



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS

VISIÓN ELECTRÓNICA

Algo más que un estado sólido



<https://doi.org/10.14483/issn.2248-4728>

Diseño e implementación de controlador LQG en sistema Ball & Beam

Design and implementation of LQG controller in Ball & Beam system

Daniel Isaac Zabala Benavides¹, Jose Fabian Salazar Caceres².

Resumen

El sistema Ball & Beam es uno de los casos de estudio más completos dentro la ingeniería de control, debido a que es un sistema no lineal y naturalmente inestable. En el presente artículo se propone realizar un controlador optimo LQG para el sistema Ball & Beam de Quanser, compuesto por un regulador cuadrático lineal (LQR) y un estimador cuadrático lineal (filtro de Kalman) por medio del cual se estimaron todos los estados del sistema, logrando mitigar las problemáticas generadas por la alta sensibilidad al ruido del sensor. Partiendo de la representación en espacio de estados del sistema Ball & Beam de Quanser y utilizando el software Matlab/Simulink y su módulo QUARC se diseñó, simulo e implemento un controlador optimo LQG en el sistema Ball & Beam de Quanser. Finalmente, los resultados de la simulación e implementación muestran que el controlador LQG es efectivo para controlar el sistema Ball & Beam a pesar del ruido que presenta la señal de realimentación.

Palabras clave: filtro de Kalman, LQR, control, optimo, ruido.

¹ Ingeniero en automatización, Universidad de La Salle, Colombia. Correo electrónico: dzabala13@unisalle.edu.co

² Ingeniería de Diseño y Automatización Electrónica, Universidad de La Salle, Colombia. Correo electrónico: jfsalazar@unisalle.edu.co

Abstract

The Ball & Beam system is one of the most complete case studies in control engineering, because it is a non-linear and naturally unstable system. In this article we propose to make an optimal LQG controller for Quanser's Ball & Beam system, composed of a linear quadratic regulator (LQR) and a linear quadratic estimator (Kalman filter) with which the noise of the system's ball position signal was eliminated, managing to mitigate the problems generated by the high sensitivity to sensor noise. Starting from the state space representation of the Quanser Ball & Beam system and using the Matlab/Simulink software and its QUARC module, an optimal LQG controller was designed, simulated and implemented in the Quanser Ball & Beam system. Finally, the simulation results and implementation show that the LQG controller is effective in controlling the Ball & Beam system despite the noise presented by the feedback signal.

Keywords: Kalman filter, LQR, control, optimum, noise.

1. Introducción

En el proceso de controlar sistemas dinámicos es común encontrar diversas complicaciones debido a la inestabilidad propia de los sistemas, la presencia de componentes no lineales o la alta sensibilidad al ruido que presentan los instrumentos de medición que los integran. El sistema Ball & Beam es uno de los casos de estudio más completos, ya que presenta todas las complicaciones nombradas, y cuyo objetivo es estabilizar la posición de una bola alrededor de un punto de operación, por medio de la variación del ángulo de inclinación de una viga. Dentro de la academia es común encontrar diversos autores que han desarrollado y aplicado distintas técnicas de control para este sistema, algunos de los casos documentados serán descritos a continuación.

Con el objetivo de contemplar toda la dinámica del sistema, se ha incluido dentro del modelamiento matemático del sistema Ball & Beam la no linealidad que se presenta por la fricción entre la bola y la viga [1], así como también se ha empleado el método directo de Lyapunov para describir el comportamiento inestable del sistema [2]. Junto con esto se desarrollaron lazos de control clásicos tales como los controladores PID en serie o en cascada [3], realimentación proporcional en espacio de estados y compensadores Lag/Lead [2], los cuales, al no tener criterios de diseño óptimos, generan ineficiencia y limitan las condiciones de operación del sistema.

Estos inconvenientes generaron que distintos autores plantearan diversas soluciones a partir de teorías de control moderno, tales como, controladores óptimos los cuales mejoraron la eficiencia del sistema. El controlador óptimo más nombrado dentro de la literatura es el regulador cuadrático lineal, el cual a partir de matrices de peso establecidas tanto heurísticamente como por métodos de optimización, reduce al máximo la energía necesaria para controlar el sistema [4-5]. Paralelamente a esto se desarrollaron técnicas de control cuasi-óptimas en el tiempo, las cuales parten de la transformación del sistema al modelo de Jordan [6].

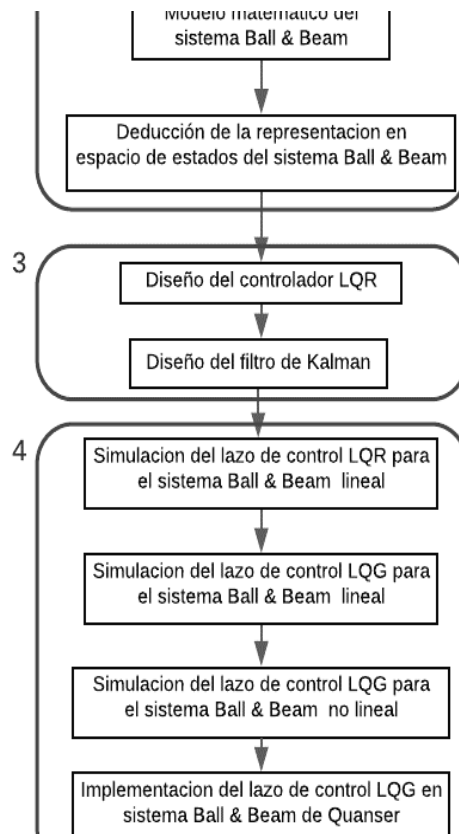
Por otra parte es común que las señales de las variables a controlar presenten componentes de ruido que afectan directamente el rendimiento del controlador, por tal razón de manera alterna se desarrolló el controlador LQG [5], en donde se emplea un filtro de Kalman, construido a partir de las ecuaciones de estado del sistema o utilizando el sistema diferencial no lineal escrito en la forma canónica de Brunovsky [4]; A través de este filtro se estiman los estados del sistema, eliminando el ruido de las señales asociadas y mejorando el rendimiento del sistema. Adicionalmente a esto se desarrollaron variantes de esta técnica de control, tal como el controlador robusto LQG/LTR el cual presenta un mejor desempeño frente a las

perturbaciones o incertidumbres que se puedan presentar en sistemas como el Ball & Beam [1], o en sistemas de posicionamiento rotativo de accionamiento directo [7].

