Trayectoria hipotética de aprendizaje para promover la generalización de una propiedad geométrica en educación básica

Hypothetical learning trajectory to promote the generalization of a geometric property in basic education

NORIA
INVESTIGACIÓN EDUCATIVA
ISSN-E2590-5791

Ingrid Ximena Bocanegra González

María Angélica Devia Ávila

Leonor Camargo Uribe

Artículo de Investigación

Trayectoria hipotética de aprendizaje para promover la generalización de una propiedad geométrica en educación básica

Hypothetical learning trajectory to promote the generalization of a geometric property in basic education

Ingrid Ximena Bocanegra González
Egresada de la licenciatura en Matemáticas. *Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia*
dma_ixbocanegrag952@pedagogica.edu.co

María Angélica Devia Ávila
Egresada de la licenciatura en Matemáticas. *Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia*
dma_madeviaa336@pedagogica.edu.co

Leonor Camargo Uribe
Docente de planta. *Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia*
lcamargo@pedagogica.edu.co

Resumen

En el presente artículo se pretende socializar una experiencia de aula desarrollada con estudiantes de grado 6° de Educación Básica secundaria (10 – 12 años) con el objetivo de fomentar en ellos el descubrimiento de una propiedad geométrica en cuanto a los triángulos inscritos en semicircunferencias. A partir de ello, se delimitó este abordaje desde dos aspectos. Primero, la potencia de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, como herramientas para prever cómo conducir a los estudiantes hacia una meta, de manera flexible, y así atender posibles situaciones que deban enfrentar. Segundo, la posibilidad de apoyar a los estudiantes en el desarrollo de procesos de generalización desde una propuesta compuesta por fases y pasos. De esta manera, se desea, contribuir con ello a modificar ambientes de aprendizaje centrados en brindar información, para dar paso a espacios de indagación genuina.

Palabras clave: Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA); Generalización; Generalización Geométrica; Conjetura.

Abstract

In this article aims to communicate a classroom experience in which 6th grade students from Secondary Basic Education (10 - 12 years old) were sought to discover a geometric property of the triangles inscribed in semicircles. Attention is wanted to be draw to two aspects. The first, the power of the Hypothetical Learning Trajectories, as tools to foresee how to lead students towards a goal, in a flexible way, attending to possible situations that they must face. The second, the possibility of supporting students in the development of generalization processes, based on a proposal of phases and steps. It is believed to contribute with this to modify learning environments focused on providing information, to give way to spaces for genuine inquiry.

Keywords: Hypothetical Learning Trajectory (THA); Generalization; Geometric Generalization; Conjecture.

Introducción

Como lo mencionan Gómez y Lupiáñez (2007) la noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) ha despertado gran interés entre investigadores y profesores en Educación Matemática, desde hace aproximadamente 25 años. En efecto, según dichos autores, Martin Simón fue el primero en introducir esta noción y surgió como un modelo de apoyo para la enseñanza de las matemáticas, basado en la identificación de desempeños predeterminados y en el diseño riguroso de tareas para lograrlos. Así mismo, las THA son herramientas que ayudan a los profesores a centrar la mirada en el aprendizaje, como fuente de información para la enseñanza de conceptos o procesos matemáticos. De esta manera, permiten tener una comprensión más clara sobre cómo los escolares aprenden matemáticas y sobre cómo se puede intervenir para apoyar el desarrollo de los conocimientos matemáticos que estén trabajando. En definitiva, con estos presupuestos en mente se asume el reto de construir una THA para promover el proceso de generalización de una propiedad geométrica por parte de niños de sexto grado de educación básica secundaria, con edades entre los 11 y 12 años.

Por consiguiente, acerca del proceso de generalización, se observa que este es importante en el desarrollo del pensamiento matemático y es uno de los principales retos de la formación matemática. Es considerado como un proceso central del trabajo escolar. En los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas colombianos (MEN, 2006) se plantea que:

> Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras son muy importantes; son una forma de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico, antes de llegar a grados superiores de secundaria (pág.67).

Por otra parte, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), también se menciona la importancia de promover actividades de generalización de patrones numéricos y geométricos, ya que la exploración y la manipulación de números y figuras hace que los estudiantes busquen regularidades, formulen enunciados generales y argumenten acerca de la certeza de estos.

De acuerdo con lo anterior, en este artículo además de comunicar una experiencia de aula en donde se busca que los estudiantes generalicen la siguiente propiedad: *dada una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo*, se expone la THA prevista y se presentan los momentos del trabajo de los estudiantes. De esta manera, se pretende hacer un contraste con la Trayectoria Real de Aprendizaje (TA). También, se hace una síntesis de algunos trabajos sobre THA en Educación Matemática, se presenta el marco conceptual que fundamenta la THA propuesta y se informa sobre el proceso que dio lugar a su elaboración. Finalmente, se espera que por medio de este artículo se geste un interés en cuanto al uso de esta importante herramienta.

Estudios sobre THA en Educación Matemática

En una revisión bibliográfica acerca del tema, en el campo de la Educación Matemática, se encontró como primer referente sobre las THA el estudio de Simón (1995). En este, el autor define las primeras bases acerca de las THA. En una investigación posterior, Tzur (1999) toma la idea de Simón (1995) para el desarrollo de un trabajo referente a la construcción del concepto de fracciones impropias en niños de cuarto grado. Además de usar la idea de THA, Tzur propone algunos elementos que debe tener en cuenta un docente al construir una THA. En efecto, estas primeras miradas hacia las THA por parte de Simón (1995) y Tzur (1999) cobraron mayor impacto tras unir sus estudios con el fin de producir un nuevo trabajo en donde involucran dos elementos importantes, a saber: las etapas de aprendizaje en los niños enfocadas directamente en el concepto de fracción y los tipos de tareas que promueven la enseñanza de dicho concepto matemático en el diseño de una THA, Tzur y Simón (1999). En el año 2000, Tzur retoma sus estudios sobre THA fracciones, y la producción investigativa hecha en conjunto con Simón, en donde busca que los estudiantes dejen de ver la fracción unitaria como una relación parte-todo a verla como un operador, (Tzur, 2000). Finalmente, En 2004 Simón y Tzur, amplían sus investigaciones y enfatizan en el rol que cumplen las tareas matemáticas en el aprendizaje de un concepto y, por lo tanto, en la concepción de una THA.

