【学位論文審査の要旨】

1　研究の目的

大塚隆史氏の研究の目的はシェルピンスキー・ガスケット上の自己回避ウォークの統一モデルの構成である。グラフ（例えば Z^2で距離 1 の点同士を辺で結んだもの）上の自己回避ウォークとは一度通った点には戻れないランダム・ウォークである。辺で直接結ばれた点のどれかに等確率で移っていく単純ランダム・ウォークはマルコフ性（次に行く点は今いる場所だけで決まる）を持つが、自己回避ウォークは過去の履歴に依存する非マルコフ過程である。このため、マルコフ過程と比べて扱いが格段に難しい。非マルコフ過程に関しては Z^2,　Z^3上でさえ解かれていない基本的な問題が多くある。自己回避的という制約は低次元の方が強く効くからである。フラクタルグラフ上の非マルコフ過程は、低次元でありながら自己相似性をうまく利用することにより厳密に解析できる場合がある興味深い対象である。同じ点を 2 度と通らない自己回避ウォークといっても様々なモデルが考えられる。これらをすべて含むばかりでなく、連続極限として今まで知られていなかった新しい確率過程も含む統一モデルを構成する。

2　研究の方法と結果

大塚隆史氏が主著者である大塚・大胡・服部の共著論文では、フラクタルの一例であるシェルピンスキー・ガスケット上でパラメータをひとつ含む自己反発ウォーク（一度通ったところに戻りにくい）からループを消して得られるループ・イレーズド・自己反発ウォークを構成した。このウォークもループがないので自己回避的である。グラフの各辺の長さと隣の点に移るまでの時間間隔とを適切な関係を持たせながら 0 に近づける（連続極限またはスケール極限）とき、連続な確率過程に収束することをまず証明し、連続極限の確率過程の見本関数の性質（ハウスドルフ次元、短時間挙動の指数）を調べた。大塚隆史氏は、連続極限の存在証明と見本関数の性質を導くという主要な部分を担当した。共同研究者の大胡氏は具体的な確率の値の計算を行う上でうまい方法を見出した。

シェルピンスキー・ガスケット上の自己回避ウォークにはループ・イレーズド・ランダムウォーク、ループ・イレーズド・自己反発ウォーク、ブランチング・モデルなどいくつかのモデルがあるが、大塚隆史氏は、連続極限の存在の証明、見本関数の性質の導出の方法に共通点があることに気づいた。単著の論文では、複数のパラメータを入れてそれを調節することにより、これまで調べられていた様々な自己回避ウォークが再現できる統一モデルを構成し、その連続極限、見本関数の性質を調べた。シェルピンスキー・ガスケットは 2 次元平面内にあるシンプルなフラクタルで、これまで自己回避ウォークの連続極限は、自己回避的かつ非自明な連続過程、空間全体を埋め尽くすシェルピンスキー・ガスケット上の「ペアノ曲線」、等速直線運動のいずれかになると思われていた。3 次元のシェルピン

スキー・ガスケット上では、無限回自己交差を起こすにもかかわらずガスケット全体を埋め尽くさない極限過程があることが知られていたが、次元が高いことによるもので、2次元のガスケットではこのような極限過程は作れないだろうと予想されていた。大塚氏は丹念に調べることにより、可算無限回自己交差を起こすにもかかわらずガスケット全体を埋め尽くさない極限過程が作れる十分条件を出してこの分野の専門家を驚かせた。

３　審査の結果

　本論文は統一モデルに焦点を当て、先に研究したループ・イレーズド自己反発ウォークはその一例として書かれている。後者の部分はすでに一流誌 Discrete and Continuous Dynamical Systems に 2019 年に掲載されている。統一モデルは投稿中である。

　大塚氏は、日本数学会での講演、海外の講演 2 件を含む 7 回の講演を上記の 2 編の論文の内容に関して行った。特に、可算無限回自己交差を起こすにもかかわらずガスケット全体を埋め尽くさない極限過程の構成は専門家からも高い評価を得ている。

これらのことを鑑み大塚氏は学位を得るに値する人物であり、本論文は学位論文として十分な内容を含むと判断できる。

４　最終試験の結果

本学の学位規定に従い、最終試験を行った。公開で論文内容の発表を行い、数理情報科学専攻教員および外部審査委員による質疑応答を行った。その結果、問題なく承認され、合格と判定した。