su gráfica.

PALABRAS CLAVES

Sucesiones de potencias iterativas, pares de Bernoulli, pares de Euler.

ABSTRACT

In this paper we study the sequence

$$x_n = \begin{cases} a & si\ n = 1 \\ a^{x_{n-1}} & si\ n \geq 2 \end{cases}$$

of iterated exponentials by a, a > 0; as well as the range of solvability of the equations

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = b$$

We state that these two problems are closely related with the behavior of the functions

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{and} \quad h(x) = x^x$$

and with the old problem of finding the solutions of the equation $x^y = y^x$. Finally, we study the behavior of the function

$$g(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

calculate its inverse and draw its graph.

KEYWORDS

Sequence of iterated exponentials, Bernoulli pair, Euler pair.

1. Los Orígenes

Dado un número real $a > 0$, se puede considerar la sucesión de potencias iteradas de a:

$$a, \quad a^a, \quad a^{a^a}, \ \ldots$$

Si $a = 1$, entonces es evidente que esta sucesión es convergente; sin embargo, para $a = 2$ la sucesión es divergente.

Una pregunta natural es: ¿Para qué valores de a la sucesión de potencias iteradas de a es convergente? Este problema esta relacionado directamente con la ecuación

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = b \quad ,$$

las funciones $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $h(x) = x^x$ y la ecuación $x^y = y^x$

la cual fue resuelta primeramente por Goldbach (Cho, 2001; Hurwitz, 1961, Sved, 1990). Realmente, la historia de este problema comienza con una carta de Daniel Bernouilli a Christian Goldbach fechada el 29 de junio de 1728 (Hurwitz, 1961). El final de esta carta dice:

> Terminaré con un problema el cual encontré muy interesante y he resuelto. Aquí está: Encuentre dos números diferentes x e y tales que $x^y = y^x$. Hay sólo un caso cuando estos dos números son enteros, a saber $x = 2$, $y = 4$ (ya que $2^4 = 4^2$), pero uno puede encontrar una infinidad de números quebrados que satisfacen esta ecuación. Hay también otros tipos de cantidades de las cuales no diré nada.

Seis meses más tarde Goldbach le respondió a Bernoulli incluyendo en su respuesta una derivación de la solución x, y en forma parametrica. Su argumento pudiera ser establecido como sigue:

Supongamos que $x^y = y^x$, $y > x > 0$; por lo tanto $y = sx$, para algún $s > 1$. Entonces

$$x^{sx} = (sx)^x$$

de donde

$$x^s = sx$$

por consiguiente

$$x^{s-1} = s$$

Así pues

$$\begin{cases} x = s^{\frac{1}{s-1}} \\ y = s^{\frac{s}{s-1}} \end{cases}, \qquad si \;\; s > 1$$

Euler, sin el conocimiento de la comunicación entre Bernoulli y Goldbach (Cho, 2001; Slobin, 1931), uso la misma relación y = sx y resolvió la ecuación $x^y = y^x$, $x \neq y$, sobre $\mathbf{R}^+$ y $\mathbf{Z}^+$, presentando las soluciones racionales

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Las relaciones de Goldbach han sido redescubiertas por un número plural de autores entre los cuales se encuentran Euler, Eisenstein, Knoebel, Barrow, Länger, Sternheimer y Creutz (Cho, 2001; Sved, 1990, Hernández, 2004). Aparentemente, ninguno de estos matemáticos tenía conocimiento de la solución original de Goldbach.

Aunque en este momento el problema de Bernoulli pareciera no estar relacionado con la convergencia de las sucesiones de potencias iteradas, veremos que las soluciones del problema de Bernoulli nos darán la información para determinar la convergencia de estas sucesiones.

2. La función f(x) = $x^{\frac{1}{x}}$

La ecuación $x^y = y^x$ es equivalente a la ecuación $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$**;** por lo tanto, el estudio del comportamiento de la función f(x) = $x^{\frac{1}{x}}$ es primordial para determinar las soluciones de la ecuación $x^y = y^x$.