Las particulares características del controlador LQG han generado que se emplee en lazos de control externos para el sistema Ball & Plate [8], y como estrategia de control para sistemas mucho más complejos como es el caso del robot Ballbot [9]. Inclusive esta técnica de control se ha integrado junto con el controlador feedforward para el desarrollo de lazos de control para antenas de red de la NASA [10].

El enfoque de este trabajo es llevar a cabo el diseño, simulación e implementación de la técnica de control LQG para el sistema Ball & Beam de Quanser, con el objetivo de validar su funcionamiento en un sistema dinámico no lineal, naturalmente inestable y que además presenta alta sensibilidad al ruido en sus instrumentos de medición. En este orden de ideas, la metodología que se empleó en este trabajo se presenta en las siguientes secciones así: la sección II hace énfasis en el modelo dinámico del sistema, posteriormente en la sección III, se tomara el modelo lineal del sistema Ball & Beam y se detallará el diseño de los controlador LQR, LQG y del filtro de Kalman; En la sección IV se desarrollara la simulación de los diferentes lazos de control, y se mostraran los resultados obtenidos en la implementación del lazo de control LQG en el sistema Ball & Beam de Quanser. En la figura (1) se muestra de manera más detallada el desarrollo de cada una de las secciones anteriormente nombradas.

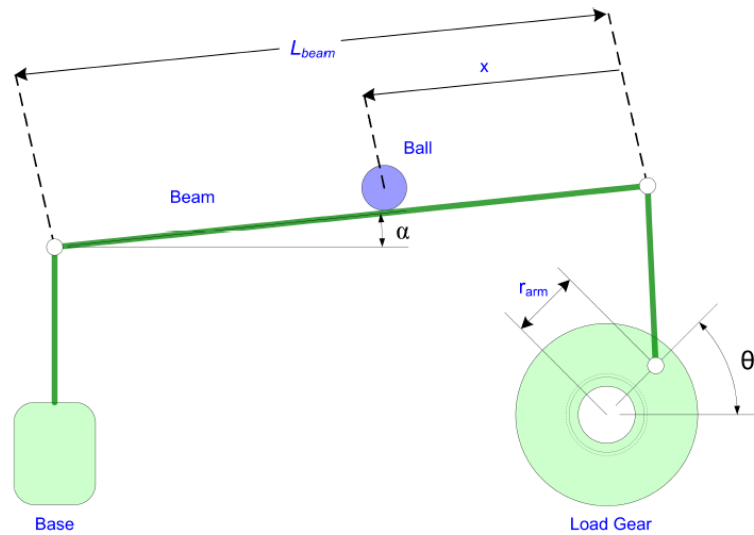
Figura 1. Metodología empleada para el desarrollo de la investigación



2. Modelo matemático del sistema Ball & Beam

Para desarrollar un controlador basado en modelos es necesario obtener un modelo matemático que describa el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo, dicho modelo se puede obtener tanto de leyes físicas como de las propias mediciones del sistema. Tal como se mencionó en la sección anterior, la plataforma que se va a analizar es el sistema Ball & Beam de Quanser, el cual se compone por dos subsistemas, el primero que describe la dinámica del servomotor $P_s(s)$ y el segundo que comprende la dinámica entre la bola y viga $P_{bb}(s)$. En la figura 2 se muestra un diagrama general del sistema Ball & Beam de Quanser, en donde se definen las longitudes y variables relevantes del sistema, las cuales se tuvieron en cuenta dentro de su modelo matemático.

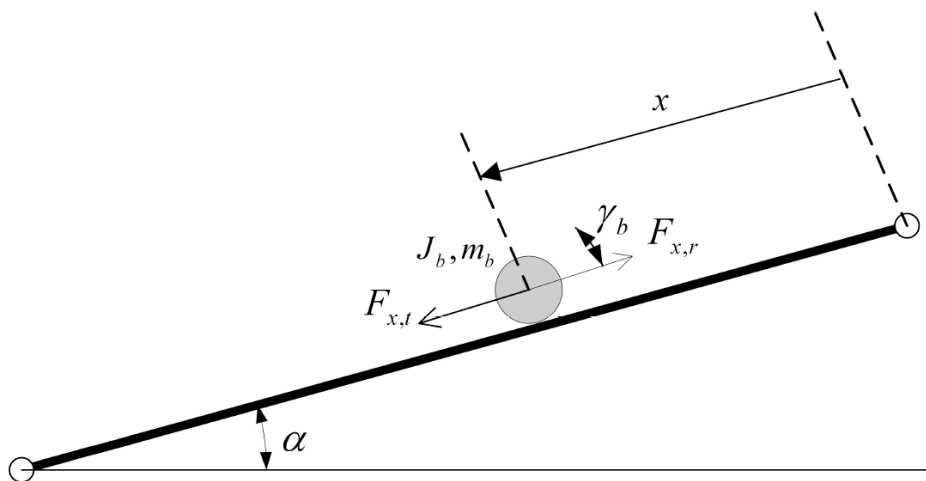
Figura 2. Diagrama general del sistema Ball & Beam de Quanser [11]



2.1 Modelo matemático

El modelo dinámico de la bola y la viga se deduce a partir de la segunda ley de movimiento de Newton [11]. Tomando como punto de partida el diagrama de cuerpo libre del subsistema, mostrado en la figura 3, se deducen las fuerzas que actúan sobre la bola, en donde $F_{x,t}$ es la fuerza de traslación generada por la gravedad y la fuerza $F_{x,r}$ es la inercia de la bola.

