UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

Jair Carneiro de Oliveira[1]; Claudiano Goulart[2]
1. Estagiário PEVIC, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: jairc.o@hotmail.com
2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Curvatura Gaussiana; Formas Diferenciais; Triedro Móvel.

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, é um ramo da matemática pura que estuda conceitos geométricos por meio do cálculo diferencial e integral. Carl Friedrich Gauss, um dos matemáticos mais importantes desta área da matemática, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da para Geometria Diferencial, sendo o primeiro a estudar curvas e superfícies por meio de parametrizações que representam estes entes geométricos.

Um conceito geométrico bastante importante da Geometria Diferencial, é a curvatura gaussiana que é definida, em cada ponto P de uma superfície, pelo produto das curvaturas principais, isto é, como o produto da maior curvatura de uma curva que passa pelo P, com a menor curvatura da curva que também passa por P.

Em meados do século XIX, os matemáticos da época pensavam que pelo modo que a curvatura gaussiana é definida, ela dependia da forma sobre a qual a superfície estava imersa no espaço tridimensional, uma vez que a curvatura de uma curva depende deste fato. Ou seja, pensava-se que a curvatura gaussiana era uma propriedade extrínseca das superfícies. No entanto, no ano de 1827, C. F. Gauss provou que isso não era verdade, ou seja, que a curvatura gaussiana é uma propriedade intrínseca das superfícies. Daí surgiu um dos teoremas mais importantes que revolucionou a Geometria Diferencial, denominado como Teorema Egregium de Gauss que afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície depende apenas da primeira forma fundamental.

O Teorema Egregium de Gauss pode ser provado de diversas formas. Duas delas são: Por meio dos símbolos dos símbolos de Christoffel, onde é possível provar que a curvatura gaussiana de uma superfície pode ser expressa em função apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental na qual pode ser encontrada em Araújo (1988) e Carmo (2012). Uma segunda demonstração desse teorema, e mais recente, faz uso de teoria como formas diferencias e o método do Triedro Móvel. O objetivo principal desse trabalho é estudar tais demonstrações, em especial a segunda delas citadas, que pode ser encontrada em Teneblat (2008).

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA

A metodologia utilizada na presente pesquisa é de caráter teórico. Inicialmente foi feito um estudo dos conceitos básicos da Geometria Diferencial necessários para compreender o Teorema Egregium de Gauss, tais como, curvas e superfícies regulares, primeira e segunda formas fundamentais, curvatura gaussiana, isometrias, entre outros, podendo ser consultadas em Araújo (1988) e Carmo (2012). Em seguida, foi feito um estudo das formas diferencias, das equações de estruturas e do método do triedro móvel, nas quais são detalhadas em Teneblat (2008). O trabalho foi finalizado com a compreensão da demonstração do Teorema Egregium de Gauss pelo método do triedro móvel, alguns exemplos e suas consequências.

Todo estudo, foi realizado em duas etapas: Em um primeiro momento, o orientador selecionava alguns tópicos para que o pesquisa individual do aluno e, em seguida, eram apresentados seminários semanais ao orientador para verificar a compreensão dos conteúdos e esclarecer eventuais dúvidas.

Os principais materiais utilizados para pesquisa, foram livros e artigos científicos encontrados na biblioteca da Universidade Estadual de Feira de Santana ou no acervo do professor.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO

Na primeira parte da pesquisa, que foi o estudo de conceitos básicos da Geometria Diferencial, tive a oportunidade de amadurecer e de articular os conhecimentos adquiridos em diversos componentes curriculares do curso de Licenciatura em Matemática, como Geometria Analítica e Álgebra Linear I e II, Cálculo Diferencial e Integral de uma ou mais variáveis, Equações Diferenciais e Álgebra Linear Avançada. Nessa etapa, tendo como referência principal Carmo (2012), pude conhecer conceitos importantes da Geometria Diferencial como Curvas Regulares, Superfícies Regulares, Primeira e Segunda Formas Fundamentais, Curvaturas Principais, Curvatura Gaussiana e Curvatura média, isometrias entre superfícies, dentre outros. No final dessa parte, tive o primeiro contado com o Teorema Egregium de Gauss ao estudar a sua demonstração por meio dos símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{ij}^{k};\, i,j,k = 1,2$$

Onde foi possível obter a curvatura Gaussiana K de uma superfície na forma:

$$K = -\frac{1}{E}\left(\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + (\Gamma_{12}^{2})_u + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{11}^{2} - (\Gamma_{11}^{2})_v - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}\right)$$

Como os símbolos Christoffel são calculados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental E, F e G, concluímos que K depende só da primeira forma fundamental. Tal demonstração pode ser encontrada em Araújo (1988) e Carmo (2012).