Consideremos la función

f: $(0,\infty) \to \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

como

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1-\ln x}{x^2} \right] \qquad , \quad x > 0$$

se tiene que

$$f'(x) = 0 \text{ sí y sólo sí, } x = e$$

Además

$$f'(x) > 0 \qquad \text{si} \quad x \in (0, e)$$

y

$$f'(x) < 0 \qquad \text{si} \quad x \in (e, \infty)$$

Por lo tanto,

- f es estrictamente creciente en el intervalo $(0, e)$.
- f es estrictamente decreciente en el intervalo (e,∞).
- f alcanza su valor máximo en $x = e$ y es

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.444667861$$

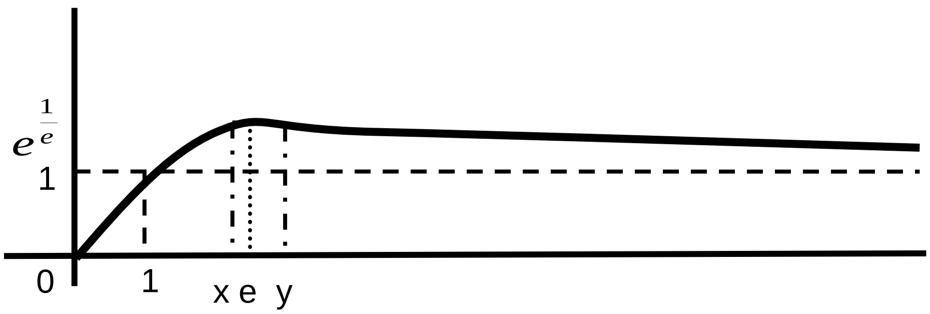
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$
- $0 < f(x) \leq f(e) \approx e^{\frac{1}{e}}$, para todo $x \in (0, \infty)$

De los resultados anteriores, podemos extender continuamente f al intervalo $[0, \infty)$ de la siguiente manera

$$f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ x^{\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

y su gráfica es la siguiente



Note que

- f es continua en el intervalo $[0, \infty)$.
- f es inyectiva en el intervalo $[0, e]$ y en el intervalo $[e, \infty)$
- Si $0 < x < 1$ entonces $0 < f(x) < 1$.
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.444667861$
- Si $1 < x < e$ entonces $1 < f(x) < e^{\frac{1}{e}}$
- Si $e < x < \infty$ entonces $1 < f(x) < e^{\frac{1}{e}}$
- Para cada $x \in (1, e)$ existe un único $y \in (e, \infty)$ tal que $f(x) = f(y)$, y recíprocamente.

Así podemos afirmar que la ecuación $x^y = y^x$, $x \neq y$ (o equivalentemente $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$) no tiene solución para $0 < x < 1$ ó $0 < y < 1$; y para cada $x \in (1, e)$ existe un único $y \in (e,\infty)$ tal que $x^y = y^x$.

- Como 2 es el único entero positivo entre 1 y e, este análisis muestra que $x = 2$, $y = 4$ es la única solución entera positiva de la ecuación $x^y = y^x$.

3. Pares de Bernoulli

Recordemos que Goldbach presentó la siguiente solución parametrica de la ecuación $x^y = y^x$:

$$x = s^{\frac{1}{s-1}} \qquad y = s^{\frac{s}{s-1}} \qquad s > 0, \quad s \neq 1$$

la cual permite construir soluciones (x, y) de esta ecuación, como por ejemplo:

s	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	3	4
x	4	$\frac{27}{8}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{9}{4}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$	2	$3^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{3}}$
y	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{256}{81}$	$\frac{27}{8}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$	4	$3^{\frac{3}{2}}$	$4^{\frac{4}{3}}$

Veamos que ocurre con las soluciones parametricas cuando s se aproxima a 1. Para esto tomemos el límite cuando $s \to 1$ y hagamos la sustitución $s = t + 1$;

$$y = \lim_{s\to 1} s^{\frac{s}{s-1}} = \lim_{t\to 0} (t+1)^{1+\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} (t+1)(t+1)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$x = \lim_{s\to 1} s^{\frac{1}{s-1}} = \lim_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$$

Note que si $0 < s < 1$, entonces

$$e < x < \infty, \quad 0 < y < e$$

mientras que si $s > 1$, entonces

$$0 < x < e, \quad e < y < \infty.$$

La parametrización de Goldbach permite fácilmente caracterizar ciertas soluciones importantes. Por ejemplo, Euler fue el primero en determinar las soluciones racionales de la ecuación $x^y = y^x$, las cuales se obtienen tomando

$$s = \frac{m}{m+1} \qquad \text{y} \qquad s = \frac{n+1}{n}$$

Para $s = \dfrac{m}{m+1}$ se obtienen las soluciones:

$$x_m = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{1}{\frac{m}{m+1}-1}} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{-(m+1)} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

$$y_m = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\frac{m}{m+1}}{\frac{m}{m+1}-1}} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{-m} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

Para $s = \dfrac{n+1}{n}$ se obtienen las soluciones:

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{n+1}{n}-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Definición 1: Sean x, y dos números reales positivos y distintos, $x < y$. El conjunto $\{x, y\}$ es **un par de Bernoulli** si $x^y = y^x$.

