Universidad del Atlántico

MATUA

Revista MATUA Páginas: 92–100

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. VIII , № 1,
(2021)

Received 14 May 2021; Approved 27 Jun 2021

Sobre Lyapunov y la Teoría de la Estabilidad

On Liapunov and the Stability Theory

Juan E. Nápoles Valdés[a], Miguel Vivas-Cortez[b]

[a] UNNE, FaCENA
Ave. Libertad 5450, Corrientes 3400, Argentina
jnapoles@exa.unne.edu.ar
UTN-FRRE, French 414, Resistencia, Chaco 3500, Argentina
jnapoles@frre.utn.edu.ar
[b] Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE),
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Escuela de Ciencias Físicas y Matemática,
Sede Quito, Ecuador
mjvivas@puce.edu.ec

Resumen

En este trabajo, presentamos algunas ideas sobre la historia del concepto estabilidad según Lyapunov, sus desarrollos actuales y problemas abiertos.

Palabras claves: Lyapunov, Teoría de la estabilidad, historia de las matemáticas

Abstract

In this work some ideas about the history of the stability concept from Lyapunov, its development until now and some open problems are presented.

Keywords: Lyapunov, stability theory, mathematics history

1. Introducción

La cuestión de la estabilidad ha ocupado a muchos matemáticos e investigadores y ha tenido un gran desarrollo conceptual a lo largo del tiempo. La primera contribución significativa a la misma provenía de Pierre Simon Laplace. En 1773, demostró que "*En la serie de primera aproximación de las excentricidades,* *los ejes principales de los planetas no tienen términos seculares*" [1]. La excentricidad describe el "achatamiento" de una elipse. Mayor excentricidad significa elipses largas y delgadas, excentricidad pequeñas significa elipses pequeñas y "gordas", si la excentricidad es uno, la elipse coincide con una circunferencia. Los términos seculares se relacionan con el aumento de una variable de tiempo en las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de los cuerpos, si no hay términos seculares, el tiempo no es un factor de cambio, y por lo tanto los ejes principales no cambian con el tiempo, son invariantes, lo que implica que las elipses son estables. Si los términos seculares aparecen, las cosas podrían cambiar. Cualquiera de ellos se anulan y, por lo tanto, puede haber estabilidad o inestabilidad. Laplace había obtenido este resultado con una serie de primera aproximación, una primera estimación del problema planetario, por lo que la estabilidad no se había probado todavía, pero era un paso en esa dirección.

Todos estos avances, llevaron a Laplace a afirmar que una mente que pudiera conocer en un instante dado todas las variables del Universo conocería unívocamente el pasado y el presente del mismo, es decir, el "paradigma newtoniano", describía el mundo como un reloj perfecto.

Joseph Louis Lagrange construyó sus hallazgos sobre los de Laplace entre 1774 y 1776, demostrando que "*Para todos los órdenes de aproximación de las excentricidades de las elipses (dadas como órbitas de los planetas), para todas los órdenes de aproximaciones del seno del ángulo de las inclinaciones mutuas, y para perturbaciones de primer orden con respecto a las masas, el sistema solar se estable en el sentido de que los términos seculares no se producen*" [2]. Esto mostró que, en todos los órdenes de aproximación de las excentricidades con respecto a las series de potencias de primera aproximación, relativas a las masas de los cuerpos, los términos seculares no aparecen, por lo que este caso era estable.

Simeon Denis Poisson mejora los resultados de Lagrange en 1808, mostrando que no aparecen términos seculares en los ejes principales en las series de potencias de segunda aproximación con respecto a las masas de los cuerpos. Poisson también ofrece una nueva definición de la estabilidad. Propuso que un sistema es estable si los cuerpos regresan repetidas veces cerca de sus posiciones iniciales. Esta es una definición poco precisa de la estabilidad, especialmente cuando se considera el Teorema de Recurrencia de Poincaré, que establece que en el problema de los tres cuerpos, si el movimiento permanece acotado y los cuerpos no colisionan, estos van a regresar cerca de sus posiciones iniciales. Una vez cerca el punto de partida, el argumento se puede repetir hasta el infinito para obtener la estabilidad de Poisson.

