Journal Afrika Statistika

ISSN 0852-0305

Journal Afrika Statistika
Vol. 5, N°3, 2010, page 210–218.

Modèles de Risque et Files d'Attente: La méthode de stabilité forte

Djamil Aïssani et Zina Benouaret

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LMOS, Université de Béjaïa, Algérie

Received 30 June 2010; Accepted 29 September 2010

Abstract. One of the problems which appear during comprehension and working of the complex systems is the analysis of the stability of their functioning. These last years, the specialists became aware of the importance of the stability analysis in actuarial sciences and in financial mathematics. In this work, we are interested in the application of the strong stability method in queueing systems and in risk models. We clarify the conditions of equivalence and translation of results between models of these two theories.

Résumé. L'un des problèmes qui apparaissent lors de la conception et de l'exploitation des systèmes complexes est l'analyse de la stabilité de leur fonctionnement. Ces dernières années, les spécialistes ont pris conscience de l'importance de l'analyse de stabilité dans les problèmes en actuariat et en mathématiques financières. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'application de la méthode de stabilité forte dans les files d'attente et les modèles de risque. Nous clarifions ainsi les conditions d'équivalence et de translation de résultats entre la théorie de risque et celle des files d'attente.

Key words: Risk models, Ruin probabilities, Queueing systems, Interaction risk and queueing theories, Strong stability, Continuity estimates.
AMS 2000 Mathematics Subject Classification : 34K20, 60K35, 91B30.

1. Introduction

La théorie de la ruine a pour objectif la modélisation de l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique et d'évaluer sa probabilité de ruine. Depuis les travaux classiques de Lundberg [19] et Cramér [9, 10], plusieurs chercheurs ont fixé leurs attention sur l'évaluation de cette mesure de risque.

Une forte interaction existe entre la théorie de risque et celle des files d'attente. Ce parallélisme entre les deux théories a été observé et analysé par Prabhu [22], Seal [27] et plus récemment par Jewell [13] et Janssen [12]. Malheureusement, sa contribution dans chaque théorie n'est pa suffisamment claire. Dans l'article de Janssen "On the interaction between risk and queueing theory", des relations précises sur les contributions et les restrictions de cette interaction sont données.

Une analyse de stabilité d'un système permet d'établir à quel point le processus de fonctionnement réel du système correspond à celui étudié dans les calculs. A la différence des autres approches, la méthode de stabilité forte, élaborée au début des années 1980 par Kartashov et Aissani, suppose que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures estimations pour les distributions stationnaires perturbées. Cette méthode est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov.

En actuariat, la question de stabilité apparaît naturellement lorsque les paramètres dans les modèles de risque ne peuvent être estimés qu'avec incertitude. Or, dans la plupart des cas, il n'existe pas de formules explicites pour le

Djamil Aïssani: djamil_aissani@hotmail.com
Zina Benouaret: benouaret_z@yahoo.fr

calcul des probabilités de ruine. D'où l'intérêt d'obtenir des bornes de stabilité explicites pour ces probabilités dans différents modèles de risque. Dans ces modèles, Le problème de stabilité a été développé par Beirland et Rachev [5]. Récemment, Kalashnikov [16] dans son article paru en 2000, a présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine en utilisant l'approche de stabilité forte et une autre approche basée sur la théorie des processus régénératifs. Par la suite, plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens (cf. Russaityle [26] et Enikeeva et al. [11]). Dans le cas d'un modèle de risque multi-branches, nous avons l'application de la méthode de stabilité forte sur le modèle de risque classique à deux dimensions, réalisée par Benouaret et Aïssani [8].

L'objectif de cet article est de situer la place de l'approche de stabilité forte au sein des tendances actuelles de recherche dans le domaine de la stabilité des modèles stochastiques. En utilisant l'interaction entre les théories de risque et systèmes d'attente et les résultats obtenus par l'application de la méthode de stabilité forte dans les deux théories, nous discuterons des éventuelles perspectives de recherche qui peuvent nous permettre de passer d'une théorie à une autre. Pour ce faire, nous présentons d'abord les modèles de risque et le problème d'évaluation des probabilités de ruine. Puis, nous précisons l'intérêt pratique des problèmes de stabilité et nous rappelons les fondements théoriques de l'approche de stabilité forte et son application dans les systèmes de files d'attente. Par la suite, nous détaillons le parallélisme entre la théorie de risque et celle des files d'attente, dans le but de clarifier les conditions de translation de résultats entre les deux théories.