- Si $\{x, y\}$ es un par de Bernoulli, entonces

$$1 < x < e < y$$

- $\{2, 4\}$ es el único par de Bernoulli formado por enteros
- Los únicos pares de Bernoulli racionales son de la forma

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\} \qquad \text{para } n \in \mathbf{N}.$$

- Por la parametrización de Goldbach, los pares de Bernoulli son

$$\left\{s^{\frac{1}{s-1}},\ s^{\frac{s}{s-1}}\right\}, \qquad \text{para } s > 1.$$

4. La Sucesión $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

Sea $a > 0$ un número fijo. Definamos recursivamente la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$x_n = \begin{cases} a & si\ \ n=1 \\ a^{x_{n-1}} & si\ \ n \geq 2 \end{cases}$$

Los términos de esta sucesión son

$$a, \quad a^a, \quad a^{a^a}, \ \ldots$$

El propósito de este trabajo es determinar los números a para los cuales esta sucesión converge, al igual que su límite. Para esto presentamos la siguiente notación

$$a^{[1]} = a, \quad a^{[2]} = a^a, \quad \ldots, \quad a^{[n]} = a^{\left(a^{[n-1]}\right)}$$

Así, la sucesión $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ se puede representar como

$$\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Teorema 1: Sea $a > 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a^{[n]} = b$, entonces

$$a^b = b, \qquad a = b^{\frac{1}{b}} \quad \text{y} \quad a \leq e^{\frac{1}{e}}$$

Demostración:
Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} a^{[n]} = b$$

entonces

$$a^b = a^{\lim\limits_{n\to\infty} a^{[n]}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{\left(a^{[n]}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{[n+1]}$$

$$= b$$

Así pues

$$a^b = b \qquad y \qquad a = b^{\frac{1}{b}}$$

Además, como f (b) = a, se tiene que

$$a \le f(e) = e^{\frac{1}{e}}$$

Definamos ahora la función g(x) por

$$\text{g(x)} = \lim_{n\to\infty} x^{[n]}$$

Si x es un elemento del dominio de g, entonces por el Teorema 1,

$$\text{f(g(x))} = \text{x}.$$

y

$$\text{dom(g)} \subset \text{Rang(f)} = \left[0, e^{\frac{1}{e}}\right]$$

Por lo tanto, la sucesión

$$\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

diverge sí $a > e^{\frac{1}{e}}$.

Teorema 2: Sea $1 < a \le e^{\frac{1}{e}}$ entonces la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Además, si

$$\lim_{n\to\infty} a^{[n]} = b$$

entonces $a = b^{\frac{1}{b}}$ y 1 < b ≤ e.

Demostración:

Si $0 < p < q$, entonces $a^{p} < a^{q}$. Por lo tanto,

$$1 < a, \quad a < a^{a} = a^{[2]}, \quad a^{[2]} = a^{a} < a^{a^{[2]}} = a^{[3]}, \ldots$$

o sea

$$a^{[n-1]} < a^{[n]}, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

Luego $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente.

Por otro lado, como

$$1 < a \leq e^{\frac{1}{e}} < e$$

se tiene que

$$1 < a^{[2]} = a^{a} < a^{e} \leq \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{e} = e$$

igualmente,

$$1 < a^{[3]} = a^{a^{[2]}} < a^{e} < \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{e} = e$$

y en general,

$$1 < a^{[n]} < e, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Esto implica que $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por el número e.

Por lo tanto, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Así, por el teorema anterior, si

$$\lim_{n\to\infty} a^{[n]} = b$$

entonces $a = b^{\frac{1}{b}}$ y $1 < b \leq e$.

Observación: Si $b > e$ y $a = b^{\frac{1}{b}}$, entonces

$$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$$

Luego, por el teorema anterior, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Pero $\lim_{n\to\infty} a^{[n]} \neq b$

ya que $b > e$. El límite de la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es el número c, $1 < c < e$, tal que $c^{\frac{1}{c}} = b^{\frac{1}{b}}$; o sea que $\{c, b\}$ es un par de Bernoulli.