En esta nota, presentamos las ideas fundamentales del trabajo de Lyapunov, el desarrollo del llamado Segundo Método de Lyapunov y algunos problemas abiertos, sobre todo relacionados con las nuevas clases de operadores diferenciales obtenidos en los últimos años.

2. El Problema de la Estabilidad

En 1892, el matemático ruso Aleksandr Mijáilovich Liapunov [3] propuso una definición de la estabilidad aplicable a todas las ecuaciones diferenciales. Para una solución estable, cualquier otra solución de partida debe permanecer cerca de ella para siempre. O sea, una curva $x = \phi(t)$ es estable si toda otra curva cercana en las condiciones iniciales, permanece cercano para todo valor futuro de t. La estabilidad no debe confundirse con la continuidad con respecto a los datos iniciales, que exige sólo la cercanía local. Tan pronto como una solución cercana se aleja, la solución en cuestión es inestable.

[1] P. S. Laplace, Traité de méchanique céleste,1799-1825 (reimpreso como vols. 1-5 of Oeuvres. 1878?1912. Gauthier-Villars, Paris)

[2] J. L. Lagrange, Méchanique analytique, Desaint, Paris, 1788.

[3] J. A. Repilado Ramírez, R. A. Salas Roberto, Apuntes Biográficos de Alexander Mijailovich Lyapunov, Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, núm. ord. 25, enero de 1989, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

Los conceptos “estabilidad” e “inestabilidad” se originaron en Mecánica, como caracterizaciones del equilibrio de un cuerpo rígido. El equilibrio se dice estable si el cuerpo permanece en su posición original después de perturbaciones suficientemente pequeñas. Similarmente, un movimiento es llamado estable si es insensible a pequeñas perturbaciones y los cambios en los valores iniciales y los parámetros. Aquí, en el caso más simple, movimiento significa la variación de un punto con respecto al tiempo, de forma más general, entendemos por movimiento, las cantidades que determinan el estado de un sistema físico como una función del tiempo (tales como las coordenadas de Lagrange).

El primer trabajo de Lyapunov sobre la estabilidad del movimiento fue publicado en 1888 en la revista, “Resultados de la Sociedad Matemática de Járkov”. Para que se tenga una idea más clara del aporte decisivo del trabajo científico de Lyapunov en la teoría de la estabilidad del movimiento, haremos un breve esbozo de la situación en este campo antes del aporte hecho por Lyapunov.

La observación simple, muestra que algunas posiciones de equilibrio de sistemas sometido a perturbaciones pequeñas son estables; pero otras posibilidades de posición de equilibrio son en principio, imposibles de realizar desde el punto de vista práctico. Así por ejemplo, si un péndulo ocupa su posición inferior, una perturbación pequeña puede provocar solamente su oscilación alrededor del punto de equilibrio. Si después de aumentar la perturbación se logra el algún momento detener el péndulo en la posición superior, entonces hasta un pequeño golpe provoca su caída.

En el ejemplo dado, el problema sobre la estabilidad se resuelve de manera elemental, pero en el caso general no siempre queda claro bajo cuáles condiciones, la posición de equilibrio es estable. En el 1644 los criterios de estabilidad de los sistemas de cuerpos en equilibrio sometidos a la fuerza de gravedad en el caso general, fueron formulados por E. Torricelli, y en 1788 Lagrange demostró un teorema, que brindaba condiciones suficientes del equilibrio estable de sistemas conservativos arbitrarios.

