Sitientibus Série Ciências Físicas **02**: 29-32 (2006)

Caracterização das Distribuições pelas Propriedades dos Estimadores de Bayes

Characterization of the Distributions by the Properties of Bayes Estimators

P.C. Araújo* e J.A. Cardeal†
Departamento de Ciências Exatas – UEFS
Campus Universitário, s/n, Km 03, BR 116
Feira de Santana – BA – 44031-460

Neste trabalho reapresentamos os resultados obtidos por Kagan e Karpov [1, 2], mostrando que: para a construção do Estimador Linear Bayseano a condição necessária e suficiente é que *a priori* a distribuição dos erros sejam normais.

Palavras-chave: Estimadores Lineares, Priori, Posteriori, Modelo Bayseano, Distribuição Normal

In this paper we revise the Kagan and Karpov [1, 2] work showing that: for the construction of Baysean linear estimator, the necessary and sufficient condition is that *a priori* the distribution of the errors are the normal distribution.

Keywords: Linear Estimators, Priori, Posteriori, Baysean Model, Normal Distribution.

I. INTRODUÇÃO

O método bayseano pode ser definido pelo trinômio: conhecimento, experiência e opinião [3, 4], e pode ser expresso na forma

$$p(\theta/x, H) = \frac{p(\theta/H)p(x/\theta, H)}{p(x/H)}, \qquad (1)$$

onde θ é a variável desconhecida, H é a *história* e x a variável aleatória observada [5–7]. Como

$$p(x/H) = \int_\Theta p(x, \theta/H)dF(\theta, H), \qquad (2)$$

é uma constante, então

$$p(\theta/x, H) \propto p(x/\theta, H)p(\theta/H). \qquad (3)$$

De (1) temos que: $p(\theta/x, H)$, o conhecimento, é obtido quando temos $p(x/\theta, H)$, a experiência, e $p(\theta/H)$ sua opinião [8]. Como H é comum a todos os termos podemos omiti-la e reescrever o teorema de Bayes como

$$p(\theta, x) \propto f(x/\theta)p(\theta)\,, \qquad (4)$$

com $f(x/\theta)$, a verossimilhança e $p(\theta)$, a distribuição *a priori* do parâmetro. Portanto, o Princípio da Verossimilhança (dois resultados experimentais x e y possuem a mesma informação sobre θ se $f(\theta/x)$ e $f(\theta/y)$ são proporcionais [3]) é conseqüência do enfoque bayseano [9].

II. O PARÂMETRO DE LOCAÇÃO BAYSEANO

Seja o problema da estimação do parâmetro de locação $\theta \in R$ em n observações, descritas a partir do modelo

$$x_i = \theta + \varepsilon_i \text{ para } i = 1, ...n, \qquad (5)$$

com ε_i variáveis aleatórias independentes.

Assumimos que o risco do estimador $\tilde{\theta}$ =

*Endereço Eletrônico: `pericles@uefs.br`
†Endereço Eletrônico: `cardeal@uefs.br`

$\tilde{\theta}(x_1, ..., x_n)$, do parâmetro θ, tem a forma

$$r(\tilde{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tilde{\theta}, \theta) d\Pi(\theta), \qquad (6)$$

com Π a medida de probabilidade sobre $\mathbb{R}$ e $R(\tilde{\theta}, \theta)$, a função de perda. Para este caso vamos restringir a função de perda a

$$R(\tilde{\theta}, \theta) = E_\theta(\tilde{\theta} - \theta)^2. \qquad (7)$$

O risco associado a $\tilde{\theta}$ é dado por (6), com θ uma variável aleatória independente do vetor de erros $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ e com uma priori Π. Neste caso, o problema de estimação de θ é tratado como um problema de previsão de θ, dada uma única quantidade x_i, obtida dos resultados observados.