Estudiemos ahora el comportamiento de la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, cuando $0 < a < 1$. Note que en este caso, si $0 < p < q$, entonces $a^q < a^p$. Por lo tanto,

$$0 < a^{[1]} = a < a^a = a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} = a < a^{a^{[2]}} = a^{[3]} < a^a = a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} = a < a^{a^{[2]}} = a^{[3]} < a^{a^{[3]}} = a^{[4]} < a^a = a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} = a < a^{[3]} < a^{a^{[4]}} = a^{[5]} < a^{a^{[3]}} = a^{[4]} < a^{[2]} < 1$$

$$0 < a^{[1]} < a^{[3]} < a^{[5]} < a^{[6]} < a^{[4]} < a^{[2]} < 1$$

por un argumento inductivo se tiene que

$$0 < a^{[2n-1]} < a^{[2n+1]} < \ldots < a^{[2n+2]} < a^{[2n]} < 1$$

para todo número natural n.

De lo anterior se tiene que la sucesión $\left\{a^{[2n-1]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente por los términos de la sucesión $\left\{a^{[2n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

De igual manera, la sucesión $\left\{a^{[2n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y acotada inferiormente por los términos de la sucesión $\left\{a^{[2n-1]}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Así, estas dos sucesiones son convergentes.

Denotemos

$$b_i = \lim_{n\to\infty} a^{[2n-1]} , \qquad b_p = \lim_{n\to\infty} a^{[2n]}$$

Entonces

$$0 < b_i \leq b_p < 1$$

además, la sucesión $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente sí y sólo sí $b_i = b_p$.

Por otro lado, como

$$a^{a^{[2n+1]}} = a^{[2n+2]} \qquad \text{y} \qquad a^{a^{[2n]}} = a^{[2n+1]}$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$a^{b_i} = b_p \qquad \text{y} \qquad a^{b_p} = b_i$$

Por consiguiente

$$b_p^{\frac{1}{b_i}} = a = b_i^{\frac{1}{b_p}}$$

de donde

$$b_p^{b_p} = b_i^{b_i}$$

Esta identidad nos sugiere estudiar el comportamiento de la función

$$h: [0, 1] \to \mathbf{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Derivando la función h obtenemos

$$h'(x) = x^x [\ln x + 1]$$

luego

$$h'(x) = 0 \quad \text{sí y sólo sí} \quad x = \frac{1}{e} = e^{-1} = 0.3678794412$$

Además

$$h'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x \in (0, e^{-1})$$

y

$$h'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \in (e^{-1}, 1)$$

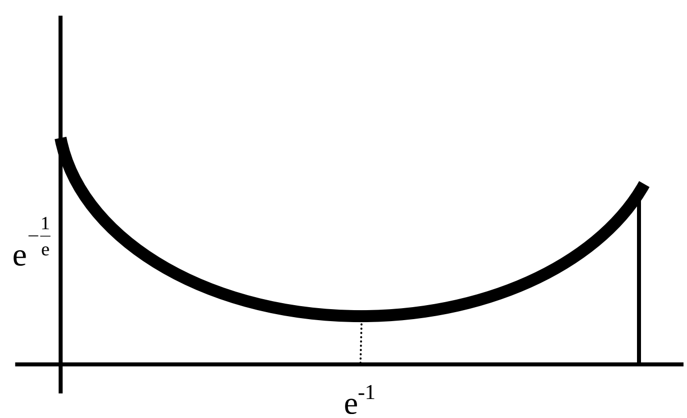
Por consiguiente

- h(0) = h(1) = 1
- f es estrictamente decreciente en el intervalo (0, e^{-1}).
- f es estrictamente creciente en el intervalo (e^{-1}, 1).
- f alcanza su valor mínimo en x = e^{-1} y es

$$h(e^{-1}) = \left(e^{-1}\right)^{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0.692200627$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.
- $e^{-\frac{1}{e}} \leq h(x) \leq 1$, para todo x $\in [0,1]$

La gráfica de la función h(x) = x^x es la siguiente



Note que la función h es dos a uno en el intervalo [0, 1].

Del análisis de la gráfica de h(x) = x^x y de los resultados anteriores se tiene que si $0 < a < 1$ y la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente, entonces $b_i < b_p$ y

$$0 < b_i < e^{-1} < b_p < 1$$

ya que $h(b_i) = h(b_p)$.

El problema de determinar la convergencia de la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, con $0 < a < 1$, equivale a preguntarse que si $0 < c < d < 1$ y $c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}} = a$, entonces puede darse el caso de que $c = b_i$ y $d = b_p$. En este sentido va dirigido el siguiente teorema.

