View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Archive Ouverte a LUniversite Lyon 2

Ludique : une logique sans axiome d'identité

Alain Lecomte

To cite this version:

Alain Lecomte. Ludique : une logique sans axiome d'identité. 23 pages. 2008. <hal-00422691>

HAL Id: hal-00422691

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00422691

Submitted on 8 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ludique : une logique sans axiome d'identité ?

Alain Lecomte[*][†]

1 Introduction : l'importance des règles structurelles

1.1 Rappels de logique linéaire

Depuis qu'on s'intéresse aux logiques sous-structurelles ([28]), on étudie les effets des variations dans la présence et l'absence des règles structurelles de la logique, sur le système obtenu. Curieusement, plus on élimine de règles structurelles, plus on tend à s'éloigner de l'idéalisme des formules pour se rapprocher du concret matériel des ressources ou des inscriptions locales. On peut faire remonter à 1958 et à l'article particulièrement fécond de J. Lambek ([15]) le premier système logique se privant des règles de contraction, d'affaiblissement et de permutation dans le cadre d'une présentation de la logique en termes de calcul des séquents. La suppression des règles de contraction et d'affaiblissement se trouve être le ressort particulier qui permet à la logique linéaire d'exister ([7, 8]). On notera toutefois que cette dernière n'est pas seulement une logique "sous-structurelle" mais, parce que son but est de permettre l'analyse fine des preuves et des programmes en termes de sémantique dénotationnelle, elle est surtout un cadre à l'intérieur duquel on peut exprimer aussi bien la logique intuitionniste que la logique classique. On utilise pour ce faire les fameuses exponentielles (**!, ?**) et on obtient par exemple une décomposition de l'implication classique, en :

$$A \Rightarrow B \;\equiv\; !A \multimap B$$

équivalence qui signifie que pour passer du caractère concret d'une ressource à l'idéation d'une formule, encore faut-il admettre un opérateur qui rende la ressource pérenne (rôle de " **!**"). L'implication linéaire $\multimap$ consomme bien alors un A, mais il en reste pour une réutilisation ultérieure.

[*]UMR "Structures Formelles de la Langue", CNRS-Université Paris 8 - Vincennes-Saint-Denis
[†]en collaboration avec Myriam Quatrini, Institut de Mathématiques de Luminy

1.2 Du traitement des paradoxes

Jouer ainsi sur le passage du concret à l'abstrait permet de réexaminer de vieilles questions et de les éclairer sous un jour nouveau. Ainsi, la décomposition ci-dessus fournit un instrument d'analyse intéressant pour l'étude des *paradoxes*. Certains auteurs (Shirohata, 1993) ont en effet mis en évidence la dissolution du paradoxe de Russell dans le cadre linéaire. Soit $E = \{X; X \notin X\}$, de $E \in E$ on déduit $E \notin E$, mais alors la prémisse est consommée : elle n'est plus là pour impliquer une contradiction. On est simplement conduit à envisager une suite infinie et alternative d'instants où on asserte soit l'un soit l'autre de $E \in E$ et de $E \notin E$. Même raisonnement pour le paradoxe du Menteur. La contradiction ne réapparaît que pour les formules affectées du symbole de réutilisation d'une ressource : **!**. L'analyse linéaire nous permet donc d'opérer au sein des connaissances, une distinction entre celles qui sont *transitoires* et celles qui sont *pérennes*. Seules ces dernières sont susceptibles d'entraîner des contradictions.
Le genre de système obtenu par ce jeu sur les règles structurelles est justement qualifié de *sensible aux ressources*, nous devons comprendre par là qu'il est sensible à la *quantité* voire à *l'ordre* dans lequel sont données les ressources disponibles.

1.3 Les logiques sensibles aux ressources et la langue

La suppression de la règle de permutation est à l'origine d'une sensibilité à *l'ordre* : à condition de se cantonner dans la partie multiplicative du calcul et de restreindre celui-ci à des séquents intuitionistes, on obtient un système linéaire non commutatif correspondant au calcul de Lambek (avec seulement la différence que, dans ce dernier, on ajoute la contrainte d'antécédent non vide afin d'éviter la présence de types A/A (ou $A \setminus A$) qui ne seraient associés à aucun élément matériel). Cette sensibilité à l'ordre est à la source de l'emploi de ce calcul en *linguistique*. La *syntaxe des langues naturelles* est à première vue en effet l'exemple le plus typique d'un système sensible à la fois à la quantité et à l'ordre des ressources. Au niveau le plus élémentaire, un sujet ou un objet ne se consomment qu'une fois et on les détermine à partir des configurations ordonnées où ils figurent dans l'analyse de la phrase[1].
Le programme minimaliste de Chomsky contient ainsi l'idée que l'une des opérations fondamentales de la syntaxe, *Move* dite aussi depuis peu *Internal Merge*, doit son existence à la nécessité de vérifier la présence de traits formels (non interprétables) sur des constituants ou des têtes lexicales. Lorsqu'on doit vérifier qu'un constituant possède bien le trait requis, on le déplace en une certaine position où peuvent s'échanger la production et la consommation du trait en question. L'annulation du trait ayant été effectuée, les objets syntaxiques ne peuvent plus bouger (cf. [30, 31, 32]).
De nombreuses applications de la logique linéaire et de ses systèmes dérivés à la linguistique formelle ont déjà eu lieu, qu'elles s'inscrivent dans le cadre des grammaires

[1]Du moins dans les langues dites configurationnelles

catégorielles ([22, 23, 24, 25, 26]) ou du programme minimaliste ([21, 17, 18, 20, 3, 1, 19]).
En particulier, les travaux de M. Moortgat ont mis l'accent sur une autre règle sur laquelle on peut jouer dans la présentation d'un système : la règle *d'associativité*. Même si l'on juge parfois qu'un système sans associativité est de peu d'intérêt mathématique ([10]), sur le plan linguistique, il fournit une sensibilité à la *constituance*, autrement dit à la présentation possible d'une structure syntaxique sous une forme d'arbre. Que reste-t-il dans un système logique dépourvu de contraction, d'affaiblissement, de permutation et d'associativité ? Il reste ce que Moortgat ([23]) appelle une *logique de pure résiduation*, correspondant au calcul **NL** de J. Lambek ([16]).

$$\begin{array}{ll} (REFL) & A \rightarrow A \\ (TRANS) & si\ A \rightarrow B\ et\ B \rightarrow C,\ alors\ A \rightarrow C \\ (RES) & A \rightarrow C/B\ ssi\ A \bullet B \rightarrow C\ ssi\ B \rightarrow A \setminus C \end{array}$$

$(REFL)$ est la réflexivité de la relation de déduction, de même que $(TRANS)$ est la transitivité de cette même relation. $(REFL)$ correspond à ce que, dans un calcul des séquents, on représente par l'axiome d'identité :

$$A \vdash A$$

et $(TRANS)$ à la règle de coupure (ici dans sa version intuitionniste) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A, \Delta' \vdash B}{\Delta, \Gamma, \Delta' \vdash B}$$

Si la règle de coupure paraît requise dans tout système logique qui se respecte, pour la raison qu'intéressés au premier chef par le concept de *preuve*, nous ne saurions nous passer d'un moyen de les composer entre elles (ni d'un moyen pour les tranformer éventuellement en preuves *analytiques* c'est-à-dire sans coupures, grâce au théorème d'élimination bien connu), en revanche la question peut encore se poser en ce qui concerne l'axiome d'identité. C'est cette question que nous allons aborder dans cet article. Elle va nous conduire, comme nous allons le voir, vers des systèmes grâce auxquels on peut cerner d'une manière encore plus précise la notion concrète de ressource.