Figura 3. Diagrama de cuerpo libre del subsistema bola viga [11]



Partiendo de la ecuación (1) dada por la segunda ley de Newton, se deduce la ecuación (2) relacionada con el modelo dinámico no lineal, que describe el movimiento de la bola a lo largo de la viga; los parámetros utilizados para el modelamiento del sistema se observan en la tabla 1.

$$m_b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = F_{x,t} - F_{x,r} \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{m_b g \sin \alpha(t) r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b} \quad (2)$$

Por otra parte, para el subsistema del servomotor se retomó la identificación realizada en el Workbook SRV2 de Quanser [11], obteniendo así, la función de transferencia que relacionara la posición angular del engranaje con la tensión de entrada del servomotor; Esta función de transferencia está dada en la ecuación (3) y describe el comportamiento del servomotor sin carga y con la configuración de engranajes más alta.

$$P_s(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{1.53}{s(0.0248 s + 1)} \quad (3)$$

Finalmente hallando la relación entre en ángulo de inclinación de la viga α y la posición angular del engranaje θ_l se obtiene la ecuación (4), la cual se linealiza, definiendo que para variaciones angulares de θ_l , cercanas a los 0° , se puede aproximar que $\sin(\theta_l) \approx \theta_l$.

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{m_b g \sin \theta_l(t) r_{arm} r_b^2}{L_{beam} (m_b r_b^2 + J_b)} \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{m_b g \theta_l(t) r_{arm} r_b^2}{L_{beam} (m_b r_b^2 + J_b)} \quad (5)$$

Tabla 1. Parámetros físicos del sistema Ball & Beam de Quanser.

Parámetro	Und.	Descripción
$L_{beam} = 42.55$	<i>cm</i>	Longitud de la viga
$r_{arm} = 2.54$	<i>cm</i>	Distancia entre el engranaje del servomotor y la junta acoplada
$r_b = 1.27$	<i>cm</i>	Radio de la bola
$m_b = 0.064$	<i>kg</i>	Masa de la bola
$g = 9.8$	<i>m / s²</i>	Aceleración gravitacional
$J_b = 0.000004129$	<i>kgm²</i>	Momento de inercia de la bola

Fuente: elaboración propia.

2.2 Representación en espacio de estados del sistema Ball & Beam de Quanser

Para el diseño del controlador LQG es necesario tener una representación en espacio de estados del sistema; Por tal razón se aplicó la anti transformada de Laplace a la ecuación (3), y se simplificaron las constantes de la ecuación (5), obteniendo las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales fueron el punto de partida para definir el vector de estados del sistema, que está compuesto por las posiciones y velocidades lineales y angulares,

$x(t) = [x_p; \frac{dx_p}{dt}; \theta_l; \frac{d\theta_l}{dt}]$. A continuación, en las ecuaciones (6) y (7) se muestra la representación

en espacio de estados del sistema Ball & Beam de Quanser.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4179 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40.32 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 61.69 \end{bmatrix} Vm \quad (6)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x(t) \quad (7)$$

3. Diseño del controlador LQG

El controlador LQG se compone por un regular cuadrático lineal (LQR) y un estimador cuadrático lineal o filtro de Kalman; En esta sección se presenta el diseño de estos dos subsistemas, empleado la representación en espacio de estados del sistema lineal, para posteriormente, validar la metodología propuesta en el sistema no lineal.

3.1 Control LQR

El objetivo principal en este lazo de control es encontrar una matriz de realimentación K que minimice el índice de rendimiento energético J [5], dado en la función de costo descrita en la ecuación (8), en donde Q y R son matrices simétricas de peso, definidas para esta investigación según el grado de penalización que se desea establecer para los estados y entradas del sistema, logrando minimizar con ello la energía empleada por el controlador y por cada uno de los estados.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (8)$$

Para obtener la matriz K , se realiza un análisis del problema a partir de las ecuaciones Euler-Lagrange y aplicación del Cálculo Variacional, obteniendo como resultado la ley de control en forma de realimentación de estados dada en la ecuación (9).

$$K = -R^{-1} B^T P \quad (9)$$

En donde P es la solución algebraica de la ecuación de Riccati, descrita en la ecuación (10).

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (10)$$

Por último, se realizó una realimentación de estados optima según la ley de control $u = -Kx$, en donde K es la matriz de ganancias optimas hallada previamente.

3.2 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es altamente utilizado en campos como el procesamiento digital de imágenes, visión por computador, reconocimiento de patrones y en la estimación de estados para sistemas estocásticos.

El sistema Ball & Beam cuenta con un sensor de resistencia variable que permite medir la posición de la bola a lo largo de la viga, sin embargo, la medición de este estado es afectada por la alta sensibilidad al ruido que presenta el instrumento de medición, ocasionando que la medición del estado x_p se convirtiera en un proceso estocástico. Por lo tanto, fue necesario definir una representación en espacio de estados del sistema, en donde se añadiera a la dinámica de este estado, las componentes $w(t)$, asociada al ruido proceso, y $v(t)$ asociada al ruido presente en la medición de la variable de salida, tal como se muestra en las ecuaciones 10 y 11.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (10)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (11)$$