Teorema 3: Sea $0 < a < 1$. Si $0 < c < d < 1$ y $a = c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}}$

entonces

$$0 < a^{[2n-1]} < b_i \leq c < \frac{1}{e} < d \leq b_p < a^{[2n]} < 1$$

para cada natural n, y la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Demostración:

Si $c \leq a < 1$. entonces como $\frac{1}{d} > 1$ se tiene que

$$a = c^{\frac{1}{d}} \leq a^{\frac{1}{d}} < a$$

lo que es una contradicción, por lo tanto $a < c$. De lo anterior se tiene que

$$d = a^c < a^a = a^{[2]}$$

luego de la gráfica de $h(x) = x^x$ se deduce que

$$a < c < \frac{1}{e} < d < a^{[2]}$$

Nuevamente, como $0 < a < 1$,

$$a^{[3]} < a^d = c < \frac{1}{e} < d = a^c < a^a = a^{[2]}$$

por lo tanto,

$$a^{[3]} < a^d = c < \frac{1}{e} < d = a^c < a^{[4]}$$

De igual manera,

$$a^{[5]} < a^d = c < \frac{1}{e} < d = a^c < a^{[4]}$$

Aplicando repetidamente este argumento obtenemos

$$0 < a^{[2n-1]} < c < \frac{1}{e} < d < a^{[2n]} < 1$$

por consiguiente,

$$0 < a^{[2n-1]} < b_i \le c < \frac{1}{e} < d \le b_p < a^{[2n]} < 1$$

y la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Definición: El conjunto {c, d} es un par de Euler si

$$0 < c < d < 1 \qquad y \qquad c^c = d^d$$

Ejemplo: $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ es un par de Euler, ya que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En el siguiente teorema relacionamos los pares de Euler con los pares de Bernoulli

Teorema 4: El conjunto {c, d} es un par de Euler sí y sólo sí $\left\{\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right\}$ es un par de Bernoulli

Demostración:
Supongamos que $0 < c < d < 1$ y tomemos

$$x = \frac{1}{d}, \qquad y = \frac{1}{c}$$

entonces $1 < x < y$, además

$$c^{c} = d^{d} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{d}\right)^{d} = \left(\frac{1}{c}\right)^{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{d} = y^{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{c}} = y^{\frac{1}{d}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{y} = y^{x}.$$

Observaciones:

1. Si {c, d} es un par de Euler, entonces

$$0 < c < e < d < 1$$

2. Si $0 < a < 1$ y la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente, entonces $\{b_i, b_p\}$ es un par de Euler.

3. De los dos últimos teoremas se deduce que si $0 < a < 1$ y si existe un par de Euler {c, d } tal que

$$c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}} = a$$

entonces la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

Del teorema anterior y usando la representación parametrica de Goldbach para las soluciones de la ecuación $x^{y} = y^{x}$, podemos concluir que los pares de Euler {c, d} tienen la forma

$$c = c(s) = \frac{1}{s^{\frac{s}{s-1}}} = s^{\frac{s}{1-s}}, \qquad d = d(s) = \frac{1}{s^{\frac{1}{s-1}}} = s^{\frac{1}{1-s}}, \qquad s > 1$$

Si suponemos que $c^{\frac{1}{d}} = d^{\frac{1}{c}} = a$ entonces como

$$\left(c(s)\right)^{c(s)} = \left(d(s)\right)^{d(s)}$$

se tiene que

$$a = a(s) = \left(c(s)\right)^{\frac{1}{d(s)}} = \left(d(s)\right)^{\frac{1}{c(s)}}, \qquad s > 1.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge sobre el rango de la función *a*(s), definida sobre el dominio (1, ∞). Así que es importante determinar el rango de la función *a*(s).