2 Un système sans règle d'identité ?

2.1 (Im)permanence de la signification

Il faut noter au préalable que, dans tous les systèmes où on l'utilise, l'axiome d'identité va de pair avec la décomposition atomique des formules : les règles concernant les symboles logiques sont telles en effet qu'il soit toujours possible de se restreindre à une forme de l'axiome où A est un atome. L'axiome d'identité exprime donc une permanence de la signification des formules atomiques, et donc par extension une permanence de la signification de formules composés des mêmes atomes avec les mêmes opérations logiques aux mêmes endroits. Cette conception s'accorde bien aux mathématiques, pour autant qu'elles soient fondées sur un tel principe d'identité du symbole à lui-même. Elle convient peut-être moins bien aux domaines extra-mathématiques, caractérisés par l'emploi du langage ordinaire.

2.2 Locativité

C'est C. Hamblin ([12]) qui pointe particulièrement bien la dépendance du sens par rapport à un *lieu* dans son livre sur les *Fallacies*. Il s'appuie sur Aristote ([4]) et son étude des sophismes qui entrent dans la classe générale de ceux qui résultent du fait qu'une même formulation peut cacher des significations différentes. Ainsi de l'apparent syllogisme :

Tous les métaux sont des éléments
Le bronze est un métal
Donc le bronze est un élément

dont le caractère fallacieux est du au fait que le terme *métal* est employé dans deux sens différents, autrement dit localisés dans deux théories différentes : la première est la Chimie standard, la seconde une sorte de sens commun qui assimile les aliages à des métaux.

De fait, un bon nombre de *faux arguments* proviennent du fait que des termes en apparence semblables sont en réalité utilisés dans des sens distincts, mais dire cela semble insuffisant car la notion de sens est floue. On dira plutôt que des termes en apparence identiques (car exprimés par les mêmes suites de caractères) peuvent en réalité relever de discours différents quand ils sont *positionnés* de manières différentes dans un discours argumentatif.

La logique formelle classique est mal armée pour prendre en compte de tels cas car elle est évidemment basée sur l'idée d'identité des formules : telle formule A énoncée à tel moment d'un discours (ou à tel *lieu*) est identique à cette autre formule également désignée par A intervenant à un autre moment ou à un autre lieu.

Hamblin (p. 286) rappelle cela fort justement :

> an approach such as that of the previous chapter [ie : the formal classical one], by locating most of the properties of the locutions in propositional letters such as 'A', 'B', 'S' and 'T', smuggles in the fiction that the question of meaning can be isolated from that of dialectical properties. When the letter 'S', say, is used twice or more in a given example it is by convention the case that it has the same meaning at each occurrence ; but if meanings are to be allowed to change with context, and to be determined by the extended

context, the question of whether the meaning of a given symbol changes is to be answered a posteriori and the question should not be begged by writing in an assumption of constancy.

D'où l'intérêt d'une conception qui dissocie les formules et les lieux.
Or, une logique sans réflexivité est une logique où ce sont les lieux qui sont en premier repérés, et les premiers à compter : c'est le sens qu'il faut donner à l'article de Girard *Locus Solum* ([9]).

2.3 Lieux et adresses

Soit donc un système d'adresses.
On donne ici la définition de J. Y. Girard dans [10] :

Définition 1 *Un* biais*, notation i, j, k ..., est un entier naturel. Une* ramification*, notation I, J, K, ... , est un ensemble fini de biais. Un* répertoire *est un ensemble quelconque de ramifications. Un* locus*, ou* lieu*,* adresse*, notation* $\sigma, \tau, \nu, \xi, ...$ *est une suite finie* $< i_1, i_2, ..., i_n >$ *de biais. La* parité *d'un* locus *est dfinie comme la parité de sa longueur n.*

Ces adresses sont celles où peuvent venir se loger des êtres un peu particuliers, nous les appellerons formules pour commencer, même si notre ambition est de "reconstruire" les formules par la suite, en tant qu'objets jouissant de certaines bonnes propriétés de comportement vis-à-vis d'autres objets de la même espèce (autrement dit des *types*, où l'on retrouve ainsi l'analogie entre *types* et *formules*). Ce sont donc des *pré-formules* ou des *proto-formules*. Dans l'idéal, on pourrait s'en passer totalement, on en a besoin ici simplement pour nous guider heuristiquement dans la conception (le *design*) des réseaux d'adresses.

2.4 Dessins et polarité

Un réseau d'adresses est justement appelé un *dessin*. L'aide que nous recevons des *pré-formules* qui les *informent* concerne la manière dont nous pouvons interpréter ces réseaux comme des *preuves*. Admettons donc que les *pré-formules* en question sont des formules de la logique linéaire, éventuellement enrichies d'opérateurs jouant sur la polarité des sous-formules. On le sait depuis les travaux d'Andréoli sur la recherche de preuves en logique linéaire ([2]), les objets de la logique linéaire sont polarisés. Si nous regardons en effet les règles associées aux connecteurs, nous constatons que l'introduction de certains ($\wp$, $\&$) est réversible à la différence des autres ($\otimes$ et $\oplus$) dont l'introduction ne l'est pas. Les premiers sont dits *négatifs*, les seconds *positifs*. Une formule dont le connecteur principal est positif (resp. négatif) est dite positive (resp. négative). Les règles elles-mêmes sont classées en positives et négatives selon qu'elles introduisent un connecteur positif ou un connecteur négatif. Andréoli montre qu'on peut

toujours amener une preuve à avoir une forme canonique alternant les pas positifs et les pas négatifs. Evidemment, cela signifie qu'à chaque pas polarisé, plusieurs introductions peuvent avoir lieu simultanément, ou dit autrement, que si un connecteur est introduit, c'est un connecteur *synthétique*, la règle ayant alors un nombre arbitraire de prémisses (*logique hyperséquentialisée*).
De là l'idée qu'on peut formuler un système très général en n'utilisant que deux règles "logiques" : la positive et la négative.
Ces règles portent sur des objets ayant la forme générale de "séquents", mais qui ne gardent que des adresses.