Luego debido a que el análisis, diseño e implementación del filtro de Kalman se simplifica empleando las ecuaciones dinámicas del sistema en el dominio discreto, se optó por emplear un retenedor de orden cero para discretizar el sistema dado por las ecuaciones (10) y (11); obteniendo como resultado el sistema descrito en las ecuaciones (12) y (13), en donde las matrices A_d , B_d y w_d se relacionan con la ecuación de estados del sistema en el dominio discreto, y las matrices C_d y v_d se relacionan con la ecuación de salida del sistema en el dominio discreto.

$$x_{(k+1)} = A_d x_{(k)} + B_d u_{(k)} + w_d_{(k)} \quad (12)$$

$$y_{(k)} = C_d x_{(k)} + v d_{(k)} \quad (13)$$

Con base a lo anterior, se diseñó el filtro de Kalman el cual es un algoritmo derivado de la estimación de estados optima, en donde se declara que las componentes aleatorias $w d_{(k)}$ y $v d_{(k)}$ presentan una distribución Gaussiana con media de cero y covarianza distinta de cero. Por lo cual para esta investigación se definieron las matrices Q_E , asociada a la covarianza del ruido del proceso, y R_M asociada a la covarianza del ruido en la medición.

$$v d_{(k)} \square N(0, R_M) \quad (12)$$

$$w d_{(k)} \square N(0, Q_E) \quad (13)$$

Luego como primera instancia se establecieron las ecuaciones de predicción y de covarianza, las cuales son declaradas en las ecuaciones 14 y 15 respectivamente.

$$\hat{x}_k^- = A_d \hat{x}_{(k-1)} + B_d u_{(k-1)} \quad (14)$$

$$P_k^- = A_d P_{(k-1)} A_d^T + Q_E \quad (15)$$

En segunda instancia se declararon las ecuaciones de actualización, tanto para la predicción como de la covarianza del error, descritas en las ecuaciones 17 y 18.

$$k_{(k)} = P_{(k)}^- C_d^T (C_d P_{(k)}^- C_d^T + R_M)^{-1} \quad (16)$$

$$\hat{x}_{(k-1)} = \hat{x}_{(k)}^- + k_{(k)} (y_{(k)} - C_d \hat{x}_{(k)}^-) \quad (17)$$

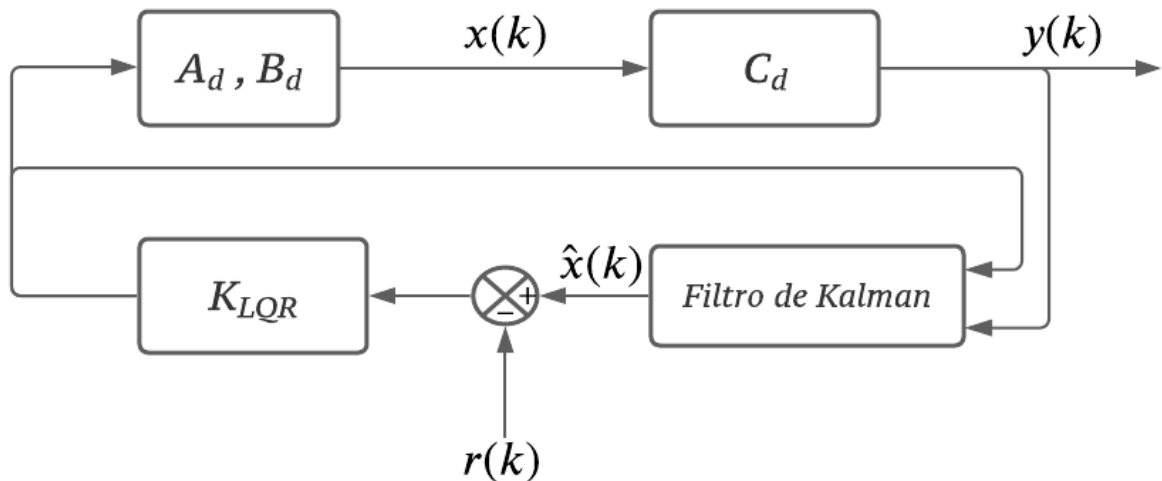
$$P_{(k)} = (1 - k_{(k)} C_d) P_{(k)}^- \quad (18)$$

El termino $k_{(k)}$, descrito en la ecuación (16), es la matriz de ganancias optimas del filtro de Kalman, que minimiza la covarianza del error actualizada $P_{(k)}$.

Finalmente integrando el filtro de Kalman dentro del lazo de control del LQR se diseña la técnica de control LQG, en donde se busca minimizar la función de costo para el sistema Ball

& Beam, dado por las ecuaciones (12) y (13). A continuación, en la figura 4 se muestra la interconexión que tiene el sistema Ball & Beam, el filtro de Kalman y el conjunto de ganancias optimas K dentro del lazo de control LQG en el dominio discreto.

Figura 4. Esquema general de conexión para el lazo de control LQG



4. Simulación y Resultados

En este apartado se muestra el proceso de diseño y simulación de los controladores LQR y LQG en el sistema Ball & Beam lineal, luego se presenta la simulación del controlador LQG dentro del sistema no lineal; Por último, se muestran los resultados obtenidos en la implementación del controlador LQG en el sistema Ball & Beam de Quanser, proceso que se llevó a cabo por medio del software Matlab/Simulink y su módulo QUARC.

Antes de iniciar con el proceso de diseño de los controladores LQG y LQR se validó que el sistema lineal fuera tanto observable como controlable, corroborando que el rango de las matrices de controlabilidad y observabilidad fuera igual que el grado del sistema. Posterior a

ello, se realizó el diseño del controlador LQR, en donde se configuraron las matrices peso Q y R, declaradas a continuación.