2. Probabilités de ruine et modèles de risque en assurance

Le premier but de la théorie de la ruine a donc été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie d'assurance par un processus stochastique, d'évaluer sa probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario introduisant un échec se réalise, (cf. Asmussen [4]).

Depuis les travaux classiques de Lundberg [19] et Cramér [9, 10], plusieurs chercheurs ont fixé leurs attention sur l'évaluation des probabilités de ruine qui ne possèdent pas, en général, des relations analytiques exploitables dans la pratique.

2.1. Modèle de risque

Le résultat d'une compagnie d'assurance à la fin de chaque exercice dépend de la réalisation de nombreuses activités. Nous allons considérer ici l'activité provenant du côté "purement assurance".

Définition 1. Nous appelons processus des réserves, le processus défini par

$$X(t) = u + c\,t - Z(t), \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

où $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, avec $\{Z_i,\ i \geq 1\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, représentant les montants des réclamations de fonction de distribution F et de moyenne μ, $\{N(t),\ t \geq 0\}$ étant un processus de Poisson de paramètre λ représentant le nombre de réclamations, c le taux de prime constant par unité de temps et u le surplus initial de la compagnie d'assurance.

Définition 2. Probabilité de ruine en temps fini et en temps infini

– Probabilité de ruine en temps fini t, $\forall\ u \geq 0$, $\Psi(u,t) = \mathbb{P}(\exists\ s \in [0,t]/\ X(s) < 0)$,
– En temps infini, $\forall\ u \geq 0$, $\Psi(u,\infty) = \mathbb{P}(\exists\ s \geq 0/\ X(s) < 0)$.

Généralement, nous supposons que le chargement de sécurité $\theta = c - \lambda\mu$ est strictement positif pour que l'activité soit rentable.
Dans le but d'estimer la probabilité de ruine, parmi les différentes solutions proposées, nous avons les approximations des chaînes de Markov.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approche de stabilité forte dans les modèles de risque, (cf. Kartashov [17] et Kalashnikov [16]).

3. Stabilité forte dans les systèmes de files d'attente

A la base de la méthode de stabilité forte, il y a les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov, par rapport à des normes données dans les espaces de mesure et de noyaux de transition (cf. Aïssani et Kartashov [3]), Kartashov [17], Rabta and Aïssani [23] Mouhoubi and Aïssani [20].

3.1. ***Analyse générale***

Dans un premier temps, nous allons discuté un certain nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité et la stabilité, ainsi que l'équivalence de ces concepts (cf. Aïssani et Kartashov [3]).

Ces concepts avaient généralisé les notions de base des chaînes à noyau de transition quasi-compact (cf. Neveu [21, Chap. 5], Revuz [24, Chap. 6], Aïssani et Kartashov [3]) et des chaînes récurrentes fortement positives (cf. Koroliok et Turbin [18] et Aïssani et Kartashov [3]). En effet, soit $X = (X_t, t \geq 0)$, une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace mesurable (E, ε), donnée par un noyeau de transition régulier $P(x, A)$, où $x \in E, \quad A \in \varepsilon$. Supposons que la σ - algèbre ε soit dénombrablement engendrée et que la chaîne X admette une probabilité invariante unique π.