Définition 2 *Un objet* $\Gamma \vdash \Theta$ *où* Γ *est un* locus *et* Θ *une suite de* loci*, est appelé une* fourche, positive *si* $\Gamma = \emptyset$, négative *sinon*

La règle positive est :

$$\frac{\dots \quad \xi \star i \vdash \Lambda_i \quad \dots}{\vdash \xi, \Lambda} (+, \xi, I)$$

- i parcourt I
- les Λ_i sont *deux à deux disjoints* et inclus dans Λ

Si on lit la règle du bas vers le haut, ξ étant un élément quelconque de la fourche, la règle dit simplement que l'on *choisit* un lieu, avant de le distribuer sur une certaine ramification. Elle représente donc bien une action *positive*. Le contexte Λ est éclaté en sous-contextes deux à deux disjoints, mais dont l'union ne contient pas nécessairement tous les lieux du contexte d'origine.
La règle négative est :

$$\frac{\dots \quad \vdash \xi \star J, \Lambda_J \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda} (-, \xi, \mathcal{N})$$

- J parcourt $\mathcal{N}$
- les Λ_J sont inclus dans Λ

Toujours avec la même lecture ascendante, nous constatons que le lieu utilisé par cette règle est imposé : c'est le seul lieu en partie négative de la fourche. Cette règle représente donc une action *passive* ou négative. Le lieu imposé est distribué sur un répertoire, et le contexte Λ est éclaté en différent sous-contextes, qui ne forment pas nécessairement une partition de Λ : ils peuvent se chevaucher, et on peut aussi perdre certains lieux en cours de route.
Si nous n'avons plus de liens axiomes dans les réseaux, comment allons-nous les arrêter ? Il existe une règle positive particulière que Girard appelle *daïmon*, sur laquelle nous reviendrons par la suite.
Il s'agit de la règle :

$$\frac{}{\vdash \Lambda} \dagger$$

Elle est positive.
Comme rappelé en introduction, une caractéristique fondamentale des systèmes logiques, si on veut du moins qu'ils reflètent des propriétés de cohérence du point de vue des preuves (qu'elles puissent être vues comme des processus composables et gardant sous des transformations réglées certains invariants) est la propriété d'élimination des coupures, qui exprime la réelle dynamicité des systèmes. Ici, il n'y a pas de règle de coupure proprement dite, puisque nous regardons les phénomènes au niveau des lieux et non à celui des formules (donc pas de formule *de coupure* !), mais il y a la propriété selon laquelle une même adresse ξ peut être occupé simultanément par deux instances d'un même contenu, mais avec des polarités opposées. Dans ce cas, nous avons une *interaction* qui conduit à la neutralisation de cette adresse : le réseau se réécrit au moyen du système des sous-adresses. Si le même évènement se reproduit au niveau des sous-adresses et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les adresses soient neutralisées, on arrive nécessairement sur un hyperséquent vide, auquel on pourra alors appliquer la règle du *daïmon*, on dira dans ce cas que le réseau a été normalisé ou que sa normalisation a convergé. Mais pour que ce processus ait lieu, il aura fallu un réseau particulier, qui ne se compose pas d'un seul *dessin* mais d'au moins deux *dessins*, dont chacun pourrait être qualifié de *contre-dessin* par rapport à l'autre.

2.5 Des dessins aux desseins

Un tel processus fait inévitablement penser à une *confrontation* entre deux actants[2], ou du moins deux ensembles d'actions enchaînées les unes à la suite des autres.

Cette structure est la figure idéale d'un dialogue (ou, pour le dire comme Girard, d'une *dispute*). D'où le fait que les dessins puissent aussi se voir comme des ensembles d'actions destinés à entrer en contact avec d'autres du même genre. Sous cet angle, on peut parler de *desseins* au lieu de *dessins*, et on voit surgir une interprétation à ce qui n'était jusqu'à maintenant que des objets syntaxiques, une interprétation en termes de *jeux*.

Dans un travail commun avec Myriam Quatrini (non publié), nous avons voulu donner un exemple de cette dualité preuve-stratégie en considérant le cas de l'interprétation sémantique à accorder à une phrase contenant plusieurs quantifieurs (ici deux). Soit la phrase :

(1) *every linguist speaks an african language*

La "signification" de (1) peut être donnée par la possibilité d'un dialogue tel que le suivant :

[2] on peut aussi penser à l'harmonisation de deux brins d'ADN

1. celui qui soutient (1), que nous appellerons P, se déclare prêt à répondre à toute intervention concernant un individu d
2. un opposant O propose un individu f dont il prétend qu'il est linguiste et qu'il ne connaît aucune langue africaine
3. P propose une langue africaine e_f dont il prétend que f la parle
4. au même moment, O est prêt à recevoir ce genre d'affirmation
5. si O reconnaît la validité de l'affirmation de P, il peut accepter et mettre fin au dialogue

Ce dialogue peut aussi se poursuivre plus avant :

6. P demande à vérifier que f est bien un linguiste
7. O a la possibilité d'en faire la preuve (au moyen d'une base de données par exemple)
8. corrélativement, O demande à vérifier que e_f est bien une langue africaine et que f la parle,
9. ce dont toujours P peut faire la preuve au moyen de *données*

Ce faisant, ce dialogue utilise des *faits*, autrement dit des atomes assertables au moyen d'une connaissance extérieure[3].
Lorsque nous faisons cela, il semble que nous ne soyons après tout pas très éloignés de démarches existant depuis de nombreuses années, en *Game Theoretical Semantics* ([13, 14]). Notons cependant trois différences de taille (d'autres surgiront par la suite) :

– chaque "coup" dans le jeu est une *interaction* entre une *action positive* d'un des deux participants et une *action négative* de l'autre. Ainsi, le pas peut être franchi seulement si ce qui est avancé dans l'action positive d'un des deux participants correspond aux prévisions et attentes de l'autre (cette caractéristique est absente de la *GTS*),
– il n'y a pas de règle bien définie a priori associée à tel ou tel connecteur ou quantificateur de la logique, que suivraient les participants : nous nous contentons de suivre ce qui serait un dialogue "naturel". En particulier aucune règle ne vient limiter le nombre de fois où un coup pourrait être rejoué. On peut imaginer ici que P se soit trompé dans le choix d'une langue africaine parlée par f, auquel cas il pourrait recommencer[4]
– chaque "coup" joué est localisé en un *foyer* spécifique, qui est une adresse qui porte la marque de toutes les adresses par où les joueurs sont antérieurement passés : l'historique du dialogue, depuis le début, peut être pris en compte.

[3]La ludique peut donc accueillir des données externes et se rabattre si nécessaire sur la considération d'un fait atomique comme "vrai" ou "faux"

[4]ceci, il est vrai, nécessite un dispositif un peu plus sophistiqué que celui qui est ici présenté : il faut l'analogue des exponentielles

Là toutefois où l'on s'écarte le plus de la *GTS*, c'est dans la possibilité d'autres dialogues. Il se pourrait par exemple que les deux participants ne s'entendent pas du tout sur ce qu'ils entendent par "parler une langue", ainsi le fait que *John parle le Ewé* pourrait être remis en cause de bien des manières, et peut-être les deux actants en seraient-ils amenés à se séparer sans accord (ce qui est une autre manière de dire que leur discussion pourrait s'avérer interminable). Autrement dit, nous envisageons le cas où des expressions comme *John est linguiste, la langue X est une langue africaine, John parle la langue X* ne seraient pas, en dépit des apparences, des atomes : leur "preuve" requerrait d'autres développements. Nous envisageons donc des dialogues *infinis*.
Ce qui est maintenant frappant est que les étapes de dialogue mentionnées ci-dessus peuvent très bien s'exprimer à partir de la décomposition de formules de logique linéaire, ou plus exactement de *tentatives de preuve* de ces formules. Le dialogue mentionné ci-dessus pourrait être associé à la formule :

$$S_1 : \quad \&_x(\uparrow L(x) \multimap \oplus_y (\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(x,y)))$$

et le dialogue lui-même représenté par les différentes phases ci-dessous :