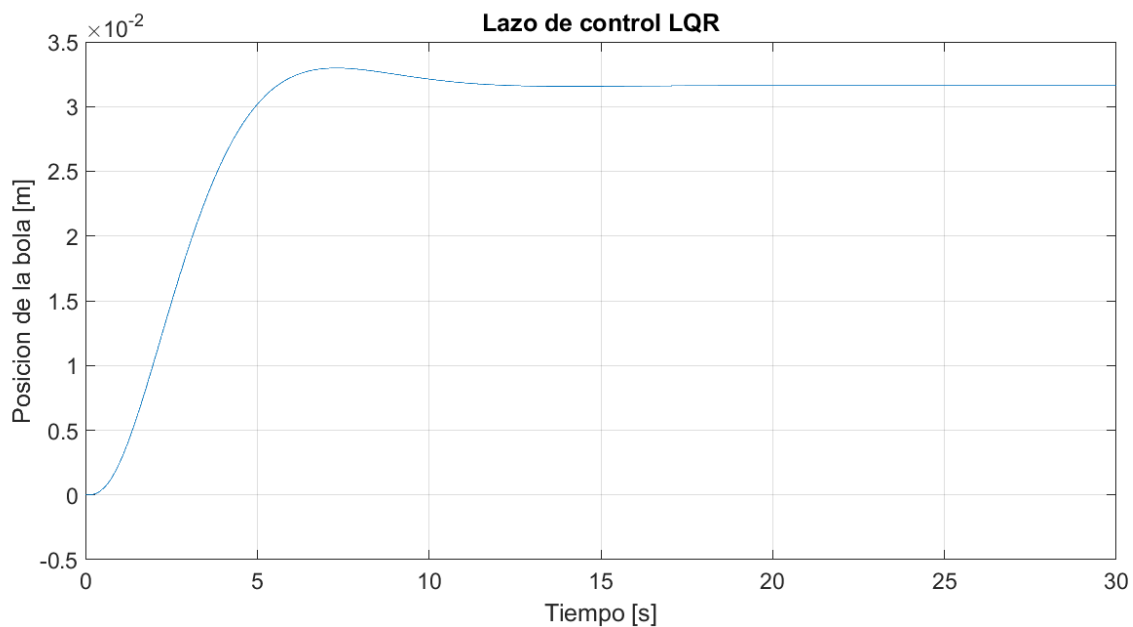
$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; R = [10]$$

Solucionando la ecuación algebraica de Riccati se obtuvo la matriz de ganancias de realimentación óptima K , descrita a continuación.

$$K = [3.1623 \quad 8.1243 \quad 4.2963 \quad 0.5980]$$

Luego se generó en Simulink la realimentación de estados óptima para el controlador LQR, en donde se obtuvo la respuesta del sistema Ball & Beam lineal, sin componente de ruido en su estado de salida x_p , ante una entrada tipo escalón de magnitud de 0.1. Los resultados de esta simulación se muestran en la figura 5, bajo la cual se determinó que la respuesta del sistema para este lazo de control presenta un tiempo de establecimiento de 9.64 sec y un error en estado estacionario del 68.38 %.

Figura 5. Lazo de control LQR, control de la posición de bola.



Debido a que el sistema con el controlador LQR presento un elevado error en estado estacionario, aun sin integrar la componente de ruido en la realimentación de estados optima, se optó por diseñar e integrar un filtro de Kalman al lazo de control, conformando así la técnica de control LQG para el sistema Ball & Beam, incluyendo con esto una acción integral a la dinámica del sistema, logrando que la respuesta de este ante una entrada escalón tuviera un error en estado estacionario igual a 0.

Para el diseño del filtro de Kalman se declararon las matrices de covarianza Q_E y R_M , asociadas a la covarianza del ruido del proceso y a la covarianza del ruido de la ecuación de salida del sistema, respectivamente.

$$Q_E = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad R_M = 0.01$$

Empleando el algoritmo del filtro de Kalman se calculó la matriz k , la cual corresponde al conjunto de ganancias optimas del estimador cuadrático lineal.

$$k = [1.1756 \quad 0.6410 \quad 0.3163 \quad 0.0000]^T$$

Para el desarrollo de la simulación del lazo de control LQG en el sistema Ball & Beam lineal, se adiciono una señal aleatoria de distribución gaussiana con media 0 y covarianza de 0.01 en la realimentación del estado x_p , con el objetivo de replicar la alta sensibilidad al ruido que presentaba el sensor de posición lineal del sistema. En la figura 6 se muestran la respuesta del lazo de control LQG en el sistema lineal y la medición del comportamiento del estado x_p realimentado, una vez adicionada la componente de ruido descrita anteriormente.

Figura 6(a). Lazo de control LQG para el sistema lineal, control de la posición de bola.