A mediado del siglo XIX en la ciencia y la tecnología, surgieron problemas que exigían del planteamiento del problema general de la estabilidad, no solo del equilibrio, sino también del movimiento, uno de estos problemas era el siguiente: la estabilidad del regulador centrífugo contenido en las máquinas de vapor de pequeñas potencias se mantenía por las vueltas del motor. Con el aumento de la potencia de la mecánica, el trabajo del regulador presentó problemas: no se garantizaba la seguridad del regulador y además se rompía el motor a causa del régimen inestable de trabajo. Este fenómeno no fue entendido por los ingenieros y técnicos de esa época y creó una crisis en la construcción de motores. En menos de una década, Maxwell[4] (1868) y Vichnegradski[5] (1876-1877), principalmente, demostraron que la solución de este problema, así como el desarrollo general de la teoría de regulación, exigían ante todo el establecimiento de los criterios del movimiento estable.

Maxwell publicó su artículo “On Governors”, en el cual describe como derivar ecuaciones diferenciales lineales para varios tipos de controladores (governors). Este trabajo puede considerarse como el origen de la Teoría de Control. Los matemáticos y físicos sabían que la estabilidad estaba determinada por los polos de la ecuación característica y que un sistema era inestable si la parte real de las raíces características era positiva, pero no sabían como determinar la ubicación de la parte real de as raíces complejas sin calcular las raíces de la ecuación. Maxwell mostró que examinando los coeficientes de las ecuaciones de orden 2,

[4]James Clerk Maxwell. Físico escocés, nació en Edimburgo, Escocia, el 13 de junio de 1831 y murió en Cambridge, Inglaterra, el 5 de noviembre de 1879. Conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. Con motivo de la conmemoración del centenario de su nacimiento, Albert Einstein describió el trabajo de Maxwell como “*el más profundo y provechoso que la física ha experimentado desde los tiempos de Newton*”.

[5]Ivan Alexeïevitch Vischenegradski. Multifacético hombre ruso, nació el 1ero de enero de 1831 en Vishny Volochek y murió el 6 de abril de 1895 en Sant Petersburgo. Fue político, científico y mecánico, y ministro de las Finanzas del Zar Alejandro III del 1ero de enero de 1887 al 30 de agosto 1892.

3 y 4 la estabilidad podía determinarse (dió condiciones necesarias y suficientes). En su artículo Maxwell también establece una diferenciación entre Reguladores o Moderadores (los conocidos actualmente como reguladores proporcionales) y Controladores (reguladores con acción integral). La principal contribución de Maxwell fue demostrar que el comportamiento de un sistema de control automático en la vecindad de una posición de equilibrio, se podía aproximar por una ecuación diferencial lineal y por lo tanto, la estabilidad se podía discutir en términos de las raíces de la ecuación algebraica asociada. Una solución especialmente elegante y sencilla, fue dada por el ingeniero ruso Vichnegradski, fundador de la teoría de la regulación automática. Su conocida memoria "Sobre los Reguladores de Acción Directa"(1876, en ruso) constituyó el punto de partida de la teoría de la regulación de las máquinas, para hacer frente a las exigencias de la práctica industrial[6]. Posteriormente se desarrollaron nuevos métodos a partir de los trabajos de Poincaré, Andronov, Jaiquin, Witt, Bulgakov,... los que han contribuido al desarrollo de esta dirección, y sus resultados son considerados como clásicos.