Consideremos las funciones

$$c: (1, \infty) \to \mathbf{R}$$

$$c(s) = s^{\frac{s}{1-s}}$$

$$d: (1, \infty) \to \mathbf{R}$$

$$d(s) = s^{\frac{1}{1-s}}$$

$$a: (1, \infty) \to \mathbf{R}$$

$$a(s) \ = \ c(s)^{\frac{1}{d(s)}} \ = \ d(s)^{\frac{1}{c(s)}}$$

Aplicando la regla de L'Hopital (o analizando la gráfica de la función h(x) = x^x, ya que h(c(s)) = h(d(s))) obtenemos que:

$$\lim_{s\to 1^+} c(s) \ = \lim_{s\to 1^+} s^{\frac{s}{1-s}} \ = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{s\to 1^+} d(s) \ = \ \lim_{s\to 1^+} s^{\frac{1}{1-s}} \ = \ \frac{1}{e}$$

$$\lim_{s\to\infty} c(s) \ = \ \lim_{s\to\infty} s^{\frac{s}{1-s}} \ = 0$$

$$\lim_{s\to\infty} d(s) \ = \ \lim_{s\to\infty} s^{\frac{1}{1-s}} \ = \ 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{s\to 1^+} a(s) = \frac{1}{e^e} = e^{-e} \approx 0.65988$$

y

$$\lim_{s\to\infty} a(s) = 0$$

Además, como c(s) y d(s) son continuas en el intervalo (1, ∞), se tiene que *a*(s) es continua en el intervalo (1, ∞).

Luego por el Teorema del Valor Intermedio, se tiene que

$$(0, e^{-e}) \subset \text{rang}\,(a(s)).$$

Nuestra tarea consiste entonces en determinar el rango de la función $a(s)$. Para esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5: La función $a(s) = c(s)^{\frac{1}{d(s)}}$ es decreciente en el intervalo $(1, \infty)$.

Demostración:
Probemos que $a'(s) < 0$ para $s > 1$. En efecto,

$$a(s) \;=\; c(s)^{\frac{1}{d(s)}} \;=\; \left(s^{\frac{s}{1-s}} \right)^{\frac{1}{s^{\frac{1}{1-s}}}}$$

Como

$$d(s) \;=\; s^{\frac{1}{1-s}}$$

usando derivada logarítmica obtenemos que

$$\frac{d'(s)}{d(s)} \;=\; \frac{d}{ds}\left(\frac{\ln s}{1-s} \right) \;=\; \frac{1}{s(s-1)^2}\left[s\ln s - (s-1) \right]$$

de donde

$$d'(s) \;=\; \frac{d(s)}{s(s-1)^2}\left[s\ln s - (s-1) \right]$$

Por otro lado, como

$$c(s) \;=\; s^{\frac{s}{1-s}} \;=\; \left(s^{\frac{1}{1-s}} \right)^{s} \;=\; (d(s))^{s}$$

se tiene que

$$a(s) = \left(s^{\frac{s}{1-s}} \right)^{\frac{1}{s^{\frac{1}{1-s}}}} \;=\; \left(s^{\frac{1}{1-s}} \right)^{\frac{s}{s^{\frac{1}{1-s}}}} \;=\; \left(d(s) \right)^{\frac{s}{d(s)}}$$

Usando derivada logarítmica obtenemos que

$$\frac{a'(s)}{a(s)} = \frac{d}{d(s)}\left(\frac{s\ln(d(s))}{d(s)}\right)$$

$$= \left[\frac{\ln(d(s))}{d(s)} + \frac{s\,d'(s)}{(d(s))^2} - \frac{s\,d'(s)\ln(d(s))}{(d(s))^2}\right]$$

por consiguiente

$$a'(s) = \frac{a(s)}{(d(s))^2}\left[d(s)\ln(d(s)) + s\,d'(s) - s\,d'(s)\ln(d(s))\right]$$

reemplazando el valor de d′(s) en esta ecuación obtenemos que

$$a'(s) = \frac{a(s)}{(d(s))^2}\left[d(s)\ln(d(s)) + \frac{d(s)}{(s-1)^2}\left(s\ln s-(s-1)\right) - \frac{d(s)\ln(d(s))}{(s-1)^2}\left(s\ln s-(s-1)\right)\right]$$

$$= \frac{a(s)}{(d(s))^2}\left[d(s)\ln(d(s)) + \frac{s\,d(s)\ln s}{(s-1)^2} - \frac{d(s)}{s-1} - \frac{s\,d(s)\ln(d(s))\ln s}{(s-1)^2} + \frac{d(s)\ln(d(s))}{s-1}\right]$$

pero como

$$\ln(\mathrm{d(s)}) = \frac{\ln s}{1-s} = -\frac{\ln s}{s-1}$$

obtenemos que

$$a'(s) = \frac{a(s)}{d(s)}\left[-\frac{\ln s}{s-1} + \frac{s\ln s}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s\ln^2 s}{(s-1)^3} - \frac{\ln s}{(s-1)^2}\right]$$

$$= \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)}\left[-(s-1)^2\ln s + s(s-1)\ln s - (s-1)^2 + s\ln^2 s - (s-1)\ln s\right]$$

$$= \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)}\left[-s^2\ln s + 2s\ln s - \ln s + s^2\ln s - s\ln s - (s-1)^2 + s\ln^2 s - s\ln s + \ln s\right]$$

$$= \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)}\left[s\ln^2 s - (s-1)^2\right]$$