Como o objetivo principal da pesquisa é compreender a demonstração do Teorema Egregium de Gauss, não apenas pelos símbolos de Christoffel, mas também utilizando uma ferramenta mais recente, que é o Método do Triedro Móvel, buscamos fazer um estudo introdutório da teoria das formas diferenciais em $\mathbb{R}^2$. Após este estudo, buscamos compreender o Método do Triedro Móvel, que consiste em definir em cada ponto P de uma superfície regular um triedro de vetores que formam uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, onde dois vetores do triedro são paralelos ao plano tangente no ponto P e o terceiro normal a superfície em P (figura 1).

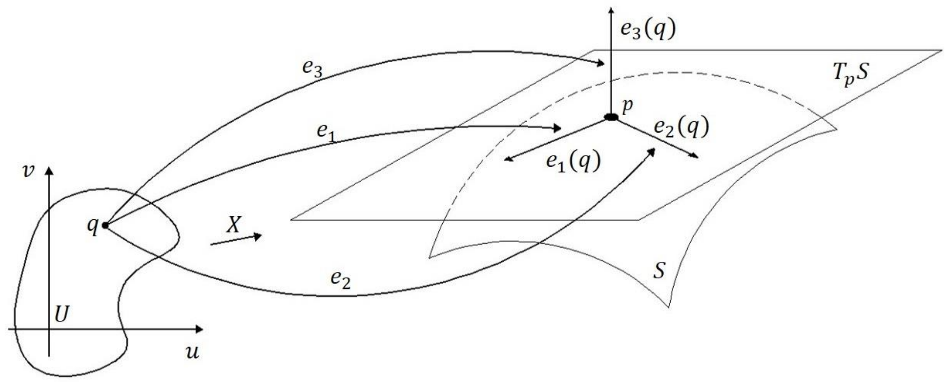

Figura 1: Triedro Móvel (Fonte: Arquivo do autor)

Um outro conceito importante que conhecemos nessa etapa, são as formas diferencias denominadas como co-referencial e formas de conexão, que são definidas a partir de um triedro móvel associado a uma parametrização de uma superfície regular. Estudamos também que tais formas diferenciais tem determinada relações, denominadas equações de estruturas, que foram essenciais para a demonstração do Teorema Egregium de Gauss.

Finalmente, estudamos a demonstração de alguns resultados que mais adiante iriamos usar na prova do Teorema Egregium de Gauss. Após isso, tivemos conteúdo necessário e suficiente para compreender a demonstração de tal teorema, onde obtemos a equação

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

Assim, a partir dessa equação podemos afirmar com base nos resultados provados anteriormente, que curvatura gaussiana de uma superfície só depende da primeira forma fundamental sem haver nenhuma relação sobre a forma na qual a superfície se encontra no espaço tridimensional. A demonstração do Teorema Egregium de Gauss pelo método do triedro móvel e os resultados necessários para tal demonstração podem ser encontrados em Teneblat (2008).

Por fim, fizemos o estudo de algumas consequências do Teorema Egregium de Gauss, tais como: O helicóide e catenóide são superfícies que possuem a mesma curvatura gaussiana em pontos correspondentes; A curvatura Gaussiana é Invariante por isometrias locais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema Egregium de Gauss tornou-se um dos mais importantes da Geometria Diferencial, uma vez que antes de sua descoberta, os matemáticos na época pensavam que a curvatura gaussiana era uma propriedade extrínseca das superfícies. Este fato, revolucionou a geometria diferencial de curvas e superfícies.

O Teorema Egregium de Gauss nos permite verificar que determinadas superfícies não podem ser localmente isométricas, como por exemplo, nenhuma vizinhança do plano que a curvatura gaussiana é nula em todos os pontos não pode ser aplicado isometricamente, mesmo localmente, sobre uma esfera que tem curvatura gaussiana positiva em todos os pontos. Com uma justificativa análoga, podemos também verificar que o toro, cilindro, a esfera e paraboloide hiperbólico são superfícies que não são duas a duas localmente isométricas. Vale destacar que a recíproca da propriedade “a curvatura Gaussiana é invariante por isometrias locais” não é verdadeira. Para verificar este fato, analisamos um contraexemplo no qual vimos que o helicoide e o funil são superfícies que tem a mesma curvatura gaussiana em pontos correspondes, no entanto não são localmente isométricas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Paulo Ventura. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1988. 244 pp. (Coleção Matemática Universitária)

CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM: 2012

TENENBLAT, Keti. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2ed. Brasília: UnB 2008.