P	O
$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d}\\ \vdots\\ \vdash \downarrow L^{\perp}(d), \oplus_y(\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(d,y)))\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\end{array}}{(\&_x(\uparrow L(x) \multimap \oplus_y (\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(x,y))))^{\perp} \vdash}$	$\dfrac{\downarrow L^{\perp}(f) \vdash \quad (\&_y \uparrow A(y) \multimap \downarrow P^{\perp}(f,y))^{\perp} \vdash}{\vdash \oplus_x(\uparrow L(x) \otimes \&_y(\uparrow A(y) \multimap \downarrow P^{\perp}(x,y))}$
P prêt à donner ds justifications pour tout individu : d,d',...	O propose un individu f (affirmant que f est un linguiste et que f ne connaît aucune langue africaine)
P	O
$\dfrac{\downarrow A_{e_f} \vdash \quad \downarrow P_{f,e_f} \vdash}{\vdash \downarrow L^{\perp}(f), \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash \downarrow A^{\perp}_{a'}, P^{\perp}_{f,a'}\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdash \downarrow A^{\perp}_{a}, P^{\perp}_{f,a} \ldots\end{array}}{(\&_y \uparrow A_y \multimap \downarrow P^{\perp}_{f,y})^{\perp} \vdash}$
P met en évidence une langue e_f (affirmant que e_f est une langue africaine et que f parle e_f)	au même moment,, O est prêt à recevoir une telle affrirmation de P, pour une certaine langue parmi a, a' ...

puis :

P	O
$$\dfrac{\downarrow A_{e_f} \vdash \quad \downarrow P_{f,e_f} \vdash}{\vdash \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}$$	$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \downarrow A^{\perp}_{a'}, P^{\perp}_{f,a'}}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash \downarrow A^{\perp}_{a}, P^{\perp}_{f,a}}\dagger \ldots}{(\&_y \uparrow A_y \multimap \downarrow P^{\perp}_{f,y})^{\perp} \vdash}$$
P donne une langue africaine a (ou a' ou . . .)	O est prêt à accepter

Ici, l'occurrence de † (le *daïmon*) exprime le fait que O ne va pas plus loin dans l'échange.

Le dialogue peut se poursuivre davantage :

P	O
$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{d'} \\ \vdots\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_f \\ \vdots \\ \vdash \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))\end{matrix}}{L_f \vdash \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}}{\vdash \downarrow L^{\perp}_f, \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_{d} \\ \vdots\end{matrix}}{(\&_x(\uparrow L(x) \multimap \oplus_y (\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(x,y))))^{\perp} \vdash}$$	$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash L_f}\emptyset}{\downarrow L^{\perp}_f \vdash} \quad (\&_y \uparrow A_y \multimap \downarrow P^{\perp}_{f,y})^{\perp} \vdash}{\vdash \oplus_x(\uparrow L_x \otimes \&_y(\uparrow A_y \multimap \downarrow P^{\perp}_{x,y})}$$
P vérifie et accorde que f est un linguiste.	O peut assurer que f est un linguiste (en tant que donnée)

Nous constatons alors que les suites d'actions qui s'opposent dans le dialogue correspondent bien à des tentatives de fournir des preuves pour des assertions complémentaires (ici : *tout linguiste connaît une langue africaine* vs *il existe un linguiste qui ne connaît aucune langue africaine*). Simplement, lorsque deux tentatives de preuve s'opposent, une seule des deux peut aboutir : elle constitue en ce cas une "vraie" *preuve*. Nous pourrons alors seulement considérer l'autre comme une *contre-preuve*, c'est-à-dire certes une "fausse" preuve mais néanmoins un objet digne d'intérêt, d'où le fait que nous soyons amenés dans le cadre de la ludique à nous situer dans un espace qui contient preuves et contre-preuves, plus généralement réunies sous le nom de *para-preuves* ou mieux, selon l'appellation donnée par P. Livet, *d'épreuves*. D'autre part, l'épineux problème de savoir à quoi peuvent bien correspondre des preuves pour des propositions atomiques est résolu soit par la prise en compte de *données* (cas particulier de règle positive, nous y reviendrons plus loin), soit par l'admission de suites d'actions arbitrairement longues (voire infinies). Dans ce second cas, rien n'est *prouvé* à proprement parler : nous sommes typiquement dans la perspective des dialogues infinis tels que pouvait les concevoir Nāgārjuna au 2^{me} siècle de notre ère et qui le conduisait à adopter l'attitude radicalement sceptique : *I assert nothing* (cf. [11]).
Dans tous les cas, nous mettons en évidence ici la possibilité de voir la signification d'une phrase comme un ensemble de *justifications potentielles* (par rapport à des de-

mandes prévisibles).

2.6 Des desseins aux comportements

Une troisième façon de représenter cette signification consiste alors à se débarrasser de l'échelon "proto-formule" fourni ici par la formule S_1, et à passer purement et simplement aux réseaux d'adresses, c'est-à-dire aux *dessins*. Les schémas obtenus peuvent être vus comme des squelettes des preuves ci-dessus. Par exemple en ce qui concerne le point de vue de P :

$$\mathcal{D} = \frac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\end{array} \quad \dfrac{\xi.0.3^d.7 \vdash \qquad \xi.0.3^d.5 \vdash}{\vdash \xi.0.2^d, \xi.0.3^d} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\end{array}}{\xi.0 \vdash}}{\vdash \xi}$$

Les lieux ($\xi, \xi.0, \xi.0.2, \xi.0.3$ etc.) sont les localisations précises des éléments constituants de la phrase étudiée, d'un point de vue logique.
Le dessin $\mathcal{D}$ peut interagir avec le dessin $\mathcal{E}$ qui correspond à la contre-preuve donnée par O.

$$\mathcal{E} = \frac{\dfrac{\dfrac{}{\xi.0.2^d \vdash}\,\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.0.3^d.7, \xi.0.3^d.5}\,\dagger}{\xi.0.3^d \vdash}}{\vdash \xi.0}}{\xi \vdash}$$

Le d en exposant indique le choix d'un individu au pas considéré. $\emptyset$ indique que O pose que "d est un linguiste" comme un fait ou une donnée : P n'a désormais plus la possibilité de jouer sur le locus $\xi.0.2$ s'il reconnaît ce fait.
L'interaction entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ (coïncidence des lieux de polarités opposées dans les deux dessins) conduit à une neutralisation desdits lieux et au dessin élémentaire :

$$\frac{}{\vdash}\,\dagger$$

Ce dessin élémentaire peut être perçu aussi bien comme une *preuve* que comme une *contre-preuve*, c'est une sorte de vecteur nul de l'espace des épreuves. Deux dessins dont l'interaction conduit à lui sont donc dits *orthogonaux*.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{E}$$