Notons $m\varepsilon$ $(m\varepsilon^+)$ l'espace des mesures finies (non négatives) sur ε, $\quad f\varepsilon$ $(f\varepsilon^+)$ l'espace des fonctions mesurables (non négatives) sur E. Le noyau de transition donne une application linéaire $Q \; : \; m\varepsilon \longrightarrow m\varepsilon$, dont l'action sur la mesure $\mu \in m\varepsilon$ est égale à

$$\mu Q(\cdot) = \int \mu(dx) Q(x, \cdot).$$

Pour $\mu \in m\varepsilon, \; f \in f\varepsilon$ le symbole μf désignera l'intégrale $\int \mu(dx) f(x)$, $\quad f \circ \mu$ le noyau de transition de la forme $f(x)\mu(A), \; x \in E, A \in \varepsilon$. Le produit PQ des noyaux de transition P et Q est le noyau $\int P(\cdot, dy) Q(y, \cdot)$.
Supposons que l'espace $m\varepsilon$ est muni d'une certaine norme $\| \cdot \|$, qui met en évidence l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in m\varepsilon : \|\mu\| < \infty\}$

A chaque noyau de transition Q sur (E, ε), nous mettons en correspondance l'opérateur linéaire $Q : \mu \to \mu Q$ sur $\mathcal{M}$, de norme induite définie par:

$$\|Q\| = sup(\|\mu Q\| \; , \; \|\mu\| \leq 1)$$

pour cela, le noyau stochastique P correspond à un opérateur linéaire positif P sur le cône $\mathcal{M}^+ = m\varepsilon^+ \cap \mathcal{M}$. Supposons que la norme $\| \cdot \|$ est compatible avec l'ordre structurel sur $\mathcal{M}$ et la topologie uniforme dans $m\varepsilon$:

a) $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\|$ pour $\mu_i \in \mathcal{M}^+$
b) $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|$ pour $\mu_i \in \mathcal{M}^+$ et $\mu_1 \perp \mu_2$
c) $|\mu| \; (E) \; \leq k \; \|\mu\|$ pour $\mu \in \mathcal{M}$, où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ et k une certaine constante.

Les conditions a), b), c) sont, par exemple vérifiées pour des normes de la forme

$$\|\mu\|_v = \int v(x)|\mu|(dx),$$

où v est une fonction mesurable, différente de zéro (pas nécessairement bornée).
Supposons également que l'opérateur linéaire $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est borné:

d) $\|P\| < \infty$. Notons $\Pi = \mathbf{1} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P, où $\mathbf{1} \in f\varepsilon$ est la fonction identiquement égale à l'unité, I l'opérateur identité dans $\mathcal{M}$ et considérons la moyenne de Césaro $P^{(t)} = t^{-1} \sum_{s=0}^{s=t-1} P^s$

Définition 3. La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si elle admet une mesure invariante probabiliste unique π et si $\|P^{(t)} - \Pi\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Pour le cas où $\|\mu\| = |\mu|(E)$, l'ergodicité uniforme des chaînes ont été étudiées Neveu (1964) et Revuz (1975), (chaînes à noyau de transition quasicompact) et Koroliok et Turbin (1976) (chaînes récurrentes fortement positives), (cf. Aïssani et Kartashov [3]).

Définition 4. La chaîne X est fortement stable par rapport à la norme $\| \cdot \|$ si chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \varepsilon\}$ admet une probabilité invariante unique ν et $\|\nu - \pi\| \longrightarrow 0$ quand $\|Q - P\| \longrightarrow 0$.

Théorème 1. *La stabilité forte de la chaîne de Markov X par rapport à la norme $\| \cdot \|$ est équivalente à son ergodicité uniforme dans cette même norme. c'est pourquoi pour chaque noyau Q de mesure invariante ν, $\quad \|\nu - \pi\| = 0 \; (\|Q - P\|)$ et $\sup_t \|Q^t - P^t\| = 0(\|Q - P\|)$ pour $\|Q - P\| \longrightarrow 0$.*

La propriété d'ergodicité uniforme de la chaîne X par rapport à la norme $\| \cdot \|$ se conserve pour de petites perturbations du noyau P.