A partir del trabajo de Simón y Tzur, surge el interés investigativo en Educación Matemática sobre THA. En la mayoría de los estudios, los autores toman como referente la definición de Simón (1995) y proponen sus propias perspectivas. Uno de estos estudios corresponde a Clements y Sarama (2004) quienes dejan de lado el carácter hipotético enunciado en investigaciones anteriores acerca de las THA y plantean un nuevo paradigma, a saber: las *trayectorias reales de aprendizaje (TA)*. Así mismo, al hacer una comparación indican que las THA hace referencia al conocimiento a priori mientras que las TA al conocimiento posteriori. En consecuencia, para el 2009, Clements y Sarama toman sus trabajos desarrollados en el 2004 y exponen una TA sobre el proceso de conteo e indican la transición por niveles de acuerdo con las edades de los niños. Por otro lado, Gómez y Lupiáñez (2007) toman la definición de Simón (1995) sobre THA y la conciben como una herramienta importante en la formación de profesores de matemáticas de secundaria. De esta manera, construyen una THA sobre función cuadrática donde enuncian los posibles caminos o rutas que siguen los escolares en el aprendizaje; esta trayectoria orienta a profesores sobre cómo debería enseñarse este concepto.

Así mismo León, Celis y Guilombo (2014) toman las ideas de los trabajos desarrollados por Simon y Tzur (2004) y Sarama y Clements (2009) para construir una TA de nociones geométricas, dirigida a estudiantes sordos en escolaridad inicial. Con el fin de aterrizar dichas perspectivas sobre las THA en Colombia, en esta revisión bibliográfica, concebimos este trabajo como el primer estudio sobre trayectorias realizado en nuestro país. Por otro lado, un nuevo trabajo enfocado a la población de inclusión colombiana es desarrollado por Rodríguez (2016) y usa como referente a Sarama y Clements (2009). En dicho trabajo, se articulan las ideas en torno a las THA e inclusión, así como la incorporación de tecnología en la enseñanza de las operaciones suma y resta y en el proceso de conteo en estudiantes que presentan alguna discapacidad *no solo referida a la sordera*.

En la última década se encuentran varios trabajos que retoman las ideas de Simón y Tzur (2004), así como las de Clements y Sarama (2004, 2009). Por ejemplo, Martínez, Llinares y Torregrosa (2015) usan las TA para analizar trayectorias de aprendizaje de maestros en formación y diseñan THA sobre la enseñanza del concepto de fracciones, haciendo uso del tangram como herramienta didáctica. Por otra parte, Ivars, Buforn y Llinares (2016) dirigen su investigación hacia los maestros en formación con el fin de promover en ellos competencias profesionales en función de TA sobre las fracciones. En el año 2017, Cárcamo desarrolla un estudio enfocado a la innovación docente en donde identifica una TA de los conceptos algebraicos "conjunto generador" y "espacio generado". De igual modo, Sicuamia (2017) presenta una TA para la formación de profesores de básica primaria en ejercicio en torno a la orientación espacial. Finalmente, en el año 2018 Orts, Llinares y Boigues sugieren una THA del concepto de recta tangente para alumnos de bachillerato.

Definición, componentes y características de una THA

En consonancia con lo planteado por Simón (1995), Clements y Sarama (2004) en este trabajo definimos la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como: *un proceso conjeturado de pensamiento y aprendizaje orientado por una meta específica, el cual se organiza con base en unas tareas relacionadas entre sí que ayudan a conseguir la meta a partir de una hipótesis acerca de la ruta que debería seguir el aprendizaje.* En efecto, las tareas se diseñan para suscitar aquellos procesos mentales o acciones hipotéticas que los estudiantes deberían realizar para transitar por niveles de pensamiento que apoyen el logro de objetivos específicos en un dominio matemático. En el Cuadro 1, presentamos los elementos que componen una THA y las características distintivas.

Elementos de una THA	Características de una THA
La meta de aprendizaje. Una secuencia de tareas de instrucción. Una o más trayectorias o progresiones hipotéticas sobre el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje mediante el cual se diseñan las tareas de instrucción.	Se basa en la comprensión de los conocimientos actuales de los estudiantes. Es una ruta que sirve para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares. Mediante tareas matemáticas, proporciona herramientas que promueven el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares; las tareas son parte clave del proceso de instrucción. La participación del profesor en orientar la enseñanza según la THA es esencial, debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso. Por consiguiente, el rol del docente es activo.

Cuadro 1. Elementos y características de una THA

Proceso de Generalización

En geometría, usualmente la generalización se hace con el fin de descubrir propiedades de objetos geométricos partiendo del estudio de casos particulares. Posteriormente, se identifican características comunes y se expanden estas características al objeto geométrico visto de manera general. A partir de ello, según Mora (2012) *la generalización está relacionada con otros procesos propios de la actividad matemática, que podrían considerarse más particulares tales como: inducir, observar, descomponer, hacer analogías, descontextualizar e identificar características comunes y argumentar*. Por consiguiente, estas relaciones dejan ver que la generalización es importante y debe atenderse en la enseñanza de las matemáticas. Así pues, al tomar como referencia a Mora (2012) y a Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov (2008) proponemos que el proceso de generalización se organice en cuatro fases y siete pasos. De esta manera, en el Cuadro 2 sintetizamos nuestra propuesta.

Fase 1 Ver	Reconocimiento de semejanzas y diferencias entre los atributos de varias representaciones que tienen una propiedad común.	
	Pasos: 1. Traducción de un enunciado verbal o escrito en dos o más representaciones. 2. Exploración empírica de las representaciones realizadas. 3. Observación de características especiales de las representaciones y de sus regularidades, con base en la percepción de las representaciones individuales.	
Fase 2 Describir	Descripción oral de la regularidad identificada en las representaciones. Es fundamental que los estudiantes hablen, comuniquen sus ideas, expresen lo que ven, de manera oral.	
	Paso: 4. Formulación oral de una regularidad detectada con base en las características específicas de las representaciones.	
Fase 3 Escribir	Escritura de la conjetura formulada oralmente, con apoyo de dibujos, símbolos, términos y notación geométrica, de manera natural, espontánea, propia, preferiblemente por necesidad y no por persuasión o instrucción del profesor.	
	Paso: 5. Escritura de la regularidad descrita en un enunciado tipo conjetura con base en las representaciones específicas.	
Fase 4 Verificar	Búsqueda de razones para sustentar la certeza de la propiedad hallada. Se apoya en preguntas como: ¿Cómo se está seguro de que la propiedad siempre se cumple? ¿Por qué se da esa situación?	
	Pasos: 6. Justificación empírica de la conjetura y búsqueda de una explicación. 7. Generalización del enunciado de la conjetura a la figura geométrica genérica, es decir, sin condiciones específicas.	