Quando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 d\Pi(\theta) < \infty,$$

o melhor estimador de θ é a média da posteriori [1], que é a perda quadrática [10]

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= E(\theta / X_1, ..., X_n) \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta \Pi_1^n F_j'(x_j - \theta)\Pi(\theta)}{\int_{\infty}^{+\infty} \Pi_1^n F_j'(x_j - \theta)\Pi(\theta)}, \end{aligned} \qquad (8)$$

com $F_j'(x_j - \theta)$, a densidade de ditribuição dos erros ε_j (independentes). Para construção do estimador (8), denominado estimador bayseano correspondente a priori de distribuição Π, é necessário o conhecimento da priori da distribuição dos erros. Uma questão natural é saber em quais circustâncias o conhecimento, apenas do primeiro e segundo momentos das distribuições F_j e Π, é suficiente para a construção dos estimadores $\hat{\theta} = E(\theta / X_1, ..., X_n)$. Analiticamente, esta questão é reduzida ao estudo

$$E(\theta / X_1, ..., X_n) \equiv \hat{E}(\theta / X_1, ..., X_n), \qquad (9)$$

onde $\hat{E}(\theta / X_1, ..., X_n)$ é simplesmente o melhor estimador linear.

Sendo $F_j(x)$ a função de distribuição do erro ε_j, definimos

$$\phi_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_j(x). \qquad (10)$$

Como $\Pi(\theta)$ é a função de distribuição da *priori*, definimos também

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\theta} d\Pi(\theta). \qquad (11)$$

Os momentos de primeira e segunda ordem das funções de distribuição $F_j(x)$ e $\Pi(\theta)$ são dados por

$$\begin{aligned} \mu_{1j} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_j(x), \\ \mu_{2j} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{1j})^2 dF_j(x), \\ \alpha_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta d\Pi(\theta), \\ \alpha_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta - \alpha_1)^2 d\Pi(\theta), \end{aligned} \qquad (12)$$

onde o índice j é assumido para os casos onde os erros apresentam distribuições diferentes. Consideramos, também, $\mu_{2j} < \infty$ para $j = 1, ...n$ e $\alpha_2 < \infty$. Denominaremos $M_k(l)$ o espaço de todo polinômio em que $x_1, ..., x_n$ (respectivamente em k) de grau menor a 2, dotado de produto interno

$$(Q, R) = E(Q, R) = \int E_\theta(Q, R) d\Pi(\theta), \qquad (13)$$

com

$$\begin{aligned} E_\theta(Q, R) &= \int_{R^n} Q(x_1, ..., x_n) R(x_1, ..., x_n) \\ &\quad \times \prod_1^n dF_j(x_j - \theta), \end{aligned}$$

sendo o operador de projeção em M_k definido por $\hat{E}(./M_k)$.

A. Estimador Linear Bayseano

Quando

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha_2 < \infty, \quad (14)\\ 0 &< \mu_{2j} < \infty, \text{ com } j = 1, ...n, \end{aligned}$$

desprezando-se os casos em que $\alpha_2 \Pi_1^n \mu_{2j} = 0$, o melhor estimador linear de θ é o estimador bayseano

$$\hat{E}(\theta/M_1) = \hat{\theta} = c_0 + \sum_1^n c_j x_j, \quad (15)$$

com

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha_1 - \sum_1^n \frac{\alpha_2 \mu_{1j}}{\mu_{2j}}}{1 + \sum_1^n \frac{\alpha_2}{\mu_{2j}}},\\ c_j &= \frac{\frac{\alpha_2}{\mu_{2j}}}{1 + \sum_1^n \frac{\alpha_2}{\mu_{2j}}} \text{ para } j = 1, ..., n. \quad (16) \end{aligned}$$

Kagan e Karpov (1992) afirmaram que: *nos casos em que $n \geq 2$ em (14), para que tenhamos*

$$E(\theta/X_1, X_2, ..., X_n) = \hat{E}(\theta/X_1, X_2, ..., X_n), \quad (17)$$

é necessário e suficiente que as distribuições F_j e Π sejam normalmente distribuídas.