Pour démontrer l'ergodicité uniforme et l'estimation de la vitesse de convergence dans le théorème 1, on peut utiliser le critère de stabilité forte suivant:

Théorème 2. *Une chaîne de Markov X, récurrente au sens de Harris est uniformément ergodique par rapport à la norme* $\|\cdot\|$ *et apériodique si et seulement si, pour certains* $n \geq 1$, $\alpha \in m\varepsilon^{+}$, $h \in f\varepsilon^{+}$ *sont vérifiées les conditions:*

a) $\pi h > 0, \quad \alpha 1 > 0, \quad \alpha h > 0$
b) Le noyau $T = P^{n} - h \circ \alpha$ *est non négatif*
c) $\|T^{m}\| < 1$ *pour un certain* $m \geq 1$

De plus, la condition c) découle de l'ergodicité uniforme et de l'apériodicité de X pour tout n, α, h vérifiant a), b).

Depuis l'article de Rossberg [25], les auteurs ont formulé différentes positions du problème et proposé différentes approches (cf. Zolotarev [28], Borovkov [7]), . . . A la différence de ces approches, nous supposons que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleurs approximations pour les distributions stationnaires perturbées.

La méthode a été largement appliquée à des classes spécifiques de systèmes de files d'attente : systèmes avec rappels, systèmes avec priorité, systèmes non fiables Abbas et Aïssani [1], systèmes avec vacances, systèmes avec arrivées par groupes Boukir et al. [8], systèmes avec impatience, systèmes avec arrivées négatives Abbas et Aïssani [2], . . . La perturbation a concerné l'intensité de service, le paramètre de rappels et le taux de vacance.

4. Interaction entre théorie de risque et files d'attente

Une forte interaction existe entre la théorie de risque et celle des files d'attente mais sa contribution dans chaque théorie n'est pas suffisamment claire. Ce parallélisme entre les deux théories a été observé et montrée par Prabhu [22], Seal [27] et plus récemment par Jewell [13]. Des relations précises sur les contributions et les restrictions de cette interaction sont données dans Janssen [13].

Dans cette section, nous clarifions les conditions d'équivalence et de translation de résultats entre un modèle de risque en théorie de ruine et un système de files d'attente.

4.1. ***Le système d'attente GI/G/1***

Nous entamons notre étude par une description du système d'attente $GI/G/1$. Ce modèle peut être entièrement décrit par deux processus de renouvellement définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}, P)$:

$$\{A_n, \quad n \geq 1\}, \qquad \{B_n, \quad n \geq 1\} \tag{2}$$

Le premier est le processus des inter-arrivées et le deuxième est le processus des durées de service, caractérisés respectivement par les fonctions de distribution $A(.)$ et $B(.)$ avec:

$$A(0) < 1 \quad \text{et} \quad B(0) < 1.$$

Soit B_n la durée de service du $n^{\text{ème}}$ client $(n \geq 1)$ et A_n la durée qui sépare la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ arrivée $(n \geq 1)$. Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ le processus de comptage relatif au processus $\{A_n\}_n$.

Nous associons pour chaque modèle de files d'attente les processus stochastiques suivants:

1. Le processus $\{W_n, n \geq 0\}$ ou W_n est le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ client, qui est le temps d'attente dans le système avant le début de son service.
2. Le processus $\{W(t), t \geq 0\}$ ou $W(t)$ est le temps d'attente du dernier client entré dans le système avant ou à l'instant t, alors $W(t) = W_{N(t)}$.
3. Le processus $\{\eta(t), t \geq 0\}$ ou $\eta(t)$ est le temps d'attente virtuel à l'instant t, i.e. le temps d'attente qu'un client souhaite attendre s'il arrive à l'instant t.
   Autrement dit, $W(t)$ est appelé le temps d'attente actuel à l'instant t et W_n le temps d'attente actuel du $n^{\text{ème}}$ client. Si
   $$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} A_i, \qquad n \geq 1,$$
   nous avons les relations suivantes entre les trois types de temps d'attente,
   $$W_n = \eta(T_n - 0),$$

$$W(t) = \eta(T_{N(t)} - 0),$$
$$\eta(t) = \sup\{0, W_{N(t)} + B_{N(t)} - (t - T_{N(t)})\}.$$

4. Supposons maintenant que $W_0 = u$ (le temps d'attente du premier client avant le début de son service).
5. L'intensité du trafic φ est définie comme le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ avec $\alpha = \mathbb{E}(A_n)$ et $\beta = \mathbb{E}(B_n)$ supposées finies.