Cuadro 2. Pasos del proceso de generalización de una propiedad geométrica

Metodología

Con base a las fases anteriores se diseñó la THA sobre el proceso de generalización de una propiedad geométrica a partir de las siguientes etapas:

Etapa 1: Fundamentación conceptual: Además de revisar la noción de THA y establecer sus características, se estudió el proceso de generalización geométrica para proponer unas fases y pasos de tal proceso.

Etapa 2: Diseño de la THA: Se propuso una meta de aprendizaje, así como un conjunto de tareas. En efecto, las tareas se estructuraron de acuerdo con previsiones sobre posibles actuaciones y dificultades que podrían tener los estudiantes. Así pues, una implementación piloto nos ayudó a configurar mejor la trayectoria.

Etapa 3: Implementación de la THA: La THA se aplicó a estudiantes de grado sexto de un colegio distrital de la ciudad de Bogotá; cabe destacar que la segunda autora de este artículo era la profesora. Aunque la implementación se realizó con todo el curso. Para empezar, se seleccionaron seis estudiantes, los cuales se destacaban en la clase de geometría por sus competencias comunicativas, para hacer una grabación de audio y video de aquello que los estudiantes hacían o hablaban.

Etapa 4: Contraste entre la THA y la TA: A partir del material compuesto por grabaciones de audio y video se realizó un contraste entre lo previsto en la THA y la TA. De esta manera, se propusieron algunas sugerencias para futuras implementaciones.

THA sobre el proceso de generalización de una propiedad geométrica

Posteriormente, se presentó la THA en torno al proceso de generalización de una propiedad geométrica. En efecto, en el Cuadro 3 se referencia la meta de aprendizaje y el enunciado del problema inicial que se les propuso a los estudiantes. Así mismo, en el Cuadro 4 se expone la trayectoria propiamente dicha.

Meta de aprendizaje	Enunciado del problema
Descubrir, conjeturar y proponer, a manera de expresión general, la siguiente propiedad geométrica: dada una semicircunferencia y un triángulo inscrito en ella, si uno de los lados del triángulo es diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.	Construye una semicircunferencia. Explora qué propiedad geométrica común tienen los triángulos que se forman tomando los extremos del diámetro y otro punto de la semicircunferencia, como vértices.

Cuadro 3. Meta de aprendizaje y enunciado del problema.

En la columna 1 del Cuadro 4 se incluyó los pasos del proceso de generalización según la progresión prevista para el aprendizaje (excepto la primera acción que busca una interpretación del enunciado). Así mismo, en la columna 2 se expuso una idea de lo que podría pasar cuando los estudiantes se enfrentan al problema. De igual manera, en la columna 3 se plantearon tareas que el profesor podría construir, de acuerdo con lo que podría pasar. De manera análoga, en la columna 4 se realizaron sugerencias adicionales para el profesor. Por otra parte, las tareas se concibieron para ser resueltas mediante el uso de papel con el apoyo de materiales como: regla, compás y transportador. Sin embargo, si se desea, pueden adaptarse a un trabajo con un programa de geometría dinámica, aprovechando la posibilidad de arrastrar puntos de la construcción, para hacer la exploración empírica de manera dinámica, esta idea está mayormente expuesta en nuestra tesis (Bocanegra y Devia, 2019)

Progresión	**¿Qué puede pasar?**	**Tareas para apoyar la progresión**	**Sugerencias de gestión**
Fase 1: Ver			
Interpretar el enunciado del problema	Los estudiantes entienden los términos del enunciado del problema e interpretan lo que tienen que hacer.	No se propone tarea.	No aplica.
	Los estudiantes no entienden algunos términos geométricos involucrados en el enunciado del problema.	<u>Tarea 1</u>: Explica con tus palabras qué entiendes por semicircunferencia, diámetro, extremos del diámetro y vértice.	Resaltar las palabras que pueden generar dificultades en la interpretación y preguntar por su significado, poner ejemplos, preguntar por las relaciones entre algunos de los objetos mencionados.
	Los estudiantes no entienden qué tienen que hacer.	<u>Tarea 2</u>: Explica con tus palabras de qué se trata la tarea.	Guiar la interpretación dirigiendo la atención a los objetos geométricos a considerar para delimitar

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>sobre cuál objeto se debe buscar algo.
Guiar la atención hacia las palabras del enunciado con el fin de indicar aquello que se debe hacer para interpretar el propósito de la tarea.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración.
(Paso 1)</td><td>Los estudiantes hacen una representación correcta de una semicircunferencia con más de un triángulo inscrito que tienen un diámetro como lado.</td><td>No se propone tarea.</td><td>No aplica.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes hacen una representación correcta con un solo triángulo.</td><td><u>Tarea 3</u>:
Construye, en la misma semicircunferencia, al menos otro triángulo que cumplan las condiciones del enunciado.</td><td>Pedir releer el enunciado y representar otros triángulos.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes no tienen destreza en el uso de compás o no tienen un compás adecuado.</td><td><u>Tarea 4</u>:
Construye una semicircunferencia usando el molde de una circunferencia.</td><td>Proporcionar plantillas de circunferencias. Pedir a los estudiantes recortar y doblar por la mitad para luego usarlas como moldes. Finalmente, dibujar los triángulos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Hacer una exploración empírica para enriquecer la representación en busca de alguna propiedad.
(Paso 2)</td><td>Los estudiantes deciden investigar las medidas de los lados y de los ángulos de los triángulos.</td><td>No se propone tarea.</td><td>No aplica.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes realizan alguna acción sobre la representación (como contar los segmentos, comparar las figuras que hay, resaltar lados, medir lados o ángulos) sin centrar la atención en el objeto que se quiere investigar.</td><td rowspan="2"><u>Tarea 5</u>:
Explica qué propiedades pueden tener los triángulos, que aún no conozcas.</td><td rowspan="2">Proponer ejemplos sobre propiedades que se pueden investigar en los triángulos, hasta conseguir alusión a estudiar las medidas de los lados y medidas de los ángulos.</td></tr>
<tr><td>A los estudiantes no se les ocurre investigar las medidas de los lados y de los ángulos.</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes hacen uso correcto del transportador y la regla graduada.</td><td>No se propone tarea.</td><td>No aplica.</td></tr>
</table>