A finales del siglo XIX aparecieron trabajos, en los cuales el problema de la estabilidad del movimiento fue tratado desde una posición general, se resolvieron algunos problemas particulares y al tratar el mismo método de resolución a otros problemas, se llegaban a contradicciones. La insuficiencia fundamental de los trabajos de este tiempo, residía en que los autores al hacer el análisis de la ecuación del movimiento, perturbado, partían de las ecuaciones lineales, sin tener en cuenta la influencia de los términos de orden mayor. Es a Lyapunov a quién corresponde el honor de dar solución completa a la problemática anteriormente analizada. Los trabajos y resultados obtenidos por éste, desde 1888 hasta 1892, fueron de gran valor y culminaron con su obra capital "Problema general sobre la estabilidad del movimiento". Este trabajo tiene tantas ideas y resultados de primer orden que toda la historia de la teoría de la estabilidad del movimiento se acostumbran a dividir en dos etapas: antes y después de Lyapunov, lo que lo sitúan como el creador de la teoría moderna de la estabilidad, en él se da la definición de estabilidad del movimiento que se utiliza en nuestros días y que es conocida como estabilidad según Lyapunov. Este trabajo fue defendido en 1892, en opción al grado de Dr. en Matemáticas Aplicadas. Después de la defensa se le otorgó la categoría de Profesor, equivalente hoy en día a nuestra categoría de Profesor Titular. En sus trabajos de esta época se refleja que él fue el primero en estudiar desde el punto de vista matemático el problema sobre la estabilidad del equilibrio y del movimiento para sistemas mecánicos en un número finito de grados de libertad, también obtuvo una serie completa de resultados brillantes en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un grupo de sus trabajos está dedicado a la teoría de la figura de equilibrio de líquidos giratorios. Fue el primero en demostrar la existencia de figuras de equilibrio para líquidos homogéneos y débilmente no homogéneos dando respuesta a un problema planteado por Chebyshev.

En 1900 fue nombrado miembro correspondiente de la Academia de Ciencias y en 1901 Académico por la Cátedra de Matemática Aplicada la cual estaba vacante desde la muerte de Chebishev. En 1902 regresa a Moscú dedicándose completamente al trabajo científico, retorna al estudio de las figuras de equilibrio y su aplicación en la teoría de los cuerpos celestes. En este campo le pertenecen descubrimientos excepcionales de mucha profundidad.

Lyapunov muere el 3 de Noviembre de 1918. Sus trabajos en el campo de las figuras de equilibrio representa en sí la primera investigación sobre la teoría de las ecuaciones integrales no lineales, también se dedicó al estudio del problema de Dirichlet, a las cuestiones relacionadas con la teoría de las responsabilidades junto al académico A. A. Markov, donde logró una generalización significativa y puntualizó las condiciones bajo las cuales tiene lugar el famoso teorema del límite central.

[6]Detalles técnicos pueden ser consultados en U. P. Da Silva, J. H. Dantas, Análise de Estabilidade do Regulador Centrífugo, FAMAT em Revista, 4, Abril 2005, 131-140 y L. S. Pontriaguin, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Pueblo y Educación, La Habana, 1982.

Obtuvo resultados significantes en el campo de la Física-Matemática y corrigió resultados relacionados con la teoría del surgimiento de la Luna, donde demostró a Poincaré y Darwin, lo erróneo de no considerar la llamada "Segunda Aproximación".

Además de los amplios resultados concretos obtenidos por Lyapunov en los diferentes campos de trabajo, dejó como ejemplo, múltiples y originales métodos matemáticos para el estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de la estabilidad, de amplia aplicación actualmente en la Física, Astronomía, Química, Biología y desde el punto de vista técnico, el funcionamiento de diferentes mecanismos, aviones, satélites, etc.

La etapa final de la vida de este gran científico transcurre con problemas relacionados a su visión, viéndose en la necesidad de recibir ayuda de su esposa para redactar los resultados obtenidos en sus investigaciones. Esto no fue en vano ya que los resultados científicos de Lyapunov fueron, y son, ampliamente valorados en Rusia y en el extranjero. Fue elegido miembro de honor en muchas universidades, miembro correspondiente de las Academias de Ciencias de Rumania y de París.