4.2. ***Théorie de risque***

En utilisant les mêmes notations que le paragraphe précédent, nous avons les interprétations suivantes pour la théorie de risque:

1. $\{A_n, n \geq 1\}$ est le processus des inter-arrivées successives des réclamations.
2. $\{B_n, n \geq 1\}$ est le processus des montants successifs des réclamations.
   Supposons que l'instant initial coïncide avec l'arrivée d'une réclamation et que la réserve initiale de la compagnie d'assurance après le payement de la première réclamation est égale à $u, (u \geq 0)$.
3. Nous supposons que les revenus de la compagnie d'assurance ont un taux constant c $(c > 0)$. Sans perdre de généralité, nous supposons que $c = 1$.

Associons au modèle de risque considéré les processus stochastiques suivants:

$$\{X_n, \quad n \geq 0\}, avec \quad X_n = B_n - cA_n, \quad n \geq 0 \tag{3}$$

$$\{S_n, \quad n \geq 0\}, avec \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 0, \quad S_0 = 0 \tag{4}$$

$$\{T_n, \quad n \geq 0\}, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad n > 0, \quad T_0 = 0 \tag{5}$$

$$\{M_n, n \geq 0\}, avec \quad M_n = \sup\{S_0, S_1, ..., S_n\} \tag{6}$$

Nous considérons aussi le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ où $N(t)$ est le nombre total de réclamations dans l'intervalle $[0, t]$ et le processus $\{X(t), t > 0\}$, ou $X(t)$ représente le montant cumulé des réclamations sur l'intervalle $[0, t]$. $\{Z(t), t > 0\}$, ou $Z(t)$ représente la fortune de l'assureur à l'instant t, avec

$$Z(t) = u + ct - X(t) \tag{7}$$

En utilisant le processus des réserves $\{Z(t), t > 0\}$, on peut définir deux types de probabilités de non-ruine; en temps fini et en temps infini:

$$\Phi(u, t) = P(Z(t') \geq 0, t' \in [0, t]/Z(0) = u), \quad t > 0, \quad u \geq 0 \tag{8}$$

$$\Phi(u) = P(Z(t') \geq 0, \forall\ t' \geq 0/Z(0) = u), \quad u \geq 0 \tag{9}$$

Par conséquent,

$$\Phi(u) = \lim_{t \to \infty} \Phi(u, t).$$

Ce résultat est prouvé par Cramér [10].

4.3. ***Parallélisme théorie de risque- théorie de files d'attente***

La relation entre la trajectoire du processus de temps d'attente virtuel $\{\eta(t), t \geq 0\}$ et celle du processus des réserves $\{Z(t), \quad t \geq 0\}$ dans la théorie de risque avec $c = 1$, est intuitivement claire si nous renversons le temps dans la Figure 1. sur $[0, T]$. Nous obtenons alors la Figure 2. qui est la trajectoire de $Z(t)$ sur $[0, T]$. Les trajectoires ont la même structure d'un point de vue géométrique. Le problème fondamental est de montrer que cette technique conduit à une équivalence entre les deux modèles d'un point de vue probabiliste, (cf. Janssen [13]).

Nous avons donc les résultats suivants:

$$P(W_n \leq x) = P(M_n \leq x) \tag{10}$$

$$P(W_{N(t)} \leq x) = P(M_{N(t)} \leq x) \tag{11}$$

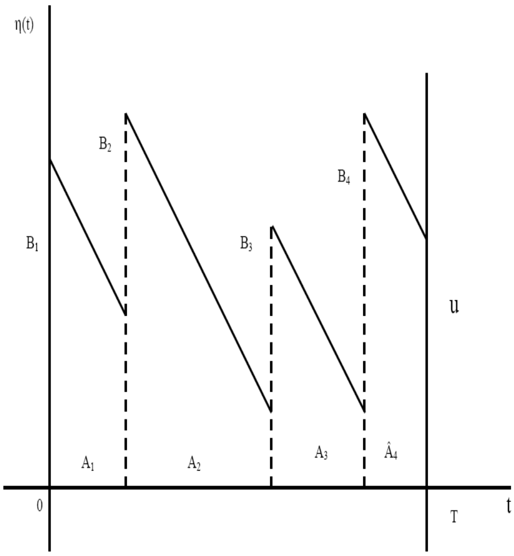

Figure 1. Trajectoire de $\eta(t)$

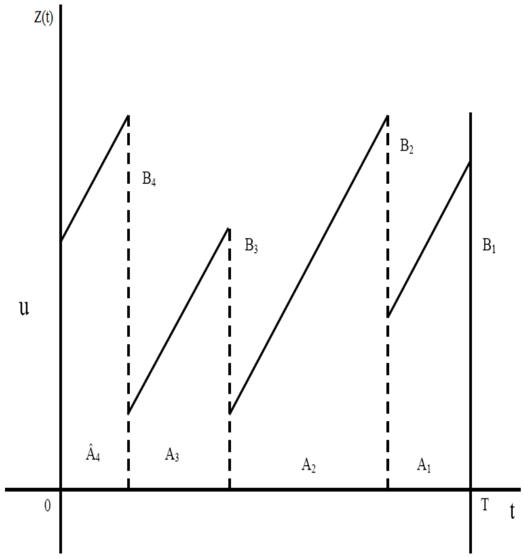

Figure 2: Trajectoire de $Z(t)$

Le second membre de l'équation (10) est la probabilité de non-ruine après la $n^{\text{ème}}$ réclamation, notée $\Phi_n(x)$ et le second membre de l'équation (11) est la probabilité de non-ruine sur $[0, T]$.

Donc

$$P(W_n \leq x) = \Phi_n(x) \tag{12}$$

$$P(W_{N(t)} \leq x) = \Phi(x, t) \tag{13}$$

*4.4. **Conséquences sur le comportement asymptotique***

De la section précédente, nous avons

$$\Phi(x, t) = P(W_{N(t)} \leq x) \tag{14}$$

et

$$\lim_t \Phi(x, t) = \lim_t P(W_{N(t)} \leq x) \tag{15}$$

De plus, on a

$$\lim_t P(W_{N(t)} \leq x) = \lim_n P(W_n \leq x),$$

On obtient

$$\Phi(x) = \lim_n P(W_n \leq x) \tag{16}$$

En résumé, pour le comportement asymptotique, le passage de la théorie des files d'attente vers la théorie de risque est le chemin le plus intéressant afin d'obtenir quelques formules explicites de la probabilité de non-ruine (i.e. calcul de la probabilité de non-ruine en temps infini). Dans le cas transitoire, on peut déduire des résultats sur la distribution du temps d'attente à partir des résultats connus dans la théorie de risque (cf. Janssen [13]).

5. Méthode de stabilité forte dans les modèles de risque

C'est l'académicien Kalashnikov dans son article "*The stability concept for stochastic risk models*" Kalashnikov [15], qui a initié l'étude de stabilté forte dans les modèles de risque.

5.1. ***Modèle de risque général***

Un modèle de risque représentant la réserve d'une compagnie d'assurance peut être décrit en fonction des deux processus suivants:

- $S = \{S(t),\ t \geq 0\}$: représente la richesse entre les primes et les réclamations.
- $R = \{R(t),\ t \geq 0\}$ est le processus des intérêts: Pour une entrée $a = (S, R)$ donnée, le modèle de risque est alors défini par son processus des réserves $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ tel que

$$X(t) = e^{R(t)} \left(u + \int_0^t e^{-R(x)}\ dS(x) \right), \quad t \geq 0 \tag{17}$$

  où u est le surplus initial, i.e: $X(0) = u$, avec la supposition que l'intégrale dans la formule (17) est bien définie. C'est une supposition qui reste vraie dans le cas où S et R sont des processus de Lévy indépendants. L'équation (17) représente donc la forme générale du processus des réserves.

Nous avons $S(t) = c\,t - \sum\limits_{i \leq N(t)} Z_i$ où $c > 0$ est le taux de primes constant, $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ et $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ est une séquence qui représente successivement les montants des réclamations indépendantes et identiquement distribuées; de fonction de distribution F et indépendante de $\{N(t),\ t \geq 0\}$.