	Los estudiantes hacen uso incorrecto del transportador y la regla.	Tarea 6 Construye y toma las medidas de distintos ángulos y segmentos.	Explicar cómo se miden ángulos y segmentos haciendo uso del transportador y la regla. Proporcionar una guía adicional en la que los estudiantes deban construir y medir ángulos y segmentos. Proporcionar escuadras o cuñas para comparar ángulos, si los estudiantes tienen dificultades para medirlos.
Observación de la propiedad en un conjunto de triángulos. (Paso 3)	Los estudiantes encuentran la propiedad solicitada.	No se propone tarea.	No aplica.
	Los estudiantes exploran con un número limitado de triángulos.	Tarea 7: Construye otros triángulos inscritos en la circunferencia pero que no tengan un diámetro como lado, y compáralos con los que hiciste inicialmente.	Sugerir a los estudiantes que exploren los triángulos hechos en semicircunferencias más grandes o pequeñas. Pedir a los estudiantes construir nuevos triángulos que cumplan las condiciones del enunciado del problema y estudien qué propiedades tienen.
	Los estudiantes no encuentran alguna propiedad común a todos los triángulos.	Tarea 8: Construye triángulos que cumplan las condiciones del problema y otros que no las cumplan y compáralos hasta encontrar semejanzas entre ellos con sus respectivas condiciones.	Presentar varias representaciones de triángulos inscritos en circunferencias (que sean ejemplos y no ejemplos de la situación a explorar) para que los estudiantes hagan comparaciones hasta centrar la atención en un ángulo especial.
Fase 2: Describir			
Formulación oral de una regularidad	Los estudiantes formulan oralmente la conjetura usando una expresión condicional.	No se propone tarea.	No aplica.

detectada con base en las características específicas de las representaciones. (Paso 4)	Los estudiantes formulan oralmente la conjetura, pero no mencionan algunas de las condiciones del antecedente o el consecuente de esta.	Tarea 9: Recuerda las condiciones que debe tener el triángulo, según el enunciado del problema. Si un triángulo tiene esas condiciones ¿qué propiedad podemos afirmar que tiene?	Pedir analizar formulaciones de enunciados similares a la conjetura, pero en donde falten condiciones. Por ejemplo: "Si un triángulo tiene los vértices en una semicircunferencia, ¿es rectángulo?", "Si ningún lado de un triángulo cuyos vértices están en una semicircunferencia es un diámetro, ¿es rectángulo?
	Los estudiantes no saben cómo iniciar la formulación o la formulan de manera incorrecta.	Tarea 10: Completa la oración: si un triángulo tiene sus vértices en una semicircunferencia y un lado es el diámetro puedo afirmar que el triángulo es: ______________.	Pedir a los estudiantes trabajar en parejas. A partir de ello, uno de ellos da las condiciones de un triángulo y el otro decide si se puede afirmar o refutar que el triángulo es rectángulo, sin necesidad de medir sus ángulos.
Fase 3: Escribir			
Escritura de una conjetura en formato condicional. (Paso 5)	Los estudiantes realizan la escritura de la conjetura correctamente.	No se propone tarea.	No aplica.
	Los estudiantes no saben cómo formular la conjetura de manera escrita o la formulan de manera incorrecta.	Tarea 11: Completa la oración: Si un triángulo ___________ entonces el triángulo es ____________________.	Proponer diferentes formatos condicionales para expresar la misma conjetura. Por ejemplo: Cuando vea un triángulo ______ puedo afirmar que _____. Dado un triángulo _______, este es ___________. Todos los triángulos _________ son ________.
Fase 4: Verificar			
Verificación empírica de la conjetura. (Paso 6)	Los estudiantes completan la circunferencia y construyen segmentos congruentes y paralelos a los lados del triángulo, por los extremos del diámetro. Observan que se forma un rectángulo.	Tarea 12: Verifica que los ángulos son rectos aun cuando el cuadrilátero tenga un lado de longitud pequeña.	Solicitar completar la oración: Si un cuadrilátero tiene vértices en una circunferencia y la diagonal es diámetro entonces los ángulos son ___________.

	Los estudiantes verifican la conjetura comprobando que se cumple en casos extremos (por ejemplo, cuando el vértice que no es extremo del diámetro está muy cerca a otro vértice).	Tarea 13: Completa la circunferencia y construye segmentos congruentes y paralelos a los lados del triángulo, por los extremos del diámetro. Observa qué cuadrilátero se forma.	Apoyar la construcción de un cuadrilátero inscrito en la circunferencia, con las dos diagonales como diámetros, haciendo otro triángulo congruente al primero. Comprobar que es un rectángulo observando la congruencia y bisección de sus diagonales, luego concluir que los ángulos son rectos.
	Los estudiantes no saben cómo verificar la conjetura.	Tarea 14: Verifica que se cumpla la propiedad encontrada en otros triángulos, incluso unos con el vértice que no es extremo del diámetro ubicado muy cerca de un extremo.	
Generalización de la conjetura. (Paso 7)	Los estudiantes generalizan la propiedad geométrica encontrada.	No se propone tarea.	No aplica.
	Los estudiantes no generalizan la propiedad geométrica encontrada.	Tarea 15: Discute con tus compañeros la siguiente afirmación: “no necesito medir los ángulos de un triángulo que tiene los vértices en una semicircunferencia y un lado es el diámetro para saber que es rectángulo”.	A poyar la discusión entre los estudiantes promoviendo la siguiente idea: es posible suponer que un triángulo sea rectángulo, sin medir los ángulos, solo porque cumple las condiciones incluidas en el enunciado del problema.

Cuadro 4. THA.

Resultados

Antes que nada, es importante aclarar que en esta descripción, análisis y exposición de los siguientes resultados cobra sentido enunciar el interés sobre los asuntos específicos delimitados por las fases y pasos expuestos en la previa THA y posteriormente aplicada a los estudiantes. Por consiguiente, a continuación, se presentan algunas de las producciones realizadas por los estudiantes y a su vez obtenidas en el aula de clase al aplicar la THA. A su vez, se podría hallar una mayor ampliación de estas producciones en nuestra tesis Bocanegra y Devia (2019).

Interpretación del enunciado de la tarea

Los estudiantes Óscar, Ana, Mariana, Sebastián, Michell y Valeri se organizan en grupo.