Para demonstrar o teorema de Karpov e Kagan, escrevemos

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta - \alpha_1,\\ x'_j &= x_j - \alpha_1 - \mu_{1j}\ , j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Assumindo que $\alpha_1 = \mu_{1j} = 0$, $j = 1, ..., n$. Então

$$E(\theta/X_1, ...X_n) = \sum_1^n c_j x_j. \quad (18)$$

A *esperança* de (18), multiplicada por $\exp i \sum_1^n t_j x_j$, é equivalente a

$$\begin{aligned} & E\left[\hat{\theta} \exp i \sum_1^n t_j X_j\right]\\ &= E\left[\exp i \sum_1^n t_j X_j E(\theta/X_1, ...X_n)\right]\\ &= E\left[\sum_1^n c_j X_j \exp i \sum_1^n t_j X_j\right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Utilizando os resultados (10) e (11), obtemos uma equação diferencial [11] que podemos reescrever na forma

$$\begin{aligned} & \varphi'(t) \prod_1^n \phi_j(t_j)\\ &= \underline{c} \varphi'(t) \prod_1^n \phi_j(t_j)\\ &+ \varphi(\underline{t}) \sum_1^n c_j \left[\phi'_j(t_j) \prod_{k \neq j} \phi_k(t_k)\right], \quad (20) \end{aligned}$$

com $\underline{t} = \sum_{j=1}^n t_j$ e $\underline{c} = \sum_{j=1}^n c_j$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para $\mid t_j \mid < \epsilon$,

$$\varphi(\underline{t}) \phi(t_j) \neq 0.$$

De (19), temos

$$(1 - \underline{c}) \kappa(\underline{t}) = \sum_1^n c_j h_j(\underline{t}), \quad (21)$$

com $\kappa(\underline{t}) = \frac{\varphi'(\underline{t})}{\varphi(\underline{t})}$ e $h_j(t) = \frac{\phi'(\underline{t})}{\phi(\underline{t})}$, funções diferenciáveis, para $\mid t \mid$ suficientemente pequeno (14). De (16), $c_j \neq 0$ e $(1 - \underline{c}) \neq 0$. Derivando (21) em relação a t_j e tomando $t_j = 0$, obtemos $\kappa'(\mathrm{t}) = $ *constante* em alguma vizinhança de zero. Por hipótese, $\varphi'(0) = \phi'(0) = 0$, portanto

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \exp\left(\lambda_j t^2\right) \text{ e}\\ \phi'_j(t) &= \exp\left(\lambda_j t^2\right) \text{ para}\\ & \mid t \mid < \varepsilon', \quad (22) \end{aligned}$$

provando assim que F_j e Π têm distribuição normal (condição necessária). A suficiência segue de: se o vetor $(\theta, X_1, ..., X_n)$ é normalmente distribuído, então o problema do melhor preditor para uma componente do vetor tem solução linear [12]. Portanto o teorema está provado.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos árbitros deste trabalho e ao Prof. Franz Farias pela infinita paciência.

[1] A.M. Kagan, Y.N. Karpov, *Bayesian formulation of the estimation problem for the location parameter*. Leningrad Section of the Mathematical Institute. Zap. Nauch. Semi **29**, (1972).

[2] A.M. Kagan, C.R. Rao, *Characterization Problems in Mathematical Statistic*. Canada: Wiley International (1973).

[3] C.A.B. Pereira, M.A. Viana, *Elementos de Inferência Bayeseana*. In: Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 5º, 1985. Resumos. São Paulo: ABE (1985).

[4] C.A.B Pereira, *Estatística e Informação*. Bol. C. L. da ABE **Ano XI**, (1995).

[5] D. Gamerman, H.S. Migon, *Inferência Estatística: Uma Abordagem Integrada*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ (1993).

[6] P.C. Araújo, *Método Linear Bayseano*. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo (1997).

[7] P.C. Araújo, S. Wechesler, *Método Linear Bayeseano*. In: Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 22º, 1996. Resumos. Caxambu: ABE (1996).

[8] R.H. Loschi, *Coerência, Probabilidade e Calibração*. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo (1992).

[9] L.Y.T. Inoue, *Desenvolvimento e Implicações do Princípio da Verossimilhança*. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo (1995).

[10] H. Bolfarine, M.C. Sandoval, *Introdução à Inferência Estatística*. Rio de Janeiro: SBM (2001).

[11] C.P. Simon, L. Blume, *Mathematics for Economists*. New York: W.W. Norton & Company (1994).

[12] M. Kendall, A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*. vol. 2. London: Hafner Publishing Co. (1979).