O sea

$$a'(s) \quad = \quad \frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)}\left[s\ln^2 s - (s-1)^2 \right]$$

Note que

$$\frac{a(s)}{(s-1)^3 d(s)} \; > \; 0\,, \qquad \text{para} \quad s > 1.$$

Definamos ahora la función

t: $[1, \infty) \to \mathbf{R}$

$t(s) = s \ln^2 s \;-\; (s-1)^2$

Entonces

$t'(s) = \ln^2 s + 2 \ln s \;- 2(s-1)$

$$t''(s) = \frac{2\ln s}{s} + \frac{2}{s} - 2$$

$$t'''(s) = -\frac{2\ln s}{s^2}$$

Como $t'''(s) < 0$ para $t \in (1, \infty)$, se tiene que $t''(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Pero como $t''(1) = 0$, $t''(s)$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$. Esto implica que la función $t'(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Pero $t'(1) = 0$, lo que implica que $t'(s)$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$. Por consiguiente, la función $t(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Finalmente, como $t(1) = 0$, se tiene que la función $t(s)$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$.

De todo lo anterior se deduce que la función $a'(s) < 0$ para todo $t \in (1, \infty)$. Por consiguiente, la función $a(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[1, \infty)$.

Observación: Como la función $a(s)$ es continua y estrictamente decreciente en el intervalo $(1, \infty)$, ella es inyectiva en este intervalo. Además como

$$\lim_{s\to 1^+} a(s) = e^{-e} \quad , \qquad \lim_{s\to\infty} a(s) = 0$$

se tiene que

$$\text{rang}(a(s)) = (0, e^{-e})$$

y por lo tanto, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente si $a \in (0, e^{-e})$.

Teorema 6: Sea $0 < a < 1$. La sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge sí y sólo sí $e^{-e} \leq a < 1$.

Demostración:
Supongamos que la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y que $0 < a < e^{-e}$. Entonces $a \in \text{rang}(a(s))$. Esto implica que existe un par de Euler $\{c(s), d(s)\}$ tal que

$$c(s)^{\frac{1}{d(s)}} = d(s)^{\frac{1}{c(s)}} = a(s) = a, \qquad s > 1$$

Luego por el Teorema 3, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Lo que es una contradicción. Así,

$$e^{-e} \leq a < 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $e^{-e} \leq a < 1$ y supongamos que la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Entonces

$$0 < b_i = \lim_{n\to\infty} a^{[2n+1]} < \lim_{n\to\infty} a^{[2n]} = b_p < 1$$

$$b_p^{\frac{1}{b_i}} = b_i^{\frac{1}{b_p}} = a$$

y $\{b_i, b_p\}$ es un par de Euler. Por lo tanto, existe un $s \in (1, \infty)$ tal que

$$b_i = c(s), \qquad b_p = d(s) \qquad \text{y} \quad a = a(s)$$

Esto implica que $a \in \text{rang}(a(s)) = (0, e^{-e})$, lo que es una contradicción. Así $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente.

Corolario 1: Si $e^{-e} \leq a < 1$ y $\lim_{n\to\infty} a^{[n]} = b$ entonces

$$e^{-1} \leq b < 1.$$

Demostración:
Por Teorema 1 se tiene que

$$a^{b} = b \quad \text{y} \quad a = b^{\frac{1}{b}}$$

Luego, de la gráfica de la función f(x) = $x^{\frac{1}{x}}$ se tiene que b < 1. Además, como la gráfica de la función f(x) es estrictamente creciente en el intervalo [0, 1] y $f(e^{-1}) = e^{-e}$ se tiene que

$$e^{-1} \leq b < 1.$$

Corolario 2: Si $0 < a < e^{-e}$ y $a = b^{\frac{1}{b}}$ entonces existe un único par de Euler $\{b_i, b_p\}$ tal que

$$0 < b_i < b < e^{-1} < b_p < 1$$

y

$$a^{b_p} = b_i \quad , \quad a^{b_i} = b_p$$

Demostración:
Como $0 < a < e^{-e}$, por el Teorema 6 la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Luego, por el Teorema 3