Mariana lee el enunciado del problema. A partir de ello, los niños manifiestan a la profesora Angélica no entender los términos involucrados. A pesar de ello, cabe aclarar que los estudiantes habían trabajado, en clases anteriores, las líneas notables de la circunferencia. Por consiguiente, al oírlos, ella les propone la Tarea 1 e inician interpretando qué es una semicircunferencia. Enseguida, Óscar representa una circunferencia, a mano alzada, en una hoja blanca y los compañeros hacen lo mismo. Sin embargo, la profesora Angélica pregunta: “Sí, lo que acaban de dibujar es una circunferencia, ¿que sería una semicircunferencia?”. - “La mitad”, dijo Óscar. Los demás, mediante gestos, manifiestan entender. Luego, la profesora pregunta al grupo qué entienden por diámetro y por extremo de un diámetro. Seguido a ello, Mariana, Michell, Sebastián y Valeri representan un radio. En cambio, Óscar y Ana no hacen ninguna representación y mencionan que no se acuerdan. Seguido a ello, la profesora dibuja en el tablero dos circunferencias; en una representa un radio y en la otra un diámetro (Figura 1). Luego pregunta, ¿cuál es la relación entre las dos líneas? A lo que Sebastián responde: -“son diámetros”; seguido a ello los demás asienten.

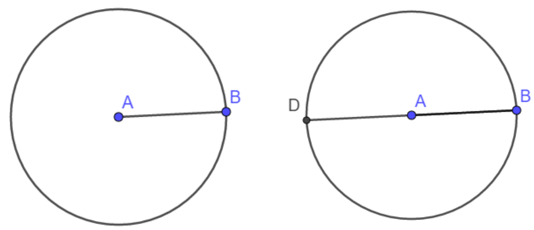
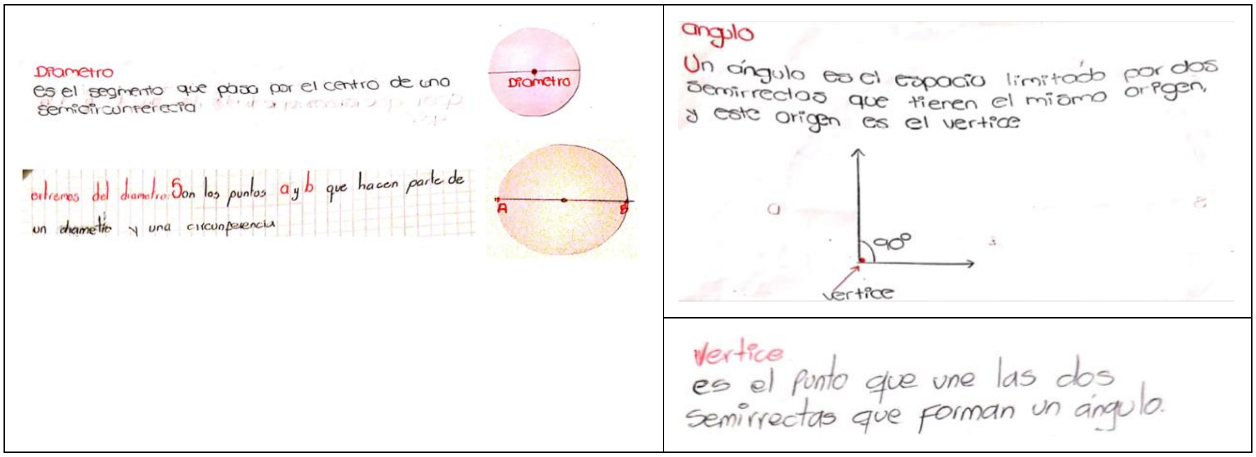


Figura 1. Diferencia entre radio y diámetro

En consecuencia, la profesora les pregunta si están seguros a lo cual Óscar paso con cierta alegría al tablero, borra el AD y motiva la siguiente conversación:

Óscar:	Yo digo que ese segmento [señalando $\overline{AB}$] es un radio y no un diámetro.
Profesora:	¿Y qué es un diámetro?
Óscar:	Un diámetro son dos radios.
Profesora:	¿Dos radios cualesquiera?
Ana:	No, tienen que estar en la misma línea.
Profesora:	Deben estar contenidos en la misma recta y esta pasa por el centro de la circunferencia. Y, ¿cuáles son los extremos de un diámetro?
Óscar:	Tenemos una semicircunferencia… entonces… queda como un transportador. El punto B es cero grados y el punto D es ciento ochenta.
Valeri:	Así es muy confuso, es más fácil decir que los extremos del diámetro son B y D, que hacen parte del diámetro y la circunferencia.

En concordancia con lo anterior, en el cuadro 5 presentamos las definiciones sobre ángulo que escribieron algunos niños, referente a la definición de vértice de ángulo no hubo discusión, pues los estudiantes manifestaron tener claro su significado. Una vez aclarada la terminología, la profesora retoma el problema y les pregunta qué deben hacer. Como manifiestan no entender, ella propone la Tarea 2.



Cuadro 5. Algunas definiciones consignadas por los estudiantes.

Para abordar la tarea, la profesora Angélica indica a los niños subrayar con color verde las acciones que se mencionan en el enunciado y con color rojo los objetos geométricos con los que tienen que trabajar y les pregunta ¿qué es lo que tienen que hacer?

Óscar: Para resolver el problema toca hacer el dibujo de una semicircunferencia y en ella ubicar el diámetro y los extremos. Luego se hace un punto en cualquier lugar de la semicircunferencia y ese punto y los dos puntos del diámetro formarían un triángulo. Cuando se hace eso, toca encontrar una propiedad geométrica de ese triángulo.

Profesora: ¿Se puede hallar una propiedad geométrica observando características de un solo triángulo?

Ana: A mí me enseñaron el año pasado que para encontrar una propiedad geométrica se deben usar dos o más objetos.

Óscar: Para solucionar la actividad, los triángulos se realizan tomando un punto de la semicircunferencia y los dos puntos extremos del diámetro… mmm… pero… bueno, para hacer varios triángulos hay que coger varios puntos de la semicircunferencia. Y pues… mmm… ahí se halla una propiedad geométrica común a todos los triángulos que se hicieron.

Después de la intervención de Óscar, Valeri dice - "el enunciado del problema está un poco enredado, pero ya lo comprendo", por otro lado, los demás estudiantes mediante gestos manifestaron tener claro lo que deben hacer.

Paso 1: Traducir el problema a una representación geométrica para hacer la exploración

La profesora Angélica nota que los estudiantes no tienen buena destreza con el uso del compás, por consiguiente, opta por proponer la Tarea 4. De acuerdo a esto, les entrega plantillas circulares hechas en cartulina, los estudiantes las doblan por la mitad y la usan de guía para representar una semicircunferencia. Luego, con el fin de diferenciar los triángulos concluyen utilizar colores distintos. Finalmente, usan una regla para construir algunos triángulos según las especificaciones dadas obteniendo así lo expuesto en la Figura 2.