Lyapunov explica el propósito que lo animaba en la Introducción de su principal obra: "*El problema que yo me he propuesto al comenzar el presente estudio, puede ser formulado como sigue: indicar los casos donde la primera aproximación resuelve realmente el problema de la estabilidad y dar métodos los cuales permitan resolver, al menos en algunos casos, cuando la primera aproximación no es suficiente... Todos los procedimientos pueden ser divididos en dos categorías. En la primera de ellas, incluimos aquellas que se reducen al estudio inmediato del movimiento perturbado, y el cual, consecuentemente depende de la obtención de la solución general o particular de la ecuación considerada... El conjunto de todos estos métodos de estudio será llamado el primer método. En la otra categoría, incluiremos todos los tipos de procedimientos que son independientes de la búsqueda de las soluciones de la ecuación diferencial del movimiento perturbado. Este es el caso, por ejemplo, para el bien conocido método de estudiar la estabilidad del equilibrio en el caso de la existencia de un potencial... El conjunto de todos los procedimientos en esta categoría se llamará el segundo método*". Todo el mundo conoce hoy lo que significan estos métodos en la teoría de la estabilidad, pero Lyapunov introdujo también en su memoria muchos e importantes conceptos y resultados en la teoría de ecuaciones lineales y no lineales, por ejemplo, la definición precisa de estabilidad y estabilidad condicional, los conceptos de números característicos o exponentes de Lyapunov de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, los conceptos relacionados de sistemas normales y reducibles, el concepto de funciones de Lyapunov, etc.

En este trabajo Lyapunov dejó bien explícito que su segundo método estaba inspirado por la demostración de Lejeune Dirichlet del teorema de Lagrange sobre el estudio del equilibrio. Dada la importancia de este trabajo de Lyapunov, queremos presentar aquí el índice general de esta obra:

Capítulo 1. Análisis preliminar. Generalidades sobre la cuestión considerada. Sobre algunos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Sobre un caso general de ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado. Algunas proposiciones generales.

Capítulo 2. Estudio de los movimientos estables. Sobre ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Estudio de las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado. Soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado.

Capítulo 3. Estudio de movimientos periódicos. Sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos. Algunas proposiciones concernientes a la ecuación característica. Estudio de las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado. Una generalización.

Nota: Complementos a teoremas generales sobre estabilidad.

El Segundo Método, también llamado "Método Directo", no sólo se usa actualmente para probar teoremas de estabilidad y de mecánica teórica. Actualmente, este método es aplicado a problemas prácticos de la mecánica y de las oscilaciones eléctricas, particularmente, en el control ingenieril. La teoría del método directo, ha recibido un considerable avance en los últimos años y se aproxima a un cierto estado de completamiento. Han aparecido algunos trabajos en las últimas décadas, relacionados con el estudio del comportamiento de las trayectorias de ecuaciones diferenciales no lineales, que representan generalizaciones paulatinas de la ecuación del péndulo. En estos trabajos, se intentan hacer planteamientos sobre la estabilidad del equilibrio, sin usar la forma explícita del movimiento perturbado, estos planteamientos se hacen usando (en adición a la ecuación diferencial o sistema) determinada función o funciones definidas en el Plano de Fases. Estas funciones usualmente se denominan Funciones de Lyapunov. En general el signo de la función de Lyapunov y el de su derivada son considerados y a veces se incluyen ciertas relaciones con otras funciones que cumplen determinadas propiedades. Después del trabajo de Lyapunov vino una etapa de modificaciones, extensiones, reformulaciones y generalizaciones de sus teoremas de estabilidad e inestabilidad. También se realizaron investigaciones sobre los correspondientes teoremas inversos y las cuestiones relativas a la obtención de funciones de Lyapunov, en donde muchos grandes matemáticos, entre los que se encuentran: N. A. Chetaev, V. I. Zubov, A. Barbashin, N. N. Krasovskii, W. Hahn, L. S. Pontriaguin, G. D. Birkhof, y R. Bellman entre otros, hicieron grandes aportaciones a esta teoría de la que Lyapunov es considerado el iniciador. El método admite una interpretación geométrica muy sencilla, la cual es muy probable sea debida a Chetaev y que es particularmente útil en problemas de Matemática Aplicada. La formulación de estabilidad de Lyapunov, en el problema de la estabilidad del movimiento fue en dos direcciones:

1. Por un lado, según el método de la primera aproximación, que es aplicable cuando la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones linealizadas. En este sentido obtuvo la solución completa para los llamados movimientos "estacionarios", en los que las ecuaciones del movimiento perturbado no dependen explícitamente del tiempo; también presentó soluciones para una gran cantidad de movimientos "no estacionarios", así como un detallado estudio de movimientos "periódicos"

2. Por otro lado está el Segundo Método directo de Lyapunov, que permite estudiar la estabilidad sin conocimiento alguno de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Basta con que para el sistema en estudio se pueda definir una función con características apropiadas, y que actualmente se conoce como Función de Lyapunov.