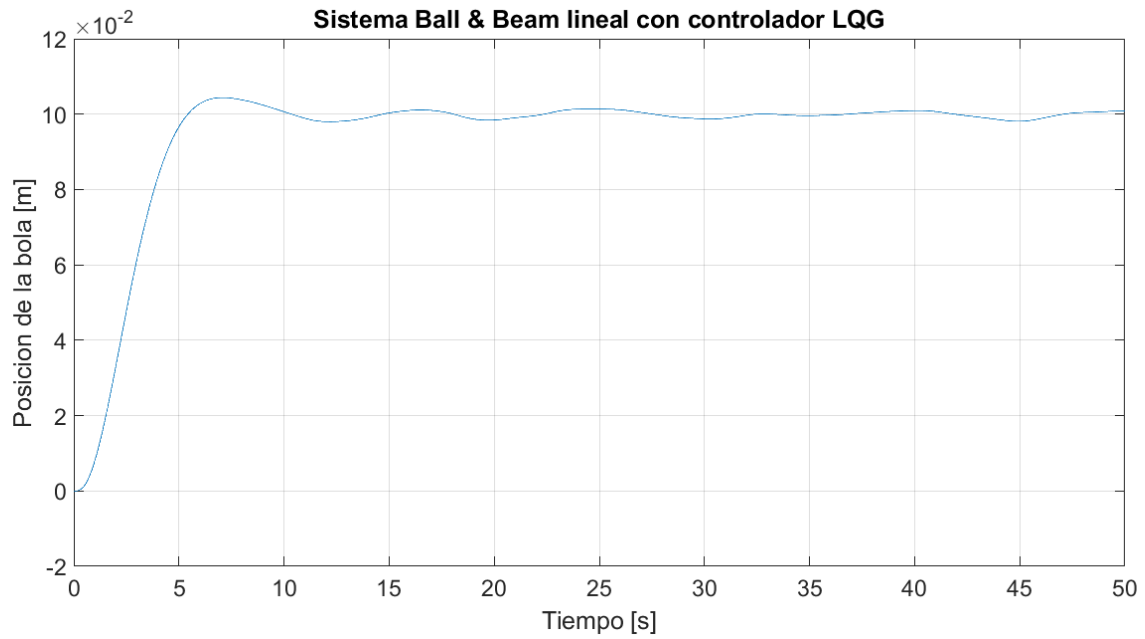
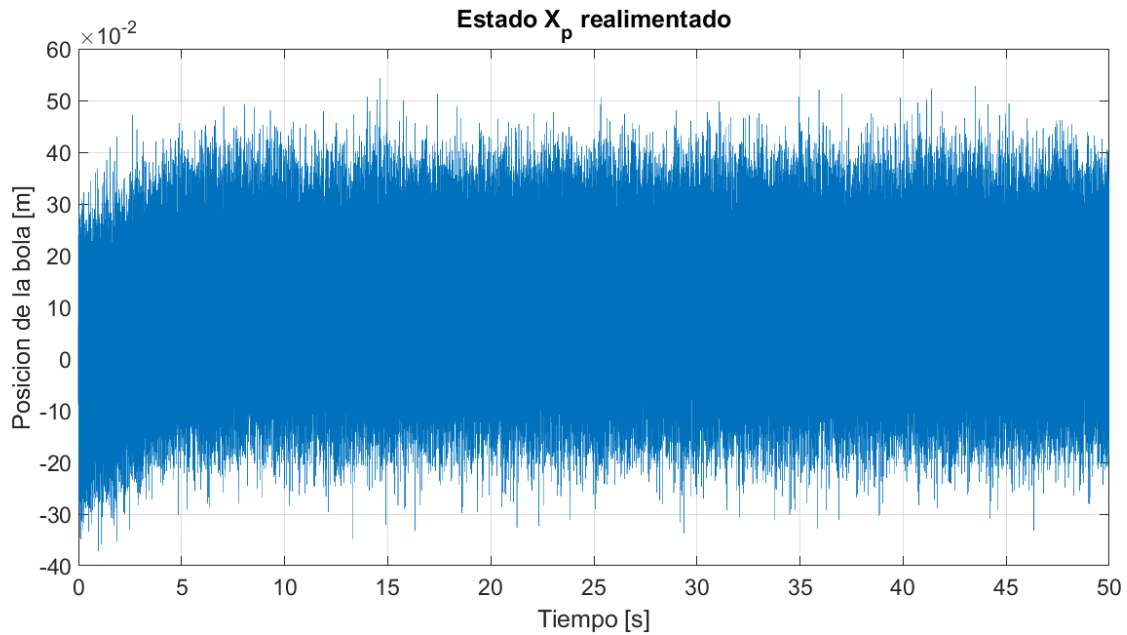


Figura 6(b). Lazo de control LQG, realimentación del estado x_p con ruido.



Luego con el objetivó de realizar una aproximación más cercana de la respuesta del controlador LQG en el sistema Ball & Beam real, se implementó esta estrategia de control en el sistema Ball & Beam no lineal, tal como se muestra en la figura 7, obteniendo como

respuesta del sistema, la dinámica de la posición de la bola descrita en la figura 8, la cual se estabilizo en un tiempo de 29.79 sec y presento un error en estado estacionario de 0.28 %.

Figura 7. Implementación en Simulink del lazo de control LQG para el sistema no lineal del Ball & Beam de Quanser.