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations $\{T_n\}_{n \geq 1}$, on considère alors la chaîne suivante:

$$X_{T_{n+1}} = \exp(R_{T_{n+1}} - R_{T_n}) \left(X_{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \exp(R_{T_n} - R_u)\ dS_u \right) \tag{18}$$

Supposons que les processus $\{R(t),\ t \geq 0\}$ et $\{S(t),\ t \geq 0\}$ sont indépendants, alors la séquence $\{X_{T_n}\}_{n \geq 0}$ forme une chaîne de Markov.

La probabilité de ruine exprimée en fonction de la chaîne $\{X_{T_n}\}_{n \geq 1}$ est donnée par la formule suivante:

$$\Psi(u) = \mathbb{P}(\inf_{n \geq 1} [X_{T_n}]\ /\ \ X_{T_n} < 0,\ X_0 = u) \tag{19}$$

et par

$$\Psi_n(u) = \mathbb{P}(\inf_{1 \leq k \leq n} [X_{T_k}]\ /\ \ X_{T_k} < 0,\ X_0 = u) \tag{20}$$

la probabilité de ruine en temps fini.

5.2. ***Processus inverse "reversed process"***

Le processus inverse associé au modèle de risque considéré dans cette approche est de la forme suivante

$$V_{n+1} = \xi_{n+1}(V_n + \eta_{n+1})_+, \quad V_0 = 0 \tag{21}$$

où les paires (ξ_i, η_i) sont indépendantes et identiquement distribuées, générées par le couple (ξ, η) qui est distribué comme suit:

$$\left(\exp(-R_\theta), Z - c \int_0^\theta \exp(R_\theta - R_t)\ dt \right) \tag{22}$$

Dans la formule (22), les variables aléatoires θ, Z et $\{R_u\}$ sont indépendantes où θ est de fonction de distribution exponentielle de paramètre λ, représentant les inter-arrivées des réclamations, et Z est un générateur des montants des réclamations de fonction de distribution F et de moyenne supposée finie.

En fonction de cette chaîne, les probabilités de ruine en temps fini et infini prennent les formes suivantes:

$$\Psi(u) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(V_n > u). \tag{23}$$

$$\Psi_n(u) = \mathbb{P}(V_n > u) \tag{24}$$

A partir des formules (23) et (24), nous nous intéressons donc aux distributions suivantes:

$$G_n(u) = \mathbb{P}(V_n \leq u), \quad n \geq 0 \tag{25}$$

et

$$G(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n \leq u). \tag{26}$$

Dans l'article de Kalashnikov [16], on trouve deux exemples d'application de la méthode de stabilité forte sur des modèles de risque avec et sans investissement. Par la suite, plusieurs autres chercheurs ont réussi de démontrer la stabilité forte dans différents types de modèles de risque et ils ont présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine, (cf. Benouaret et Aïssani [6], Enikeeva et al. [11] et Rusaityte [26]).

6. Conclusion

Les recherches réalisées ces dernières années concernant la méthode de stabilité forte ont permis d'enregistrer d'énormes progrès dans l'extension des fondements théoriques et dans l'applicabilité (du point de vue théorique) à plusieurs classes spécifiques de systèmes d'attente et autres types de modèles stochastiques, en particulier aux modèles de risque. L'intéraction entre la théorie de files d'attente et modèles de risque, détaillée dans ce travail, nous permet de clarifier les conditions d'équivalence et de translation de résultats entre les deux théories, obtenus en particulier par l'approche de stabilité forte.

Pour le comportement asymptotique, le passage de la théorie des files d'attente vers la théorie de risque est le chemin le plus intéressant afin d'obtenir quelques formules explicites de la probabilité de ruine en temps infini. Dans le cas transitoire, on peut déduire des résultats sur la distribution du temps d'attente à partir des résultats connus dans la théorie de risque (probabilités de ruine en temps fini).

References

[1] Abbas, K. and Aïssani, D., 2010. Structural perturbation analysis of a single server queue with breakdowns. International Journal SM (Stochastic Models), Vol. **26**(1). 78-97.