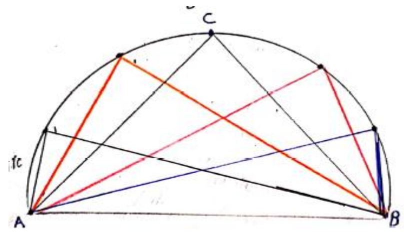


Figura 2. Representación del enunciado hecha por Mariana

Al hacer la representación los estudiantes se manifiestan muy solidarios y se apoyan unos a otros, la siguiente conversación es una muestra de ello.

Mariana: Usando lo que dijimos hace un rato. Para encontrar una propiedad que se cumpla en muchos triángulos toca hacer más de dos triángulos.

Sebastián: ¿El punto puede estar en cualquier lugar de la semicircunferencia?

Óscar: Se puede en cualquier lugar de la semicircunferencia y se forma un triángulo.

Paso 2: Exploración empírica de las representaciones realizadas

Como el fin es identificar una propiedad geométrica en los triángulos construidos, la profesora les pide a los estudiantes explorar la representación hecha. En consecuencia, los niños cuentan el número de lados, de vértices y de ángulos. Posteriormente, Sebastián muy emocionado dice: - "Siempre en los triángulos podemos ver que tienen tres lados, también tres vértices y los ángulos que también son tres". Sin embargo, la profesora les dice que eso ya lo saben y por ende el objetivo es buscar algo distinto, debido a esto, se evoca el siguiente diálogo.

Michell: Yo sé. Tal vez se puede mirar la forma que tienen los triángulos.

Profesora: ¿Cómo así que la forma? ¿A qué te refieres?

Michell: Pues si es grande, chiquito…

Valeri: Yo creo que Michell se refiere a la medida de los lados, ¿no?

Óscar: Si vemos algo en común, los triángulos tendrían que ser escalenos, isósceles o equiláteros. Ya que esa es la clasificación según sus lados, ¿cierto, profe?

Profesora: Sí, eso es correcto. ¿O qué otra propiedad podríamos mirar?

Óscar: Profe, entonces ver si es obtusángulo, acutángulo o rectángulo ¿verdad?

Mariana: O sea, clasificación por la medida de sus ángulos.

Profesora: Sí, tienen toda la razón ¿Creen que podríamos explorar algo más?

Sebastián: Profe, también podríamos mirar los ángulos externos del triángulo y ver qué pasa.

Profesora: Sí, también.

Ana: Las propiedades que se pueden estudiar son: la medida de los lados, la medida de los ángulos internos y externos, hacer la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados y sus ángulos.

Profesora: ¿Cómo hacemos para explorar para ver qué propiedades tienen los triángulos?

Valeri: Podemos usar, para medir los ángulos, el transportador. Y para medir los lados, la regla.

Una vez los estudiantes inician a medir los ángulos, la profesora se da cuenta que Sebastián, Michell, Valeri y Mariana no usan correctamente el transportador. Por esta razón, suspende temporalmente el trabajo y propone la Tarea 6. Para esto además de darles una hoja con varios ángulos que debían medir, les pide dibujar ángulos específicos (45°, 60°, 80°, 125°), medir algunos segmentos y construir segmentos dadas sus medidas, todo esto con el fin de verificar si los estudiantes hacen uso correcto de la regla graduada.

Paso 3: Observación de características especiales de las representaciones

Concluida la tarea referente al uso de la regla y el transportador, los estudiantes miden lados y ángulos de los triángulos dibujados en la representación. Al finalizar, Ana un poco angustiada dice: - "no encuentro algo común pues todas las medidas me dan distintas". A causa de esto, la profesora los anima a seguir explorando y luego de unos minutos se da el siguiente diálogo:

Óscar: ¡He encontrado algo!

Profesora: ¿Qué?

Óscar: Medí todos los triángulos y encontré que tienen un lado que mide siempre lo mismo. Por la forma como se hizo la construcción de la figura, hay un lado que es el mismo en todos los triángulos.

Profesora: Eso es correcto. ¿Y dijimos que ese lado cómo se llamaba?

Óscar: Ese segmento es el diámetro.

Profesora: Sí… bueno, miren que ya sabíamos que todos los triángulos tenían un lado igual, porque es el diámetro. Pero estamos buscando algo que no sabemos con la información que nos da el enunciado.

[Pasados unos minutos]

Sebastián: Los ángulos de abajo siempre me dan menor a 90°.

Mariana: ¡Ah! Y a mí me resulta que el ángulo de arriba siempre es de 90°. Muestra su representación (Figura 3).

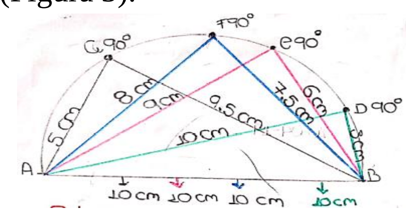


Figura 3

Michell: La medida del ángulo cuyo vértice es distinto a los extremos del diámetro.

Valeri: A mí no me da noventa, pero sí parecido.

Profesora: Esto sucede por falta de precisión al medir con el transportador o porque no están midiendo de manera correcta. Si tuviéramos algo que nos permita medir con exactitud muy seguramente esto no ocurriría.

Óscar: Mira profe, siempre el ángulo de arriba es de 90 y los otros dos ángulos son agudos ¿Ves?... ¿ves? Entonces… no estoy muy seguro, pero podría decir que esos triángulos son siempre rectángulos.

Al ver esto, la profesora Angélica decide proponer la Tarea 7 y les pregunta ¿qué pasa si la semicircunferencia es más grande o más pequeña que la construida? A esto, Óscar afirma: - “el ángulo de arriba ya no sería de noventa, sino mayor”, por consiguiente, Sebastián y Mariana manifiestan estar de acuerdo con Óscar, sin embargo, los demás manifiestan no saber lo que puede pasar.

Paso 4: Formulación oral de una regularidad detectada

Para el desarrollo de la tarea 7, la profesora entrega a los estudiantes plantillas de semicircunferencias de distintos radios, luego, les pide que construyan triángulos con las características dadas en la tarea anterior y analicen qué pasa con los ángulos de estos triángulos. Después de medir los ángulos de varios triángulos Óscar menciona: - “en todos los triángulos siempre hay un ángulo de 90”. Ante esto, los demás estudiantes, entusiasmados, confirman en coro lo mencionado por Óscar y Michell muestra su trabajo (Figura 4).