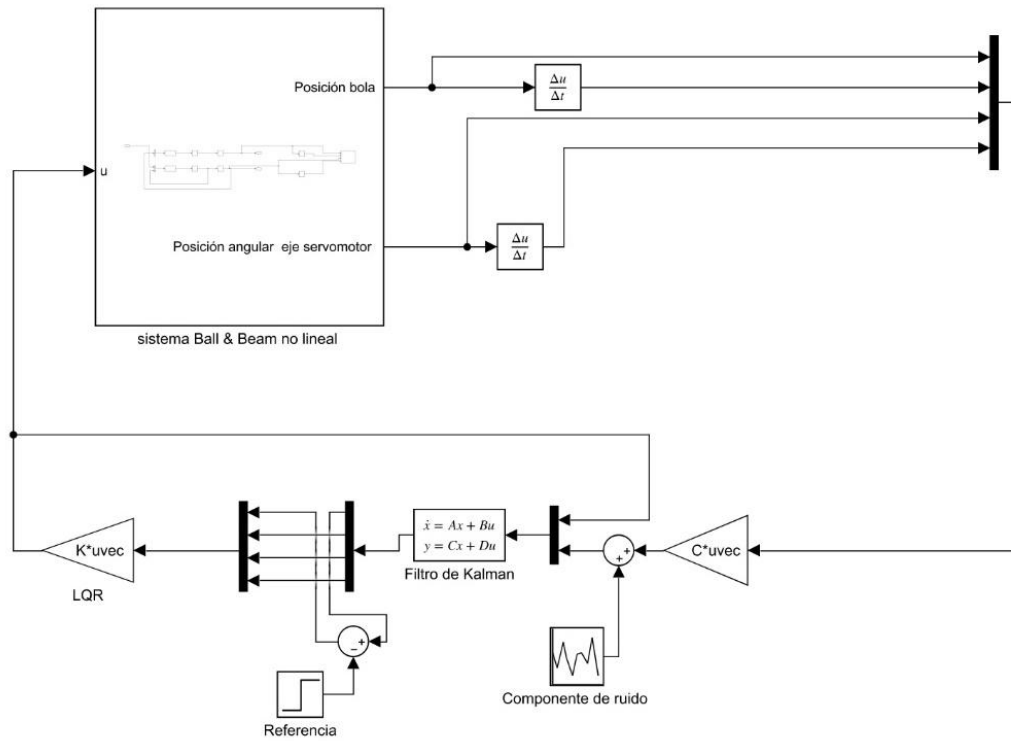
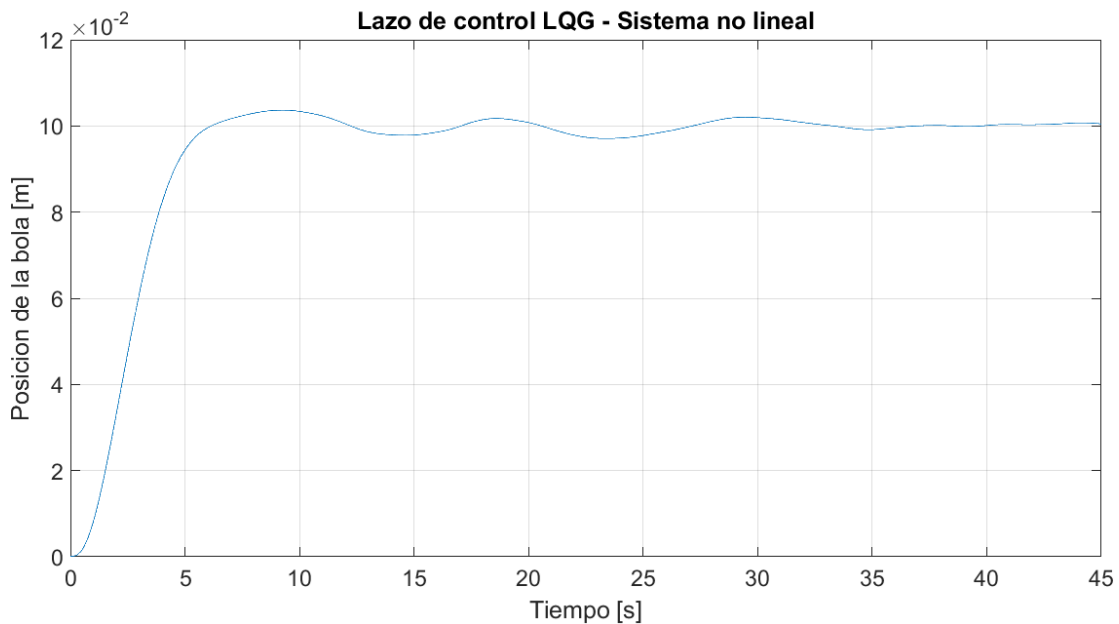


Figura 8. Lazo de control LQG para el sistema no lineal, control de posición de la bola.



Tal como se pudo evidenciar las estrategias de control LQR y LQG logran estabilizar el sistema Ball & Beam de Quanser, con la diferencia que el controlador LQG minimiza los efectos negativos del ruido inherente al sensor de posición lineal del sistema, y genera un error en estado estacionario mucho menor que el controlador LQR. Con el objetivo de realizar un análisis cuantitativo de los resultados, se organizaron en la tabla 2, los tiempos de establecimiento y los errores en estado estacionario, obtenidos en cada una de las simulaciones realizadas.

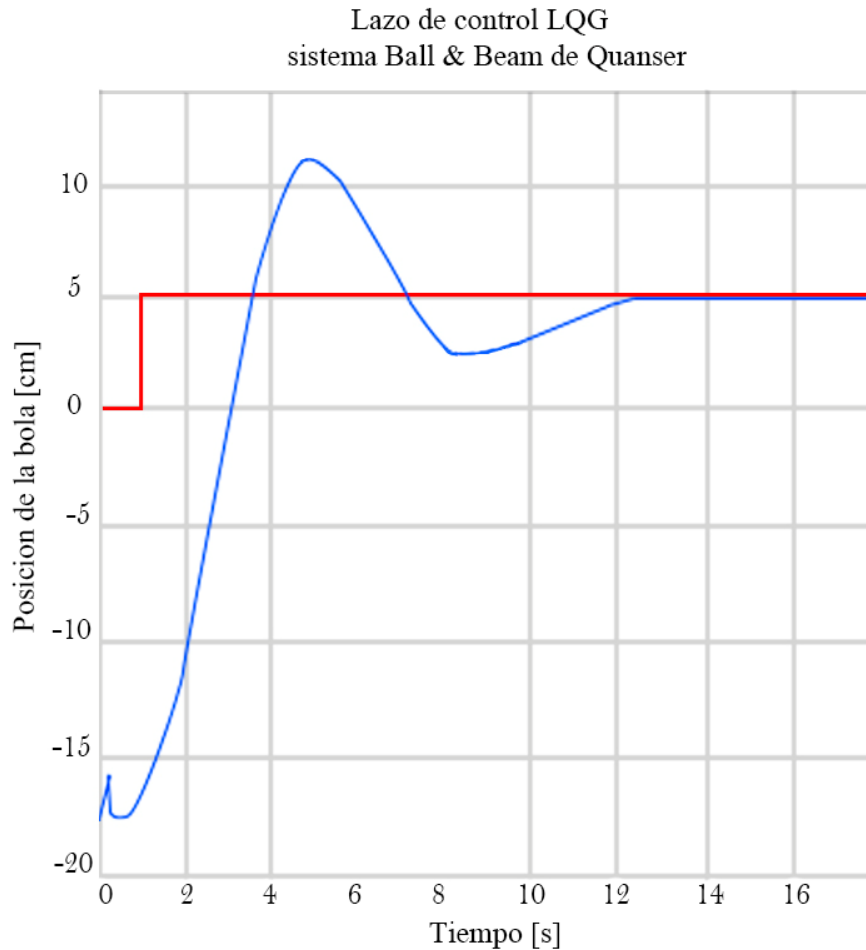
Tabla 2. Características cuantitativas de las respuestas de cada lazo de control.