La función que se menciona detecta si el flujo cruza a una pequeña esfera alrededor del punto de equilibrio, de adentro hacia afuera o de afuera hacia adentro.

En el primer caso tenemos inestabilidad, mientras que en el segundo el equilibrio es estable. Desafortunadamente, esta idea geométrica tan sencilla no es tan fácil de realizar, ya que no existe un procedimiento general para encontrar Funciones de Lyapunov. Es intuitivamente claro que si al acercarse a un estado de equilibrio de un sistema físico la energía del sistema es siempre decreciente, entonces el equilibrio es estable. Las Funciones de Lyapunov son una simple extensión del concepto de energía. Los teoremas del método directo de Lyapunov son una generalización de la idea física de equilibrio estable e inestable. Por lo tanto, un caso particular de la teoría de Lyapunov (del método directo) lo representa el teorema de Lagrange (demostrado por Dirichlet), que establece lo siguiente:

Teorema 1 (Lagrange). Una posición donde la energía potencial es un mínimo aislado, es un equilibrio estable. Lyapunov fue el primero que se preguntó: " ¿Podría uno establecer que si la energía potencial no tiene un mínimo, entonces el equilibrio es inestable?". Se preguntaba acerca de la invertibilidad del teorema de Lagrange. Para dar respuesta a este cuestionamiento estableció dos teoremas: Teorema 2 (Lyapunov) Si en una posición de equilibrio aislada la energía potencial no tiene un mínimo, y si olvidándose de los términos de orden superior ésta puede ser expresada como un polinomio de segundo orden, entonces el equilibrio es inestable. Teorema 3 (Lyapunov) Si en una posición de equilibrio aislada la energía potencial tiene un máximo con respecto a las variables de orden más pequeño que aparecen en la expansión de esta función, entonces el equilibrio es inestable.

El estudio de la acotación de las soluciones de una ecuación diferencial, ya sea fraccionaria o no, juega un papel importante en la teoría cualitativa (detalles adicionales pueden ser consultados en [8, 9, 10, 11, 12, 13]). Además, el comportamiento cualitativo de las soluciones juega un papel importante en muchos fenómenos del mundo real relacionados con la investigación aplicada. Con base en los resultados anteriores, podemos obtener cotas para las soluciones de ecuaciones diferenciales generalizadas.

A continuación, presentamos algunos conceptos necesarios.

En [16] (ver también [1] y [17]) se definió una derivada generalizada de la siguiente forma.

Definición 2.1. *Dada una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. La $N-$derivada de f de orden α es definida por*

$$N_F^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon F(t, \alpha)) - f(t)}{\varepsilon} \tag{1}$$

para todo $t > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ siendo $F(\alpha, t)$ una cierta función absolutamente continua. Si f is N-diferenciable y $\lim_{t \to 0^+} N_F^{\alpha} f(t)$ existe, entonces definimos $N_F^{\alpha} f(0) = \lim_{t \to 0^+} N_F^{\alpha} f(t)$.

Si f is N-diferenciable, entonces $N_F^{\alpha} f(t) = F(t, \alpha) f'(t)$ donde $f'(t)$ es la derivada ordinaria.

Observación 2.2. *Este operador generalizado contiene muchos de los operadores locales conocidos (por ejemplo, la derivada conforme de [6] y el no conforme de [2, 15])) y ha demostrado su utilidad en diversas aplicaciones, cuya mención detallada excede los límites de este trabajo.*

Ahora, daremos la definición de una integral generalizada (cf. [5]). A lo largo del trabajo consideraremos que el núcleo F es una función absolutamente continua.