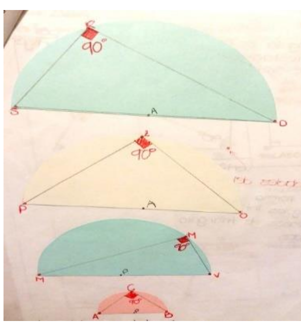


Figura 4. Exploración de Michell

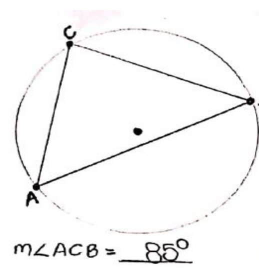


Figura 5. Exploración de Sebastián

Aunque Óscar ha formulado la propiedad que debían descubrir, la profesora decide proponer la Tarea 8. Para esto, entrega una hoja en la que se representan varias semicircunferencias, cada una con un triángulo inscrito en ella. En unos casos, un lado del triángulo es un diámetro y en otros casos no. Luego, les pide a los estudiantes identificar en qué casos el triángulo es rectángulo. Inicialmente, los niños intentan adivinar la medida de los ángulos, la profesora al darse cuenta de esto les dice: - “Nosotros ya encontramos una propiedad, ¿alguien la puede recordar?”. A esto, Óscar dice: - “Si tenemos una circunferencia o una semicircunferencia, el diámetro y un punto en la circunferencia, se forma un triángulo y el ángulo de arriba siempre va a medir 90 grados… O sea, el triángulo es rectángulo”. Una vez finalizada la narración por parte de Óscar la profesora les indica que examinen las representaciones que se les ha entregado, teniendo en cuenta lo dicho por Óscar. Después, Sebastián interviene diciendo: -“En el primer caso (Figura 5), ningún lado del triángulo pasa por el centro de la circunferencia, entonces, como no hay diámetro, porque no pasa por el centro de la circunferencia, pues ese ángulo ACB no va a medir 90°”. Por tanto, la profesora interroga: “¿Cómo sabes eso Sebastián?” y Sebastián responde: “Eso fue lo que encontramos y pues teníamos que el diámetro pasa por el centro siempre y pues si pasa por el centro, entonces el ángulo de arriba es de 90. Este me midió 85°”.

Después de examinar otros ejemplos y no ejemplos de la situación, la profesora les pide formular oralmente la propiedad encontrada:

Óscar:	Las circunferencias en donde el lado del triángulo formado pasa por el centro y el tipo de triángulo que se forma es… mmm… rectángulo. Porque cuando se tiene que un lado del triángulo es el mismo diámetro, pues un ángulo siempre es de noventa.
Profesora:	Vamos a organizar las ideas de Óscar. ¿Qué debemos decir primero?
Mariana:	Pues profe, yo creo que primero va cómo se construye la figura.
Valeri:	¡Ah! Sí. Como si fuéramos a hacer una definición.
Profesora:	Sí, Valeri. Así tenemos que hacerlo. ¿Entonces qué ponemos primero?
Michell:	La circunferencia, los extremos del diámetro y el diámetro que obviamente pasa por el centro de la circunferencia.
Profesora:	Sí, pero al decir que es el diámetro no es necesario mencionar que este pasa por el centro de la circunferencia, esto ya lo tenemos, por definición.
Valeri:	Entonces sería algo así: En la circunferencia, tomando los puntos extremos del diámetro y otro punto, se forma un triángulo rectángulo.
Óscar:	Profe, yo lo diría así: En una circunferencia, formando un triángulo con vértice en los extremos del diámetro y otro punto en la circunferencia, el triángulo que se forma es un triángulo rectángulo.
Profesora:	Bueno, ahora vamos a escribir la conjetura.

Paso 5: Escritura de una conjetura

Para escribir la conjetura la profesora entrega una hoja a cada estudiante. En esta deben escribir, espontáneamente, la propiedad encontrada según la propiedad enunciada oralmente. Luego, valiéndose de la Tarea 11, les dice: “Recuerden que para escribir la conjetura debemos hacerlo de la forma: *dado*_______ *entonces*_______”. Además, les pide reformular las expresiones y apoya a cada estudiante en la escritura. A continuación, en el Cuadro 6 presentamos tres ejemplos de escritura inicial y la producción final.

Un triangulo que esta en la semicircunferencia con un lado que es el diametro y un punto en la semicircunferencia el triangulo que se forma es rectangulo	dado un triangulo con vertices en los extremos del diametro y otro punto de la semicircunferencia un lado como el diametro entonces siempre el triangulo formado es rectangulo
Los triangulos cuya vertices son la extremas del diametro y otro Punto de siempre Forman un angulo recto	Dado un triangulo cuyos vertices son los extremos del diametro y otro punto de la semicircunferencia siempre, el triangulo es rectangulo
Un triangulo ABC con el vertice en los extremos AB que es el el diametro y otro punto de la circunferencia, siempre es triangulo ABC recto con el angulo $\angle ACB = 90°$	Dado $\triangle ABC$ cuyos vertices son los extremos del diametro $\overline{AB}$ otro punto C en la circunferencia, entonces siempre $\triangle ABC$ es rectangulo con $m\angle ACB = 90°$
Propuesta de escritura inicial de la conjetura de Valeri, Sebastián y Óscar	Propuesta de escritura de la conjetura, usando el formato condicional, de Valeri, Sebastián y Óscar.

Cuadro 6. Formulación de conjeturas (Valeri, Sebastián y Óscar)

Paso 6: Justificación empírica de la conjetura

Finalizada la tarea 11 la profesora les pide verificar que la conjetura se cumple para cualquier triángulo que se construya según las condiciones dadas. En consecuencia, los niños hacen representaciones auxiliares y nuevas representaciones con las mismas características, las cuales les permiten afirmar que la conjetura siempre se cumple. Luego, la profesora a cada estudiante le entrega una hoja en la cual hay un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y les pide que sin tomar medidas de los ángulos y los lados aseveren que la figura mostrada es un rectángulo. Después de pensar y analizar por un momento, tiene lugar la siguiente conversación:

Óscar:	Pues tracemos estos segmentos (señala las diagonales).
Profesora:	¿Para qué?
Ana:	Si hacemos esos segmentos que dice Óscar son las diagonales.
Mariana:	¡Ay! Sí. Mira si yo hago un segmento, como si fuera la diagonal… pasa por el centro de la circunferencia, entonces es un diámetro.
Profesora:	Y eso ¿para qué nos sirve?
Mariana:	Profe, ya teniendo el diámetro pues tenemos lo que hemos venido haciendo todas estas clases. Es que tenemos el diámetro y un punto en la circunferencia y de ahí se forma un triángulo con un ángulo recto.
Óscar:	Sí, siempre pasa eso.