Controlador	Estado	Tiempo de establecimiento [sec]	Error en estado estacionario [%]
LQR	x_p	9.6446	68.38
LQG (Sistema lineal)	x_p	12.3262	0.1523
LQG (sistema no lineal)	x_p	29.789	0.2836

Fuente: elaboración propia.

Por último, utilizando el módulo QUARC de Matlab/Simulink se implementó el lazo de control LQG en el sistema Ball & Beam de Quanser, obteniendo como respuesta del sistema la dinámica descrita en la figura 9, en donde la función escalón es la referencia impuesta al sistema Ball & Beam, y la otra función es la dinámica de la posición de la bola ante dicha referencia.

Figura 9. Lazo de control LQG sistema Ball & Beam de Quanser.



En base a la respuesta del lazo de control LQG implementado en el sistema Ball & Beam de Quanser real y analizando la dinámica del estado x_p descrita en la figura 9, se evidenció que la posición de la bola a lo largo de la viga presenta un tiempo de establecimiento alrededor de los 12 segundos y un error en estado estacionario cercano al 0 %; es importante resaltar la similitud de estos datos con los resultados obtenidos en el diseño y simulación del controlador LQG para el sistema Ball & Beam lineal, los cuales están presentes en la tabla 2.

Lo anterior nos permite afirmar que debido a que se realizó un correcto modelamiento matemático y linealización del sistema alrededor del punto de operación seleccionado, se logró

describir con gran exactitud el comportamiento del sistema real al rededor su punto de operación. Logrando con ello a su vez, evidenciar que el lazo de control LQG diseñado bajo este modelo lineal logra estabilizar los estados del sistema tanto en la simulación como en la implementación real.

5. Conclusiones

Se diseño, simulo e implemento un controlador LQG para el sistema Ball & Beam de Quanser, logrando estabilizar la posición de la bola a lo largo de la viga. Adicionalmente por medio de un análisis comparativo entre los controladores LQR y LQG, se validó que solamente el controlador LQR no es eficiente para controlar el sistema Ball & Beam, debido a que la respuesta de este lazo de control presenta un error en estado estacionario elevado, aun sin la presencia de ruido en la realimentación del estado x_p , el cual está asociado a la medición de la posición lineal de la bola. Por otro parte se validó que el controlador LQG, es eficiente para controlar el sistema Ball & Beam, ya que logra estabilizar los estados del sistema con un error en estado estacionario cercano al 0%, tanto en la presencia como en la ausencia de ruido dentro de la medición de su estado de salida; esto se debe a que durante el diseño del controlador LQG se tiene en consideración, tanto el ruido asociado al proceso como el ruido asociado a la medición del estado de salida, generando con ello, una estimación optima de todos los estados del sistema, permitiendo mejora tanto el desempeño del controlador como la respuesta del sistema. Por tal razón se puede afirmar que la técnica de control LQG es efectiva para controlar el sistema Ball & Beam, aun cuando se presenta ruido en la medición de su estado de salida.

Referencias

- [1] D. Colón, Y. S. Andrade, Á. M. Bueno y S. D. Ivando , «MODELING, CONTROL AND IMPLEMENTATION OF A BALL AND BEAM,» ResearchGate, 2014.
- [2] S. Valluru, M. Singh y S. Singh, «Prototype Design and Analysis of Controllers for One Dimensional Ball and Beam System,» IEEE International Conference on Power Electronics., 2016.
- [3] D. L. Mariño y J. A. Tumialán, «Control de un ball & beam con Matlab R y Lego R NXT,» Visión Electrónica, Noviembre 2014.
- [4] S. Mustansar , . A. Rahat y . M. M. Fahad, «Control of Ball and Beam with LQR Control Scheme using Flatness Based Approach,» College of Elecrical and Mechanical Engineering.
- [5] S. Rahul y Dr.Sathans, «Optimal Control of a Ball and Beam System through LQR and LQG,» IEEE, 2018.
- [6] C. N. Xuan, H. P. Nguyen, L. H. Duc, K. T. Dang, M. K. Le y T. X. Pham, «BUILDING QUASI-TIME-OPTIMAL CONTROL LAWS FOR BALL AND BEAM SYSTEM,» IEEE, 2019.
- [7] X. Wang, «Using LQG-LTR control law to improve the performance of direct drive rotary positioning system subject to uncertain inertia load,» IEEE, 2011.
- [8] A. Umar, . D. U. Aliyu, M. Umar y M. Y. Abdulmumin , «Linear Quadratic Gaussian (LQG) Control Design for Position and Trajectory Tracking of the Ball and Plate System,» IEEE, 2017.
- [9] D. V. Thach y S.-G. Lee, «LQG Control Design for a Coupled Ballbot Dynamical System,» International Conference on Control, Automation and Systems, 2018.
- [10] K. G. Wodeck , C. S. Racho y . A. M. Jeffrey, «Application of the LQG and Feedforward Controllers to the Deep Space Network Antennas,» IEEE, 1995.
- [11] Quanser Inc., «QUANSER INNOVATE EDUCATE,» 2011. [En línea]. Available: <https://www.quanser.com/products/ball-and-beam/>.