Definición 2.3. *Sea I un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $a, t \in I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. El operador integral generalizado $J_{F,a}^{\alpha}$, derecho e izquierdo, está definido para toda función localmente integrable f sobre I como*

$$J_{F,a+}^{\alpha}(f)(t) = \int_a^t \frac{f(s)}{F(t - s, \alpha)} ds, t > a. \tag{2}$$

$$J_{F,b-}^{\alpha}(f)(t) = \int_t^b \frac{f(s)}{F(s - t, \alpha)} ds, b > t. \tag{3}$$

Observación 2.4. *Como se señaló en [5], muchos operadores integrales fraccionarios se pueden obtener como casos particulares del anterior, bajo ciertas opciones del núcleo F. Por ejemplo, si $F(t - s, \alpha) = \Gamma(\alpha)(t - s)^{1-\alpha}$ se obtiene la integral fraccionaria de Riemann-Liouville derecha (de manera similar a la izquierda).*

Sea $\alpha \in (0, 1]$, $a \geq 0$, $t_0 \geq a$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y $f : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en (C, Lip) sobre $[a, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Consideremos el siguiente problema:

$$N_F^{\alpha} x(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Definición 2.5. *La solución trivial $x \equiv 0$ de* (4) *se dice* estable *si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $|x_0| < \delta$, entonces $|x(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$; es* uniformemente estable *si existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x_0| < \delta$, entonces $|x(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 \geq a$.*

Para la ecuación (4) una Función de Lyapunov $V(t, x) \in C^{\alpha}(I \times \mathbb{R}^n)$ puede ser construida de tal forma que $V(t, 0) = 0$ para todo $t > 0$. Usaremos la notación $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r, r > 0\}$.

Definición 2.6. *Sea V una función N-derivable (escalar o vectorial), $V : I \times S_r \to \mathbb{R}^p$($p = 1$ o $p = m$, respectivamente), y $x(t)$ sea una solución de 4, la cual existe y está definida sobre $I \times S_r$. Junto a la función $V(t, x)$ definimos para $(t, x) \in I \times S_r$ la N-derivada de V del siguiente modo*

$$
{}_{+}N^{\alpha}_{(4)}V(t,x) = \lim_{h\to 0}\sup \frac{[V(t+h, x+F(t,\alpha)f(t,x)) - V(t,x)]}{h} \tag{5}
$$

o sea, es la N-derivada de $V(t, x)$ con respecto a (4) (o a lo largo de las soluciones de (4)).

Definición 2.7. *Una función continua $\beta : [0, t) \to [0, +\infty)$ se dice que pertenece a la clase K si es estrictamente creciente y $\beta(0) = 0$.*

En [3] se estudió el problema de la estabilidad para (4) (para un caso particular, la Ecuación de Liénard) usando la derivada no conforme N^{α}_{F}, con $F(t, \alpha) = e^{t^{-\alpha}}$ de [2] y se obtuvo el siguiente resultado (entre otros):

Teorema 2.8. *Suponga que para el sistema (4) exista función N-diferenciable $V(t, x)$ y funciones $a, b \in K$, tales que*

i) $V(t, x) \geq a(\|x\|)$,

ii) $V(t, x) \leq b(\|x\|)$, *and*

$$
{}_{+}N^{\alpha}_{(4)}V(t,x) \leq 0, \tag{6}
$$

para todo $(t, x) \in I \times S_r$. Entonces la solución $x = 0$ del sistema (4) es uniformemente estable.