Nous noterons $[[\ ,\ ]]$ cette sorte de *produit scalaire* entre dessins qui apparaît lorsque nous les faisons interagir (on parle aussi de *normalisation* du réseau qu'ils forment). Dans le cas d'orthogonalité, nous avons :

$$[[\mathcal{D}, \mathcal{E}]] = \frac{}{\vdash} \dagger$$

On peut écrire aussi que : $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^{\perp}$. On a bien évidemment : $\mathcal{D} \in \mathcal{D}^{\perp\perp}$, mais ce dernier ensemble (le bi-orthogonal de $\mathcal{D}$) contient bien d'autres dessins : on dira qu'il est engendré par un dessin (ou un ensemble de dessins), ici $\mathcal{D}$.
On appelle *comportement engendré par* $\mathcal{D}$ l'ensemble $\mathcal{D}^{\perp\perp}$.
Autrement dit, un *comportement* est un ensemble de dessins qui se comportent tous de la même manière vis-à-vis de l'interaction avec d'autres dessins. **C'est par la notion de comportement que nous allons regagner la véritable notion de formule**.
Par exemple, l'énoncé *John parle le Ewé*, s'il est associé à au moins un dessin, engendrera un comportement $\mathcal{C}$ qui contiendra des éléments de plus en plus spécifiés au fur et à mesure que nous le ferons interagir avec d'autres dessins. De cette façon, nous pouvons associer à chaque énoncé élémentaire un comportement.
Au stade de reconstruction de la logique, nous pourrons définir des *opérations* entre comportements parmi lesquelles nous retrouverons les connecteurs de la logique linéaire, de sorte que la *proto-formule* S_1 correspondra bien finalement à une formule, mais au lieu de la définir plus ou moins arbitrairement comme nous l'avons fait, cette formule découlera des opérations *géométriques* associées aux dessins vus comme des suites d'actions. Ce sera, en un sens, une composition de dialogues élémentaires.

Nous pouvons donc désormais considérer nos "pré-formules" comme des ensembles de demandes de justifications et de justifications élémentaires. Ces ensembles, ou *dessins* peuvent être, à vrai dire, arbitrairement enrichis : il en résulte des ensembles de dessins dont la cohérence interne est simplement exprimée par le fait qu'ils interagissent de la même manière avec d'autres dessins. Par clôture, on obtient des comportements, qui correspondent aux vraies formules.

2.7 La délocalisation par $\mathcal{F}ax$

Il reste encore, bien entendu, à établir une possibilité de *transfert* : la signification d'un énoncé ou d'un terme ne saurait être purement liée à des lieux, car cela voudrait dire que nous avons sans cesse à ré-inventer la langue et ses significations. Si les significations sont surtout "dialectiques" et dépendantes des contextes, il n'en reste pas moins que la plupart du temps, les locuteurs s'entendent sur le sens des mots, ce qui ne serait guère possible s'ils devaient le réinventer tout au long des usages. Au cours de l'enchaînement des discours se créent des régularités réutilisables dans d'autres contextes. Hamblin parle à ce propos de *patterns of use*. Le fait qu'une certaine permanence de

signification puisse exister pour certains termes n'est pas incompatible avec l'idée du caractère profondément dialectique de la signification.
Comme le dit encore Hamblin (p. 295) :

> we may have to say that in so far as there is a presumption that W is constant in meaning there is a presumption that any given use of W is part of a pattern, or that the user's explanations of his meaning are mutually coherent.

Si nous n'avons plus d'axiome d'identité (comme nous n'avons plus d'ailleurs de règle de coupure explicite), comment allons-nous vérifier que les contenus figurant à des adresses différentes sont en réalité identiques, un contenu ayant seulement subi un transfert d'un lieu vers un autre ?
C'est ici qu'intervient un dessin particulier : le $\mathcal{F}ax$. C'est un dessin infini récursivement défini par :

$$Fax_{\xi,\xi'} = \cfrac{\ldots \quad \cfrac{\ldots \quad \cfrac{Fax_{\xi'_i,\xi_i}}{\xi' \star i \vdash \xi \star i} \quad \ldots}{\vdash \xi \star J, \xi'}\,(+,\xi',J) \quad \ldots}{\xi \vdash \xi'}\,(-,\xi,\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

Au premier pas, qui est négatif, le lieu négatif est distribué sur tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, puis, pour chaque ensemble d'adresses (relatif à un J), le lieu positif ξ' est choisi et il se crée une sous-adresse $\xi' \star i$ pour chaque $i \in J$, et le même mécanisme est relancé pour le nouveau lieu ainsi obtenu.
On peut alors voir le rôle que joue ce dessin dans sa normalisation avec un dessin arbitraire. Prenons un dessin $\mathcal{D}$ de base $\vdash \xi$, on peut facilement montrer que sa normalisation avec $\mathcal{F}ax_{\xi\vdash\rho}$ a pour résultat $\mathcal{D}'$ qui n'est autre que $\mathcal{D}$ mais où l'addresse ξ est systématiquement remplacée par ρ.
A titre d'exemple, prenons pour $\mathcal{D}$ le dessin :

$$\cfrac{\cfrac{\mathcal{D}_1}{\xi \star 1 \vdash} \quad \cfrac{\mathcal{D}_2}{\xi \star 2 \vdash}}{\vdash \xi}$$

La normalization a lieu en sélectionnant la "tranche" correspondant au sous ensemble $\{1, 2\}$ de sorte qu'une fois éliminée la première coupure, il reste :

$$\cfrac{\mathcal{D}_1}{\xi \star 1 \vdash} \qquad \cfrac{\mathcal{D}_2}{\xi \star 2 \vdash} \qquad \cfrac{\cfrac{\mathcal{F}ax}{\rho \star 1 \vdash \xi \star 1} \quad \cfrac{\mathcal{F}ax}{\rho \star 2 \vdash \xi \star 2}}{\vdash \xi \star 1, \xi \star 2, \rho}$$

Les deux dessins de gauche normalisent avec celui de droite, donnant finalement :

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}'_1}{\rho \star 1 \vdash} \quad \dfrac{\mathcal{D}'_2}{\rho \star 2 \vdash}}{\vdash \rho}$$

où, dans $\mathcal{D}'_1$ and $\mathcal{D}'_2$, l'addresse ξ est systématiquement remplacée par ρ.
Nous en concluons que la normalisation avec $\mathcal{F}ax$ est la procédure qui déplace un dessin d'une localisation donnée à une autre : c'est une procédure de *délocalisation*.