[2] Abbas, K., and Aïssani, D., 2010. Strong Stability of the Embedded Markov Chain in an GI/M/1 Queue with Negative Customers. *International Journal AMM (Applied Mathematical Modelling), Elsevier Ed.*, Vol. **34**(10), 2806-2812.

[3] Aïssani D. and Kartashov, N.V., 1983. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R.* Ser. A. **11**, 3-5.

[4] Asmussen, S., 2000. **Ruin Probabilities**. World Scientific, London.

[5] Beirlant, J. and Rachev, S.T., 1987. The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance Math. Econom.* **6**, 179-188.

[6] Benouaret, Z. and Aïssani, D., 2010. Strong Stability in a Two-Dimensional Classical Risk Model with Independent Claims. *Scand. Actuar. J.* **2**, 83-93.

[7] Borovkov, A.A., 1984. **Asymptotic Methods in Queueing Theory.** J. Wiley & Sons, Inc, New York.

[8] Boukir, L., Bouallouche-Medjkoune L. and Aïssani, D., 2010. Strong Stability of the Batch Arrival Queueing Systems. *Stoch. Anal. Appl.* Vol. **28**(1), 8-25.

[9] Cramér, H., 1930. On the Mathematical Theory of Risk. *Skandia Jubillee Volume, Stockholm.*

[10] Cramér, H., 1955. Collective Risk Theory. *Skandia Jubillee Volume, Stockholm.*

[11] Enikeeva, F., Kalashnikov, V., and Rusaityte, D., 2001. Continuity estimates for ruin probabilities. *Scand. Actuar. J.* **1**, 18-39.

[12] Janssen, J., 1982. On the interaction between risk and queueing theories. Paper presented at the first "Tagung fiber Risikotheorie" at the Mathematics Research Center, Oberwolfach, October 1980.

[13] Janssen, J., 1980. Some transient results on the M/SM/1 special semi-Markov model in risk and queueing theories. *ASTIN Bulletin.* **11**, 41-51.

[14] Jewell, S., 1980. Generalized models of the insurrace business *Transaction of the 21st Int. Congress of Actuaries, Zurich-Lauman.* Vol. **5**, 87-140.

[15] Kalashnikov, V., 1997. Continuity of Ruin Probabilities. Laboratory of Actuariat Mathematics, Univarsity of Copenhagen, Working Paper Nr 141.

[16] Kalashnikov, V., 2000. The stability concept for stochastic risk models. Working Paper Nr 166. Laboratory of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen.

[17] Kartashov, N.V., 1996. **Strong Stable Markov Chains**. VSP, Utrecht.

[18] Koroliok, V.S. and Turbin, A.F., 1976. Processus Semi-Markoviens et Applications. Nauka Dumva Ed., Kiev.

[19] Lundberg, F., 1932. Some supplementary researches on the collective risk theory. *Scandinavisk Aktuarietidskrift.* **15**, p. 137-158.

[20] Mouhoubi, Z., and Aïssani, D., 2010. New perturbation bounds for denumerable Markov chains, *Linear Algebra Appl.* Vol. **432**(7), 1627-1649.

[21] Neveu, J., 1964. **Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités.** Masson et Cie Ed., Paris.

[22] Prabhu, N.U., 1961. On the ruin problem of collective risk theory. *Ann. Math. Stat.*, **32**, 757-764.

[23] Rabta, B., and Aïssani, D., 2008. Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra Appl.*.**428**(8-9), 1921-1927.
[24] Revuz, D., 1975. Markov Chains. *Elseiver Ed., North Holland.*
[25] Rossberg, H.J., 1965. Über die stochastische Unabhängigkeit gewi;sser Funktionen von Ranggröben. *Math. Nachrichten* **28**, 157-167.
[26] Rusaityte, D., 2001. Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen. Working Paper Nr. 178.
[27] Seal, H.L., 1972. Risk theory and the single server queue. *Mitt. Verein. Schweiz. Versich. Math.* **72**, 171-178.
[28] Zolotarev, V.M., 1975. On the continuity of stochastic sequences generated by recurent processes. *Theory Probab. Appl.* **20**(4), 819-832.