En [7] se obtuvieron varios resultados cualitativos para (4):

Teorema 2.9. *Sea $\alpha \in (0, 1]$, $t_0 \in [a, \infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, y $f : [a, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en (C, Lip) sobre $[a, \infty) \times \mathbb{R}$. Entonces el problema (4) es equivalente a*

$$
x(t) = x_0 +_{N_F} J^{\alpha}_{t_0} f(s, x(s))(t). \tag{7}
$$

Teorema 2.10. *Suponiendo que f, $|f(t, x(t))| < M(t, x)$ y que existe un δ_0 tal que*

$$
\left|{}_{N_F}J^{\alpha}_{t_0}M(t,\delta)(+\infty)\right| \leq M_2, M_2 > 0, \tag{8}
$$

se cumple para todo $0 \leq \delta \leq \delta_0$, entonces la solución trivial $x \equiv 0$ de (7) es uniformemente estable.

Estos resultados muestran que no es necesario la utilización del Segundo Método de Lyapunov, aunque debe ser sustituido por diversas desigualdades que no siempre son factibles de obtener.

Referencias

[1] A. Fleitas, J. E. Nápoles, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta. *On the generalized fractional derivative*, Revista de la UMA, to appear.

[2] P. M. Guzmán, G. Langton, L. Lugo Motta, J. Medina, J. E. Nápoles V., *A New definition of a fractional derivative of local type*. J. Mathem. Anal. 9(2), pp. 88-98. 2018.

[3] P. M. Guzmán, L. Lugo Motta, J. E. Nápoles V. *On the stability of solutions of fractional non conformable differential equations*. Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 65(2020), No. 4, 495-502 DOI: 10.24193/subbmath.2020.4.02

[4] P. M. Guzmán, L. Lugo Motta, J. E. Nápoles V., *A note on stability of certain Lienard fractional equation*. International Journal of Mathematics and Computer Science, 14(2019), no. 2, 301-315.

[5] P. M. Guzmán, L. M. Lugo, J. E. Nápoles Valdés, M. Vivas. *On a New Generalized Integral Operator and Certain Operating Properties*. Axioms 2020, 9, 69; doi:10.3390/axioms9020069.

[6] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*. J. Comput. Appl. Math., 264, 65-70 (2014).

[7] F. Martínez, J. E. Nápoles V., *A note on the asymptotic properties of a generalized differential equations*. JFCA-2022/13(1), 30-41

[8] J. E. Nápoles Valdés, *On the continuability of solutions of bidimensional systems*. Revista Extracta Mathematicae 11(1996), 366-368

[9] J. E. Nápoles Valdés. *El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Consideraciones (auto)críticas, Boletín de Matemáticas, V(1998), 53-79

[10] J. E. Nápoles Valdés, *A note on the asymptotic stability in the whole of nonautonomous systems*. Revista Colombiana de Matemáticas 33(1999), 1-8

[11] J. E. Nápoles Valdés, *Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales*. Lecturas Matemáticas, Volumen 25 (2004), 59-111

[12] J. E. Nápoles Valdés, *Las ecuaciones diferenciales ordinarias como signos de los tiempos*. Revista Eureka 21(2006), 39-75

[13] J. E. Nápoles Valdés, *Ecuaciones diferenciales y contemporaneidad*. Revista Brasileira de História da Matemática 7(14), 213-232, 2007

[14] J. E. Nápoles, *Generalized fractional Hilfer integral and derivative*. Contrib. Math. 2 (2020) 55-60 DOI: 10.47443/cm.2020.0036

[15] J. E. Nápoles V., P. M. Guzmán, L. Lugo Motta, *Some New Results on the Non Conformable Fractional Calculus*. Advances in Dynamical Systems and Applications, Volume 13, Number 2, pp. 167?175 (2018).

[16] J. E. Nápoles, P. M. Guzmán, L. M. Lugo, A. Kashuri. *The local generalized derivative and Mittag Leffler function*. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, Sigma J Eng & Nat Sci 38 (2), 2020, 1007-1017

[17] D. Zhao and M. Luo. *General conformable fractional derivative and its physical interpretation*. Calcolo, 54: 903-917, 2017. DOI 10.1007/s10092-017-0213-8.