2.8 De quelques comportements élémentaires

Parmi tous les desseins concevables, il en est certains qui sont remarquables notamment par leur brièveté. Nous avons déjà fait référence, dans l'exemple précédent, au cas où l'un des partenaires empêche l'autre de poursuivre autrement qu'en renonçant à la continuation de la dispute ou en entrant clairement dans un cas de divergence (*dissensus*). Cela peut arriver aussi bien au cours de l'accomplissement d'un pas négatif que d'un pas positif. Dans le premier cas, cela revient à prendre $\mathcal{N} = \emptyset$ dans la règle négative. Le partenaire ne peut alors effectuer aucun mouvement sans sombrer dans le dissensus (puisqu'aucune ramification n'est jouable). Girard appelle *sconse* ce dessein, à cause de son caractère particulièrement "associal" (!).

$$\dfrac{}{\xi \vdash}\,(\xi, \emptyset)$$

Dans le cas positif, nous pouvons considérer le dessin suivant, qui est positif :

$$\dfrac{}{\vdash \xi}\,(\xi, \emptyset)$$

Si le partenaire négatif vise à un consensus, il ne peut répondre que par le *daïmon* négatif puisque le proposant ne lui donne aucune adresse pour enchaîner. Il s'agit de :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash}\,\dagger}{\xi \vdash}$$

Ce faisant, il s'avoue vaincu (du moins, dans la majeure partie des interprétations dont le *daïmon* peut se revêtir). Ainsi, à ce jeu, le partenaire positif gagne toujours. Evidemment, dans une situation réelle, l'usage de ce dessein ne sera autorisé que sous des conditions régulières (par exemple l'existence d'un fait comme donnée). Girard nomme *Bombe atomique* cet argument dissuasif ! Nous le noterons aussi $\mathcal{B}ombe^+$. Son unique dessein orthogonal est donc le $\mathcal{D}$*aïmon* négatif donné ci-dessus. Il est évident que celui-ci est aussi orthogonal à :

$$\frac{}{\vdash \xi} \dagger$$

Nous obtenons donc un comportement qui contient *deux* desseins : $\mathcal{B}omb^{+}$ et *daïmon*. Notons-le **1** : il deviendra l'élément neutre de $\otimes$, tel que redéfini en termes ludiques.
Considérons maintenant de nouveau le *sconse*. Notons $\top$ le comportement négatif qui le contient. Quel est l'orthogonal de $\top$? La seule possibilité pour l'adversaire est de jouer le $\mathcal{D}$*aïmon*, positif, cette fois. D'où :

$$\top^{\perp} = \{Dai\}$$

et

$$\top = Dai^{\perp}$$

autrement dit, *tous* les desseins négatifs de même base.

2.9 Le tour de force de la ludique : regagner les opérateurs logiques

Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la reconstruction de la logique opérée par Girard à partir des opérations définissables sur les comportements. Disons simplement que, de même que de telles opérations sont définissables sur les *espaces cohérents*, elles le sont sur les comportements. Il est ainsi possible de définir une opération, notée $\odot$, entre deux desseins, puis à partir de là, l'opération $\otimes$ entre deux comportements.

Définition 3 *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{B}$ deux desseins positifs, nous définissons le produit tensoriel $\mathcal{U} \odot \mathcal{B}$ par :*

- *si l'un des deux est le $\mathcal{D}$aïmon, alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = Dai$,*
- *sinon, soit $(+, <>, I)$ et $(+, <>, J)$ les premières actions de respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{U}$, si$I \cap J \neq \emptyset$, alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B}$ = Dai. Sinon, on remplace dans chque chronique de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{U}$ la première action par $(+, <>, I \cup J)$, donnant respectivement $\mathcal{B}'$ and $\mathcal{U}'$, alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{B}'$.*

Il est alors possible de définir le $\otimes$ de deux comportements au moyen de délocalisations. Notons toutefois que la Ludique permet de définir de nouveaux connecteurs.
On peut définir le produit $\odot$ de deux comportements par : $\mathbf{F} \odot \mathbf{G} = \{\mathcal{A} \odot \mathcal{B}; \mathcal{A} \in \mathbf{F}, \mathcal{B} \in \mathbf{G}\}$ (cela ne donne pas nécessairement un comportement), et alors le produit tensoriel proprement dit par $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G} = (\mathbf{F} \odot \mathbf{G})^{\perp\perp}$.
Si nous revenons alors à l'exemple du paragraphe 2.5, il apparaît que le comportement associé à S_1 peut s'écrire :

$$\mathbb{S}_1 = \&_x(\downarrow \mathbb{L}(x) \multimap \oplus_y(\downarrow \mathbb{A}(y) \otimes \downarrow \mathbb{P}(x, y)))$$

construit à partir des comportements $\mathbb{L}(x)$, $\mathbb{A}(y)$ et $\mathbb{P}(x, y)$! Ces comportements élémentaires peuvent être simplement remplacés par **1** dans une interprétation factuelle de ce genre d'énoncé, mais ils peuvent aussi être remplacés par des comportements beaucoup plus riches si le dialogue est destiné à durer, voire des comportements contenant des dessins infinis.

3 Pragmatique et sophismes

3.1 Actes de langage

Selon la théorie des actes de langage ([5, 29]), certaines énonciations (*questions, ordres, promesses, actes de juridiction etc.*) se distinguent particulièrement par les transformations qu'elles font subir au contexte. Par exemple, une question provoque, dans les cas de consensus minimal, une obligation de réponse, un ordre provoque, dans les mêmes conditions, une obligation d'acquièscement, une promesse un changement dans les engagements auxquels sont soumis les locuteurs etc. La ludique se prête à leur représentation dans la mesure où l'utilisation du $\mathcal{F}ax$ dans un dessin est un moyen de reproduire de telles transformations du contexte. Notons ici que nous pouvons entendre par *contexte* un réseau de lieux. Nous pouvons dire que, dans un tel réseau, certains sous-réseaux sont *activés* en fonction de ceux qui sont choisis pour loger des contenus particuliers. Nous risquerons ici une métaphore neuronale : de même que les neurones individuels sont supposés être des adresses arbitraires pour des contenus, l'activité neuronale proprement dite se repérant aux sous-réseaux activés, on peut considérer un contexte comme un ensemble arbitraire de *loci* et assimiler un ensemble activé d'adresses à un *état mental*. En ce cas, nous décrivons un acte de langage comme une transformation d'état mental.

L'exemple le plus simple concerne le jeu *question-réponse*. Reprenons l'exemple du paragraphe 2.5, et opposons à l'assertion S = *tout linguiste connaît une langue africaine*, la question Q = *Quelle langue africaine parle John ?*.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A_{e_j}}\emptyset}{A_{e_j}^{\perp} \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash S_{john,e}}\emptyset}{S_{john,e_j}^{\perp} \vdash}}{\vdash \oplus_y(A_y \otimes S_{john,y}))}}{L_{john} \vdash \oplus_y(A_y \otimes S_{john,y}))}}{\vdash L_{john}^{\perp}, \oplus_y(A_y \otimes S_{john,y}))} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\end{array}}{M_1^{\perp} \vdash}
\qquad\Bigg|\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash L_{john}}\emptyset}{L_{john}^{\perp} \vdash} \quad \dfrac{\ldots \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{F}ax\\ A_{e_j} \vdash A_e\end{array}}{\vdash A_e, A_{e_j}^{\perp}}}{S_{john,e} \vdash A_e, A_{e_j}^{\perp}}}{\vdash A_e, A_{e_c}^{\perp}, S_{john,e}^{\perp}}}{A_e^{\perp} \vdash A_{e_c}^{\perp}, S_{john,e_j}^{\perp}}}{\vdash A_{e_j}^{\perp}, S_{john,e_j}^{\perp}, A} \quad \ldots}{(\&_y(A(y) \multimap S_{john,y}^{\perp})^{\perp} \vdash A}}{\vdash M_1^{\perp}, A}$$

La proto-formule A est introduite dans le contexte comme *réceptrice* du résultat de l'interaction. Après normalisation du réseau, il reste seulement :

$$\cfrac{\cfrac{}{\vdash A_{e_j}}\emptyset}{\vdash A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_{e_j} \oplus \ldots}$$

où A_{e_j} est la langue africaine que parle John.
D'autres exemples sont fournis dans un article non encore publié de M-R. Fleury et S. Tronçon ([6]).