Cabe resaltar que la verificación se hubiera logrado de manera eficiente si los estudiantes hubiesen afirmado que el cuadrilátero era un rectángulo porque sus diagonales son congruentes y se bisecan (por ser diámetros de la circunferencia). Inicialmente esta fue la expectativa de la profesora, ya que en clases anteriores de esta manera se había abordado la definición de rectángulo. Además, una vez garantizado que el cuadrilátero es rectángulo, esta era razón suficiente para justificar que los triángulos formados por las diagonales eran rectángulos. Aunque la conversación no se dio en estos términos, los niños se aproximaron bastante.

Paso 7: Generalización de la conjetura

Al concluir la tarea, la profesora pide a los estudiantes observar una representación hecha en GeoGebra en donde es posible apreciar la verificación de la propiedad a través del arrastre. Luego, la profesora les pide enunciar lo que observan, debido a esto, Mariana afirma: "Cuando se tiene una circunferencia, un diámetro y otro punto en la circunferencia, siempre… siempre, el triángulo que se forma es rectángulo", los demás estudiantes apoyan tal afirmación y se muestran contentos con el ejercicio, aunque la tarea no estaba incluida en la THA se consideró importante su asignación ya que permitía conseguir la meta propuesta. Es así como concluimos nuestro trabajo referente a la aplicación de la THA que promueve la generalización de una propiedad geométrica.

Discusión y conclusiones

Al cotejar la TA con la THA, se observa que la profesora Angélica siguió la siguiente ruta: Interpretación del enunciado del problema → Tarea 1 → Tarea 2 → Tarea 4 → Tarea 6 → Tarea 7→ Tarea 8 → Tarea 11 → Tarea no contemplada en la trayectoria. No propuso la Tarea 3 porque no se dio el caso en el que algún estudiante representara un solo triángulo. Esto pudo deberse al trabajo de interpretación del enunciado del problema. No propuso la Tarea 5 porque los estudiantes fueron creativos a la hora de proponer cómo explorar la representación. No propuso las Tarea 9 y 10 porque la Tarea 8, con el examen de ejemplos y no ejemplos de triángulos que cumplían la condición dio la pauta para la formulación oral de la conjetura. Además, es de destacar el papel que jugó Óscar en la formulación. A partir de la Tarea 11, la TA se distancia de la THA, sin embargo, se considera que los siguientes sucesos pueden ser el motivo de tal distanciamiento: La profesora implementa dos tareas, la primera un tanto diferente a lo previsto en la Tarea 13, proporcionando a los estudiantes un cuadrilátero inscrito y pidiéndoles justificar por qué era un rectángulo. Quizás presupuso que era más fácil enfrentar la verificación de esa manera y que los niños recordarían la definición de rectángulo basada en las diagonales. No implementó las Tareas 12 y 14 pues los estudiantes ejecutaron verificaciones en casos extremos espontáneamente. Y, en lugar de pedir generalizar la conjetura (Tarea 15) decidió mostrarles una representación en GeoGebra en donde se hace ostensiva la propiedad, para infinitos triángulos, usando el arrastre.

Aunque la THA y la TA se distancian un poco, es evidente que la THA fue fundamental en la gestión de la profesora con los estudiantes. Le sirvió de guía para atender necesidades de los estudiantes, según la producción que iban logrando. En ese sentido, consideramos que es una herramienta poderosa para la gestión de la enseñanza, cuando esta busca estar más centrada en orientar el trabajo de los estudiantes, que en informar. Aunque da pautas para prever y atender situaciones de la actividad matemática de los estudiantes, si se asume de manera flexible, permite al profesor construir su propio camino, atento a los requerimientos de los niños.Acerca del proceso de generalización, consideramos que esta experiencia puede servir de ejemplo sobre cómo emprender el reto de trabajar la generalización geométrica en edades tempranas. Experiencias como la descrita son muy potentes desde el punto de vista de la construcción de significado de la propiedad descubierta y permiten hacer realidad planteamientos sobre la necesidad de crear ambientes de aprendizaje, donde los estudiantes sean los constructores del saber.

Referencias

Bocanegra, I. y Devia, M. (2019). *Construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje en torno al proceso de generalización geométrica* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/11913

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias, 26*(3), 431–444. Recuperado de https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132198/297704

Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra-España. Recuperado de https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/458629/acb1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Clements, D., y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81–89. Recuperado de https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Clements, D., y Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach*. New York, NY: Routledge.

Gómez, P., y Lupiáñez, J.L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98. Recuperado de https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6214/5529

Ivars, P., Buforn, A., y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae*,*18*(4), Edição Especial,48-66. Recuperado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2712/2064

León, O. L., Díaz Celis, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 9-28. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/378502

Martínez, F. J., Llinares, S., y Torregrosa, G. (2015). Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos. *Innovación docente*, 585-600. En Tortosa, M., Álvarez, J., y Pellin, N (Coordinadores), *XIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Nuevas estrategias organizativas y metodológicas en la formación universitaria para responder a la necesidad de adaptación y cambio*. Universidad de Alicante, Instituto de Ciencias de la Educación (ICE). España. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=573018

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Colombia.

Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mora, L. (2012). Álgebra en los primeros niveles escolares (documento no publicado). Obtenido de la autora en comunicación personal.

Orts, A., Llinares, S., y Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 36*(3), 121-140. Recuperado de https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/v36-n3-orts-llinares-boigues

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas (XIX Reimp. 1995) [título original: ¿How To Solve It?]*. México: Trillas. Recuperado de https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Rodríguez, L. F. (2016). *Trayectoria hipotética de aprendizaje: aprendizaje de las operaciones suma y resta en aulas inclusivas con incorporación tecnológica* (Trabajo de pregrado). Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/4163

Sicuamia, G. E. (2017). *Trayectorias de Aprendizaje en la orientación espacial para la formación de profesores de básica primaria en ejercicio* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/8882

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. Recuperado de https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M., y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104. Recuperado de https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 390–416. Recuperado de https://doi.org/10.2307/749707

Tzur, R. (1999). An integrated research on children's construction of meaningful, symbolic, partitioning- related conceptions, and the teacher's role in fostering that learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 123–147. Recuperado de https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00025-5

Tzur, R., y Simon, M. (1999). Postulating relations between stages of knowing and types of tasks in mathematics teaching: A constructivist perspective, 2, 805-810. En Hitt, F y Santos, M (Editores), *Proceedings of the twentiethfirst Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science,* *Mathematics, and Environmental Education.* Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, Morelos, México. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED433998.pdf

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de https://doi.org/10.14483/9789588972244