$$0 < \lim_{n\to\infty} a^{[2n-1]} = b_i < e^{-1} < \lim_{n\to\infty} a^{[2n]} = b_p < 1$$

además

$$b_p^{\frac{1}{b_i}} = b_i^{\frac{1}{b_p}} = a$$

y $\{b_i, b_p\}$ es un par de Euler. También, como $0 < a < e^{-e}$, de la gráfica de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se tiene que

$$0 < b < e^{-1} < b_p$$

Por otro lado, como $0 < a < 1$ y

$$a^{b} = b, \quad a^{b_i} = b_p \quad , \quad b < b_p$$

se tiene que $b_i < b$. Por consiguiente,

$$0 < b_i < b < e^{-1} < b_p < 1.$$

Corolario 3: El dominio de la función

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} x^{[n]}$$

es el intervalo $\left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$ y

i. f(g(a)) = a si $e^{-e} \le a \le e^{\frac{1}{e}}$

ii. g(f(a)) = b si $e^{-1} \le b \le e$

Demostración:

Por los Teoremas 1, 2 y 6, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge sí y sólo sí $e^{-e} \le a \le e^{\frac{1}{e}}$, por lo tanto

$$\text{dom(g)} = \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$$

Además, por el Teorema 1,

$$\text{f(g(}a\text{))} = a \quad \text{si} \quad e^{-e} \le a \le e^{\frac{1}{e}}$$

Por otro lado, supongamos que $e^{-1} \le b \le e$ y sea

$$a = \text{f(b)} = b^{\frac{1}{b}}$$

Entonces de la gráfica de la función f(x) = $x^{\frac{1}{x}}$ se tiene que

$$e^{-e} \le a \le e^{\frac{1}{e}}$$

Esto implica que a $\in$ dom(g). Sea

$$\text{c} = \lim_{n\to\infty} a^{[n]}$$

entonces por los Teoremas 1 y 2 y el Corolario 1 se tiene que

$$a = c^{\frac{1}{c}} \quad \text{y} \quad \text{e}^{-1} \le \text{c} \le \text{e}$$

Por lo tanto

$$f(b) = f(c) = a$$

Pero como $b \le e$, de la gráfica de la función f(x) se tiene que $b = c$. Así

$$\lim_{n\to\infty} a^{[n]} = b.$$

De los resultados anteriores se tiene que las funciones

$$f: [e^{-1}, e] \to \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right] \qquad\qquad g: \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right] \to [e^{-1}, e]$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} x^{[n]}$$

son biyectivas, y además $g = f^{-1}$. Por lo cual se puede obtener la gráfica de la función g a partir de la gráfica de la función f.

CONCLUSIONES

Si $a > 0$ y $\lim_{n\to\infty} a^{[n]} = b$, entonces $a = b^{\frac{1}{b}}$. Por lo tanto, la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge si $a > e^{\frac{1}{e}}$

La sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge sí y sólo sí $a \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$.

La ecuación $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = b$ tiene solución sí y sólo sí $b \in [e^{-1}, e]$. En este caso

$$x = b^{\frac{1}{b}} \quad \text{y} \quad e^{-e} \le x \le e^{\frac{1}{e}}$$

Si $b > e$ y $a = b^{\frac{1}{b}}$, entonces $1 < a \le e^{\frac{1}{e}}$ y la sucesión $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, pero b no es su límite.

REFERENCIAS

Cho, Y. & K. Park. 2001. *Inverse Functions of* $y = x^{\frac{1}{x}}$, The American Mathematical Monthly 108, 963-967.

Hernández, J. E. & E. C. de Hernández. 2004. *Soluciones racionales de la ecuación* $x^y = y^x$,

Hurwitz, S. 1961. *On the rational solutions of* $mn = n^m$ *with* $m \neq n$, The American Mathematical Monthly 74.

Knoebel, R. A. 1981. *Exponentials reiterated*, The American Mathematical Monthly 88, 235-252.

Langer, H. 1996. An elementary proof of the convergence of iterated exponentials, Elem. Math. 51. 75-77.

Slobin, H. L. 1931. *The solutions of* $x^y = y^x$, $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, *and their graphical representation*, The American Mathematical Monthly 38, 444-447.

Sved, M. 1990. *On the rational solutions of* $mn = n^m$, Math magazine 63.

Recibido septiembre de 2010, aceptado octubre de 2011.