3.2 Du traitement des sophismes

De ce qui précède, ressort l'idée que si, en nous passant de règles structurelles comme la contraction et l'affaiblissement, nous gagnons une sensibilité aux ressources du point de vue de leur quantité disponible, si en nous privant de la commutativité, nous gagnons une sensibilité à l'ordre dans lequel elles sont présentées (et en nous privant de l'associativité, à la structure en constituants), en supprimant l'axiome d'identité, nous avons acquis plus encore : une sensibilité aux adresses ou aux lieux. Désormais, nous pouvons jouer sur ces lieux comme nous avons joué précédemment sur le caractère transitoire ou pérenne d'une ressource. C'est ce point qui va nous apparaître comme précieux dans la discussion sur les sophismes.
L'un des sophismes les plus connus l'est sous le nom de *pétition de principe*. Il consiste, selon Aristote dans les *Réfutations sophistiques* à *faire entrer en ligne de compte dans les prémisses la proposition initiale à prouver* (Organon, VI, 6) ([4]) autrement dit à prouver une thèse qui figure elle-même déjà, implicitement, dans les prémisses du raisonnement. Mais, comme beaucoup d'auteurs l'ont noté (à commencer par l'illustre John Maynard Keynes), n'est-ce pas là justement ce qu'on fait toujours en logique formelle ? Autrement dit une des raisons pour lesquelles, comme l'affirmait Wittgenstein, la logique ne serait concernée que par des tautologies, c'est-à-dire des vérités sans contenu, valides seulement par leur forme ? De fait, la logique classique (aussi bien qu'intuitionniste etc.) nous est de peu d'utilité pour étudier cette figure de raisonnement, l'axiome d'identité $A \vdash A$ semblant être la forme la plus raccourcie et condensée de la pétition de principe !
Si l'on veut proposer une analyse de la pétition de principe, il semble donc qu'un système ne possédant pas l'axiome d'identité soit requis. Une phrase comme *l'âme est immortelle parce qu'elle ne meurt jamais* ([27]) peut être décrite à partir d'une localisation en un lieu ξ de la phrase *l'âme est immortelle* et d'une unique justification : (*l'âme ne meurt jamais*). Lorsque le locuteur P se place en ξ, pour démarrer le dessin $\mathcal{D}_\xi$ de son argumentaire, il exécute, par son énonciation, une action *positive* qu'il s'apprête à justifier. Autrement dit, tout de suite après, il commet une action négative par laquelle il se montre prêt à recevoir une demande de justification (en $\xi.1$). Il possède, déjà toute

prête, cette justification : elle tiendrait en une seconde énonciation, *l'âme ne meurt jamais*, elle-même supposée posséder sa propre justification. En affirmant ce deuxième énoncé, P démarre en fait un deuxième dessin, au lieu $\xi.1.1$ ($\mathcal{D}_{\xi.1.1}$), mais parce que le deuxième énoncé est déjà contenu dans le premier, $\mathcal{D}_{\xi.1.1}$ n'est autre que le décalage par $\mathcal{F}ax$ du dessin $\mathcal{D}_{\xi}$! Autrement dit :

$$\mathcal{D}_{\xi.1.1} = [[\mathcal{D}_{\xi}, \mathcal{F}ax_{\xi,\xi.1.1}]]$$

De même que, d'ailleurs :

$$\mathcal{D}_{\xi} = [[\mathcal{D}_{\xi.1.1}, \mathcal{F}ax_{\xi.1.1,\xi}]]$$

Or, une théorie de l'argumentation interdirait ce genre de circularité.
Nous voyons ici que, de même que l'introduction de l'exponentielle en logique linéaire "explique", par le passage qu'elle opère du parfait à l'imparfait, la production de figures paradoxales, l'introduction du $\mathcal{F}ax$ permet de décrire le fonctionnement d'une autre figure, qui est une sorte *d'envers* du paradoxe puisqu'il s'agit au contraire d'"évidences" trop triviales : la pétition de principe.
De même que sans exponentielle, le *Menteur* se résoudrait en une suite infinie d'instants alternés où sont vrais tour à tour : *je mens* et *je dis la vérité*, sans $\mathcal{F}ax$, la pétition de principe se résoudrait à une reproduction indéfinie du même.

Un autre sophisme fameux est celui qu'Aristote et sa postérité ont qualifié de sophisme de *plusieurs questions*. Aristote ([4]) y réfère comme au cas où il y a une pluralité de questions qui demeure inaperçue et *qu'on donne une seule réponse comme s'il n'y avait qu'une seule question*. Ce sophisme est parfois illustré par le dialogue suivant :

- *avez-vous cessé de battre votre père ?*
- *oui (ou : non)*

Dans les deux cas, le répondant est reconnu coupable de brutalité envers son père, que celle-ci soit passée ou présente. Le dessin de P (où l'on voit que l'orthographe *dessein* est parfois la plus appropriée !) contient alors un lieu escamoté, sur lequel O ne peut pas répondre, d'où, pour que le processus de normalisation converge, la seule possibilité qu'il réponde "oui" ou "non" à la question principale.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{L}oc_1 : \\ \mathcal{D}\end{array}}{B^{\perp} \vdash}}{\vdash A^{\perp}, B}\,W}{A \otimes B^{\perp} \vdash}}{\vdash A \multimap B} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{L}oc_2 : \\ \dfrac{\overline{[\vdash A] \qquad \vdash B^{\perp}}}{A \multimap B \vdash}\end{array}}{}$$

Nous nous sommes aidés de proto-formules pour construire ce réseau de deux dessins. La formule mise au foyer ξ de $\mathcal{L}oc_1$ est une implication linéaire : normalement, pour accéder au lieu de la question principale (*avez-vous cessé de battre votre père ?*) il faut passer obligatoirement par la sous-question *battiez-vous votre père auparavant ?*, autrement dit, il faudrait "consommer" la première question avant de répondre à la deuxième, d'où $A \multimap B$. Mais le locuteur énonçant cette question ayant pour dessein d'escamoter A, se prépare à "justifier" sa question au moyen d'un dessin qui comporte un affaiblissement sur A (pas marqué par W). Le lieu de A ayant disparu, toute intervention de $\mathcal{L}oc_2$ sur ce lieu fera diverger l'interaction : c'est bien ce qui se passe lorsque, dans un dialogue, l'un des participants remet en cause un présupposé.

On peut maintenant remarquer que, si nous modifions légèrement le jeu, avec cette fois, une formule quelconque $A \wp B_1 \wp ... \wp B_n$ au foyer du premier locuteur, où chaque sous-formule peut a priori être remise en cause, si $\mathcal{L}oc_1$ sait que $\mathcal{L}oc_2$ possède une stratégie gagnante (par exemple $\mathcal{B}ombe^+$) sur l'une des sous-formules, ici A, il ne peut, s'il veut poursuivre le dialogue, que jouer sur les B_i. Ceci est une sorte d'envers de la présupposition : $\mathcal{L}oc_1$ se prive lui-même d'un lieu dans un dessein par anticipation sur la réponse de $\mathcal{L}oc_2$.

$$\dfrac{\dfrac{(B_1 \wp ...\wp B_n)^{\perp} \vdash}{\vdash A \wp B_1 \wp ...\wp B_n} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash A}\emptyset \quad \vdash B_1 \quad ... \quad \vdash B_n}{A \wp B_1 \wp ...\wp B_n \vdash}}{}$$

4 Conclusion

Nous avons montré dans cet article qu'il était possible de jouer sur l'axiome d'identité (la réflexivité de la relation de déduction) comme il est possible de jouer sur les règles structurelles d'un système. Cela ne signifie pas seulement la suppression de ces règles, mais leur remplacement, la plupart du temps, par un dispositif plus souple qui permet l'analyse fine de phénomènes : paradoxes dans les cas des règles structurelles, pétition de principe dans le cas de l'axiome d'identité. Une conséquence fondamentale de cette élimination de l'identité est la remise en cause de la notion de formule en tant qu'être idéal et "spiritualiste" (au sens de Girard), au profit des *adresses* où peuvent se loger des *contenus*. Avoir certaines procédures comme le $\mathcal{F}ax$ permet d'assurer la délocalisation (ou le transfert) de ces contenus. La notion de formule (et donc de *sens* d'une formule) est regagnée via la notion d'interaction, qui n'est rien d'autre que *l'usage* : un *dessin* s'utilise en le faisant interagir avec d'autres. L'interprétation des dessins en termes de stratégies (*desseins*) ouvre la voie à un approfondissement de la notion de *jeu de langage* au sens de Wittgenstein, en évitant les inconvénients de la *Game Theoretical Semantics*, dans la mesure où la notion de jeu qui émerge est beaucoup plus générale que celle proposée par Hintikka et al. : elle ne suppose ni stratégie gagnante, ni fonction de gain.

Références

[1] M. Amblard. *Calculs de représentations sémantiques et syntaxe générative : les grammaires minimalistes catégorielles*. Phd thesis, Université Bordeaux 1, 2007.

[2] J-M. Andréoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. *The Journal of Logic and Computation*, 2(3) :297–347, 1992.

[3] H. Anoun and A. Lecomte. Linear grammars with labels. In G. Satta P. Monachesi, G. Penn and S. Wintner, editors, *Proceedings of Formal Grammar 06*. CSLI Publications, 2006.

[4] Aristote. *Organon, Les réfutations sophistiques*. Ed. Vrin, Paris, 2003.

[5] J. L. Austin. *Quand dire, c'est faire*. Le Seuil, Paris, 1969.

[6] Marie-Renée Fleury and Samuel Tronçon. La représentation ludique des actes de langage. Technical report, IML, Marseille, 2008.

[7] J.Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–102, 1987.

[8] J.Y. Girard. Linear logic : its syntax and semantics. In J.Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pages 1–42. Cambridge University Press, 1995.

[9] J.Y. Girard. Locus solum. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(3) :301–506, 2001.

[10] J.Y. Girard. *Le Point Aveugle*. Hermann, 2006.

[11] Marie-Hélène Gorisse. The Art of making no assertion : dialogue with Nāgārjuna. Technical report, Université Lille 3, Lille-3, 2008.

[12] C. L. Hamblin. *Fallacies*. Vale Press, Newport News, 2004.

[13] J. Hintikka and J. Kulas. *The Game of Language : Studies in Game Theoretical Semantics and its Applications*. D. Reidel, Dordrecht, 1983.

[14] J. Hintikka and G. Sandu. Game-theoretical semantics. In van Benthem and ter Meulen [33], chapter 6, pages 361–410.

[15] J. Lambek. The Mathematics of Sentence Structure. *American Mathematical Monthly*, 65 :154–170, 1958.

[16] J. Lambek. On the Calculus of Syntactic Types. *Structure of Language and its Applications*, 1961.

[17] A. Lecomte. Rebuilding MP on a logical ground. *Research on Language and Computation*, 2004.

[18] A. Lecomte. Categorial grammar for minimalism. In P.J. Scott C. Casadio and R.A.G. Seely, editors, *Language and Grammar, Studies in Mathematical Linguistics and Natural Language*, pages 163–188. CSLI Publications, Stanford, 2005.

[19] A. Lecomte. Semantics in minimalist-categorial grammar. In G. Penn P. de Groote, L. Kallmeyer and G. Satta, editors, *Proceedings of the 13th conference on Formal Grammar*. CSLI Publications, 2008.

[20] A. Lecomte and C. Retoré. Towards a Minimal Logic for Minimalism. In G. van Kruijf, editor, *Formal Grammar'99*, Utrecht, 1999. ESSLLI'99.

[21] A. Lecomte and C. Retoré. Extending Lambek grammars : a logical account of Minimalist Grammars. In *Proceedings ot the 39th Meeting of ACL*, pages 354–362. ACL 2001, Toulouse, 2001.

[22] M. Moortgat. Multimodal linguistic inference. *JoLLI*, 5 :349–385, 1996.

[23] M. Moortgat. Categorial type logics. In van Benthem and ter Meulen [33], chapter 2, pages 93–178.

[24] M. Moortgat. Constants of grammatical reasoning. In Kruijff Bouma, Hinrichs and Oehrle, editors, *Constraints and Resources in Natural Language Syntax and Semantics*, Studies in Logic, Language and Information. CSLI Publications, Stanford, 1999.

[25] G. Morrill. *Type Logical Grammar, Categorial Logic of Signs*. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[26] Richard. T. Oehrle. Term-labelled categorial type systems. *Linguistics and Philosophy*, 17, 1994.

[27] M. Quatrini. Une lecture ludique des stratagèmes de Schopenhauer. Technical report, IML, Marseille, 2008.

[28] P. Schroeder-Heister and K. Dosen. *Substructural Logics*. Oxford University Press, Oxford, 1993.

[29] J. Searle. *Actes de langage*. Hermann, Paris, 1969.

[30] E. Stabler. Derivational minimalism. In C. Retoré, editor, *Logical Aspects of Computational Linguistics*, volume 1328 of *LNCS/LNAI*, pages 68–95. Springer, 1997.

[31] E. Stabler. Remnant movement and complexity. Technical report, UCLA, Los Angeles, 1999.

[32] E. Stabler. Recognizing head movement. In P. de Groote and Glyn Morrill, editors, *Logical Aspects of Computational Linguistics*, volume 2099 of *LNCS/LNAI*, pages 245–260. Springer, 2001.

[33] J. van Benthem and A. ter Meulen, editors. *Handbook of Logic and Language*. Elsevier, 1997.